

ПРИМЕР. Независимые измерения углов треугольника x_1, x_2, x_3 дали результаты $x_1^* = 31^\circ$, $x_2^* = 62^\circ$, $x_3^* = 89^\circ$. Известно, что $x_1 + x_2 + x_3 - 180^\circ = 0$. Использовать это равенство, чтобы уточнить значения x_1^*, x_2^*, x_3^* , считая ошибки измерения углов x_1, x_2, x_3 распределенными по нормальным законам с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = (0.1^\circ)^2$.

РЕШЕНИЕ. Обозначим символами $\Delta x_1^*, \Delta x_2^*, \Delta x_3^*$ ошибки, содержащиеся в числах x_1^*, x_2^*, x_3^* .

1. Находим $\Delta x_1^*, \Delta x_2^*, \Delta x_3^*$ из условия

$$\begin{cases} \left(\frac{\Delta x_1^*}{0.1^\circ}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2^*}{0.1^\circ}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_3^*}{0.1^\circ}\right)^2 \rightarrow \min, \\ (x_1^* - \Delta x_1^*) + (x_2^* - \Delta x_2^*) + (x_3^* - \Delta x_3^*) - 180^\circ = 0. \end{cases}$$

Для этого используем метод множителей Лагранжа, т.е. ищем точку безусловного экстремума функции

$$\begin{aligned} F(\Delta x_1^*, \Delta x_2^*, \Delta x_3^*, \lambda) &= \left(\frac{\Delta x_1^*}{0.1^\circ}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2^*}{0.1^\circ}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_3^*}{0.1^\circ}\right)^2 + \\ &+ \lambda[(x_1^* - \Delta x_1^*) + (x_2^* - \Delta x_2^*) + (x_3^* - \Delta x_3^*) - 180^\circ]. \end{aligned}$$

а) Необходимое условие экстремума функции F имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \Delta x_k^*} = \frac{2}{(0.1^\circ)^2} \Delta x_k^* - \lambda = 0, \quad k = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1^* - \Delta x_1^* + x_2^* - \Delta x_2^* + x_3^* - \Delta x_3^* - 180^\circ = 0 \end{cases} \quad (2)$$

б) Решаем систему (2) и находим $\Delta x_1^*, \Delta x_2^*, \Delta x_3^*$:

$$\Delta x_k^* = (x_1^* + x_2^* + x_3^*)/3 - 180^\circ/3 = 2^\circ/3 = 40', \quad k = 1, 2, 3.$$

2. Выравниваем результаты измерений $x_1^* = 31^\circ$, $x_2^* = 62^\circ$, $x_3^* = 89^\circ$, полагая

$$\tilde{x}_1 = x_1^* - \Delta x_1^* = 31^\circ - 40' = 30^\circ 40',$$

$$\tilde{x}_2 = x_2^* - \Delta x_2^* = 62^\circ - 40' = 61^\circ 40',$$

$$\tilde{x}_3 = x_3^* - \Delta x_3^* = 89^\circ - 40' = 88^\circ 20'.$$

Ответ. $x_1 = 30^\circ 40'$, $x_2 = 61^\circ 40'$, $x_3 = 88^\circ 20'$.