УДК 624.04:531.391.3

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛЕГКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СТРУКТУР В СИСТЕМЕ MAPLE. ОБЗОР

***Широков А.С.***[1]

[1]*Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва*

[1]as.shirokov@yandex.ru

***Аннотация***

Рассмотрены модели плоских статически определимых регулярных ферм и аналитические решения задачи вычисления собственных частот. Приводятся формулы для частот, полученные в системе Maple методом индукции.

***Ключевые слова:*** *Maple, ферма, метод индукции, собственная частота.*

## ПОСТАНОВКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Большинство инженерных задач, связанных с анализом прочности, устойчивости и динамики конструкций, обычно решаются с применением численных методов в известных пакетах программ, основанных на методе конечных элементов. Однако, на практике появляются задачи, в которых за счет большого числа элементов конструкции точность, полученная в таких решениях оказывается неудовлетворительной. Это относится не только к таким направлениям инженерных разработок, как космос, транспорт, авиация, строительство большепролетных покрытий, где всякие инженерные просчеты, связанные с неточностью расчетов, могут иметь катастрофические последствия, но и к прецизионной работе манипуляторов робототехнических устройств. Монтаж микросхем, выполняемый роботом, должен иметь точность позиционирования большую, чем размер монтируемых элементов. Поэтому в современных расчетах все чаще используются аналитические расчеты по формулам, точность которых определяется лишь достоверностью математической модели исследуемого объекта.

Простой и вполне адекватной моделью стержневой конструкции является ферма с шарнирным соединением стержней. Аксиома отвердевания статики утверждает, что наложение связей на систему твердых тел, находящуюся в равновесии, не меняет ее напряженного состояния. Следовательно, замена шарниров в ферме на жесткое их соединение (сварка) никак не меняет усилий в стержнях, прочность, частоту собственных колебаний, устойчивость и другие ее эксплуатационные свойства. Простейшая же шарнирная схема математически просто моделирует объект, допуская аналитические решения. Здесь представлены несколько известных моделей и решений в системе Maple. К числу основных операторов этой системы, используемых для получения решений, относятся операторы rgf_findrecur и rsolve для вывода и решения рекуррентных уравнений.

## СХЕМА 1

В работе [1] рассмотрена ферма с треугольной решеткой и стойками (рис. 1). Инерционные свойства фермы моделируются одинаковыми массами *m* узлах нижнего пояса. Колебания грузов считаются вертикальными. Число степеней свободы системы грузов фермы с *n* панелями равно $N = 2n - 1$. Получена следующая зависимость первой частоты от числа панелей

$$\omega_D^{-2} = m((32n^4 + 20n^2 - 7)a^3 + 15(4n^2 - 1)c^3 + 90h^3n) / (90h^2EF),$$

где *EF* – жесткость стержней.

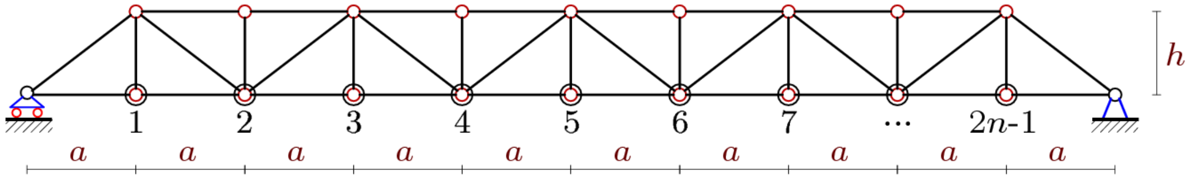


*Рисунок 1. Ферма при n=6*

Показано, что точность решения растет с увеличением числа панелей. Недостатком рассмотренной модели является приближение инерционных свойств фермы лишь массами по нижнему поясу. Более точное моделирование должно учитывать длины стержней и распределение масс по всем узлам пропорционально плотности массы фермы, связанной со структурой решетки.

## СХЕМА 2

Схема, весьма похожая на схему 1, рассмотрена в работе [2] (рис. 2) .

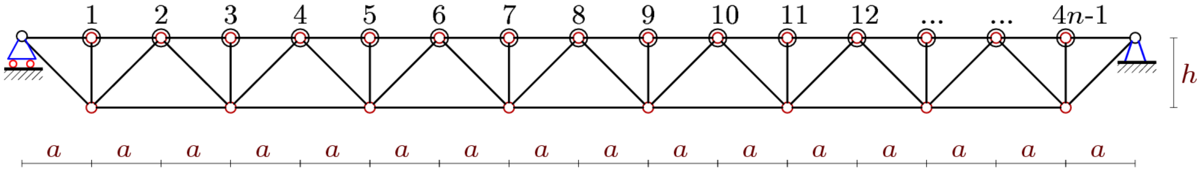


*Рисунок 2. Ферма при n=4*

Вертикальные стойки в этой ферме расположены не во всех панелях, массы распределены по верхнему поясу. Методом индукции по числу панелей проанализированы матрицы, дающие собственные числа для определения частот. Построена картина спектров частот ферм с различным числом панелей. Характерна периодичность кривых (рис. 3).

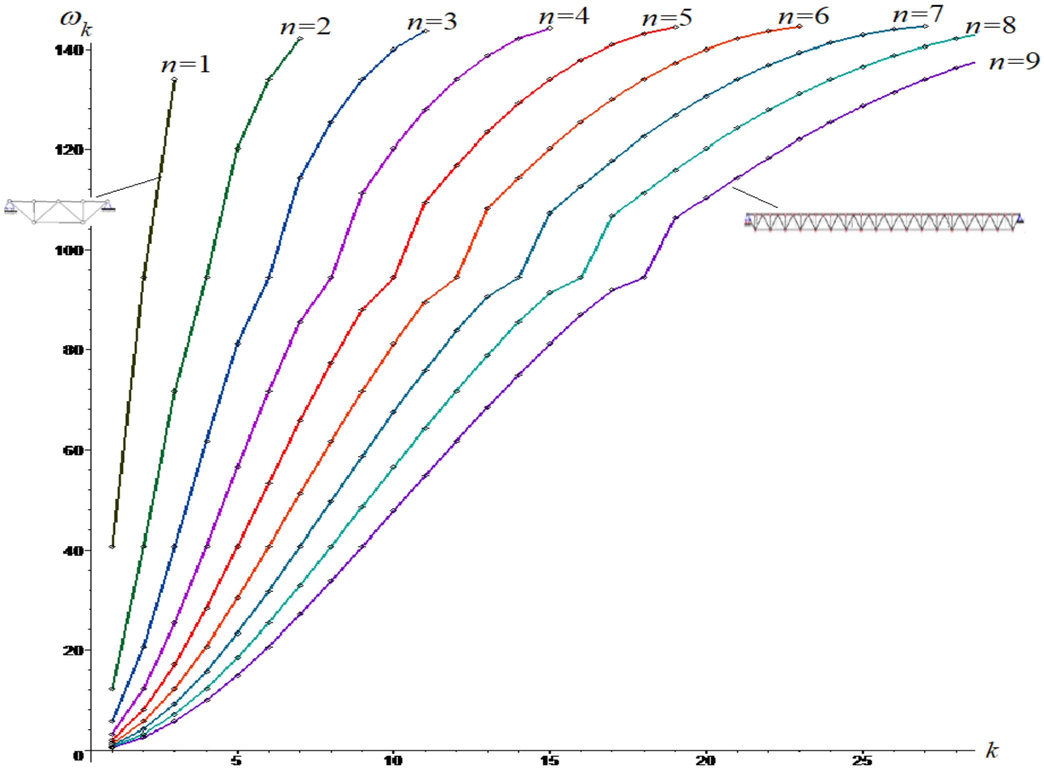


*Рисунок 3. Спектры частот (рад/с) для ферм с различным числом панелей*

## СХЕМА 3

Спектр частот внешне статически неопределимой фермы (рис. 4) изучен в [3]. Частоты колебаний выражаются через собственные числа матрицы, для которой найдены аналитические выражения элементов. Это существенно упрощает и уточняет счет, сводя численную его часть лишь к решению стандартной задачи на собственные числа. Распределение спектров внешне близко к рис. 3.

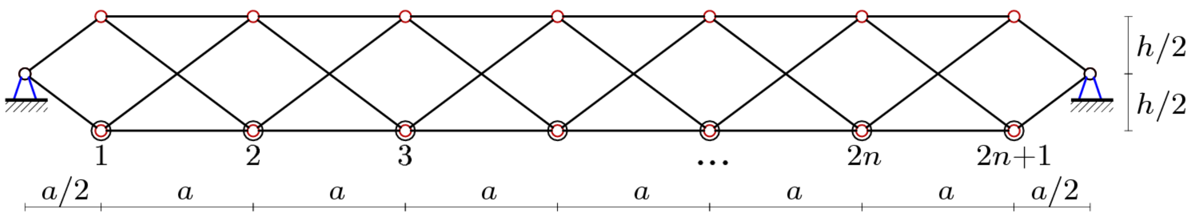


*Рисунок 4. Ферма с шестью панелями*

## СХЕМА 4

В [4] рассмотрены спектры частот фермы с дополнительной горизонтальной опорой (рис. 5).

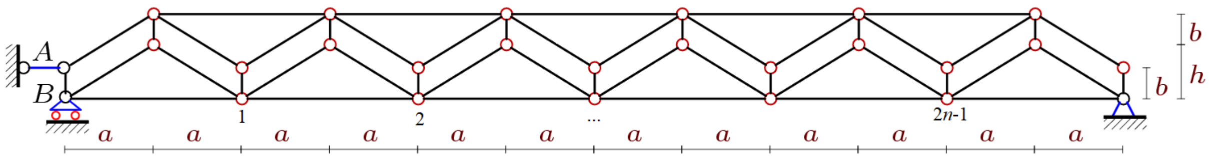


*Рисунок 5. Ферма, n =6*

Методом индукции получен общий вид характеристической матрицы. При $n$=4 удалось найти формулы для ее некоторых собственных чисел:

$$\lambda_{4,5}=3\left(172\pm118\sqrt{2}\pm\sqrt{57236\pm4062\sqrt{2}}\right)\left(a^3+2bh^2+c^3\right)/\left(3h^2EF\right).$$

## СХЕМА 5

Фермы без нижнего пояса (рис. 6) часто используются в конструкциях большепролетных покрытий. Один из вариантов такой фермы изучен в [5]. Это простейшая схема такого типа. Получена аналитическая оценка нижней частоты по методу Донкерлея

$$\omega_D^{-2}=m\sum_{i=1}^{N}\delta_i=m(C_1a^3+C_2c^3+C_3b^3)/(nh^2EF),$$

где $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $C_1=16n^2-18n+5, C_2=16n^2-12n+2, C_3=8n^2-6n+1.$

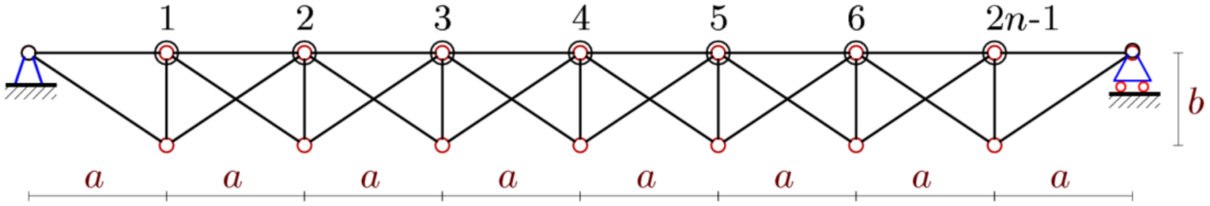


*Рисунок 6. Ферма Финка, n =4*

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведен обзор некоторых аналитических решений задачи об определении собственных частот плоских статически определимых ферм. Показано, что не для всех случаев возможно получение решения в аналитической форме.

**Благодарности**

Работа выполнена в рамках проекта «Динамика легких стержневых конструкций манипуляторов» при поддержке гранта НИУ «МЭИ» на реализацию программ научных исследований «Технологии индустрии 4.0 для промышленности и робототехника» 2020–2022 гг.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кирсанов М.Н.* Аналитическая оценка частоты собственных колебаний фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2020. – Т. 16. – № 5. – С. 351–360.

2. *Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В.* Формулы для расчета спектра частот собственных колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // Постулат. – 2019. – № 3. – С. 11.

3. *Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В.* Спектр собственных частот колебаний внешне статически неопределимой фермы // Транспортное строительство. – 2019. – № 2. – С. 20–23.

4. *Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В.* Анализ собственных частот колебаний плоской фермы с произвольным числом панелей // Вестник МГСУ. – 2019. – Т. 14. – № 3 (126). – С. 284–292.

5. *Петриченко Е.А.* Нижняя граница частоты собственных колебаний фермы Финка // Строительная механика и конструкции. – 2020. – № 3 (26). – С. 21–29.

# MATHEMATICAL MODELS OF LIGHT ROD STRUCTURES IN THE MAPLE SYSTEM. OVERVIEW

***Shirokov A.S.*[1]**

[1]*National Research University "MPEI", Moscow*

[1]as.shirokov@yandex.ru

***Abstract***

The well-known models of planar statically determinate regular trusses and analytical solutions of the problem of calculating natural frequencies are considered. Formulas for frequencies obtained in the Maple system by induction are given.

***Keywords:*** *Maple, truss, induction method, natural frequency.*

## REFERENCES

1. *Kirsanov M.N.* Analytical assessment of the frequency of natural vibrations of a truss with an arbitrary number of panels. Structural mechanics of engineering structures and structures. – 2020. – Vol. 16. – No. 5. – Pp. 351–360.

*2. Kirsanov M.N., Tinkov D.V.* Formulas for calculating the spectrum of natural vibration frequencies of a beam girder with an arbitrary number of panels // Postulate. – 2019. – No. 3. – P. 11.

*3. Kirsanov M.N., Tinkov D.V.* The spectrum of natural frequencies of oscillations of an externally statically indeterminate truss // Transportnoe stroitel'stvo. – 2019. – No. 2. – Pp. 20–23.

*4. Kirsanov M.N., Tinkov D.V.* Analysis of natural frequencies of vibrations of a flat truss with an arbitrary number of panels // Vestnik MGSU. – 2019. – T. 14. – No. 3 (126). – Pp. 284–292.

*5. Petrichenko E.A.* The lower limit of the frequency of natural vibrations of the Fink truss // Structural mechanics and structures. – 2020. – No. 3 (26). – Pp. 21–29.