

УДК 624.04:531.391.3

DOI: 10.31799/978-5-8088-1556-8-2021-16-214-217

**М. Н. Кирсанов\***

доктор физико-математических наук, профессор

**О. В. Воробьев\***

аспирант

\* Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва

## ОЦЕНКА ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ

Получена нижняя аналитическая оценка первой собственной частоты колебаний статически определимой фермы с крестообразной решеткой. Масса фермы равномерно распределена по узлам нижнего пояса. Обобщение отдельных решений на случай произвольного числа панелей выполняется методом индукции с привлечением операторов системы компьютерной математики Maple. Сравнение с численным решением показывает, что точность оценки зависит от числа панелей и меняется от 37 % для ферм с двумя – тремя панелями до 6 % у ферм, число панелей у которых больше 18. С уменьшением отношения высоты панели к ее длине точность заметно повышается.

**Ключевые слова:** ферма, собственные колебания, нижняя оценка частоты, метод Донкерлея, Maple, индукция.

**M. N. Kirsanov\***

Dr. Sc., Phys.-Math., Professor,

**O. V. Vorobiev\***

PhD Student

National Research University «MPEI», Moscow

## ESTIMATION OF THE NATURAL VIBRATION FREQUENCY OF A PLANAR TRUSS WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS

A lower analytical estimate of the first natural vibration frequency of a statically determinate truss with a cruciform lattice is obtained. The mass of the truss is evenly distributed over the nodes of the lower chord. The generalization of individual solutions to the case of an arbitrary number of panels is performed by the induction method with the involvement of operators of the Maple computer mathematics system. Comparison with the numerical solution shows that the estimation accuracy depends on the number of panels and varies from 36 % for trusses with two or three panels to 6 % for trusses with more panels 18. With a decrease in the ratio of the panel height to its length, the accuracy increases significantly.

**Keywords:** truss, natural vibrations, lower frequency estimate, Dunkerley's method, Maple, induction.

Значение первой частоты колебаний фермы, наряду с такими характеристиками, как жесткость и прочность, является одной из важнейших эксплуатационных характеристик конструкции. Если система имеет много степеней свободы, то вычисление собственной частоты возможно только аналитически. Однако во многих случаях для проектировщика или исследователя достаточно приближенной оценки первой частоты. Для конструкций регулярного типа такую оценку в зависимости от числа панелей можно получить аналитически. Для некоторых плоских ферм с простой решеткой такие зависимости были получены в [1–9]. Основой для решения задачи о нижней частоте фермы может быть решение задачи о ее прогибе. Известны также формулы зависимости прогиба регулярных ферм от числа панелей [10–15]. Впервые об-

щие вопросы статически определимых стержневых (плоских и пространственных) систем были рассмотрены в [16–18]. Собственные колебания плоских регулярных ферм в аналитической форме изучались в [19, 20].

Рассмотрим ферму балочного типа с крестообразной решеткой. Масса фермы моделируется грузами, расположенными в узлах нижнего пояса. Ферма содержит  $\mu = 8n - 1$  стержней, не считая три стержня, моделирующие опоры. Пренебрегая горизонтальными смещениями, рассмотрим только вертикальные колебания грузов. Число степеней свободы системы грузов фермы с  $n$  панелями в половине пролета равно  $N = 2n - 1$ . Длина каждой панели  $a$ , высота  $2h$ . Для ферм такого типа доступны аналитические методы нахождения зависимостей деформаций и усилий от числа панелей.

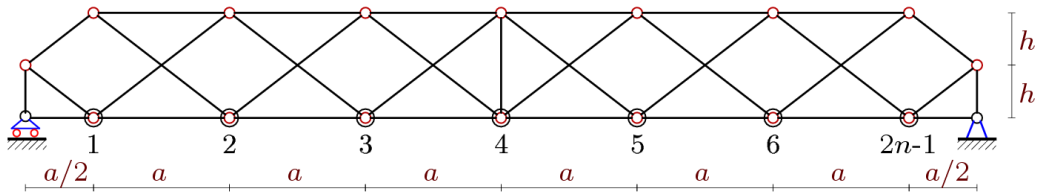


Рис. 1. Схема фермы,  $n=4$

Дифференциальные уравнения динамики системы грузов имеют вид:

$$\mathbf{M}_N \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{D}_N \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$  – вертикальные смещения масс;  $\mathbf{D}_N$  – матрица жесткости;  $\mathbf{M}_N$  – диагональная матрица инерции размером  $N \times N$ ;  $\ddot{\mathbf{Y}}$  – вектор ускорений. Если массы одинаковые, то матрица инерции выражается через единичную  $\mathbf{M}_N = m\mathbf{I}_N$ . Матрица податливости  $\mathbf{B}_N$  обратная к матрице жесткости  $\mathbf{D}_N$ . Ее элементы определяются по формуле Максвелла – Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{\mu} S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF), \quad (2)$$

где  $EF$  – жесткость стержней;  $S_{\alpha}^{(i)}$  – усилие в стержне  $\alpha$  от действия единичной вертикальной силы в узле  $i$ ;  $l_{\alpha}$  – длина стержня  $\alpha$ . Опорные стержни принимаются недеформируемыми, и суммирование в (2) на эти стержни не распространяется. Для нахождения усилий можно воспользоваться программой в системе Maple [2–4], дающей усилия в аналитической форме. Программа использует метод вырезания узлов и решение совместной системы уравнений равновесия всех узлов фермы. В число неизвестных включаются и реакции опор. В матрицу системы входят значения направляющих косинусов усилий, найденных по данным координат регулярной сетки узлов.

Если умножить (1) на  $\mathbf{B}_N$  слева, то с учетом тождества  $\ddot{\mathbf{Y}} = -\omega^2 \mathbf{Y}$ , справедливого для колебаний вида

$$y_k = u_k \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3)$$

то задачу можно свести к проблеме собственных чисел матрицы  $\mathbf{B}_N$ :  $\mathbf{B}_N \mathbf{Y} = \lambda \mathbf{Y}$ , где  $\lambda = 1 / (m\omega^2)$  – собственное число матрицы  $\mathbf{B}_N$ ,  $\omega$  – собственная частота колебаний. При  $n > 2$  решить эту задачу можно только численно.

Рассмотрим приближенное решение по методу Донкерлея [20]. Нижнюю оценку первой частоты колебаний дает формула:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{k=1}^N \omega_k^{-2}, \quad (4)$$

где  $\omega_k$  – частота колебания одной массы  $m$ , расположенной в узле  $k + 1$  нижнего пояса, приняв нумерацию узлов от левой опоры. Уравнение (1) в случае колебаний одной массы имеет простой скалярный вид:

$$m \ddot{y}_k + d_k y_k = 0,$$

где  $y_k$  – вертикальное перемещение массы;  $\ddot{y}_k$  – ускорение;  $d_k$  – коэффициент жесткости ( $k$  – номер массы). Частота колебаний груза  $\omega_k = \sqrt{d_k / m}$ . Коэффициент жесткости, обратный коэффициенту податливости, определяется по формуле Максвелла – Мора:

$$\delta_k = 1 / d_k = \sum_{\alpha=1}^{\mu} (\tilde{S}_{\alpha}^{(k)})^2 l_{\alpha} / (EF).$$

Здесь обозначено  $\tilde{S}_{\alpha}^{(k)}$  – усилия в стержне с номером  $\alpha$  от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу, где расположена масса с номером  $k$  (рис. 3). Согласно (4),

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{k=1}^N \delta_k = m \Delta_n. \quad (5)$$

Рассчитывая последовательно суммы  $\Delta_n$ , замечаем общий вид решения:

$$\Delta_n = (C_{1,n} a^3 + C_{2,n} c^3 + C_{3,n} h^3) / (h^2 EF) \quad (6)$$

и получаем последовательность формул:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= (184a^3 + 129c^3 + 992h^3) / (288h^2 EF), \\ \Delta_3 &= (648a^3 + 205c^3 + 928h^3) / (160h^2 EF), \\ \Delta_4 &= (3248a^3 + 567c^3 + 1824h^3) / (224h^2 EF), \\ \Delta_5 &= (33168a^3 + 3627c^3 + 9056h^3) / (864h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

Общие члены последовательностей коэффициентов при  $a^3$ ,  $c^3$ ,  $h^3$  имеют вид:

$$\begin{aligned}
 C_{1,n} &= n(n-1)(32n(n-1)+51)/360, \\
 C_{2,n} &= (20(n-1)n+3)/96, \\
 C_{3,n} &= (14n(n-1)+3)/(2n-1)/3. \quad (7)
 \end{aligned}$$

При нахождении общих членов использовался оператор `rgf_findrecur` из специального пакета `genfunc` системы Maple, дающий рекуррентные уравнения для элементов последовательностей, а затем оператор `rsolve` для решения этих уравнений. Для коэффициента при  $a^3$  получено, например, линейное однородное уравнение с биномиальными коэффициентами:

$$C_{1,n} = 5C_{1,n-1} - 10C_{1,n-2} + 10C_{1,n-3} - 5C_{1,n-4} + C_{1,n-5}.$$

Погрешность оценки (5) оценим из сравнения с численным решением задачи о колебании системы с числом степеней свободы  $N$ . Собственные числа матрицы  $\mathbf{B}_N$  определим с помощью оператора `Eigenvalues` из пакета `LinearAlgebra` системы Maple. На графике (2) сопоставлены кривые зависимости первой частоты, полученной численно и по формуле (5). Принято  $E = 2 \cdot 10^5$  Мпа,  $F = 10,9$  см<sup>2</sup>,  $m = 1500$  кг,  $a = 3$  м,  $h = 2$  м. С увеличением числа панелей точность полученной оценки растет. Это можно проследить на графике (3) зависимости относительной погрешности  $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$ .

Погрешность решения в зависимости от числа панелей меняется от 6 % при большом числе панелей, до 36 % при  $n = 2$ .

Решение задачи для оценки первой частоты, полученное методом индукции, имеет замкну-

тую форму, не содержит сумм и рядов, не связано с применением специальных функций и с итеративными вычислениями. Формулы можно использовать для оценки частоты колебаний фермы при весьма большом числе стержней, т. е. именно в тех случаях, где наиболее вероятно накопление ошибок вычислений и возникают сложности с объемом вычислений. Полученную оценку можно использовать и для фермы с разной жесткостью стержневых элементов. Для этого, не меняя функций (7), достаточно ввести относительные коэффициенты жесткости стержней разной длины:  $EF_a = \gamma_a EF$ ,  $EF_h = \gamma_h EF$ ,  $EF_c = \gamma_c EF$ . Формула (6) в этом случае примет вид:

$$\Delta_n = (C_{1,n}a^3 / \gamma_a + C_{2,n}c^3 / \gamma_c + C_{3,n}h^3 / \gamma_h) / (h^2 EF).$$

Верхнюю аналитическую оценку первой собственной частоты колебаний можно получить также по методу Рэля [20]. Точность такой оценки получается выше, однако формула оказывается не такой компактной, как по методу Донкерлея.

Работа выполнена в рамках проекта «Динамика легких стержневых конструкций манипуляторов» при поддержке гранта НИУ «МЭИ» на реализацию программ научных исследований «Технологии индустрии 4.0 для промышленности и робототехника» 2020–2022 гг. и междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Фундаментальные и прикладные исследования космоса».

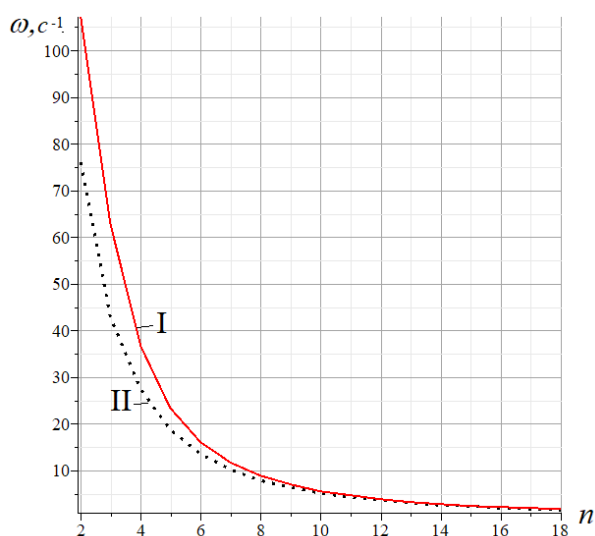


Рис. 2. Зависимость частоты от числа панелей:  
I – численное решение; II – аналитическая оценка

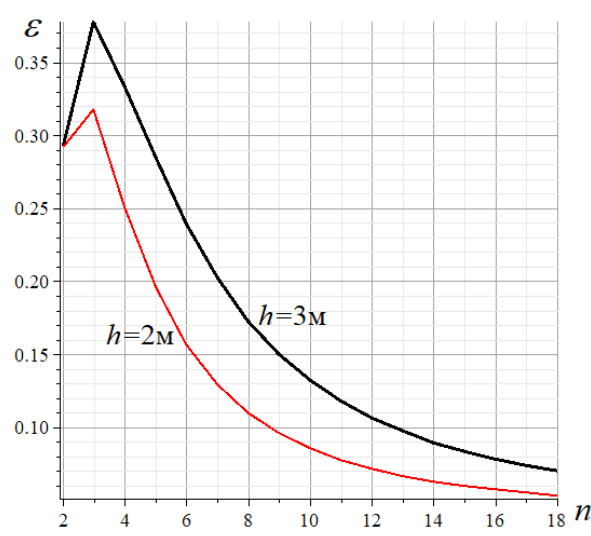


Рис. 3. Погрешность оценки Донкерлея в зависимости от числа панелей и высоты фермы

**Библиографический список**

1. *Петриченко Е. А.* Нижняя граница частоты собственных колебаний фермы Финка // *Строительная механика и конструкции.* 2020. № 3 (26). С. 21–29.
2. *Кирсанов М. Н., Тиньков Д. В.* Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции.* 2019. Т. 1, № 20. С. 14–20.
3. *Кирсанов М. Н., Тиньков Д. В.* Анализ собственных частот колебаний плоской фермы с произвольным числом панелей // *Вестн. МГСУ.* 2019. Т. 14, № 3 (126). С. 284–292.
4. *Кирсанов М. Н.* Аналитическая оценка частоты собственных колебаний фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений.* 2020. Т. 16, № 5. С. 351–360.
5. *Тиньков Д. В.* Аналитические решения задач о собственных частотах колебаний регулярных стержневых систем: дис. ... канд. техн. наук. М., 2019. 113 с.
6. *Воробьев О. В.* О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // *Строительная механика и конструкции.* 2020. № 1 (24). С. 25–38.
7. *Ахмедова Е. Р., Канатова М. И.* Собственные частоты колебаний плоской балочной фермы регулярной структуры // *Наука и образование в XXI веке: сб. науч. тр. по материалам Международ. науч.-практ. конф. Тамбов: Юком, 2014. С. 17–18.*
8. *Канатова, М.И.* Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы / *М.И. Канатова // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 31–34.*
9. *Суд И. Б.* Формулы для прогиба шпренгельной балочной фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции.* 2020. № 2 (25). С. 25–32.
10. *Грибов, О. В.* Вывод зависимости прогиба плоской трапецевидной фермы от числа панелей // *Постулат.* 2020. № 3. С. 6.
11. *Шурова Ю. Д.* Аналитический расчет прогиба фермы с симметричной и несимметричной нагрузкой // *Постулат.* 2020. № 6. С. 1.
12. *Терзе С. В.* Аналитический расчет зависимости деформаций консольной стойки от числа панелей в системе Maple // *Строительная механика и конструкции.* 2020. № 2 (25). С. 16–24.
13. *Овсянникова В. М.* Зависимость деформаций балочной фермы трапецевидной формы от числа панелей // *Строительная механика и конструкции.* 2020. № 3 (26). С. 13–20.
14. *Овсянникова В. М.* Зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы от числа панелей // *Строительная механика и конструкции.* 2020. № 4 (27). С. 16–25.
15. *Hutchinson R. G., Fleck N. A.* Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2005. Vol. 85, № 9. P. 607–617.
16. *Hutchinson R.G., Fleck N. A.* The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 2006. № 54 (4). P. 756–782.
17. *Zok F. W., Latture R. M., Begley R. M.* Periodic truss structures // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 2016. Vol. 96. P. 184–203.
18. *Рыбаков Л. С., Мишустин И. В.* Собственные колебания плоских регулярных упругих ферм ортогональной структуры // *Механика композиционных материалов и конструкций.* 1999. Т. 5, № 2. С. 3–16.
19. *Мишустин, И. В., Рыбаков Л. С.* Колебания плоских упругих ферм ортогональной структуры // *Известия Академии наук. Механика твердого тела.* 2003. № 2. С. 168–184.
20. *Яблонский А. А., Норејко С. С.* Курс теории колебаний. М.: Высшая школа, 1975. 248 с.