

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОГИБА ПЛОСКОЙ ВНЕШНЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ ФЕРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙЕ. В. Комерзан¹, О. В. Свириденко²Национальный исследовательский университет «МЭИ»^{1,2}
Россия, г. Москва

¹Канд. техн. наук, доцент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: + 7 (495) 362-77-19, e-mail: KomerzanYV@mpei.ru

²Канд. техн. наук, доцент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: + 7 (495) 362-77-19, e-mail: SviridenkoOV@mpei.ru

Предлагается схема статически определимой фермы рамного типа с двумя неподвижными шарнирными опорами. Нижний пояс фермы приподнят в своей средней части. Методом индукции в системе компьютерной математики Maple для трех видов нагрузки находится зависимость прогиба середины пролета конструкции от величины нагрузки, размеров и числа панелей. Усилия в стержнях определяются методом вырезания узлов одновременно с поиском реакций опор. Для нахождения прогиба используется формула Максвелла - Мора. Находится распределение усилий по стержням конструкции и линейная асимптотика зависимости прогиба от числа панелей.

Ключевые слова: ферма, прогиб, Maple, индукция, число панелей.

Постановка задачи

Расчет строительных конструкций, как правило, производится численными методами в специализированных пакетах [1-5]. Аналитические методы расчета усилий, деформаций, прочности и собственных частот сооружений применяются для регулярных систем для тестирования численных решений и в тех случаях, когда аналитический расчет позволяет избежать сложных вычислений численными методами, требующих значительных вычислительных ресурсов и времени в конструкциях с большим числом элементов. Некоторые аналитические решения для плоских ферм методом индукции получены в [6-8] с применением системы компьютерной математики Maple. Нижние оценки первой частоты колебаний найдены для плоских [9-13] и пространственных ферм [14] регулярного типа. В [15-19] приведены формулы зависимости прогиба пространственных ферм от числа панелей, в [20-23] даны решения задачи о деформациях регулярных решетчатых ферм. Анализ регулярных стержневых систем с точки зрения возможности расширения класса таких конструкций проведен в [1, 24-26]. В справочнике [27] даны аналитические решения для плоских регулярных статически определимых ферм с различными схемами решеток, нагрузок и типов опор.

В настоящей работе предлагается схема регулярной фермы с двумя неподвижными опорами шарнирного типа. Четыре неизвестные реакции опор в такой конструкции делают ее внешне статически неопределимой. Найти реакции опор в этом случае независимо от расчета усилий в стержнях не представляется возможным. Ставится задача получить прогиб фермы в зависимости от числа панелей для различных нагрузок. Ферма имеет длину пролета $L = 2(n+1)a$, где n — число панелей с крестообразной решеткой в половине средней части

пролета. Общее число стержней в конструкции, включая четыре стержня, моделирующие опоры, равно $K = 8n + 20$. Нагрузка равномерно распределена по узлам верхнего пояса.

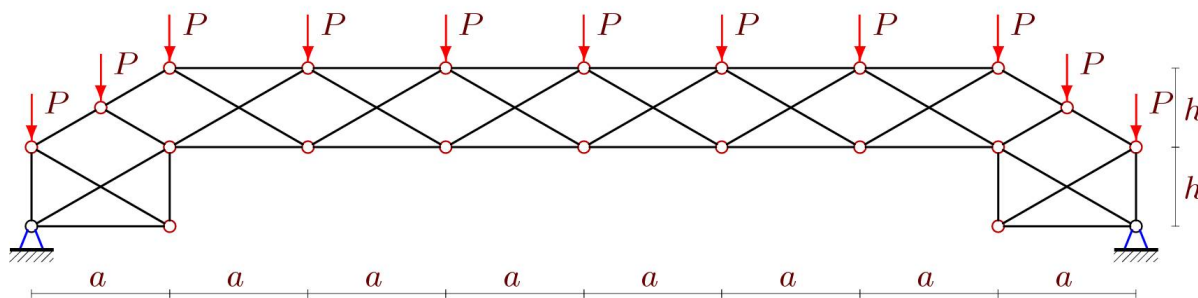


Рис. 1. Ферма, нагрузка по узлам верхнего пояса, $n = 3$

Расчет усилий

Для получения формулы зависимости прогиба от числа панелей необходимо определить аналитические выражения для усилий во всех стержнях фермы. Воспользуемся программой [28], написанной на языке Maple. Узлы (шарниры) фермы и стержни нумеруются (рис. 2). Неподвижная опора моделируется двумя стержнями. Левая опора — (1-15) и (1-16), правая — (7-17) и (7-18). Начало координат выбирается в левой опоре. В программу вводятся координаты узлов.

Порядок соединения стержней в решетке определяется условными векторами, содержащими номера концов соответствующих стержней. По координатам узлов в соответствии со структурой решетки составляется матрица системы уравнений равновесия узлов. Элементы матрицы — направляющие косинусы усилий в стержнях, соединенных в узлах.

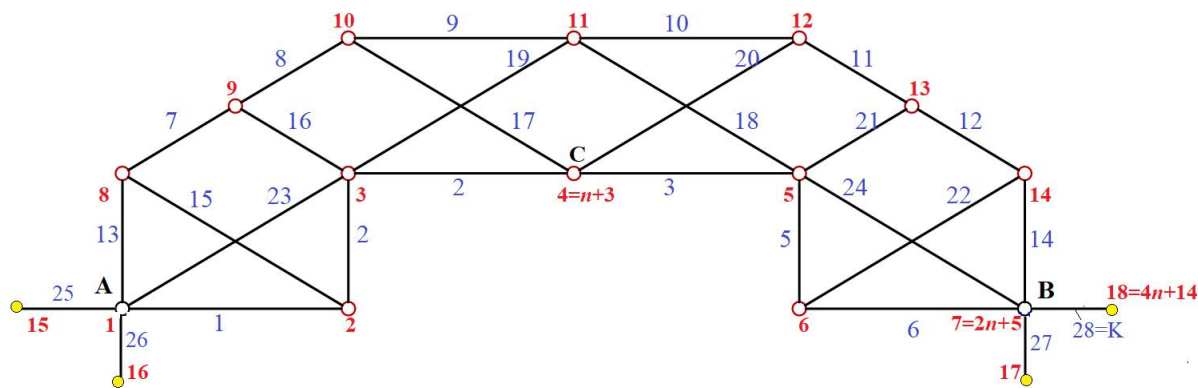


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней фермы, $n = 1$

Решение системы уравнений дает распределение усилий в стержнях фермы и реакции опор в аналитическом виде, что позволяет использовать эти данные для вывода формулы для прогиба. В численном виде при $n = 2$, $a = 3m$, $h = 4m$ распределение усилий, отнесенных к величине нагрузки P представлено на рис. 3. Толщина линий пропорциональна модулям усилий, синим цветом выделены сжатые элементы, красным — растянутые, черным — ненапряженные. Числом показано значение относительного усилия, округленное до двух знаков. Верхний пояс оказался сжатым, нижний — растянутым. Для случая нагружения нижнего пояса (рис. 4) распределение усилий показано на рис. 5.

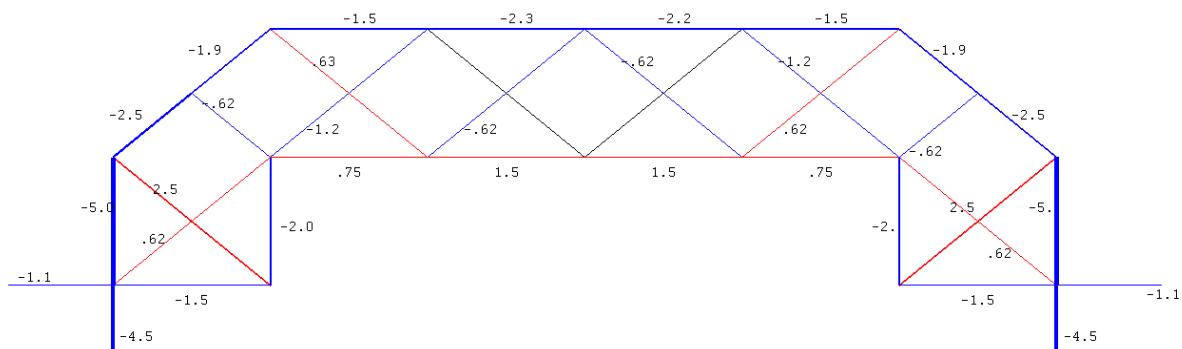


Рис. 3. Нагрузка по верхнему поясу. Распределение усилий в стержнях, $n = 2$

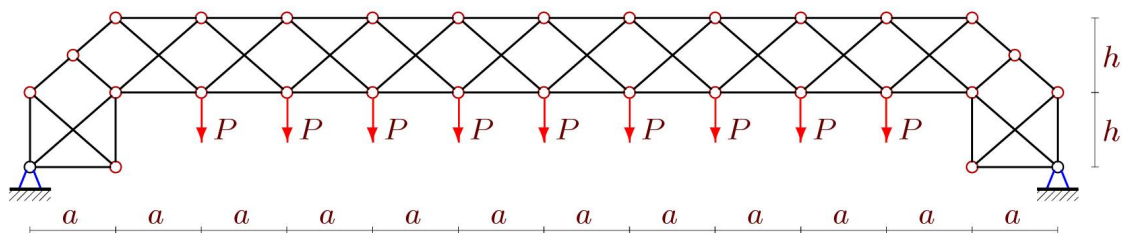


Рис. 4. Ферма, нагрузка по узлам нижнего пояса, $n = 5$

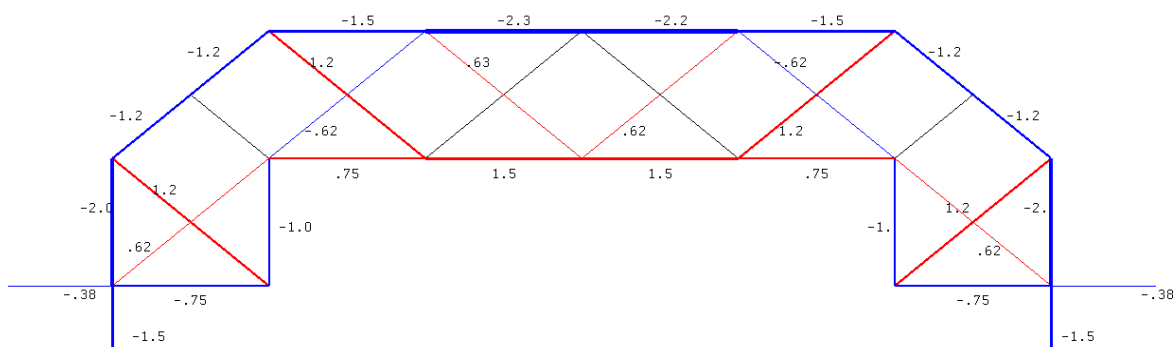


Рис. 5. Нагрузка по нижнему поясу. Распределение усилий в стержнях, $n = 2$

Реакции опор можно получить в аналитическом виде из решения системы уравнений равновесия всех узлов. Имеем ряд решений для горизонтальных реакций опор ферм с различным числом панелей.

$$S_K^{(P)} = 0, -Pa/(2h), -Pa/h, -3Pa/(2h), -3Pa/h, \dots$$

Обобщая методом индукции, получаем в случае равномерной нагрузки на верхний пояс: $R_A = R_B = Pa(n+1)/(2h)$. Для нагрузки на нижний пояс горизонтальные реакции опор имеют вид $R_A = R_B = Pa(n-1)/(2h)$. В случае действия сосредоточенной вертикальной силы на узел C в середине пролета эти реакции для нечетных n равны нулю: $R_A = R_B = Pa((-1)^n + 1)/(4h)$.

Вычисление прогиба

Прогиб определяется по формуле Максвелла-Мора:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{K-4} S_k^{(P)} S_k^{(1)} l_k / (EF).$$

Суммирование ведется по всем деформируемым стержням конструкции, кроме четырех опорных по предположению недеформируемых. Расчет ряда ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей дает общее выражение для прогиба

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / EF, \quad (1)$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Коэффициенты $C_1(n)$, $C_2(n)$ и $C_3(n)$ в этой формуле определяются методом индукции [28]. Из решения рекуррентного уравнения десятого порядка получаем зависимость

$$C_1 = (10n^4 + 2(5 - 6(-1)^n)n^3 + 2(4 - 3(-1)^n)n^2 + (11 - 15(-1)^n)n - 12(-1)^n + 12) / 24. \quad (2)$$

Аналогично, но несколько проще, находятся и другие коэффициенты:

$$C_2 = (n^2 + 2(1 - (-1)^n)n - 5(-1)^n + 3) / 4, \quad C_3 = (5n + 14)(1 - (-1)^n) / 4. \quad (3)$$

В случае нагрузки на нижний пояс имеем аналогичные зависимости:

$$C_1 = n(10n^3 - 2(6(-1)^n - 5)n^2 - 2(3(-1)^n - 4)n - 15(-1)^n + 11) / 24,$$

$$C_2 = (2n^2 + 4(1 - (-1)^n)n - 5(-1)^n + 1) / 8, \quad C_3 = -5n((-1)^n - 1) / 4.$$

При действии на ферму одной силы в середине пролета коэффициенты в (1) имеют вид:

$$C_1 = (4n^3 + 3(1 - 3(-1)^n)n^2 + (11 - 3(-1)^n)n - 3(-1)^n + 3) / 12, \quad (4)$$

$$C_2 = (2 - (-1)^n + n) / 2, \quad C_3 = 5(1 - (-1)^n) / 4.$$

В последнем случае степени полиномов меньше, чем в случае распределенной нагрузки.

Численный пример

Для иллюстрации найденной зависимости прогиба от числа панелей построим соответствующие графики для фермы длины $L = 2(n+1)a = 100$ м с суммарной нагрузкой на верхний пояс $P_0 = (2n+5)P$. Введем в рассмотрение безразмерный прогиб $\Delta' = EF\Delta / (PL)$. На рис. 6 приведены две кривые, построенные по решению (1) с коэффициентами (2) и (3) для случая нагружения верхнего пояса. Несмотря на скачкообразное изменение прогиба, на графиках прослеживается наклонная асимптота. Аналитическая форма решения позволяет найти угол ее наклона:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = h / (8L).$$

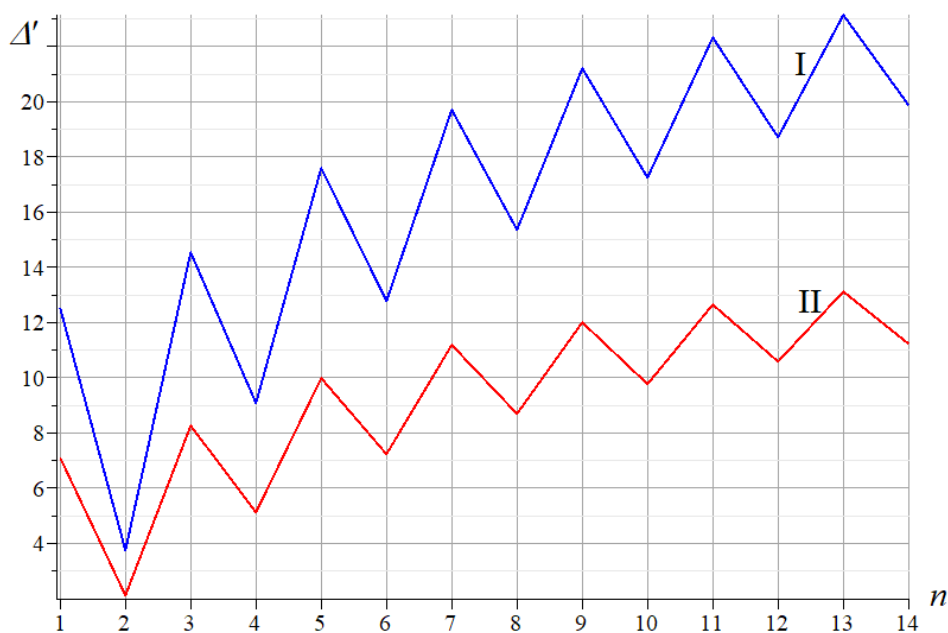


Рис. 6. Зависимость прогиба от числа панелей. $L=100$ м, I — $h = 3$ м; II — $h = 4$ м

Заключение

Предложена схема статически определимой регулярной фермы рамного типа. Методом индукции получена формула зависимости прогиба от числа панелей для трех видов нагрузки. Построены распределения усилий по стержням решетки. Показано, что зависимости прогиба от числа панелей имеют наклонные асимптоты. Скачкообразный характер этой зависимости с величинами скачков, достигающими 50%, показывает, что выбор точного числа панелей в таких задачах имеет большое значение. Увеличение или уменьшение числа панелей всего на одну может существенно увеличить или уменьшить жесткость конструкции при сохранении ее размеров и веса.

Примененный в решении поставленной задачи алгоритм вывода формул может быть использован и в других аналогичных фермах регулярной структуры.

Библиографический список

1. Guest S.D., Hutchinson J.W. On the determinacy of repetitive structures // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2003. Vol. 51. P. 383–391.
2. Kiychenko T.S., Tabanyukhova M.V., Kharinova N.V. Determination of stresses in truss rods: numerical and physical experiment // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering The conference proceedings ICCATS-2019. South Ural State University (national research university), Irkutsk National Research Technical University, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin. 2019. P. 033043.
3. Дмитриева Т.Л. Алгоритм автоматизированного проектирования ферм минимального веса // Известия высших учебных заведений. Сер. Строительство. 2010. № 3 (615). С. 98-105.
4. Heyman J. Design of a simple steel truss // Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Structures and Buildings. 2010. Vol. 163. № 1. P. 53-56.
5. Earthquake engineering optimization of structures by economic criterion / N. Vatin, A. Ivanov, Y. Rutman, S. Chernogorskiy, K. Shvetsov // Magazine of Civil Engineering. 2017. № 8(76). P. 67–83. DOI:10.18720/MCE.76.7.

6. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю. Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном нагружении // Строительная механика и конструкции. 2019. №1(20). С. 21-29.
7. Ткачук Г.Н. Формула зависимости прогиба несимметрично нагруженной плоской фермы с усиленными раскосами от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. №2(21). С. 32-39.
8. Бойко А.Ю., Ткачук Г.Н. Вывод формул зависимости прогиба плоской шарнирно-стержневой рамы от числа панелей в системе *maple* // Строительная механика и конструкции. 2019. №4 (23). С. 15-25.
9. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Анализ собственных частот колебаний плоской фермы с произвольным числом панелей // Вестник МГСУ. 2019. Т.14. № 3 (126). С. 284–292.
10. Vorobev O.V. Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. № 92(7). P. 9204–9204. DOI:10.18720/CUBS.92.4. Режим доступа: URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2020.92.4> (date of application: 27.02.2021).
11. Kirsanov M., Petrichenko E., Vorobev O. The formula for the lower estimate of the fundamental frequency of natural vibrations of a truss with an arbitrary number of panels; 2021 // Construction of Unique Buildings and Structures; 94 Article № 9403. DOI: 10.4123/CUBS.94.3
12. Kirsanov M.N., Sun Jiaxuan Analytical dependence of the lower bound of the natural oscillation frequencies of the manipulator truss from the number of panels // Строительная механика и конструкции. 2021. № 1(28). С. 32-38.
13. Kirsanov M.N., Dai Qiao Dependence of the natural oscillation frequency of the half-tilt console on the number of panels // Строительная механика и конструкции. 2021. № 1(28). С. 39-44.
14. Kirsanov M., Vorobyev O. Calculating of a spatial cantilever truss natural vibration frequency with an arbitrary number of panels: analytical solution // Construction of Unique Buildings and Structures. 2021. Vol. 94. Article № 9402. DOI: 10.4123/CUBS.94.2.
15. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure // Magazine of Civil Engineering. 2017. № 8 (76). P. 58-66.
16. Kirsanov M.N. Stress state and deformation of a rectangular spatial rod cover // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. № 3 (31). P. 71–79.
17. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2 (259). С. 2-6.
18. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
19. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. № 1 (29). P. 84-105.
20. Kirsanov M.N., Zaborskaya N. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice // Magazine of Civil Engineering. 2017. № 3 (71). С. 61-67.
21. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 48–51.
22. Kirsanov M.N., Vorobyev O.V. Analytical calculation of a planar springel truss deformations with an arbitrary number of panels // Structural Mechanics and Structures. 2020. № 4 (27). P. 7-15.

23. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // *Строительная механика и конструкции*. 2017. № 1 (14). С. 27-30.
24. Zok F. W., Latture R. M., Begley M. R. Periodic truss structures // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016. Vol. 96. P. 184–203.
25. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2005. Vol. 85. № 9. P. 607–617.
26. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. № 4. P. 756–782.
27. Kirsanov M. N. *Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publishing. UK. 2020.
28. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuks D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels // *Vestnik MGSU*. 2020. Vol. 15. № 4. P. 510-517.

References

1. Guest S.D., Hutchinson J.W. On the determinacy of repetitive structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2003. Part 51. Pp. 383–391.
2. Kiychenko T.S., Tabanyukhova M.V., Kharinova N.V. Determination of stresses in truss rods: numerical and physical experiment. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering The conference proceedings ICCATS-2019*. South Ural State University (national research university), Irkutsk National Research Technical University, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin. 2019. P. 033043.
3. Dmitrieva T.L. Algorithm for computer-aided design of trusses of minimum weight. *News of higher educational institutions. Building*. 2010. No. 3 (615). Pp. 98-105.
4. Heyman J. Design of a simple steel truss. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Structures and Buildings*. 2010. Part. 163. No 1. Pp. 53-56.
5. Vatin, N., Ivanov, Ay., Rutman, Y., Chernogorskiy, S., Shvetsov, K. Earthquake engineering optimization of structures by economic criterion. *Magazine of Civil Engineering*. 2017. 8(76). Pp. 67–83. DOI:10.18720/MCE.76.7.
6. Belyankin N. A., Boyko A. Yu. Formulas for deflection of a beam truss with an arbitrary number of panels at uniform loading. *Construction mechanics and structures*. 2019. No. 1(20). Pp. 21-29.
7. Tkachuk G. N. Formula for the dependence of the deflection of an asymmetrically loaded flat truss with reinforced struts on the number of panels. *Construction mechanics and structures*. 2019. No. 2(21). Pp. 32-39.
8. Boyko A. Yu., Tkachuk G. N. Derivation of formulas for the dependence of the deflection of a flat hinge-rod frame on the number of panels in the maple system. *Construction mechanics and structures*. 2019. No. 4 (23). Pp. 15-25.
9. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analysis of natural frequencies of vibrations of a flat truss with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU*. 2019. Vol. 14. . № 3 (126). Pp 284-292.
10. Vorobev O.V. Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. 92(7). Pp. 9204–9204. DOI:10.18720/CUBS.92.4. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2020.92.4> (date of application: 27.02.2021).
11. Kirsanov M., Petrichenko E., Vorobev O. The formula for the lower estimate of the fundamental frequency of natural vibrations of a truss with an arbitrary number of panels;

- 2021; Construction of Unique Buildings and Structures; 94 Article No 9403. doi: 10.4123/CUBS.94.3
12. Kirsanov M. N., Sun Jiaxuan Analytical dependence of the lower bound of the natural oscillation frequencies of the manipulator truss from the number of panels. Structural Mechanics and Structures. 2021. № 1(28). Pp.32-38.
 13. Kirsanov M. N., Dai Qiao Dependence of the natural oscillation frequency of the half-tilt console on the number of panels. Structural mechanics and structures. 2021. №1 (28). Pp.39-44.
 14. Kirsanov M., Vorobyev O. Calculating of a spatial cantilever truss natural vibration frequency with an arbitrary number of panels: analytical solution; 2021; Construction of Unique Buildings and Structures; 94 Article No 9402. doi: 10.4123/CUBS.94.2
 15. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure. Magazine of Civil Engineering. 2017. № 8 (76). Pp. 58-66.
 16. Kirsanov M.N. Stress state and deformation of a rectangular spatial rod cover. Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. № 3 (31). Pp. 71–79.
 17. Kirsanov M.N. Analytical calculation of a spatial rod regular structure with a flat face. Building mechanics and calculation of structures. 2015. No. 2 (259). Pp. 2-6.
 18. Kirsanov M.N. Analytical calculation and optimization of a spatial beam girder. Bulletin of the Moscow Power Engineering Institute. MEI Bulletin. 2012. No. 5. Pp. 5-8.
 19. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder. Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. № 1 (29). Pp. 84-105.
 20. Kirsanov M.N., Zaborskaya N. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice. Magazine of Civil Engineering. 2017. № 3 (71). Pp. 61-67.
 21. Kirsanov M.N. Calculation of the stiffness of the rod lattice. Vestnik mashinostroeniya. 2015. No. 8. Pp. 48–51.
 22. Kirsanov M.N., Vorobyev O.V. Analytical calculation of a planar springel truss deformations with an arbitrary number of panels. Structural mechanics and structures. 2020. № 4 (27). Pp. 7-15.
 23. Kirsanov M.N. Derivation of the formula for the deflection of a lattice girder with cases of kinematic variability // Structural mechanics and structures. 2017. No. 1 (14). Pp. 27-30.
 24. Zok F. W., Latture R. M., Begley M. R. Periodic truss structures. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2016. Vol. 96. Pp. 184–203.
 25. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. Part. 85. No. 9. Pp. 607–617.
 26. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. Vol. 54. No.4. Pp. 756–782.
 27. Kirsanov M. N. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing. UK. 2020.
 28. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuk D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. Vestnik MGSU. 2020. Part. 15. № 4. Pp. 510–517.

ANALYTICAL CALCULATION OF THE DEFLECTION OF A PLANE EXTERNAL STATICALLY UNDETERMINATED TRUSS WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS

E.V. Komerzan¹, O. V. Sviridenko²

National Research University «MPEI»^{1,2}
Russia, Moscow

¹PhD of Tech. Sciences, Associate professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, tel .: + 7 495 362-77-19, e-mail: KomerzanYV@mpei.ru

²PhD of Tech. Sciences, Associate professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, tel .: + 7 495 362-77-19, e-mail: SviridenkoOV@mpei.ru

A scheme of a statically determinate frame-type truss with two fixed hinged supports is proposed. The lower chord of the truss is raised in its middle part. Using the induction method in the Maple computer mathematics system for three types of load, the dependence of the deflection of the middle of the structure span on the value of the load, size, and a number of panels is found. The forces in the rods and support reactions are determined by cutting out nodes. To find the deflection, the Maxwell-Mohr formula is used. The distribution of forces over the bars of the structure and the linear asymptotics of the dependence of the deflection on the number of panels are found.

Keywords: truss, deflection, Maple, induction, number of panels.