УДК 624.04:531.391.3 **DOI: 10.31799/978-5-8088-1556-8-2021-16-218-221**

М. Н. Кирсанов*
доктор физико-математических наук, профессор
Сунь Цзясюань*
студент
** Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва*

ФОРМУЛА ДЛЯ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ФЕРМЫ МАНИПУЛЯТОРА

Методом индукции с привлечением операторов системы компьютерной математики Maple выведена аналитическая оценка частоты колебаний плоской модели манипулятора с произвольным числом панелей в консольной части. Особенностью решения, по сравнению с аналогичными решениями, использующими оценку по Донкерлею, является его высокая точность. Сравнение с численным решением задачи колебаний системы с многими степенями свободы показало, что погрешность в среднем не превышает 2 %.
Ключевые слова: *манипулятор, ферма, естественные колебания, Данкерли, низкочастотная оценка.*

M. N. Kirsanov*
Dr. Sc., Phys.-Math., Professor
Sun Jiaxuan*
Student
National Research University «MPEI», Moscow

THE FORMULA FOR THE LOWER LIMIT OF THE NATURAL FREQUENCY OF OSCILLATIONS OF THE MANIPULATOR TRUSS

An analytical estimate of the oscillation frequency of a plane model of a manipulator with an arbitrary number of panels in the console part is derived by the induction method with the involvement of operators of the Maple computer mathematics system. A feature of the solution, in comparison with similar solutions using the Dunkerley estimate, is its high accuracy. Comparison with the numerical solution of the problem of oscillations of a system with many degrees of freedom showed that the error does not exceed 2 % on average.
Keywords: *manipulator, truss, natural vibrations, Dunkerley, lower frequency estimate.*

Конструкции манипуляторов, предназначенных для высокоскоростных работ, предполагают наряду со статическим и прочностным расчетом расчет динамический, включающий в себя вычисление частот колебаний. Одной из наиболее значимых динамических характеристик конструкции является ее первая (наименьшая) частота собственных колебаний. В случае конструкций, содержащих большое число элементов, полный расчет системы с многими степенями свободы (по числу узлов, наделенных массами) представляет собой сложную задачу. Развитие современных систем символьной математики позволяет наряду с численными методами использовать аналитические. При этом ценность таких решений определяется как точностью, так и универсальностью. Формула, выведенная для какой-то одной конструкции с параметрически заданными размерами и нагрузками имеет значительно меньшую ценность, чем решение, в котором учитывается и число элементов. В настоящей работе рассмотрена плоская статически определимая модель фермы консольного манипулятора с массой, распределенной по узлам нижнего пояса консоли. Решение строится по методике, примененной ранее в задачах анализа статического прогиба ферм [1]. Частоты колебаний балочных ферм в аналитической форме изучались в работах [2–7].

Стойка фермы (рис. 1) имеет по высоте m панелей крестообразного вида, консоль – n панелей с треугольной решеткой. В ферме содержится $\eta=4(m+n)+6$ стержней, считая три стержня, моделирующие опоры. Пренебрегая горизонтальными смещениями, рассмотрим только вертикальные колебания грузов. Число степеней свободы такой модели конструкции равно числу грузов N=n. Ферма имеет регулярный тип конструкции с двумя параметрами n и m. В предлагаемом решении фиксируется число панелей в стойке m=3. Напряженное состояние

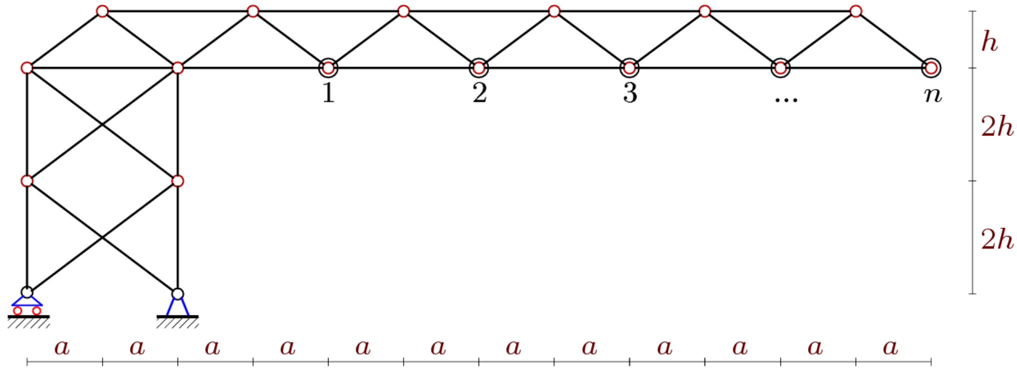

Рис. 1. Схема манипулятора, m=2, n=5

фермы может быть рассчитано аналитически по программе в системе Maple [2, 3].

Уравнения колебаний грузов имеют вид:

$$\mathbf{M}_N\ddot{\mathbf{Y}}+\mathbf{D}_N\mathbf{Y}=\mathbf{0}\,, \qquad (1)$$

где $\mathbf{D}_N$ – матрица жесткости; $\mathbf{Y}=[y_1,y_2,...,y_N]^T$ – вектор вертикальных смещений грузов; $\mathbf{M}_N=m\mathbf{I}_N$ – диагональная матрица инерции; $\ddot{\mathbf{Y}}$ – вектор ускорений узлов с массами. Обратной к матрице жесткости $\mathbf{D}_N$ является матрица податливости $\mathbf{B}_N$, элементы которой вычисляются с помощью интеграла Мора:

$$b_{i,j}=\sum_{k=1}^{\eta-3}S_k^{(i)}S_k^{(j)}l_k\,/\,(EF). \qquad (2)$$

Здесь $S_k^{(i)}$ – усилие в стержне k от действия единичной вертикальной силы в узле i, l_k — длина стержня k , E модуль упругости материала стержней, F – площадь поперечного сечения стержней. Жесткости стержней одинаковы. Три стержня опор принимаются недеформируемыми, и в сумму (2) усилия этих стержней не входят.

Приближенное решение по методу Донкерлея [8] для нижней оценки первой частоты колебаний ω_D выражается через частоты колебаний отдельных грузов в отмеченных узлах:

$$\omega_D^{-2}=\sum_{k=1}^{N}\omega_k^{-2}\,, \qquad (3)$$

где ω_k – парциальная частота колебаний массы m , расположенной в узле консоли на нижнем поясе. В случае колебаний одной массы уравнение (1) имеет вид:

$$m\ddot{y}_k+d_ky_k=\mathbf{0},$$

где d_k – коэффициент жесткости, y_k – смещение массы, $\ddot{y}_k$ – ускорение. Отсюда частота колебаний одного груза имеет вид: $\omega_k=\sqrt{d_k\,/\,m}$. Коэффициент жесткости можно найти с помощью интеграла Мора:

$$\delta_k=1\,/\,d_k=\sum_{j=1}^{\eta-3}\left(\tilde{S}_j^{(k)}\right)^2 l_j\,/\,(EF)\,.$$

Здесь обозначено: $\tilde{S}_j^{(k)}$ – усилия в стержне с номером j от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу, где расположена масса с номером k . Из (3) следует:

$$\omega_D^{-2}=m\sum_{k=1}^{N}\delta_k=m\Delta_n\,. \qquad (4)$$

Общий вид решения для коэффициента Δ_n :

$$\Delta_n=(C_{1,n}a^3+C_{2,n}c^3+C_{3,n}h^3)\,/\,(h^2EF). \qquad (5)$$

Решая последовательно задачу для n=1, 2, 3, ..., получаем:

$$\Delta_1=2(15h^3+6a^3+2c^3)\,/\,(h^2EF),$$
$$\Delta_2=4(27h^3+20a^3+4c^3)\,/\,(h^2EF),$$
$$\Delta_3=2\left(129h^3+140a^3+20c^3\right)/\left(h^2EF\right),$$
$$\Delta_4=8\left(63h^3+90a^3+10c^3\right)/\left(h^2EF\right),$$
$$\Delta_5=10\left(87h^3+90a^3+14c^3\right)/\left(h^2EF\right),$$
$$\Delta_6=4\left(345h^3+728a^3+56c^3\right)/\left(h^2EF\right),...$$

Используя оператор **rgf_findrecur** из специального пакета **genfunc** системы Maple можно получить рекуррентные уравнения для элементов последовательностей. Для коэффициента C_1 имеем линейное уравнение пятого порядка:

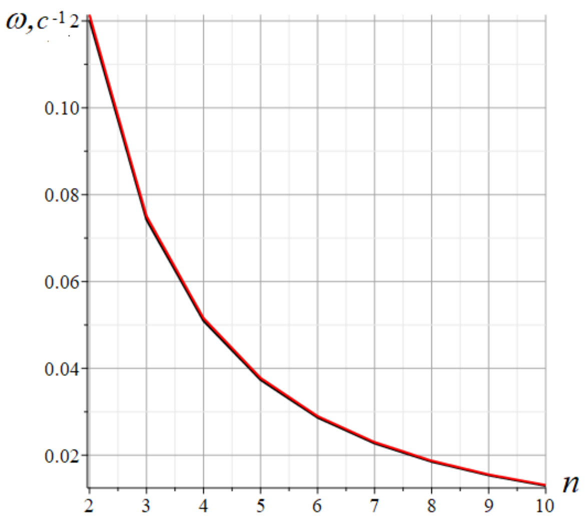

Рис. 2. Зависимость частоты от числа панелей. Кривые аналитического решения и численного практически совпадают

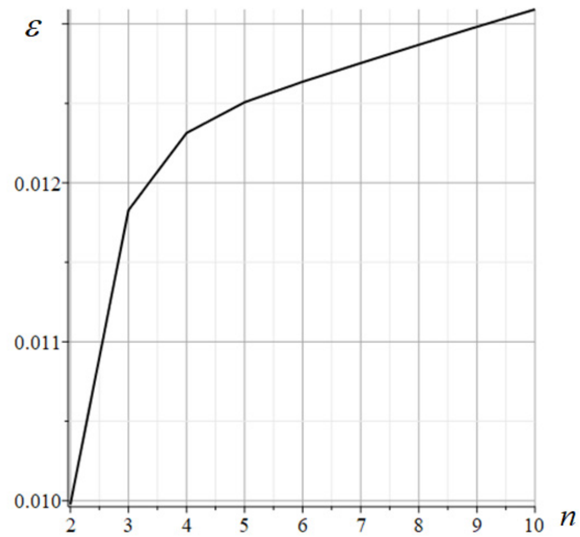

Рис. 3. Погрешность оценки Донкерлея в зависимости от числа панелей и высоты фермы

$$C_{1,n} = 5C_{1,n-1} - 10C_{1,n-2} + 10C_{1,n-3} - 5C_{1,n-4} + C_{1,n-5}.$$

Оператор rsolve дает решение этого уравнения:

$$C_{1,n} = (4n^4 + 14n^3 + 14n^2 + 4n)/3. \qquad (6)$$

Аналогично находятся и другие коэффициенты:

$$\begin{aligned} C_{2,n} &= 4n^3 + 12n^2 + 14n, \\ C_{3,n} &= (2n^3 + 4n^2 + 4n)/3. \end{aligned} \qquad (7)$$

Погрешность аналитического решения (4) с коэффициентами (6, 7) можно оценить из сравнения с решением задачи о колебании системы с числом степеней свободы N, полученным численно. Для нахождения собственных чисел матрицы $\mathbf{B}_N$ применим оператор Eigenvalues пакета LinearAlgebra системы Maple. На графике (рис. 2) представлены кривые зависимости первой частоты ω_{Nm}, полученной численно и ω_D по формуле (4). Кривые практически совпадают. Принято: $EF = 1000H$, $m = 100$кг, $a = 3$м, $h = 4$ м. Точность (относительная погрешность $\varepsilon = (\omega_{Nm} - \omega_D)/\omega_{Nm}$) зависит от числа панелей (рис. 3).

Полученная формула может быть использована для оценки частоты колебаний фермы при весьма большом числе стержней. Как известно, точность численного расчета с увеличением числа элементов конструкции падает, в то время как аналитическое решение имеет практически постоянную и высокую точность. Это видно по кривой на рис. 3, выходящей на горизонтальную асимптоту.

Погрешность решения в зависимости от числа панелей меняется от 1 %, при $n = 2$, до 1,3 % при большом числе панелей. Для сравнения заметим, что в [8] в задаче колебаний узлов балочной фермы с треугольной решеткой с двумя панелями решение по методу Донкерлея дает погрешность 29 %.

Работа выполнена в рамках проекта «Динамика легких стержневых конструкций манипуляторов» при поддержке гранта НИУ «МЭИ» на реализацию программ научных исследований «Технологии индустрии 4.0 для промышленности и робототехника» 2020–2022 гг. и междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Фундаментальные и прикладные исследования космоса».

Библиографический список

1. *Kirsanov M. N.* Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing, 2019. 198 p.

2. *Кирсанов М. Н., Тиньков Д. В.* Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. Т. 1, № 20. С. 14–20.

3. *Кирсанов М. Н., Тиньков Д. В.* Анализ собственных частот колебаний плоской фермы с произвольным числом панелей // Вестн. МГСУ. 2019. Т. 14, № 3 (126). С. 284–292.

4. *Кирсанов М. Н.* Аналитическая оценка частоты собственных колебаний ферм с произвольным чис-

лом панелей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16, № 5. С. 351–360.

5. *Петриченко Е. А.* Нижняя граница частоты собственных колебаний фермы Финка // Строительная механика и конструкции. 2020. № 3 (26). С. 21–29.

6. *Воробьев О. В.* О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // Строительная механика и конструкции. 2020. № 1 (24). С. 25–38.

7. *Канатова М. И.* Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. Т. 1. М.: Инфра-М, 2015. С. 31–34.

8. *Яблонский А. А.*, *Норейко С. С.* Курс теории колебаний. М.: Высшая школа, 1975. 248 с.