

## **Аналитический расчет прогиба балочной фермы с параллельными поясами**

*Воропай Руслан Александрович*

*НИУ «МЭИ»*

*Студент*

### **Аннотация**

Плоская ферма с раскосной решеткой и стойками загружена по верхнему или нижнему поясу. Искомая зависимость прогиба от числа панелей, размеров фермы и нагрузки получается методом индукции на основании анализа ряда ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей. Используются аналитические возможности системы компьютерной математики Maple, позволяющие составлять и решать рекуррентные уравнения. Для определения усилий в стержнях используется метод вырезания узлов. Предполагается, что все стержни имеют одинаковую жесткость.

**Ключевые слова:** ферма, формула Максвелла - Мора, прогиб, индукция, Maple

### **Analytical calculation of the deflection of a beam truss with parallel belts**

*Voropay Ruslan Alexandrovich*

*NRU «MPEI»*

*Student*

### **Abstract**

A planar truss with a diagonal grille and racks is loaded on the upper or lower belt. The required dependence of the deflection on the number of panels, the size of the truss and the load is obtained by induction on the basis of an analysis of a number of trusses with a consecutively increasing number of panels. The analytical capabilities of the Maple computer mathematics system are used, which make it possible to compose and solve recurrent equations. To determine the forces in the rods, the method of cutting out the knots is used. It is assumed that all the rods have the same rigidity.

**Keywords:** truss, Maxwell's formula - Mora, deflection, induction, Maple

Calculation of forces in trusses is usually done in specialized programs based on the finite element method. With the advent of computer mathematics systems for some types of trusses, it became possible to derive simple analytical dependencies of forces and deformations on dimensions and loads.

However, it is more practical to use formulas that include the number of panels as a parameter. This substantially extends the range of applicability of the formulas.

Previously, such solutions were obtained for a number of flat trusses [1-10], arched [11-14], lattice [15-25] and spatial [26-29]. In [30, 31], an analytical calculation of cable-stayed structures was given, in [32] — a pile foundation. In [33-35] the derivation of formulas for flat scissor (sliding) mechanisms used in transport and machine building is presented. The analytical method proved to be very effective in the calculation of externally statically indeterminate trusses [36-38].

Consider a symmetrical flat, unconscionable truss under the action of a load in the middle of the span (Figure 1).

Such a scheme is quite common in practice (Figure 2), however, compact and convenient in practice design formulas for calculating its deflection in the known literature does not exist. In a truss with  $2n$  panels, the number of rods is  $m = 8n$  including three support rods. Number of hinges  $4n + 3$ . Obviously, the truss is statically determinate and has a regular structure (formed from triangles)

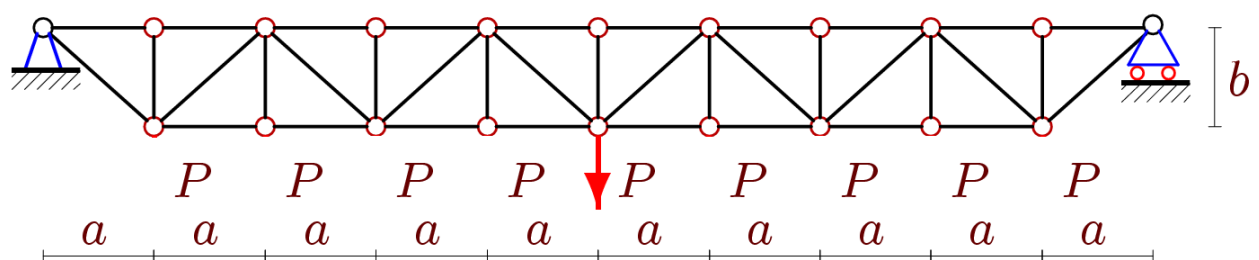
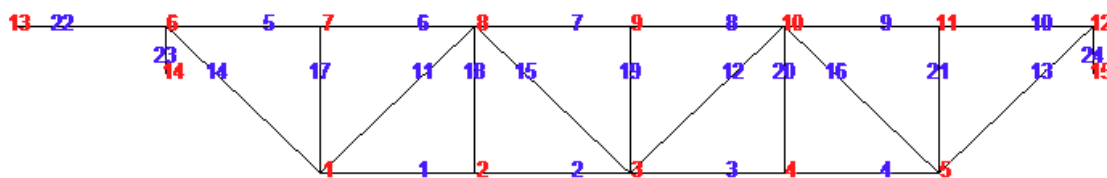


Figure 1 — Truss with load in the middle of the bottom,  $n=5$



Figure 2 — one of the bridge spans

To calculate the forces in the rods and the deflection of the truss, we use a well - proven algorithm based on the program [39], written in Maple. The coordinates of the nodes are entered in the program (Figure 3).

Figure 3 — Numbering of nodes and rods,  $n = 3$ 

The origin of coordinates is placed in the left stationary node (support). The fragment of the coordinate input program has the form

```
> for i to 2*n-1 do
> x[i]:=a*i: y[i]:=0:
> end;
> for i to 2*n+1 do
> x[i+2*n-1]:=a*(i-1): y[i+2*n-1]:=b:
> end:
```

The order of connecting nodes and rods is analogous to entering data of a flat graph in discrete mathematics and has the form

```
> for i to 2*n-2 do
  N[i]:= [i, i+1]; # нижний пояс
> od:
> for i to 2*n do
> N[i+2*n-2]:= [i+2*n-1, i+2*n]; # верхний пояс
> od:
>> for i to n do
> N[i+4*n-2]:= [2*i-1, 2*i+2*n]; # раскосы
> N[i+5*n-2]:= [2*i-1, 2*i+2*n-2]; # раскосы
> od:
> for i to 2*n-1 do
> N[i+6*n-2]:= [i, i+2*n]; # стойки
> od:
```

In the matrix of the equations of equilibrium of the nodes, the direction cosines of the forces in the rods are recorded while observing the accepted rule of signs of forces. Compressed rods have negative forces (these rods can lose stability and must be calculated according to the corresponding formulas). Stretched rods have positive forces. The deflection is calculated using the Maxwell-Mohr's formula:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Here:  $EF$  — the stiffness of the rods,  $S_i^{(P)}$  — the forces in the rods from a given load,  $l_i$  — the length of the rods,  $S_i^{(1)}$  — the forces from a single vertical force applied to the middle of the lower belt. The stiffness  $EF$  is assumed to be the

same for all the rods. The calculation of ten trusses for the load in the middle of the lower belt (Figure 1) showed that the deflection formula has the form

$$\Delta = P(a^3 A_n + b^3 B_n + c^3 C_n) / (2b^2 EF), \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (1)$$

It was necessary to analyze ten deflections and obtain the following natural numbers: 1, 6, 19, 44, 85, 146, 231, 344, 489, 670 to obtain a common term of the sequence of coefficients  $a^3$ . Finding the general term of this sequence is not easy. The `rgf_findrecur` operator from the Maple `genfunc` package makes it possible to obtain a linear homogeneous recursion equation of the fourth order that is satisfied by the terms of the sequence

$$A_n = 4A_{n-1} - 6A_{n-2} + 4A_{n-3} - A_{n-4}.$$

The recursive equation can be solved using the `rsolve` operator:

$$A_n = n(1 + 2n^2) / 3.$$

For the coefficient at  $c^3$ , we obtain the simple equation

$$C_n = 2C_{n-1} - C_{n-2}.$$

The solution of this equation has the form  $C_n = n$ . Similarly we find

$$B_n = (-1)^n + 1.$$

The algorithm makes it easy to change the condition of the problem and obtain a formula for deflection under a different load. Consider a uniform load along the nodes of the lower belt (Figure 3). In the program, only the line of filling the load vector B (the right-hand side of the system of equilibrium equations, the even elements correspond to the vertical load) needs to be changed:

```
> for i to 2*n-1 do B[2*i]:=1; end;
```

For a distributed load from below (Fig. 4) applied to the formula (1), we obtain the coefficients:

$$A_n = n^2(1 + 5n^2) / 6, \quad C_n = n^2, \quad B_n = (-1)^n + 1.$$

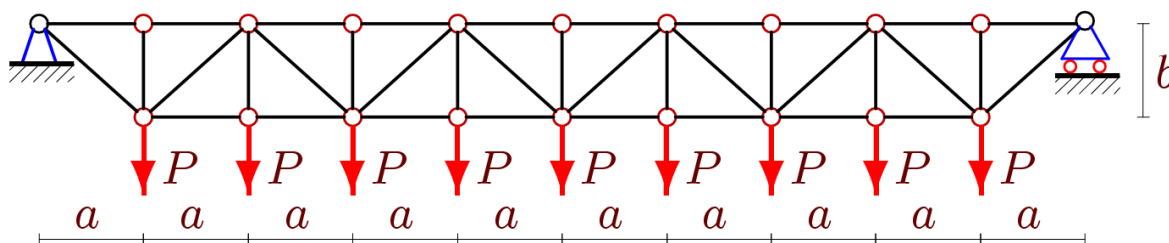


Figure 4 - Truss with distributed load on the bottom belt,  $n=5$

For a distributed load on the upper belt (Figure 5), applying the same formula (1), we find that the coefficients are almost unchanged:

$$A_n = n^2(1 + 5n^2) / 6, \quad C_n = n^2, \quad B_n = 0.$$

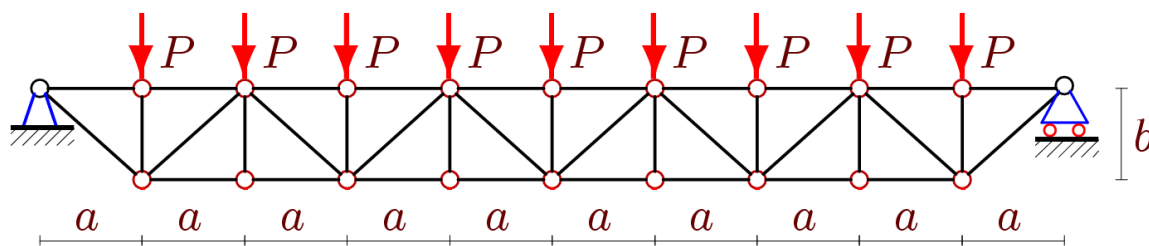


Figure 5 — Truss with load distributed on the upper belt,  $n = 5$

The formulas obtained can be used both for checking numerical solutions and for a simple approximate evaluation of the deformability of a structure. The linear combination of the three solutions obtained, by virtue of the linearity of the problem, significantly expands the range of applicability of the formulas. An overview of some papers that used the induction method to derive the dependence of the deflection on the number of panels is given in [40]. In [41], in addition to the analytical calculation of the deflection, an algorithm for mounting a truss is proposed on the basis of the method of discrete mathematics — a system of regular coloring of graphs.

## References

1. Кирсанов М.Н. Анализ усилий и деформаций в корабельном шпангоуте моделируемого фермой // Вестник государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. 2017. Т. 9. № 3. С. 560–569. DOI: 10.21821/2309-5180-2017-9-3-560-569
2. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях симметричной балочной фермы // Строительство и реконструкция. 2017.1(69). С.19-23.
3. Кирсанов М.Н. Точное решение задачи о прогибе балочной фермы с произвольным числом панелей в системе Maple // Строительство: наука и образование. 2017. Том 7. Выпуск 1 (22). Ст. 1. Режим доступа: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2017.1.1
4. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей // Механизация строительства. 2017. № 3. С. 26-29
5. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба двухпролетной плоской фермы // Механизация строительства. 2017. № 5. С. 35-38.
6. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы // Инженерно-строительный журнал. 2012. №5(31). С. 38-42
7. Belyankin N.A., Boyko A. Y., Kirsanov M.N. The derivation of the formula for arch deflection by the method of double induction in the Maple system //Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» - GRACOS-17. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. С. 120-123.

8. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels//Science Almanac. 2017. N 2-3(28). С. 268-271
9. Kazmiruk I.Yu. On the arch truss deformation under the action of lateral load // Science Almanac. 2016. No. 3-3(17). Pp. 75-78.
10. Kirsanov M.N., Lafickova M. G., Nikitina A. S. An inductive derivation of the dependence of the arched truss deflection on the number of panels//Science Almanac. 2017. N 4-3(30).С. 205-208.
11. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2018. 14(1). С.64-70. DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-64-70
12. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. №1. С.7-11.
13. Компанеец К. А Расчет смещения подвижной опоры плоской арочной раскосной фермы при нагрузке в середине пролета // Молодежь и наука. 2017. №4. С.108.
14. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 5. С. 50-55.
15. Горбунова А.С., Кирсанов М.Н., Лепетюха В.А. Расчет прогиба симметричной фермы с решеткой «STAR» в аналитической форме//Строительная механика и конструкции. 2017. № 1 (14). С. 36-41.
16. Кирсанов М.Н., Арутюнян В.Б. Аналитический расчет величины прогиба балочной фермы со сложной решеткой // Постулат. 2018. №2.
17. Kirsanov M. N. A Precise Solution of the Task of a Bend in a Lattice Girder with a Random Number of Panels. Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. No. 1(37). P.92-99
18. Кирсанов М.Н., Заборская Н.В. Деформации периодической фермы с раскосной решеткой // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 3(71). С. 61–67.
19. Гриднев С.Ю., Кирсанов М.Н., Овчинников И.Г. Статический расчет двухраскосной балочной фермы // Интернет-журнал НАУКОВЕДЕНИЕ. Том 8, №6 (2016) <http://naukovedenie.ru/PDF/99TVN616.pdf>
20. Кирсанов М.Н. Статический расчет плоской фермы с двойной треугольной решеткой // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2017. № 11 (248). С. 32-36.
21. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. N3. С. 23-27.
22. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме // Механизация строительства. 2017. №4. С. 20-23.
23. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа // Транспортное строительство. 2017. №5. С.11-13.
24. Кирсанов М.Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами// Транспортное строительство. 2017. №7. С.15-17.
25. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки// Вестник

- машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
26. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure. Magazine of Civil Engineering. 2018. No. 08. Pp. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6
27. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. Вып. 5 (116). С. 579–586. DOI: [www.dx.doi.org/10.22227/1997-0935.2018.5.579-586](http://www.dx.doi.org/10.22227/1997-0935.2018.5.579-586)
28. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 2 (101). С. 165–171.
29. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный журнал строительства и архитектуры. 2016. №1(41). С. 93-100.
30. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет деформаций и усилий в плоской вантовой ферме // Механизация строительства. 2018. № 1. С. 29-33
31. Кирсанов М.Н. Статический расчет вантовой системы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2013. Т. 1. № 3. С. 89-93.
32. Кирсанов М.Н. Дискретная модель свайного фундамента // Инженерно-строительный журнал. 2015. №3(55). С. 3–9. doi: 10.5862/MCE.55.1
33. Кийко Л.К., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет подъемника параллелограммного типа с произвольным числом секций // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2016. №3. С. 48-53.
34. Kirsanov M.N. Parallelogram Mechanism with Any Number of Sections // Russian Engineering Research. 2018. Vol. 38. Issue 4, pp 268–271.
35. Кирсанов М.Н., Цзян Х. Математическая модель и анализ колебаний ножничного механизма с произвольным числом элементов // Человек. Общество. Инклюзия. 2016. № 2-часть 1 (26). С. 175-182.
36. Astakhov S. The derivation of formula for deflection of statically indeterminate externally flat truss under load at midspan. Construction and Architecture. Vol. 5. № 2. 2017. Pp. 50-54.
37. Кирсанов М.Н., Рахматулина А.Р., Смирнова А.А. Анализ прогиба внешне статически неопределимой балочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2017. № 1 (14). С. 31-35.
38. Кирсанов М.Н., Суворов А.П. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 8 (107). С. 869-875
39. Кирсанов М.Н. Задачи по теоретической механике с решениями в Maple 11. М.: Физматлит, 2010. 264 с.
40. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
41. Кирсанов М. Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. 2016. №5(39). С. 61-68.