УДК 624.04:531.391.3

Вывод формулы первой частоты собственных колебаний плоской фермы

Юрин Кирилл Дмитриевич
Национальный исследовательский университет "МЭИ"
Студент

Аннотация
В работе рассмотрена плоская модель статически определимой фермы. При помощи метода индукции, метода Донкерлея и формулы Максвелла – Мора получена формула зависимости нижней оценки основной частоты от числа панелей. Сравнение результата со значением частоты, полученным численным из анализа системы с учетом всех степеней свободы показало высокую точность выведенной формулы. Важный аспект в том, что с увеличением числа степеней свободы точность формулы растет. Расчеты были проведены в компьютерной программы Maple .
Ключевые слова: Maple, ферма, метод Донкерлея, метод индукции, аналитическое решение, колебания, нижняя оценка частоты, основная частота

Derivation of the formula for the first frequency of natural oscillations of a planar truss

Yurin Kirill Dmitrievich
National Research University "MPEI"
Student

Abstract
The paper considers a flat model of a statically determinate farm. Using the induction method, the Dunkerley method and the Maxwell-Mohr formula, a formula for the dependence of the lower estimate of the fundamental frequency on the number of panels is obtained. Comparison of the result with the frequency value obtained numerically from the analysis of the system, taking into account all degrees of freedom, showed the high accuracy of the derived formula. An important aspect is that with an increase in the number of degrees of freedom, the accuracy of the formula increases. The calculations were carried out in the Maple computer program.
Keywords: Maple, truss, Dunkerley method, induction method, analytical solution, oscillations, lower frequency estimate, fundamental frequency

Для расчета спектра частот собственных колебаний инженерных конструкций на практике чаще всего используются численные методы, в основе которых лежит дискретизация метода конечных элементов [1-3]. Аналитические расчеты редки и применяются в основном для простых моделей регулярных ферм для нижней или верхней оценки первой частоты с применением метода Донкерлея (оценка снизу) или Рэлея (оценка сверху) [4-6]. Масса фермы в таких моделях как правило сосредотачивается в узлах. Решения на основе оценок Донкерлея и Рэлея дают простые аналитические выражения для границ частоты при произвольном числе панелей, если ферма регулярная. Наиболее простой метод — это метод Донкерлея [7]. Другой метод, метод Рэлея (энергетический), дает более громоздкие расчетные формулы. Известны также аналитические решения некоторых задач деформации для плоских и пространственных регулярных ферм [8- 12].

В настоящей работе приводится вывод формулы для зависимости первой (наименьшей) частоты собственных колебаний плоской фермы от числа панелей. Ферма статически определимая симметричная балочного типа с решеткой раскосного типа (рис. 1). Фермы с k панелями, где n=2k длиной a в каждой. Высота фермы h. Предполагается, что масса фермы равномерно распределена по узлам нижнего и верхнего пояса. Массы колеблются по вертикали.

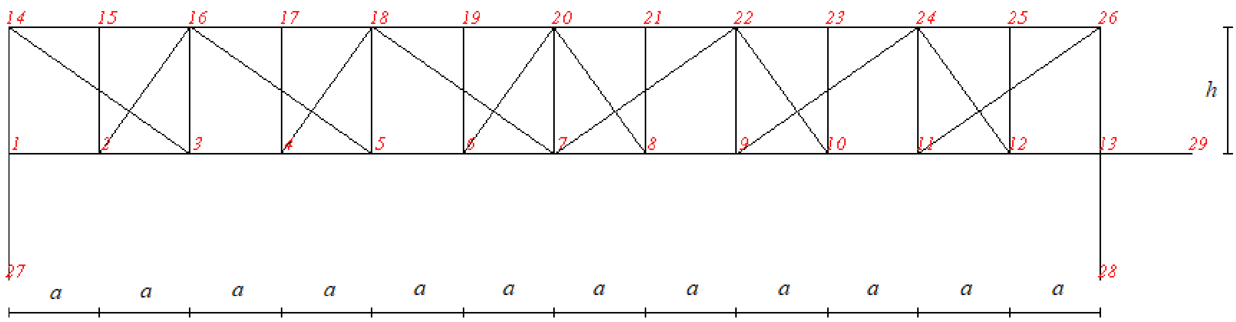

Рисунок 1 – Ферма при k=3

Число степеней свободы используемой модели фермы равно числу узлов N=4n+2. Ферма состоит из K=4(2n+1) стержней (включая три опорные стержня). Уравнения колебаний системы грузов имеют матричный вид:

$$\mathbf{J}_N\ddot{\mathbf{Y}}+\mathbf{D}_N\mathbf{Y}=0, \tag{1}$$

где $\mathbf{D}_N$ – матрица жесткости конструкции, $\mathbf{Y}=[y_1,y_2,...,y_N]^T$ – вектор (набор) смещений грузов по вертикали, $\mathbf{J}_N=m\mathbf{I}_N$ – матрица инерции системы диагонального вида в случае одинаковых масс, $\mathbf{I}_N$ – единичная матрица, $\ddot{\mathbf{Y}}$ — вектор ускорений масс. Обратной к матрице жесткости $\mathbf{D}_N$ является матрица $\mathbf{B}_N$, элементы которой (смещения от единичных сил) вычисляются с помощью интеграла Мора. Суммирование проводится по всем стержням фермы:

$$b_{i,j}=\sum_{x=1}^{K}S_x^{(i)}S_x^{(j)}l_x/(EF). \tag{2}$$

Здесь $S_x^{(i)}$— усилие в стержне x от действия единичной вертикальной силы в узле i, l_x— длина стержня x , E — модуль упругости материала стержней, F — площадь поперечного сечения стержней. Жесткости всех стержней в простейшей постановке принимаются одинаковыми.

Приближенное решение по методу Донкерлея для оценки первой частоты колебаний снизу ω_D выражается через парциальные частоты:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{x=1}^{N} \omega_x^{-2}, \tag{3}$$

где ω_x — парциальная частота колебаний массы m. Для расчета колебаний отдельной массы при вычислении парциальной частоты уравнение (1) записывается в скалярном виде:

$$m\ddot{y}_x + d_x y_x = 0,$$

где d_x — коэффициент жесткости, y_x — смещение массы, $\ddot{y}_x$ — ускорение. Отсюда для частоты колебаний одного груза (парциальной частоты груза в узле *x*) получается формула: $\omega_x = \sqrt{d_x / m}$. Для определения коэффициента жесткости используется интеграл Мора: $\delta_x = 1/d_x = \sum_{j=1}^{K} \left(\tilde{S}_j^{(x)}\right)^2 l_j / (EF)$.

Введено обозначение: $\tilde{S}_j^{(x)}$ — усилие в стержне с номером *j* от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу *x* с массой. Из (3) следует:

$$\omega_D^{-2} = m\sum_{x=1}^{N} \delta_x = m\Delta_k. \tag{4}$$

Для расчета усилий в стержнях методом вырезания узлов в аналитической форме используется система символьной математики Maple. В программу вносятся координаты узлов. Соответствующий фрагмент программы имеет вид:

```
> for i to 2*n+1 do
    x[i]: = a*(i-1): y[i]: =0:
    x[i+2*n+1]: =a*(i-1): y[i+2*n+1]: =h
 end:
```

Расчет усилий в стержнях и применение формулы (4) для ферм с различным числом панелей дает общий вид для коэффициента Δ_n:

$$\Delta_k = (C_{1,k}a^3 + C_{2,k}c^3 + C_{3,k}f^3 + C_{4,k}h^3) / (45kh^2EF). \tag{5}$$

Для коэффициентов в этой формуле методами системы Maple получаются формулы, как решения рекуррентных уравнений, которым удовлетворяют члены последовательностей коэффициентов. Операторы системы Maple дают:

$$C_{1,k} := 512k^5 + 320k^3 + 630k^2 - 22k,$$

$$C_{2,k} := 120k^3 + 45k^2 - 15k/2,$$

$$C_{3,k} = 180 + 45k^2,$$

$$C_{4,k} := 120k^3 + 510k^2 + 705k/2 - 165/2.$$

В итоге

$$\omega_D^{-2} = m(C_{1,k}a^3 + C_{2,k}c^3 + C_{3,k}f^3 + C_{4,k}h^3) / (45kh^2EF). \tag{6}$$

Полученное решение необходимо сравнить с численным, полученным для системы с N степенями свободы. Для этого используется оператор **Eigenvalues** из пакета **LinearAlgebra** для вычисления собственных значений матрицы $\mathbf{B}_N$. Для расчетов приняты размеры фермы: $a = 4$м, $h = 3$м , $f = \sqrt{a^2 + h^2} = 3.6$м, $c = \sqrt{4a^2 + h^2} = 5$м. Площадь поперечных сечений всех стержней принимается одинаковой: $F = 8\text{см}^2$. Модуль упругости стали $E = 2{,}0 \cdot 10^5$ МПа, массы в узлах $m = 200$ кг. На рисунке 2 сравниваются зависимость от количества панелей нижней оценки наименьшей частоты ω_D по формуле Донкерлея (8) и значения первой частоты ω_1 спектра системы с N степенями свободы, найденная численно.

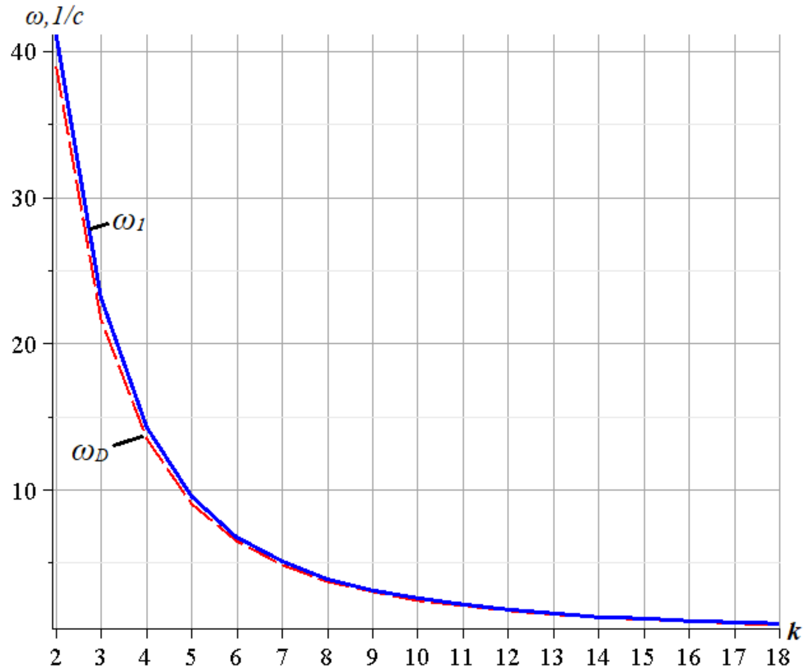

Рисунок 2 – Зависимость частоты колебаний от числа панелей

Как и предполагалось, метод Донкерлея дает оценку частоты снизу. Для более точного сравнения аналитического решения и численного вводится относительная величина $\varepsilon_D = |\omega_D - \omega_1| / \omega_1$.

Из рисунка 3 видно, что с увеличением числа панелей погрешность выведенной формулы (6) падает, принимая вполне допустимое значение в несколько процентов уже при k=18.

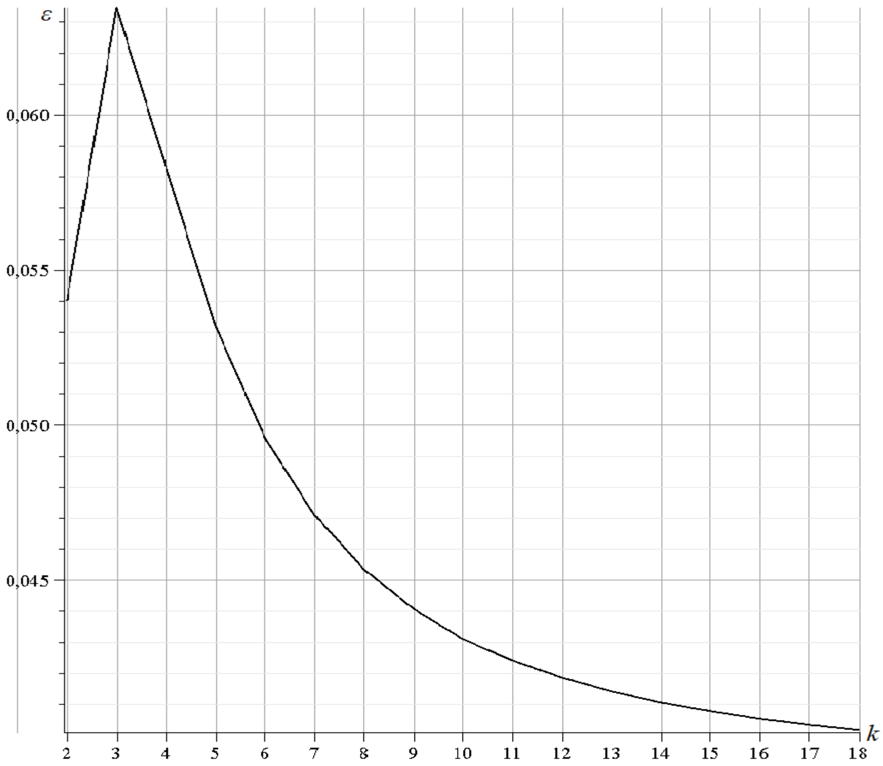

Рисунок 3 – Погрешность аналитической формулы

Библиографический список

1. Коваленко Г. В., Макеев В. Б., Дементьева В. В. Исследование частот собственных колебаний ферм на основе метода конечных элементов (МКЭ) // Молодая мысль: Наука, технологии, инновации. 2015. С. 44-48.
2. Игнатьев В.А., Игнатьев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: Издательство АСВ, 2022. 306 с.
3. Зенкевич О. (O.C. Zienkiewicz), Морган К. (K. Morgan) Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ. - М.: Мир, 1986.
4. Kirsanov M. Trihedral Rod Pyramid: Deformations and Natural Vibration Frequencies; 2022; Construction of Unique Buildings and Structures; 104 Article No 10401. doi: 10.4123/CUBS.104.1
5. Волков А.С., Плотников Ю.Г. Динамические расчеты упругих систем: учеб. пособие Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2008,
6. Кирсанов М.Н., Лыонг Конг Л. Прогиб и нижняя граница основной частоты собственных колебаний балочной фермы // Строительная механика и конструкции 2022. №4(35). С. 24-33. DOI 10.36622/VSTU.2022.35.4.003
7. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний : учебник для вузов / Бидерман В. Л. ; авт. вступ. ст. Демьянушко И. В. - 3-е изд., доп. - М. : URSS : Ленанд, 2017. - V, 405 с. : ил. - (Физико-математическое наследие: физика (механика)) - ISBN 978-5-9710-4573-1.
8. Зименков Н. А. Формула для прогиба фермы рамного типа под действием сосредоточенной нагрузки в середине пролета // Постулат. 2019. № 1. С. 2.

9. Овсянникова В.М. Зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2020. №4 (27). С. 16-25.
10. Грибова О.В. Вывод зависимости прогиба плоской трапецевидной фермы от числа панелей // Постулат. 2020. №3. С. 6.
11. Воробьев О.В. О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // Строительная механика и конструкции. 2020. № 1 (24). С. 25-38.
12. Петренко В.Ф. Оценка собственной частоты фермы с учетом жесткости опор по Донкерлею в системе Maple // В книге: Радиоэлектроника, электротехника и энергетика. тезисы докладов Двадцать восьмой международной научно-технической конференции студентов и аспирантов. Москва, 2022. С. 799