

## **Аналитическое решение задачи о сдвиге подвижной опоры фермы арочного типа в системе Maple**

*Воропай Руслан Александрович*  
*ТУ Ильменау, Германия*  
*Студент*

*Доманов Евгений Викторович*  
*ТУ Ильменау, Германия*  
*Студент*

### **Аннотация**

Находится зависимость горизонтального смещения опоры от числа панелей статически определимой симметричной фермы, равномерно загруженной по узлам верхнего пояса. Решение получается методом индукции на основе ряда решений для ферм с различным числом панелей. Усилия в стержнях в символической форме находятся методом вырезания узлов из решения системы линейных уравнений в матричном виде. Для вычисления прогиба используется интеграл Мора. Все стержни фермы предполагаются упругими с одинаковой площадью сечения. Получена асимптотика решения по числу панелей.

**Ключевые слова:** асимптотика, ферма, интеграл Мора, прогиб, индукция, Maple

## **Analytical solution of the problem of shifting a movable support of a truss of arch type in the Maple system**

*Voropay Ruslan Alexandrovich*  
*TU Ilmenau, Germany*  
*Student*

*Domanov Evgenii Viktorovich*  
*TU Ilmenau, Germany*  
*Student*

### **Abstract**

The dependence of the horizontal displacement of the support on the number of panels of a statically definable symmetric truss, uniformly loaded over the nodes of the upper belt, is found. The solution is obtained by induction on the basis of a number of solutions for trusses with different numbers of panels. The forces in the rods in symbolic form are found by cutting the nodes from solving a system of linear equations in a matrix form. The Mohr integral is used to calculate the

deflection. All truss rods are assumed to be elastic with the same cross-sectional area. The asymptotics of the solution is obtained by the number of panels.

**Keywords:** asymptotics, truss, Mohr's integral, deflection, induction, Maple

The exact solution of the problem on deformation of regular (periodic) trusses for various numbers of panels are required to assess the accuracy and reliability of numerical methods for the analysis of the theoretical characteristics of deformability of the structures. Typically, these solutions are designed for beam [1-9], truss [9-12], arched [13-14], and lattice trusses [15-27] with regard to the problem of the deflection of the trusses under the load. In [28] the solution of the mast deflection problem is found, in [29-31] the exact formulas for the deflection of frame-type trusses are derived. No less interesting and important is the problem of *shifting* the movable support of the truss [32], especially with regard to the continuous arched truss (Fig. 1). In such structures, even small vertical loads cause significant displacement of the support, which must be taken into account in practice.

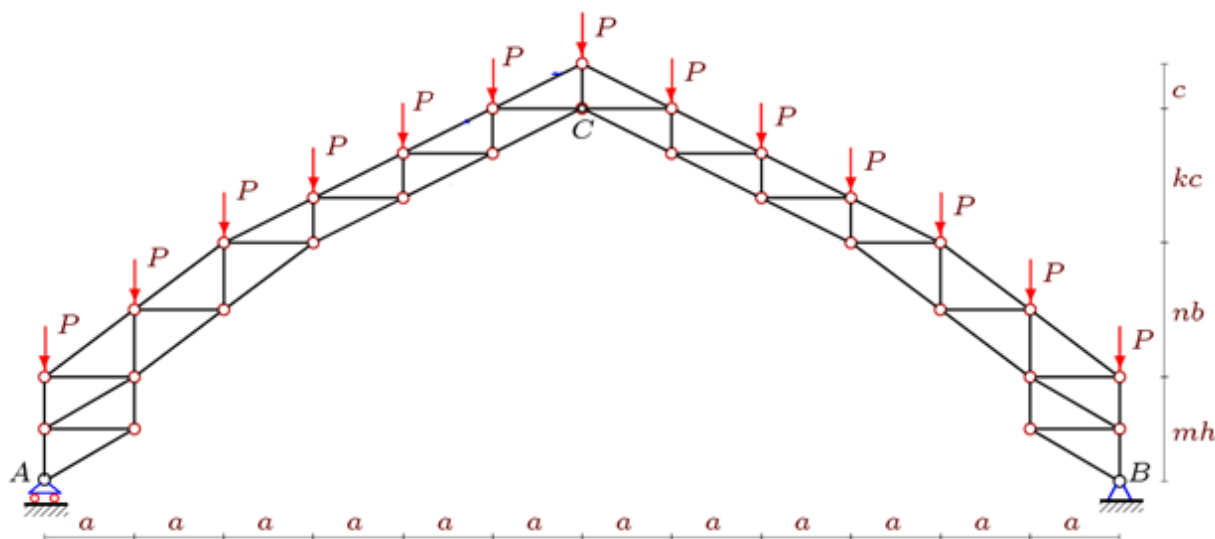


Figure 1 — Truss under load,  $n=m=2$ ,  $k=3$

The investigated truss in each half of the span consists of three parts. Vertical trusses have  $m$  panels, inclined parts contain  $n$  and  $k$  panels. To obtain an analytical solution, we will use a fairly universal and well-tested program for calculating the forces in the rods, written in the language of the computer mathematics system Maple [33]. To enter data, you must specify the coordinates of all the truss joints, including the three reference ones. All these coordinates are specified in cycles with parametrically specified length:

```
> for i to m do x[i]:=a; y[i]:=h*i;end:
> for i to n do
> x[i+m]:=a+a*i; y[i+m]:=m*h+b*i;
> x[i+m+n+2*k]:=a*(1+n+2*k+i); y[i+n+m+2*k]:=m*h+b*n-i*b;
> end:
```

```

> for i to k do
> x[i+m+n]:=n*a+a*i+a; y[i+n+m]:=m*h+b*n+i*c;
> x[i+m+n+k]:=a*(1+n+k+i); y[i+n+m+k]:=m*h+b*n+k*c-i*c;
> end:
> for i to m-1 do x[i+m+2*n+2*k]:=2*a*(n+k)+a;
> y[i+2*n+m+2*k]:=h*(m-i); end:
> x[2*(n+m+k)]:=0:y[2*(n+m+k)]:=0:
> for i to m+n+k do
> x[2*(n+m+k)+i]:=x[i]-a:y[2*(n+m+k)+i]:=y[i]:
> x[3*(n+m+k)+1+i]:=x[n+m+k+i-1]+a:
y[3*(n+m+k)+1+i]:=y[n+m+k+i-1]:
> end:
> x[3*(n+m+k)+1]:=a*(1+n+k):y[3*(n+m+k)+1]:=y[m+n+k]+c:
> x[4*(n+m+k)+2]:=2*x[m+n+k]:y[4*(n+m+k)+2]:=0:
> x[m3-2]:=0: y[m3-2]:=-1:#левая опора
> x[m3-1]:=x[4*(m+n+k)+2]: y[m3-1]:=-1:
> x[m3] :=x[4*(m+n+k)+2]+1: y[m3]:=0:

```

The truss contains  $\mu = 8(m+n+k) + 4$  rods. To specify the order of connection of the rods, special vectors  $\mathbf{R}$  are introduced containing the numbers of the ends of the rods in their coordinates:

```

> for i to 2*(n+m+k-1) do R[i]:=[i,i+1];od:
> for i to 2*(n+m+k+1) do
R[i+2*(n+m+k-1)]:=[i+2*(n+m+k)-1,i+2*(n+m+k)];od:
> for i to m do R[i+2*(n+m+k-1)+2*(n+m+k+1)]:=[i,i+2*(n+m+k)-1];
> R[i+7*(n+m+k)+n+k]:=[i+m+2*n+2*k-1,i+4*(n+k)+3*m+2];
> od:
> for i to n+m+k do
R[i+4*(n+m+k)+m]:=[i,i+2*(n+m+k)];
R[i+6*(n+m+k)+n+k]:=[i+m+n+k-1,i+3*(n+m+k)+1];
> od:
> for i to n+k do
> R[i+5*(n+m+k)+m]:=[i+m-1,i+2*(n+m+k)+m];
> R[i+6*(n+m+k)]:=[i+m+n+k,i+3*(n+m+k)+1];
> od:
> R[8*(n+m+k)+1]:=[m+n+k,3*(n+m+k)+1]:

```

To calculate the deflection, the Mohr's integral is used:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{\mu-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Here it is indicated  $S_i^{(P)}$  — forces in the rends from the given load,  $l_i$  — lengths of rends,  $S_i^{(1)}$  — forces from the unit force applied to the middle of the lower belt,  $EF$  — stiffness of the rends. Рассмотрим случай  $k=m$ ,  $b=h=2c$ . Induction on ten trusses for load from above (Fig. 1) showed that the formula for deflection has the same form

$$\delta = Ph(a^3 A_n + d^3 D_n + h^3 H_n) / (128ac^2 EF), \quad (1)$$

where  $d = \sqrt{a^2 + h^2}$ . If  $m=1$ , the coefficients at  $a^3$  form the following sequence: 1280, 2752, 5056, 8384, 12928, 18880, 26432, 35776, 47104, 60608. To identify the General term of this sequence, we use the operator **rgf\_findrecur** from **genfunc**, which gives a homogeneous recurrent equation of the fourth order

$$A_n = 4A_{n-1} - 6A_{n-2} + 4A_{n-3} - A_{n-4}.$$

The rsolve operator gives a solution to this equation

$$A_{1,n} = 32(n^3 + 7n^2 + 18n + 14). \quad (2)$$

Similarly, we obtain solutions for  $m=2$  and  $m=3$ , respectively

$$A_{2,n} = 32(n^3 + 10n^2 + 36n + 43), \quad (3)$$

$$A_{3,n} = 32(n+4)(n^2 + 9n + 22).$$

We find also that the coefficient  $D_n$  satisfies the homogeneous equation

$$D_n = 5C_{n-1} - 10D_{n-2} + 10D_{n-3} - 5D_{n-4} + D_{n-5}$$

For  $m=1,2,3$  we have solutions

$$D_{1,n} = 16n(n+1)(5n^2 + 21n + 19) / 3$$

$$D_{2,n} = 16n(n+1)(5n^2 + 37n + 63) / 3. \quad (4)$$

$$D_{3,n} = 16n(n+1)(5n^2 + 53n + 131) / 3$$

Coefficient  $H_n$  satisfies the homogeneous equation

$$H_n = 4H_{n-1} - 6H_{n-2} + 4H_{n-3} - H_{n-4}.$$

For the coefficient  $H_n$ , the solution is as follows

$$H_{1,n} = 38n^3 + 240n^2 + 532n + 355,$$

$$H_{2,n} = 42n^3 + 406n^2 + 1442n + 1691, \quad (5)$$

$$H_{3,n} = 46n^3 + 598n^2 + 2872n + 4678.$$

The analytical form of the obtained solution allows us to find its asymptotic approximation for a large number of panels. We introduce a dimensionless displacement  $\delta' = \delta EF / (P_* L)$  related to the total load  $P_* = P(2n + 2k + 3)$  and span length  $L = 2(1 + n + k)a$ . The next limit shows that the displacement growth in such a setting has a fourth order in the number of panels:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta' / n^4 = 5h^4 / (48c^2 L^2).$$

In [34-35] the described method provides solutions for statically defined spatial trusses, in [36] this method is used for the sliding mechanism of parallelogram (scissor) type. The oscillation of the load on a beam truss with an arbitrary number of panels is analyzed in [37,38].

A review of some works based on the method of induction using the Maple system is given in [13, 39,40]. Previously, a similar problem (the problem of the deflection of the cantilever truss with a cross-shaped lattice under the action of a uniform load) was solved in the analytical form by Prof. V.A. Ignatiev.

## References

1. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба двухпролетной плоской фермы // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 5. С. 35-38.
2. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ вариантов схем статически определимой фермы в системе Maple // В сборнике: Международный научный семинар "Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии" - GRACOS-17. Международная школа по математическому моделированию в системах компьютерной математики - "KAZCAS-2017". Международная научно-практическая конференция - "ИТОН-2017" Материалы семинара, школы и конференции. Под общей редакцией Ю.Г. Игнатьева. 2017. С. 100-105.
3. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет, предельный и сравнительный анализ плоской балочной фермы // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2015. № 3 (39). С. 86-93.
4. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с увеличенным подферменным пространством // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 5 (262). С. 21-25.
5. Кирсанов М.Н., Васьков М.И. О зависимости прогиба составной балочной фермы с параллельными поясами от числа панелей при загрузении верхнего пояса // Моделирование и механика конструкций. 2016. № 4. С. 3.
6. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. № 1. С. 84.
7. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование прогиба плоской балочной фермы под действием равномерной нагрузки // Моделирование и механика конструкций. 2016. № 3. С. 10.
8. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с двойными раскосами // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 2. С. 105-111.
9. Гавриленко А.Б., Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка жесткости шпренгельной фермы // Строительство и реконструкция. 2018. № 2 (76). С. 12-17.
10. Кирсанов М.Н. Формулы для оценки жесткости шпренгельной фермы // Современная наука и инновации. 2017. № 1 (17). С. 139-143.
11. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в шпренгельной ферме с произвольным числом панелей // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 2. С. 90-95.

12. Кирсанов М.Н. Формулы для оценки жесткости, прочности и устойчивости шпренгельной фермы // Строительство: новые технологии - новое оборудование. 2017. № 8. С. 16-20.
13. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33
14. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2018. № 4 (67). С. 86-94.
15. Кирсанов М.Н. Аналитическое выражение для прогиба балочной фермы со сложной решеткой // Моделирование и механика конструкций. 2016. №4. С. 4.
16. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет решетчатой фермы // Моделирование и механика конструкций. 2015. № 2 (2). С. 5.
17. Кирсанов М.Н., Москвин В.Г. Деформации плоской фермы с усиленной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. № 4 (279). С. 10-14.
18. Kirsanov M.N. One feature of the constructive solutions on the lattice girder // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 4. С. 90-97.
19. Kirsanov M.N. Formula for the deflection of the planar hinged-pivot frame // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 2. № 17. С. 67-71.
20. Кирсанов М.Н., Арутюнян В.Б. Аналитический расчет величины прогиба балочной фермы со сложной решеткой // Постулат. 2018. № 2-1 (28). С. 16.
21. Кирсанов М.Н., Арутюнян В.Б. Аналитический расчет величины прогиба балочной фермы со сложной решеткой под действием нагрузки по нижнему поясу // Постулат. 2018. № 2-1 (28). С. 21.
22. Кирсанов М.Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами // Транспортное строительство. 2017. № 7. С. 15-18.
23. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба решетчатой фермы от числа панелей // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 4 (44). С. 150-157.
24. Kirsanov M.N. Installation diagram of the lattice truss with an arbitrary number of panels // Инженерно-строительный журнал. 2018. № 5 (81). С. 174-182.
25. Кирсанов М.Н. Inductive analysis of the deformation of a planar multi-layer truss // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 3. № 18. С. 28-32.
26. Рахматулина А.Р., Смирнова А.А. Расчет величины прогиба плоской фермы с произвольным числом панелей в системе Maple // Молодежь и наука. 2018. № 2. С. 111.
27. Kirsanov M. N. A Precise Solution of the Task of a Bend in a Lattice Girder with a Random Number of Panels // Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. No. 1(37). P. 92-99.
28. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка деформативности мачты // Монтажные и специальные работы в строительстве. 2016. Т. 10. № 889.

- С. 7.
29. Кирсанов М.Н. Расчетная модель плоской фермы рамного типа с произвольным числом панелей // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 10 (121). С. 1184-1192.
30. Горбунова А.С., Кирсанов М.Н., Лепетюха В.А. Индуктивный вывод формулы для деформации плоской стержневой модели покрытия промышленного здания // Моделирование и механика конструкций. 2017. № 5. С. 6.
31. Широков А.С., Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба статически определимой порталной фермы в зависимости от числа панелей // Молодежь и наука. 2018. № 5. С. 120.
32. Заборская Н.В. О горизонтальном смещении подвижной опоры составной фермы // В книге: Радиоэлектроника, электротехника и энергетика Двадцать третья международная научно-техническая конференция студентов и аспирантов. 2017. С. 294.
33. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
34. Кирсанов М.Н. Анализ зависимости прогиба фермы прямоугольного покрытия от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 4. № 19. С. 52-57.
35. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5-8.
36. Kirsanov M.N. Parallelogram mechanism with any number of sections // Russian Engineering Research. 2018. Т. 38. № 4. С. 268-271.
37. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Формулы для частоты колебания груза в произвольном узле балочной фермы // Транспортное строительство. 2018. №12. С. 21-23.
38. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитическое решение задачи о частоте колебания груза в произвольном узле балочной фермы в системе Maple // Строительство: наука и образование. 2018. Т. 8. Вып. 4. Ст. 3. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2018.4.3
39. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
40. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12. С. 28.
41. Игнатъев В.А. Расчет регулярных стержневых систем. Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973.