

## Формула для прогиба фермы, загруженной в половине пролета равномерной нагрузкой

*Рахматулина Анна Ринатовна*  
*НИУ «МЭИ»*  
*Студент*

*Смирнова Анастасия Алексеевна*  
*НИУ «МЭИ»*  
*Студент*

### Аннотация

Плоская статически определимая ферма загружена на половине нижнего пояса равномерной вертикальной нагрузкой. Решетка фермы треугольная. Зависимость прогиба фермы от числа панелей выводится методом индукции с применением специальных операторов системы компьютерной математики Maple. Прогиб находится с помощью формулы Максвелла - Мора.

**Ключевые слова:** ферма, формула Максвелла - Мора, прогиб, индукция, Maple

### The formula for the deflection of a truss loaded at half-span by a uniform load

*Rakhmatulina Anna Rinatovna*  
*NRU «MPEI»*  
*Student*

*Smirnova Anastasia Alekseevna*  
*NRU «MPEI»*  
*Student*

### Abstract

A planar statically determinate truss is loaded on the half of the lower belt by a uniform vertical load. The lattice of the truss is triangular. The dependence of the deflection of a truss on the number of panels is derived by induction using special operators of the computer mathematic system Maple. The deflection is found using the Maxwell-Mora formula.

**Keywords:** truss, Maxwell's - Mohr formula, deflection, induction, Maple

In the truss with  $n$  panels in half of the span, the number of rods with supports -  $n_s = 8n + 2$ , the number of nodes with supports -  $m = 4n + 4$  (Figure 1). The task is to obtain an analytical dependence of the deflection of the truss on the number of panels. This problem was previously posed and solved in a number of

papers [1-5]. The load in all these works was assumed to be symmetric. However, in order to obtain a complete picture of the deformability of the truss, it is necessary to solve the problem with the load in different parts of the span. Let the load be applied on the left side of the span. Calculate the deflection of the truss in the middle of the span.

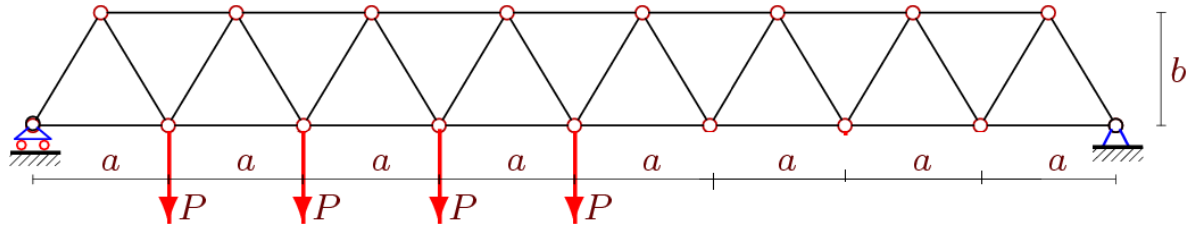


Figure 1 - The truss at  $n = 3$ . Load on the lower belt

Forces in the truss are determined according to the program [6], used earlier for solving similar problems for flat [7-17] and spatial [18-25] trusses. Figure of the numbering the rods and knots:

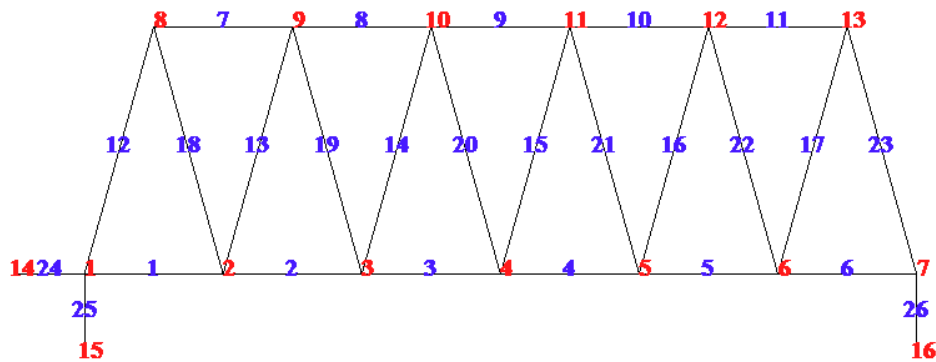


Figure 2 - Numbering of nodes and rods for  $n = 3$

Here is a small fragment of the coordinate input program

```
for i to 2*n+1 do x[i]:=a*i-a: y[i]:=0: od:
for i to 2*n do x[i+2*n+1]:=a*i-a/2: y[i+2*n+1]:=b: od:
```

The structure of the lattice is given like in the graph theory by means of vectors, with the numbers of the ends of the rods. In the cycle of  $i$ , the numbers of conditional ends of the bars of the lower belt are given:

```
> for i to 2*n do Nbeg[i]:=i: Nend[i]:=i+1: od:
```

Similarly, we have vectors for the upper belt:

```
> for i to 2*n-1 do
  Nbeg[i+2*n]:=i+2*n+1: Nend[i+2*n]:=i+2*n+2:
od:
```

For braces, we write

```

for i to 2*n do
> Nbeg[i+4*n-1]:=i; Nend[i+4*n-1]:=i+2*n+1;
> Nbeg[i+6*n-1]:=i+1; Nend[i+6*n-1]:=i+2*n+1;
> od:

```

Supports:

```

Nbeg[8*n]:=1; Nend[8*n]:=4*n+2 :
Nbeg[8*n+1]:=1; Nend[8*n+1]:=4*n+3 :
Nbeg[8*n+2]:=2*n+1; Nend[8*n+2]:=4*n+4 :

```

The system of linear equations in the program is solved in symbolic form. Expressions are obtained for the forces in the rods and the reactions of the supports, which also enter into the number of unknown system of equations. These values enter into the Maxwell-Mora formula, which has the form:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n_s-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

It is indicated:  $S_i^{(P)}$  — the forces in the rods from the given load,  $l_i$  — the length of the rods,  $S_i^{(1)}$  — the forces from the unit force applied to the knot of the lower belt in the middle of the span,  $EF$  — the rigidity of the rods. The solution for trusses with an arbitrary number of panels has the form

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3) / (8b^2 EF). \quad (1)$$

Here  $c = \sqrt{a^2 + 4b^2}$ . The calculation of a series of trusses reveals sequences of coefficients for  $a^3$  and  $c^3$ . Operators of the Maple system `rgf_findrecur` and `rsolve` from the solution of recurrence equations

$$\begin{aligned}
C_{1,n} &= 5C_{1,n-1} - 10C_{1,n-2} + 10C_{1,n-3} - 5C_{1,n-4} + C_{1,n-5}, \\
C_{2,n} &= 3C_{2,n-1} - 3C_{2,n-2} + C_{2,n-3}
\end{aligned}$$

give the following patterns:

$$C_1 = n(10n^3 + 8n^2 - n + 1) / 6, \quad C_2 = n(1 + n) / 2. \quad (2)$$

Note that the normal operation of `rgf_findrecur` requires an even number of elements of the analyzed sequence of such length that the corresponding recurrence equation would have integer coefficients. For example, if we limit ourselves to only eight calculations with the number of panels from 1 to 8, then the «truncated» sequence 3, 37, 170, 510, 1205, 2443, 4452, 7500 will give the following result

$$C(n) = \frac{1831756}{386259} C(n-1) - \frac{1123438}{128753} C(n-2) + \frac{966132}{128753} C(n-3) - \frac{1013579}{386259} C(n-4)$$

There is no solution to this equation. Note that the coefficient at  $C_{n-1}$  1831756/386259 is 4.74, which is already close to the true value of 5. The order of the recurrence equation is half the length of the required sequence of coefficients.

The verification of the solution (1) with the coefficients (2) can be performed numerically, setting the numerical program in place of the symbolic values of the dimensions in the same program.

Surveys of some papers using the induction method in combination with the capabilities of the Maple system are given in [26, 27].

## References

1. Кирсанов М.Н. Анализ усилий и деформаций в корабельном шпангоуте, моделируемом фермой // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2017. Т. 9. № 3. С. 560-569.
2. Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы//Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5 (39). С. 61-68.
3. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы // Инженерно-строительный журнал. 2012. №5(31). С. 38-42.
4. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки//Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
5. Рахматулина А.Р., Смирнова А.А. Вывод зависимости прогиба арочной фермы от числа панелей в системе Maple//Материалы Всероссийской научно-практической конференции «45 лет отрасли легких металлоконструкций: от модуля Кисловодск до модуля Пятигорск» Пятигорск: Издательство ПФ СКФУ, 2017. С.85-88.
6. Кирсанов М.Н. Задачи по теоретической механике с решениями в Maple 11. -М.: Физматлит, 2010. 264 с.
7. Kirsanov M. N. A Precise Solution of the Task of a Bend in a Lattice Girder with a Random Number of Panels. Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. No. 1(37). P.92-99
8. Доманов Е.В. Вывод формулы для прогиба балочной фермы с крестообразной решеткой // Строительная механика и конструкции. 2017. №2 (15). С. 15-19.
9. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. №3. С. 23–27.
10. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей // Механизация строительства. 2017. № 3. С. 26-29
11. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме // Механизация строительства. 2017. №4. С. 20-23
12. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба двухпролетной плоской фермы // Механизация строительства. 2017. № 5. С. 35-38
13. Кирсанов М.Н., Суворов А.П. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12, № 8 (107). С. 869–875.

14. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решётчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1, № 14. С. 27–30.
15. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice // Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 3. P. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7
16. Кирсанов М.Н., Маслов А.Н. Формулы для расчёта прогиба балочной многорешётчатой фермы // Строительная механика и расчёт сооружений. 2017. № 2 (271). С. 6–10.
17. Гриднев С.Ю., Кирсанов М.Н., Овчинников И.Г. Статический расчет двухраскосной балочной фермы // Интернет-журнал НАУКОВЕДЕНИЕ. 2016. Т.8. №6
18. Кирсанов М.Н. Прогиб пространственного покрытия с периодической структурой // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 8(76). С. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6
19. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 5 (49). С. 37-43.
20. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. № 2 (101). С. 165–171.
21. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 5. С. 11-15.
22. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2 (259). С. 2-6.
23. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 52–58.
24. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5–8.
25. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. Pp. 52–58. doi: 10.5862/MCE.64.5.
26. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. №12. С.28.
27. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.