

## Вывод формулы для прогиба фермы с дополнительными горизонтальными распорками

*Воропай Руслан Александрович*

*НИУ «МЭИ»*

*Студент*

### Аннотация

Приводится вывод зависимости прогиба плоской статически определимой фермы от числа панелей при загрузении силой в середине пролета. Для решения поставленной задачи применяется метод индукции и система символьной математики Maple. Составляются и решаются рекуррентные уравнения для коэффициентов формулы, полученных при решении последовательности задач о прогибе фермы с различным числом панелей. Усилия в стержнях находятся методом вырезания узлов, перемещение — по формуле Максвелла - Мора. Предполагается, что жесткость всех стержней одинаковая, а опоры недеформируемые.

**Ключевые слова:** ферма, формула Максвелла - Мора, прогиб, индукция, Maple

## Derivation of the formula for the deflection of the truss with additional horizontal struts

*Voropay Ruslan Alexandrovich*

*NRU «MPEI»*

*Student*

### Abstract

The derivation of the dependence of the deflection of a planart statically determinate truss on the number of panels under the load of force in the middle of the span is given. To solve this problem, we use the method of induction and the system of symbolic mathematics Maple. We compose and solve recurrent equations for the coefficients of the formula obtained in solving a sequence of problems on the deflection of a truss with a different number of panels. The forces in the rods are found by the method of cutting out the knots, the displacement by the Maxwell-Mora formula. It is assumed that the rigidity of all rods is the same, and the supports are not deformable.

**Keywords:** truss, Maxwell's formula - Mora, deflection, induction, Maple

The scheme of the truss with two lateral horizontal struts is proposed. The truss has a diagonal grid (Fig. 1). A similar truss under the action of uniform loading along the lower belt and in the middle of the lower belt with a similar lattice, but with other additional support bonds was considered in [1]. To obtain the

dependence of the deflection on the number of panels, it is necessary to calculate a series of trusses with a different number of panels, and then generalize these solutions to an arbitrary case. In [2-8], the method of induction was used to solve similar problems for planar trusses. In [9-15] by the induction method, fairly simple formulas for the dependence of the deflection on the number of panels for some regular trusses of arched form were found. Even more complex problems on the deformation of spatial trusses with an arbitrary number of panels in an analytical form are solved in [16-21]. Separately, solutions can be identified for lattice and externally statically indeterminate trusses [22-28]. The problem of deformation of a pile foundation with an arbitrary number of piles by induction was solved in [29].

The considered truss, despite four supports (Figure 1), is statically determinate. In a truss with  $2n$  panels on the upper belt, the number of rods —  $M = 4n + 18$  including five support rods, the number of hinges —  $m = 2n + 14$ .

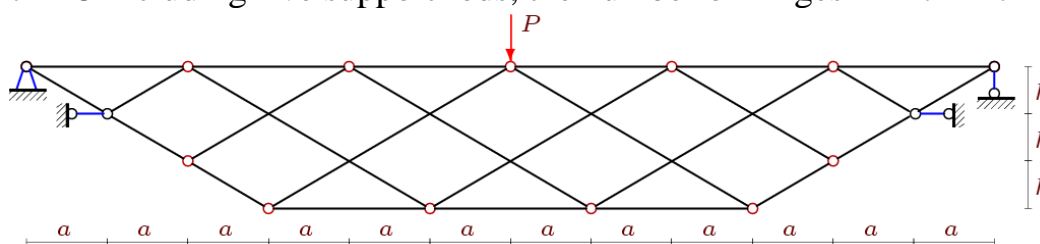


Figure 1 — Truss with load in the middle of the top belt

Calculation of the deflection begins with the determination of the forces in the rods. In the program [30], the coordinates of the nodes and the order of connection of the nodes and rods are entered. The fragment of the coordinate input program in the language of the Maple system has the form

```
> for i to 3 do
    x[i]:=a*(i-1):          y[i]:=(4-i)*h:
>   x[i+n+4]:=(3+2*n+i)*a: y[i+n+4]:=h*i;
> od:
> for i to n+1 do x[i+3]:=a+2*a*i:y[i+3]:=0:      od:
> for i to n+2 do x[i+n+7]:=2*a*i:y[i+n+7]:=3*h:  od:
```

The coefficients of the system of equations of node equilibrium (direction cosines of forces) are determined by the coordinates of the nodes and the structure. To calculate the deflection, the Maxwell-Mora formula is used in the form:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{M-5} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Here:  $EF$  — the stiffness of the rods,  $S_i^{(P)}$  — the forces in the rods from a given load,  $l_i$  — the length of the rods,  $S_i^{(1)}$  — the forces from a single vertical force applied to the middle of the upper belt. The stiffness  $EF$  is assumed to be the same for all the rods.

Calculations show that for some numbers of panels the determinant of the system of equilibrium equations turns to zero. We introduce a function that takes on natural numbers only the admissible values of the panels  $n = 3, 5, 9, 11, 15, 17, 21, \dots$ . Only odd numbers are considered when there is a central point on the upper belt to which the force is applied. The function has the form

$$k = (1 + 6u - (-1)^u) / 4, n = 2k - 1, u = 1, 2, 3, \dots$$

Induction on ten trusses showed that the deflection formula has the same form

$$\Delta = P(a^3 A_u + c^3 C_u) / (EFh^2), c = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

If a common term of the sequence of coefficients  $a^3$  was found, it was necessary to analyze 12 expressions of deflection and obtain the following series of coefficients: 9, 34, 66, 139, 219, 364, 516, 757, 1005, 1366, 1734, 2239. To reveal the general term of this sequence in manual enough complicated. The `rgf_findrecur` of the Maple system `genfunc` of the Maple system for the terms of this sequence yields the following linear homogeneous recursion equation of the sixth order

$$A_u = 2A_{u-1} + A_{u-2} - 4A_{u-3} + A_{u-4} + 2A_{u-5} - A_{u-6}.$$

For the coefficients  $c^3$ , a simpler equation

$$C_u = C_{u-1} + C_{u-2} - C_{u-3}$$

Solving recurrence equations with the help of the `rsolve` operator, the following regularities are obtained for the coefficients:

$$A_u = (4u^3 + 12u^2 + (20 + 6(-1)^u)u + (-1)^{u+1} + 5) / 4,$$

$$C_u = (6u + (-1)^{u+1} + 5) / 4.$$

The graph of the dependence of the dimensionless deflection  $\Delta' = \Delta EF / (PL)$  on the number of the parameter  $u$ , which determines the number of panels (Fig. 2), despite the appreciable jumps, suggests the presence of an asymptote. Indeed, there is a limit

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \Delta' / u = 3h / (2L).$$

Taking into account that at the beginning of the graph the deflection drops, and then there is an oblique asymptote with a positive inclination angle, it can be asserted that the obtained dependence has a minimum. This can be used to optimize the rigidity design.

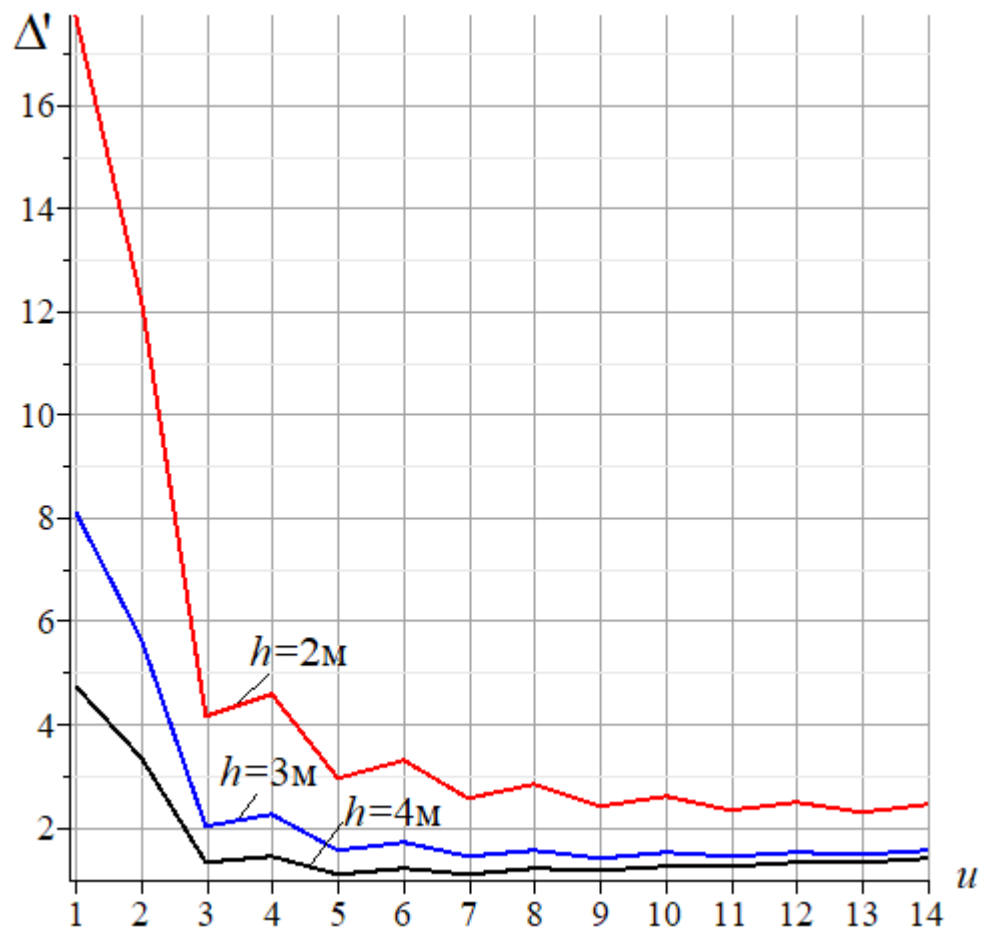


Figure 2 — Dependence of the deflection on the number of panels,  $L=4na=100\text{m}$

A review of some papers using the method of induction can be found in [15,31]. In [32], using the same approach, an analytical solution was given on the optimal truss with allowance for creep.

## References

1. Domanov E.V. The formula for the dependence of the deflection of an externally statically indeterminate truss on the number of panels // Postulat. 2018. No. 6.
2. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice. Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 3. Pp. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7.
3. Кирсанов М.Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами // Транспортное строительство. 2017. №7. С.15-17.
4. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // Architecture and Engineering. 2016. T. 1. № 3. С. 14-17.
5. Кирсанов М.Н. О влиянии наклона подвижной опоры на жесткость балочной фермы // Вестник МГСУ. 2016. № 10. С. 35-44.
6. Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 4 (56). С. 38-44.

7. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет плоской регулярной фермы с растянутыми раскосами // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 3 (272). С. 31-35.
8. Кирсанов М.Н., Хроматов В.Е. Моделирование деформаций плоской фермы треугольного очертания // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 6 (275). С. 24-28.
9. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58–65. doi: 10.5862/MCE.57.5
10. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9-14.
11. Kazmiruk I.Yu. On the arch truss deformation under the action of lateral load // Science Almanac. 2016. No. 3-3(17). С. 75-78.
12. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. №1. С.7-11.
13. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.
14. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 5. С. 50-55.
15. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
16. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. № 2 (101). С. 165-171.
17. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. №. 5 (116). С. 579–586. DOI: [www.dx.doi.org/10.22227/1997-0935.2018.5.579-586](http://www.dx.doi.org/10.22227/1997-0935.2018.5.579-586)
18. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
19. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 1 (53). С. 32-38.
20. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6. С. 28-34.
21. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure. Magazine of Civil Engineering. 2018. No. 08. Pp. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6
22. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа // Транспортное строительство. 2017. №5. С.11-13.

23. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме // Механизация строительства. 2017. №4. С. 20-23.
24. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей // Механизация строительства. 2017. № 10. С. 24-27.
25. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
26. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. №3. С.23-27.
27. Кирсанов М.Н., Суворов А.П. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. №. 8 (107). С. 869-875
28. Кирсанов М. Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. 2016. №5(39). С. 61-68. DOI: 10.21821/2309-5180-2016-8-5-61-68
29. Кирсанов М.Н. Дискретная модель свайного фундамента // Инженерно-строительный журнал. 2015. №3(55). С. 3–9. doi: 10.5862/МСЕ.55.1
30. Кирсанов М.Н. Задачи по теоретической механике с решениями в Maple 11. М.: Физматлит, 2010. 264 с.
31. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
32. Тиньков Д.В. Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 25–32