

## Анализ значения первой частоты собственных колебаний плоской фермы

*Манукало Арсений Сергеевич*

*Национальный исследовательский университет "МЭИ"*

*Студент*

### Аннотация

В работе рассмотрена динамика плоской модели статически определимой фермы. При помощи метода индукции, метода Донкерлея и формулы Максвелла – Мора получена формула зависимости нижней оценки основной частоты от числа панелей. Проведение сравнения результата со значением частоты, полученным из анализа системы с учетом всех степеней свободы показало высокую точность выведенной формулы. Важным является тот факт, что при увеличении числа степеней свободы точность формулы растет. Расчеты проводились с использованием компьютерной программы Maple.

**Ключевые слова:** Maple, индукция, ферма, метод Донкерлея, анализ, расчет, частота, формула.

### Analysis of the planar truss natural vibrations first frequency

*Manukalo Arsenii Sergeevich*

*National Research University "MPEI"*

*Student*

### Abstract

In the course of the work the planar model of a static truss was considered, as well as the lower estimate of the main frequency was calculated using the induction method and the Maxwell - Mohr formula. The comparison of the frequency value with the frequency value obtained as a result of the system analysis with all degrees of freedom showed a high accuracy of the derived formula. The important thing is that when you increase the number of degrees of freedom, the accuracy of the formula increases. Calculations were carried out using the computer program Maple.

**Keywords:** Maple, induction, truss, Dunkerley method, analysis, calculation, frequency, formula.

Численные методы, основанные на дискретизации метода конечных элементов [1-3], часто используются на практике для расчета частотного спектра собственных колебаний инженерных конструкций. Аналитические расчеты проводятся редко и в основном используются для простых моделей ферм для нижней или верхней оценки первой частоты с использованием метода Донкерлея (снизу) или Рэлея (сверху) [4-10]. Масса фермы в таких моделях обычно концентрируется в узлах. Решения, основанные на оценках

Донкерли и Рэля, дают простые аналитические показания для ограничения частоты произвольных панелей, если ферма регулярна. Простейшим методом является метод Донкерлея [11]. Другой метод, метод Рэля (энергетический), дает более громоздкие формулы расчета. Аналитические решения задач по деформации плоских и пространственных регулярных ферм получены в [12-14]. Аналитическое решение для прогиба многопролетной фермы найдено в [15]. Формула для собственной частоты решетчатой фермы получена в [16].

В этой статье представлен вывод формулы для зависимости числа панелей от первой (наименьшей) частоты собственных колебаний. Заданная ферма статически определимая симметричная с решеткой раскосного типа (рис. 1). Средняя панель с ромбообразной решеткой соединяет две части фермы с  $n$  панелями длиной  $a$  в каждой. Принято, что масса фермы распределена по узлам верхнего и нижнего пояса. Высота фермы  $2h$ . Колебания масс происходят по вертикали.

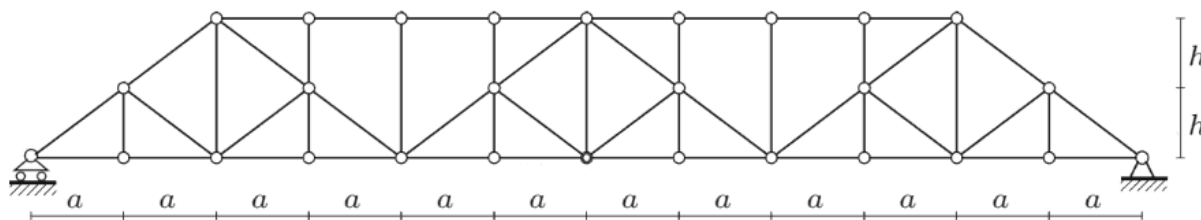


Рисунок 1 – Ферма при  $n=3$

Ферма состоит из  $K = 20(n - 4)$  стержней (включая три опорные стержня). Число степеней свободы используемой модели фермы равно числу узлов  $N = 10(n + 1)$ . Уравнения колебаний системы грузов имеют матричный вид:

$$\mathbf{J}_N \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{D}_N \mathbf{Y} = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{D}_N$  – матрица жесткости конструкции,  $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$  – вектор (набор) смещений грузов по вертикали,  $\mathbf{J}_N = m\mathbf{I}_N$  – матрица инерции системы диагонального вида в случае одинаковых масс,  $\mathbf{I}_N$  – единичная матрица,  $\ddot{\mathbf{Y}}$  – вектор ускорений масс. Обратной к матрице жесткости  $\mathbf{D}_N$  является матрица  $\mathbf{B}_N$ , элементы которой (смещения от единичных сил) вычисляются с помощью формулы Максвелла – Мора. Суммирование проводится по всем стержням фермы:

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^K S_k^{(i)} S_k^{(j)} l_k / (EF). \quad (2)$$

Здесь  $S_k^{(i)}$  — усилие в стержне  $k$  от действия единичной вертикальной силы в узле  $i$ ,  $l_k$  — длина стержня  $k$ ,  $E$  — модуль упругости материала стержней,  $F$  — площадь поперечного сечения стержней. Жесткости всех стержней в простейшей постановке принимаются одинаковыми.

Приближенное решение по методу Донкерлея для оценки первой частоты колебаний снизу  $\omega_D$  выражается через парциальные частоты:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{k=1}^N \omega_k^{-2}, \quad (3)$$

где  $\omega_k$  — парциальная частота колебаний массы  $m$ . Для расчета колебаний отдельной массы при вычислении парциальной частоты уравнение (1) записывается в скалярном виде:

$$m \ddot{y}_k + d_k y_k = 0,$$

где  $d_k$  — коэффициент жесткости,  $y_k$  — смещение массы,  $\ddot{y}_k$  — ускорение. Отсюда для частоты колебаний одного груза (парциальной частоты груза в узле  $k$ ) получается формула:  $\omega_k = \sqrt{d_k / m}$ . Для определения коэффициента

жесткости используется интеграл Мора:  $\delta_k = 1 / d_k = \sum_{j=1}^K (\tilde{S}_j^{(k)})^2 l_j / (EF)$ .

Введено обозначение:  $\tilde{S}_j^{(k)}$  — усилие в стержне с номером  $j$  от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу  $k$  с массой. Из (3) следует:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{k=1}^N \delta_k = m \Delta_n. \quad (4)$$

Для расчета усилий в стержнях методом вырезания узлов в аналитической форме используется система символьной математики Maple. В программу вносятся координаты узлов. Соответствующий фрагмент программы имеет вид:

```
> for i to 4*n+1 do x[i]:=a*(i-1):y[i]:=0:end:
> for i to 2*n do x[i+4*n+1]:=2*a*(i-1)+a:y[i+4*n+1]:=h:end:
> for i to 4*n-3 do x[i+6*n+1]:=a*(i-1)+2*a: y[i+6*n+1]:=2*h:end:
```

Расчет усилий в стержнях и применение формулы (4) для ферм с различным числом панелей дает общий вид для коэффициента  $\Delta_n$ :

$$\Delta_n = (C_{1n} a^3 + C_{2n} c^3 + C_{3n} h^3) / (18n^2 h^2 EF). \quad (5)$$

Для коэффициентов в этой формуле методами системы Maple получаются формулы, как решения рекуррентных уравнений, которым удовлетворяют члены последовательностей коэффициентов. Операторы системы Maple дают:

$$C_{1,n} = 15n - 5n^2 - 24n^3 + 76n^4 + 64n^6,$$

$$C_{2,n} = 18n - 30n^2 + 120n^4,$$

$$C_{3,n} = 39n/2 - 126n^2 + 318n^3 - 9/2.$$

В итоге

$$\omega_D^{-2} = m(C_{1,n} a^3 + C_{2,n} c^3 + C_{3,n} h^3) / (18n^2 h^2 EF). \quad (6)$$

Полученное решение необходимо сравнить с численным, полученным для системы с  $N$  степенями свободы. Для этого используется оператор **Eigenvalues** из пакета **LinearAlgebra** для вычисления собственных значений матрицы  $\mathbf{B}_N$ . Для расчетов приняты размеры фермы:  $a = 3\text{м}$ ,  $h = 4\text{м}$ . Площадь поперечных сечений всех стержней принимается одинаковой:  $F = 8\text{см}^2$ . Модуль упругости стали  $E = 2,0 \cdot 10^5 \text{МПа}$ , массы в узлах  $m = 200\text{кг}$ . На рисунке 2 сравниваются зависимость от количества панелей нижней оценки наименьшей частоты  $\omega_D$  по формуле Донкерлея и значения первой частоты  $\omega_1$  спектра системы с  $N$  степенями свободы, найденная численно.

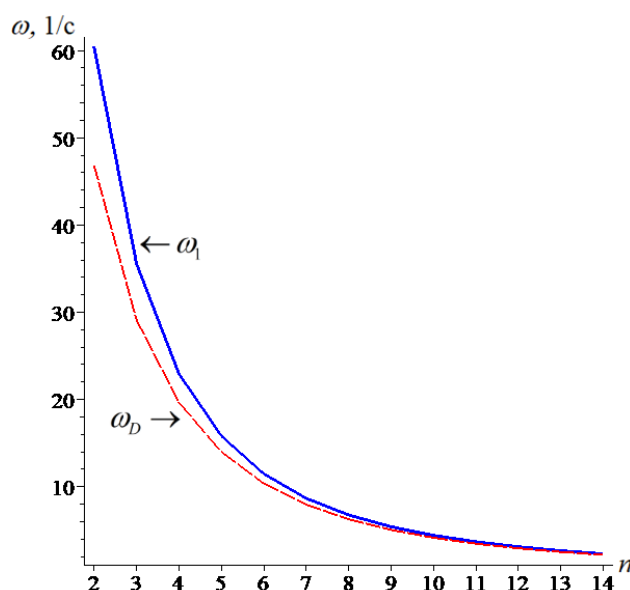


Рисунок 2 – Зависимость частоты колебаний от числа панелей

Как и предполагалось, метод Донкерлея дает оценку частоты снизу. Для более точного сравнения аналитического решения и численного вводится относительная величина  $\varepsilon_D = |\omega_D - \omega_1| / \omega_1$ .

Из рисунка 3 видно, что с увеличением числа панелей погрешность выведенной формулы (6) падает, принимая вполне допустимое значение в несколько процентов уже при  $n=10$ .

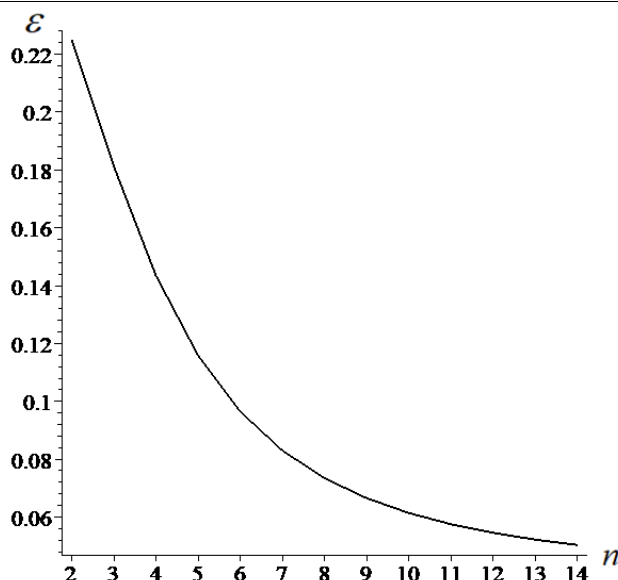


Рисунок 3 – Погрешность аналитической формулы

### Библиографический список

1. Бойко А.Ю., Ткачук Г.Н. Вывод формул зависимости прогиба плоской шарнирно-стержневой рамы от числа панелей в системе Maple// Строительная механика и конструкции. 2019. №4 (23). С. 15-25.
2. Илюшин А.С. Аналитический расчет прогиба составной внешне статически неопределимой рамы // Механизация и автоматизация строительства: сборник статей Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2019. С. 18-23.
3. Зименков Н. А. Формула прогиба внешне статически неопределимой трапецевидной фермы с перекрестной решеткой // Постулат. 2019. № 6.
4. Ткачук Г.Н. Формула зависимости прогиба несимметрично нагруженной плоской фермы с усиленными раскосами от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. №2(21). С. 32-39.
5. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю., Плясова А.А. Вывод формулы для прогиба плоской решетчатой фермы с консолями в системе Maple методом индукции // Постулат . 2019. № 3. С. 25.
6. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю. Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном нагружении // Строительная механика и конструкции. 2019. №1(20). С. 21-29.
7. Voropay R.A., Domanov E.V. Analytical solution of the problem of shifting a movable support of a truss of arch type in the Maple system // Postulat. 2019. № 1. С.
8. Зименков Н. А. Формула для прогиба фермы рамного типа под действием сосредоточенной нагрузки в середине пролета // Постулат. 2019. № 1. С. 2.
9. Овсянникова В.М. Зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2020. №4 (27). С. 16-25.
10. Грибова О.В. Вывод зависимости прогиба плоской трапецевидной фермы от числа панелей // Постулат. 2020. №3. С. 6.

11. Kirsanov M.N., Vorob'ev O.V. Analytical calculation of deformations and kinematic analysis of a flat truss with an arbitrary number of panels // Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2(54). 2022. Pp.73-83.
12. Воробьев О.В. О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // Строительная механика и конструкции. 2020. № 1 (24). С. 25-38.
13. Петренко В.Ф. Оценка собственной частоты фермы с учетом жесткости опор по Донкерлею в системе Maple // В книге: Радиоэлектроника, электротехника и энергетика. тезисы докладов Двадцать восьмой международной научно-технической конференции студентов и аспирантов. Москва, 2022. С. 799.