



АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ И ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕГУЛЯРНЫХ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ

Специальность: 1.1.7 - Теоретическая механика, динамика машин

Аспирант: Лыонг Конг Луан

Научный руководитель: д.ф.-м.н., проф., Кирсанов Михаил Николаевич

Москва - 2026

- Задача получения аналитических выражений для первой собственной частоты ферм как функции геометрических параметров остаётся актуальной.
- Существующие методы ограничены малыми значениями числа панелей или приводят к громоздким формулам, неудобным для практики.
- Разработка замкнутых аналитических решений для ферм с произвольным числом панелей расширяет методы расчёта и имеет важное значение для теории и проектирования инженерных конструкций.
- Особую актуальность имеет анализ влияния геометрических параметров на прогибы и спектр собственных частот.

Цель работы - развитие аналитических методов и получение точных зависимостей первой собственной частоты и прогибов регулярных ферм от их геометрических параметров, числа панелей и свойств материала.

Основные решенные задачи:

- Разработаны математические модели регулярных плоских и пространственных ферм с произвольным числом панелей на основе матриц жёсткости и масс, реализованы алгоритмы символьных вычислений.
- Получены аналитические зависимости перемещений и прогибов с использованием рекуррентных соотношений и символьных вычислений.
- Предложен упрощённый метод Донкерлея для оценки первой собственной частоты при большом числе панелей.
- Определены частотные интервалы, не содержащие собственных значений, и установлена их зависимость от параметров конструкции.

- Разработан единый аналитический подход для исследования регулярных плоских и пространственных ферм с произвольным числом панелей, позволяющий получать обобщённые зависимости перемещений, усилий и частот.
- Получены аналитические выражения для прогибов и первой собственной частоты, обеспечивающие расчёт ферм произвольной размерности без многократных вычислений.
- Предложена упрощённая версия метода Донкерлея для расчета основной частоты фермы с произвольным числом панелей.
- Установлены зависимости границ спектров собственных частот от геометрических и структурных параметров ферменных конструкций.

Рассматриваются различные новые разновидности ферменных конструкций: симметричные, плоские балочные, решетчатые, консольные и пространственные фермы.

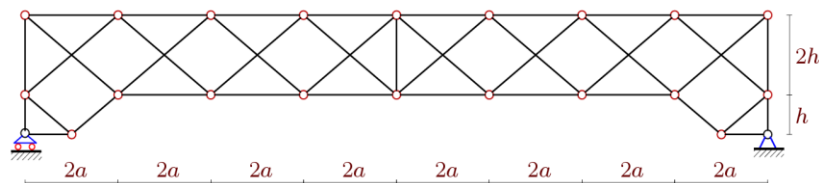


Рис. 1. Статически определимая симметричная ферма, $n=3$

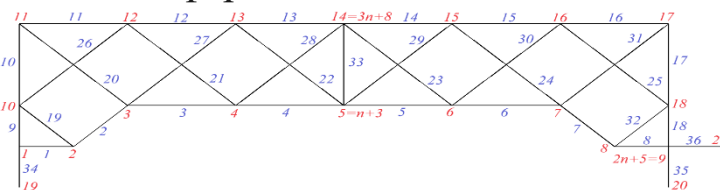


Рис. 2. Нумерация стержней и узлов, $n=2$

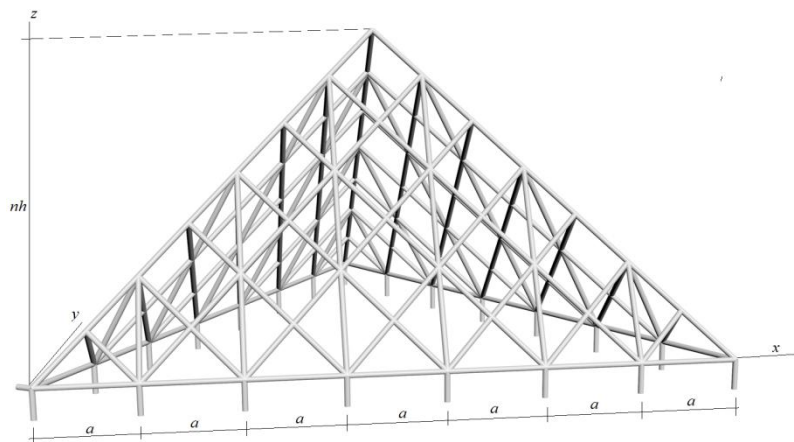


Рис. 3. Пирамидальная пространственная ферма при $n=7$

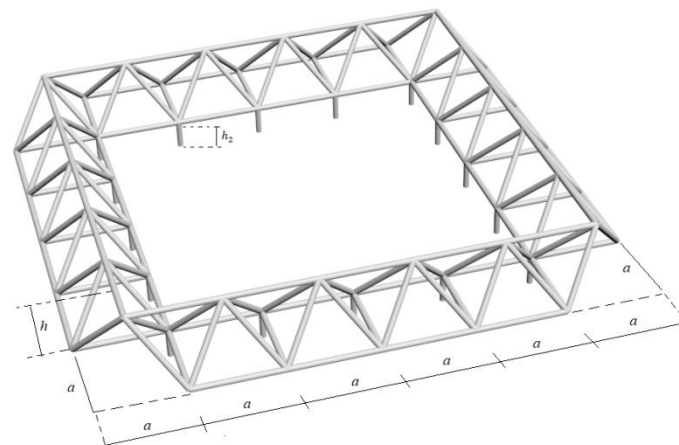


Рис. 4. Конструкция покрытия, $n=6$

Прогиб фермы, а также смещение подвижной опоры вычисляются с использованием формулы Максвелла – Мора:

$$\Delta = \sum_k \frac{s_{k,i} S_k l_k}{E_k F_k}, \quad (1)$$

где S_k — продольное усилие в k -м стержне фермы, возникающее под действием основной нагрузки; s_k — усилие в том же стержне, вызванное действием единичной (безразмерной) силы, приложенной в точке, где определяется перемещение, в направлении искомого перемещения; l_k, E_k, F_k — соответственно длина, модуль упругости материала и площадь поперечного сечения k -го стержня.

В большинстве задач решение будет иметь следующий общий вид:

$$\Delta = \frac{P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)}{h^2 E F}. \quad (2)$$

Нижняя оценка первой собственной частоты колебаний вычисляется по формуле Донкерлея, которая имеет следующий вид:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{i=1}^K \omega_i^{-2}, \quad (3)$$

где ω_p — обозначает парциальные частоты, определяемые для каждой сосредоточенной массы индивидуально, исходя из условий её колебаний в составе конструкции, а K — соответствует числу степеней свободы системы масс, расположенных в узлах фермы, при допущении, что все грузы совершают вертикальные колебания, без учёта горизонтальных перемещений

$$M \ddot{y}_p + D_p y_p = 0, \quad p=1, 2, \dots, K. \quad (4)$$

Из формулы Донкерлея при $y_p = A_p \sin(\omega t + \varphi)$ следует: $\omega_p = \sqrt{D_p / M} = \sqrt{1 / \delta_p M}$
Отсюда получается выражение для частоты по Донкерлею:

$$\omega_D^{-2} = M \sum_{p=1}^K \delta_p = M \Delta_n. \quad (5)$$

Максимальная кинетическая энергия имеет следующий вид:

$$T_{\max} = P^2 \omega^2 \sum_{i=1}^K m \tilde{u}_i^2 / 2, \quad (6)$$

где $\tilde{u}_i = u_i / P = \sum_{\alpha=1}^N \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (EF)$ — представляет собой амплитуду перемещения массы с номером i , вызванную действием равномерно распределённой нагрузки, нормированную по величине приложенной силы P .

Потенциальная энергия, накопленная в результате деформации стержней фермы под действием равномерно распределённой нагрузки, выражается следующим образом:

$$\Pi_{\max} = P^2 \sum_{i=1}^K \tilde{u}_i / 2 \quad (7)$$

На основании выражений (6) и (7) может быть выведена формула Рэлея, позволяющая получить верхнюю оценку первой собственной частоты колебаний ферменной конструкции:

$$\omega_R^2 = \sum_{i=1}^K \tilde{u}_i / \sum_{i=1}^K m \tilde{u}_i^2. \quad (8)$$

Приближенная оценка первой частоты колебаний представляется в следующем виде:

$$\omega_*^{-2} = MK(u_* + u_1)/2 \quad (9)$$

где u_* , u_1 — максимальное и минимальное по всем узлам значения относительных прогибов u_p ($1/\text{кгс}^2$) от действия вертикальной единичной силы на узел p .

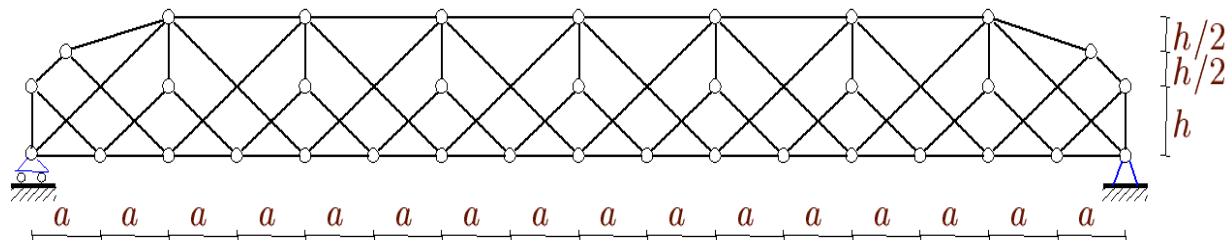


Рис. 5. Статически определенная плоская симметричная ферма, $n=4$

Длина фермы $L=4a$. Количество узлов $N=8n+6$, Количество стержней фермы $v=16n+6$. Приняты размеры фермы: $a=6\text{м}$, $h=6\text{м}$. Продольная жесткость стальных стержней сечением $F=4 \cdot 10^{-4}\text{м}^2$ равна $EF = 0,8 \cdot 10^5 \text{ кН}$, число степеней свободы $K=8n+3=35$.

Упрощенный метод Донкерлея для определения собственной частоты колебаний фермы

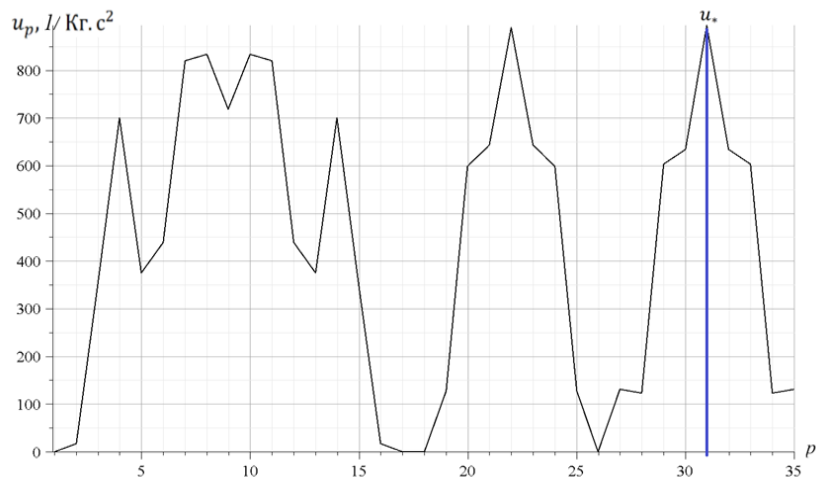


Рис. 6. Зависимость коэффициента u_p от номера узла фермы при $n=4$

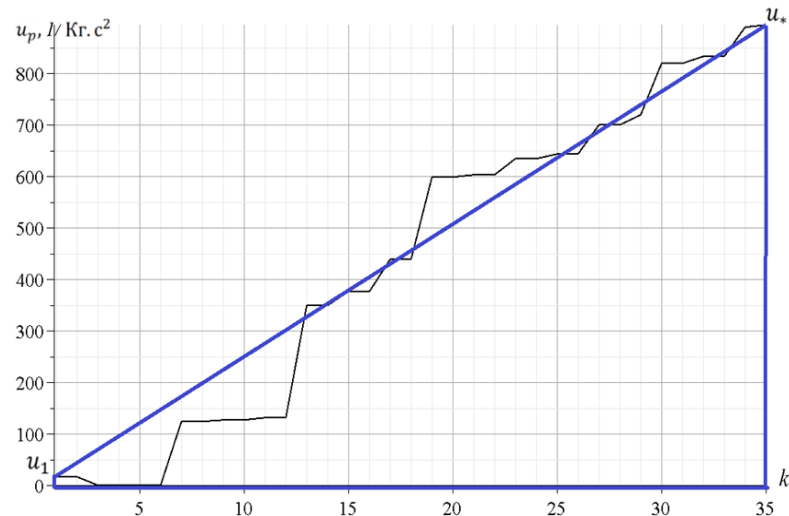


Рис. 7. Коэффициенты u_p в порядке возрастания при $n=4$

Максимальное значение u_* соответствует среднему узлу верхнего пояса фермы, которому соответствует номер $7n+3$.

Программа Maple для расчета усилий, прогиба и первой частоты фермы

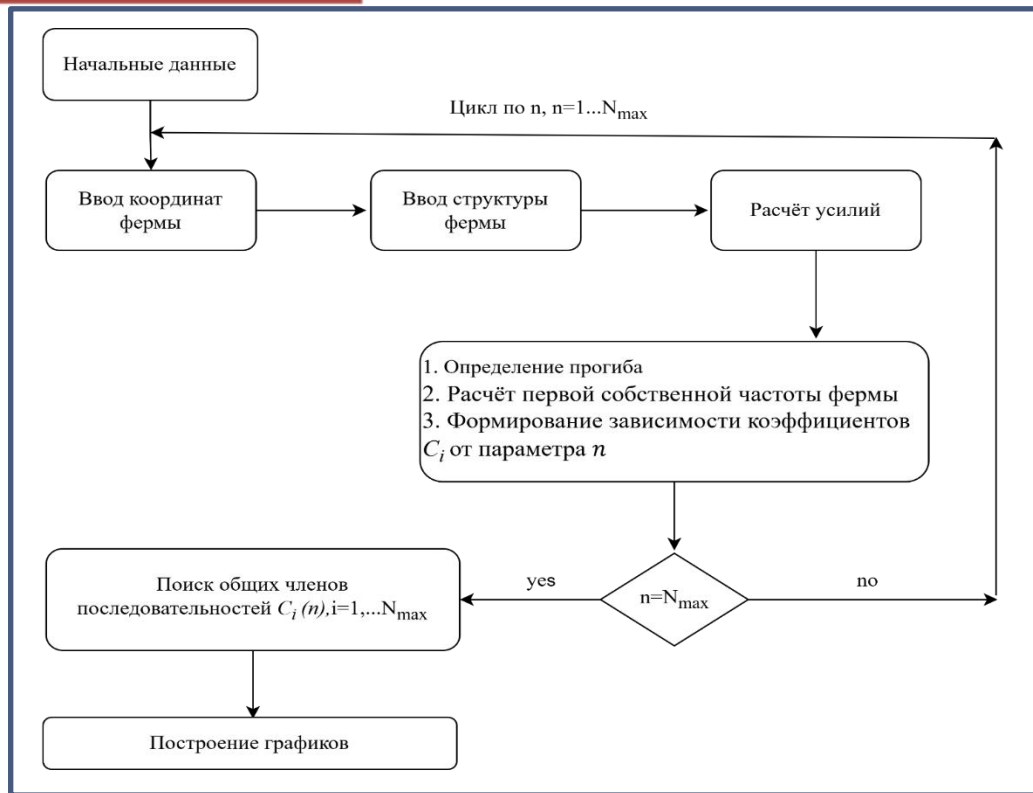


Рис. 8. Структура программы

Разработанный алгоритм позволяет выполнять расчёт усилий в стержнях ферменной конструкции, определять соответствующие прогибы и вычислять первую собственную частоту колебаний фермы.

Функциональная структура программы условно разделена на семь основных логических блоков, каждый из которых отвечает за отдельный этап вычислений — от ввода исходных параметров до анализа полученных результатов.

Определение усилий в стержнях фермы на основе уравнений равновесия

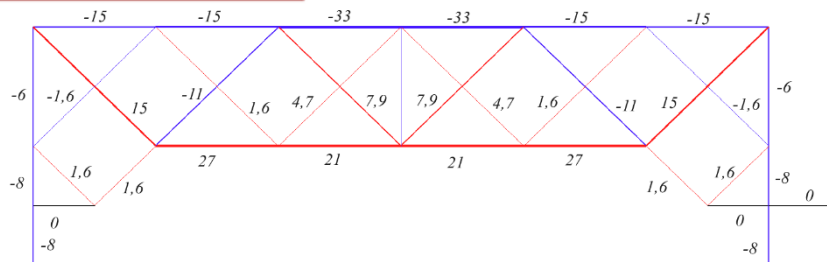


Рис. 9. Распределение усилий, нагрузка по всем узлам поясов, $n=2$

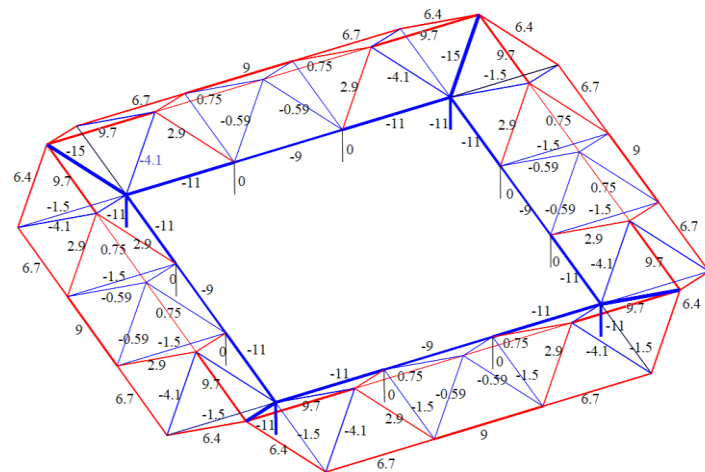


Рис. 10. Распределение усилий в стержнях фермы, $n=2$, $a=3m$, $h=1m$

Синим цветом выделены стержни, находящиеся в состоянии сжатия (отрицательные усилия); красным цветом обозначены растянутые стержни (положительные усилия). Толщина отрезков графически отображает величину усилий в каждом элементе и пропорциональна абсолютным значениям усилий в стержнях.

Такой подход позволяет наглядно оценить характер распределения усилий в элементах фермы и выявить наиболее нагруженные и ненапряжённые стержни при заданной схеме нагрузки.

Расчет прогиба с помощью формулы Максвелла – Мора

Рассматривается ферма на рисунке 1. Полученная формула демонстрирует зависимость прогиба от числа панелей n и размеров конструкции:

$$\Delta_n = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF), \quad (10)$$

$$C_1 = (10n^4 + 40n^3 + 20n^2 - 40n + 15 - 24(-1)^n n - 27(-1)^n) / 12,$$

$$C_2 = (6n^2 + 12n - 3 - 8(-1)^n n - 9(-1)^n) / 4,$$

$$C_3 = (8n + 11 - 2(-1)^n n - 2(-1)^n) / 2.$$

При нагружении нижнего пояса плоской рамы определяются соответствующие коэффициенты:

$$C_1 = (10n^4 + 40n^3 + 32n^2 - 40n - 39 + 24(-1)^{n+1} + 27(-1)^n) / 12, \quad (11)$$

$$C_2 = (6n^2 + 4n - 5 + 8(-1)^{n(n+1)} + 9(-1)^n) / 4,$$

$$C_3 = (8n + 3 - 2(-1)^n n + 2(-1)^n) / 2.$$

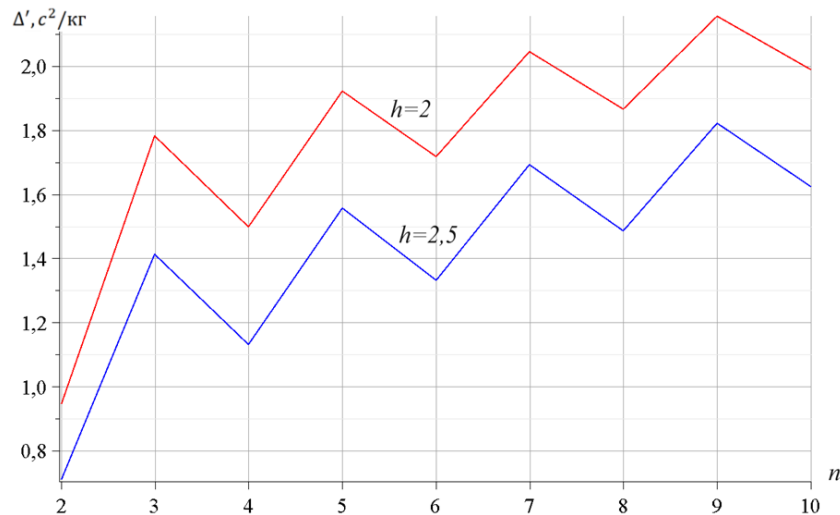


Рис. 11. Зависимость прогиба фермы от количества панелей n

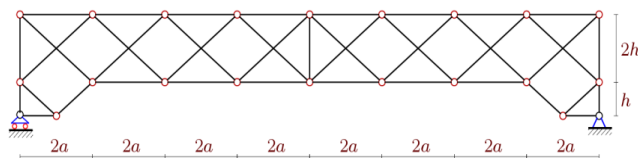


Рис. 1. Статически определимая симметричная ферма, $n=3$

Анализ первой собственной частоты плоских ферменных систем

Для рассматриваемой фермы формула для оценки первой частоты колебаний по методу Донкерлея может быть представлена следующим образом:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF}{M(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)}}. \quad (12)$$

где
$$C_1 = \frac{128n^5 + 640n^4 + 1660n^3 + 2360n^2 + 1422n + 225}{92(n+1)},$$

$$C_2 = \frac{12n^3 + 32n^2 + 130n + 9}{2(n+1)},$$

$$C_3 = \frac{44n^3 + 159n^2 + 184n + 72}{3(n+1)^2}.$$

По предложенному методу имеет следующий вид:

$$\omega_* = 2h \sqrt{\frac{3EF}{M(2n+5)((n+1)(2n^2 + 4n + 3)a^3 + 3(n+1)c^3 + 3((-1)^n + 3)h^3)}}.$$

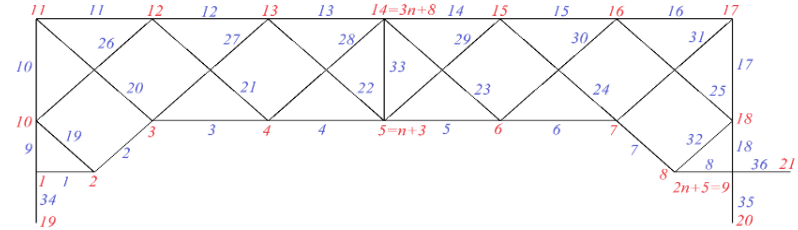


Рис 2. Нумерация стержней и узлов, $n=2$

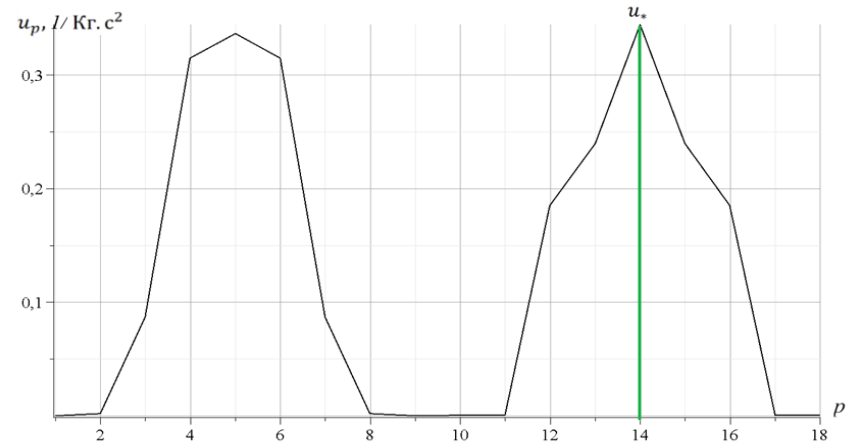


Рис. 12. Зависимость коэффициента u_p от номера узла фермы

Анализ первой собственной частоты плоских ферменных систем

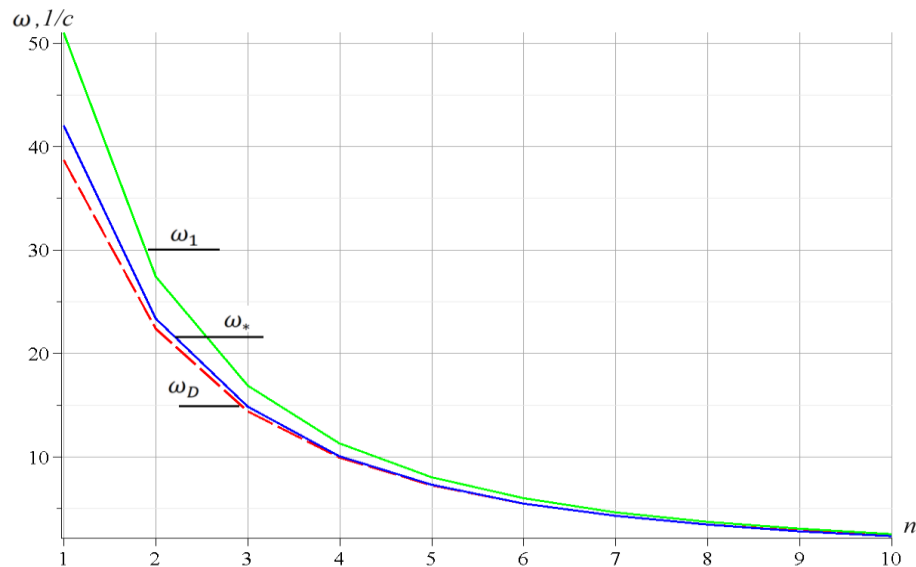


Рис. 13. Зависимость первой частоты от количества панелей фермы

ω_1 — значения первой частоты, полученные численным методом.

ω_D — метод Донкерлея.

ω_* — упрощённая версия метода Донкерлея

- ✓ Общая тенденция снижения частоты с увеличением количества панелей;
- ✓ Предлагаемые методы подходят для ферм с большим количеством панелей;
- ✓ Полученные зависимости позволяют прогнозировать поведение фермы при изменении её конфигурации, а также определять критические значения частоты для предотвращения резонансных явлений.

Анализ первой собственной частоты плоских ферменных систем

Относительные погрешности:

$$\varepsilon_D = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1 \text{ и } \varepsilon_* = (\omega_1 - \omega_*) / \omega_1$$

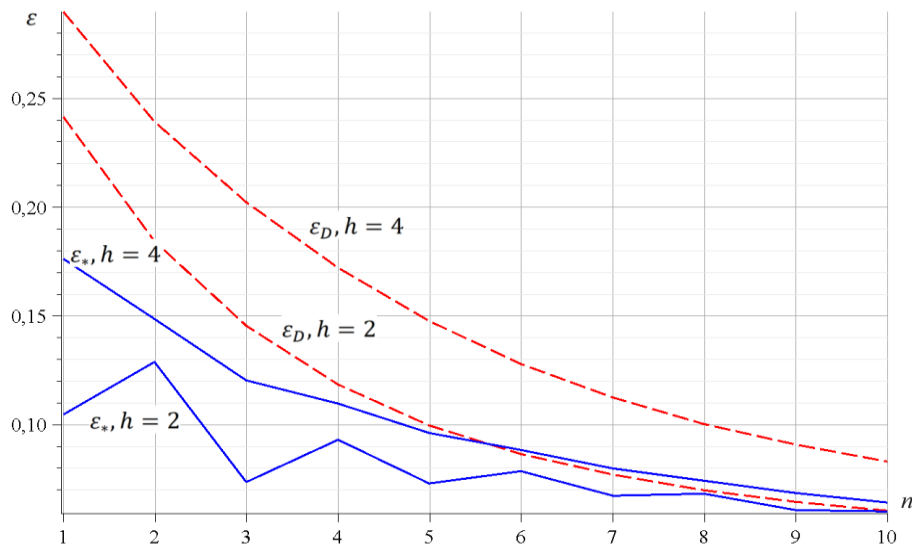


Рис. 14. Относительные погрешности методов, высота h в метрах

- ✓ Упрощённая версия метода демонстрирует более точные результаты и меньшую погрешность при увеличении количества панелей;
- ✓ Для $n > 4$, погрешность упрощённого метода не превышает 10%;
- ✓ В диапазоне небольшого числа панелей ($n < 4$) предложенный метод также показывает меньшую погрешность по сравнению с классическим методом Донкерля;
- ✓ При расчётах ферм с малым числом панелей использование метода Донкерля нецелесообразно из-за высокой погрешности.

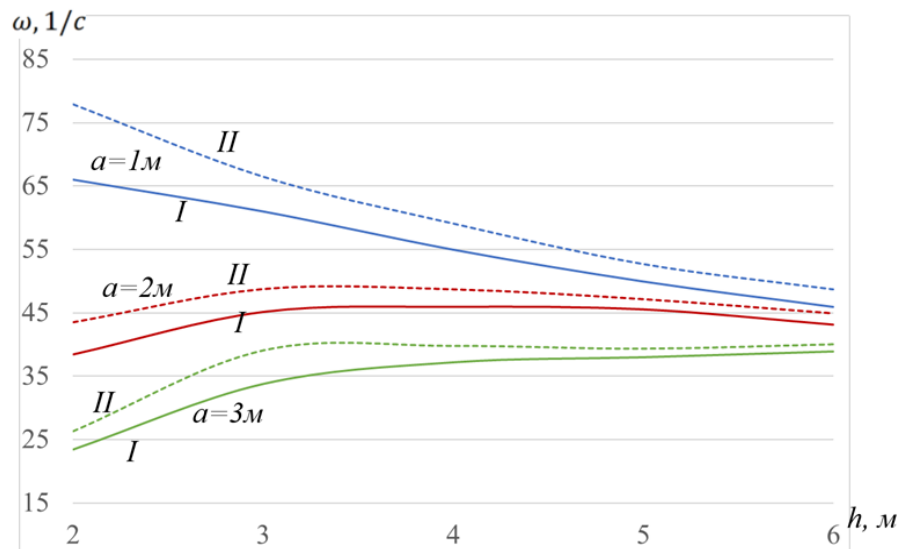


Рис. 15. Сравнение аналитического решения (I) и результатов моделирования методом конечных элементов в SolidWorks (II)

Сравнение аналитического и численного (МКЭ) методов показало совпадение общей тенденции изменения первой собственной частоты при изменении параметров. Результаты количественно согласуются, однако МКЭ даёт несколько более высокие значения из-за более полного учёта жёсткости и массы. Различие уменьшается при увеличении размеров конструкции.

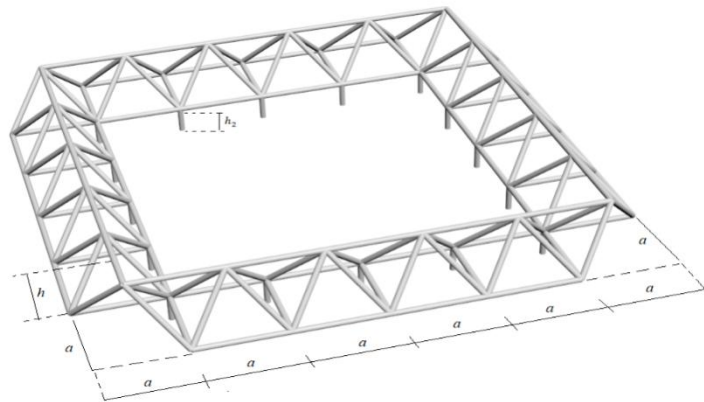


Рис. 4. Конструкция покрытия, $n=6$

Метод Донкерлея:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF(n-1)(n-2)}{M(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 b h^2)}}. \quad (13)$$

$$C_1 = (8n^6 - 88n^5 + 473n^4 - 1300n^3 + 1861n^2 - 1318n + 360) / 24,$$

$$C_2 = (5n^4 - 25n^3 + 62n^2 - 73n + 30) / 12,$$

$$C_3 = 2 \cdot 4n - 3 \frac{8n^3 - 48n^2 + 104n - 77}{3n - 2}.$$

Формула для определения верхней оценки первой частоты фермы методом Рэлея:

$$\omega_R = h \sqrt{\frac{3EF \sum_{\alpha=[a,c,h]} g_{\alpha} \alpha^3}{4M \sum_{\alpha,\beta=[a,c,h]} f_{\alpha\beta} \alpha^3 \beta^3}}. \quad (14)$$

$$g_a = (9n^5 - 135n^4 + 815n^3 - 1935n^2 + 1946n - 700) / 20,$$

$$g_c = (36n^2 - 96n + 64),$$

$$g_h = (6n^3 - 9n^2 + 20n - 16) / 16.$$

$$f_{aa} = (465n^9 - 12555n^8 + 154191n^7 - 1092861n^6 + 4777304n^5 - 12857040n^4 + \\ + 21128104n^3 - 20600184n^2 + 10938576n - 2436000) / 13440,$$

$$f_{cc} = (24n^5 - 60n^4 + 121n^3 + 18n^2 - 96n) / 1024,$$

$$f_{hh} = 180n^3 - 840n^2 + 1280n - 640,$$

$$f_{ac} = (765n^7 - 11340n^6 + 69384n^5 - 195405n^4 + 343000n^3 - 438060n^2 + \\ + 349256n - 117600) / 13440,$$

$$f_{ah} = (27n^6 - 441n^5 + 3045n^4 - 9901n^3 + 16278n^2 - 13208n + 4224) / 6,$$

$$f_{ch} = (30n^4 - 85n^3 + 42n^2 + 48n - 32) / 8.$$

Первая собственная частота пространственной фермы с произвольным числом панелей

Максимальное значение u_* достигается в узле с номером $4n-3$.

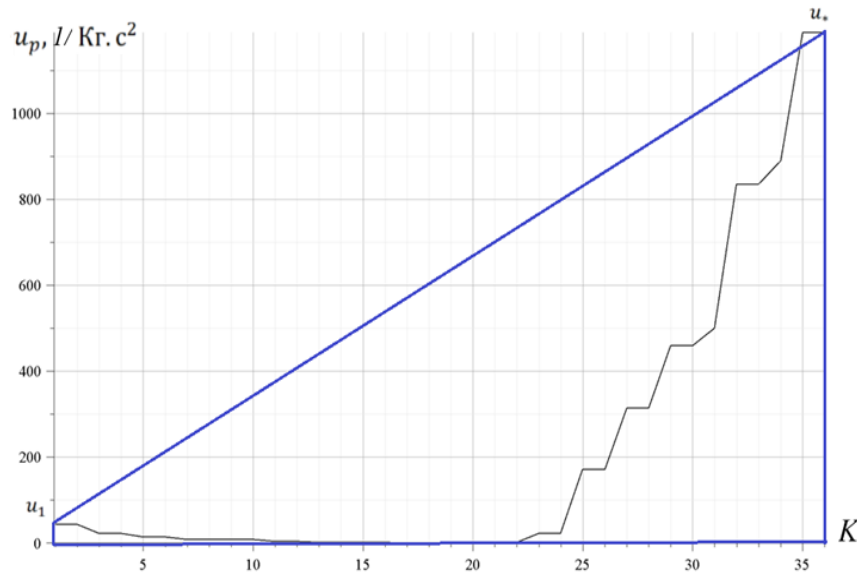


Рис 16. При $n=5$ зависимость u_p определяется номером узла фермы

Формула для определения первой собственной частоты, полученная предложенным методом, имеет следующий вид:

$$\omega_* = h \sqrt{\frac{EF(n-1)(n-2)^2}{M(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 b h^2)}}. \quad (15)$$

$$C_1 = 8n^4 - 47n^3 + 103n^2 - 100n + 36,$$

$$C_2 = n^3 - 4n^2 + 5n - 2,$$

$$C_3 = 2n^3 - 6n^2 + 7n - 3.$$

Первая собственная частота пространственной фермы с произвольным числом панелей

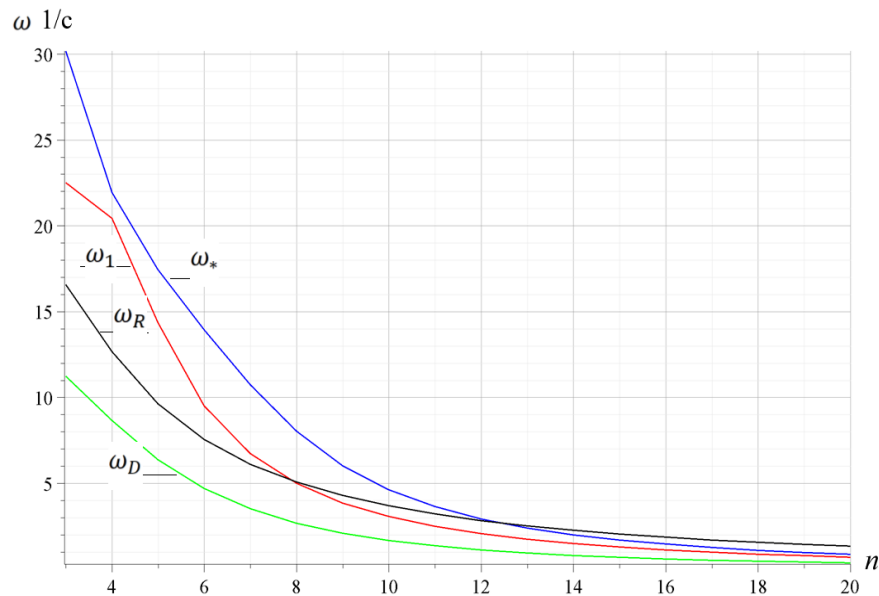


Рис.17. Зависимость от количества панелей первой частоты колебаний $\omega_1, \omega_D, \omega_R, \omega_*$

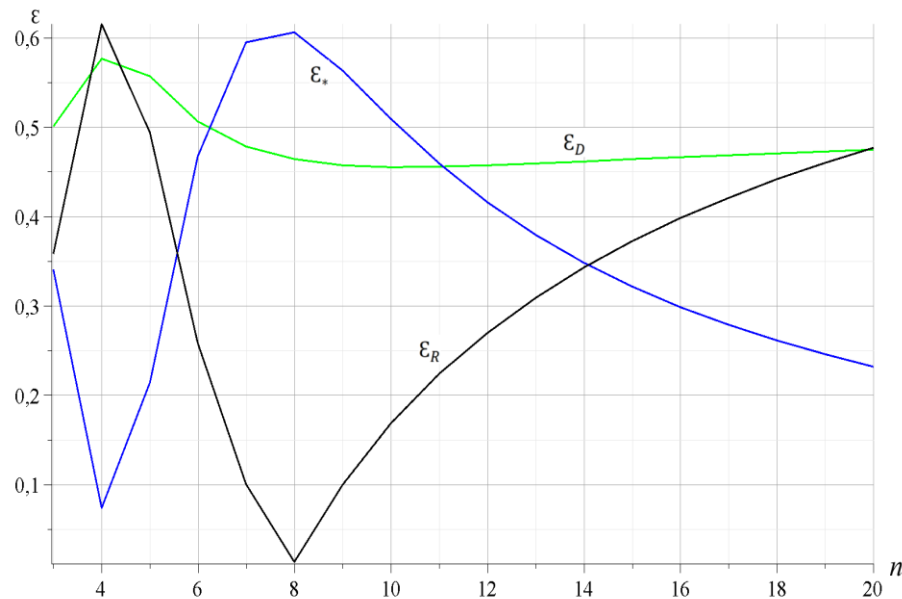


Рис.18. Относительная погрешность оценки частоты колебаний по Донкерлею ε_D , по Рэлею ε_R и по упрощенной методике ε_* .

Сравнительный анализ собственных частот колебаний плоской фермы и балки

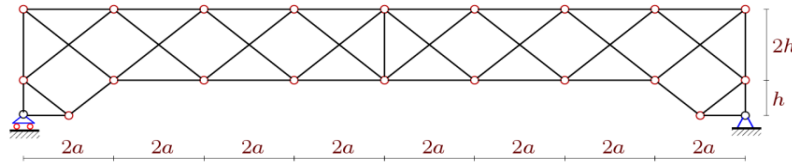


Рис. 1. Статически определимая симметричная ферма

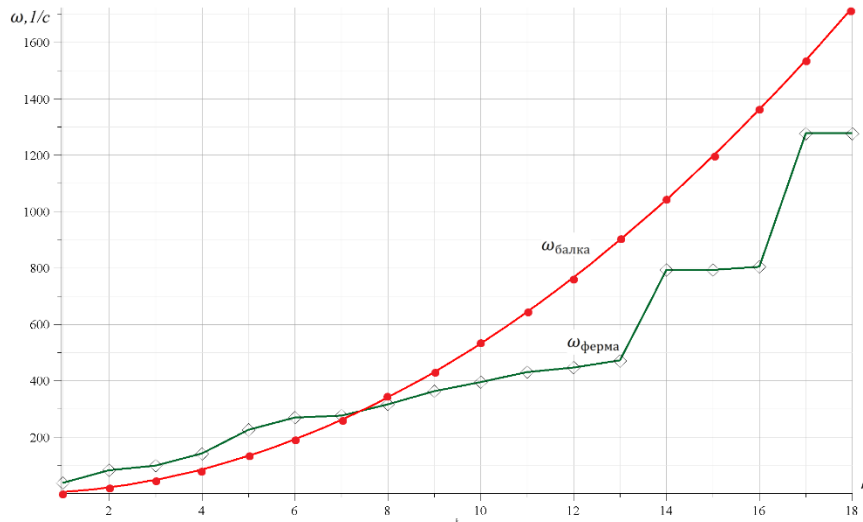


Рис.19. Сопоставление собственных частот колебаний плоской фермы и балки

Для частот колебаний известна зависимость:

$$\omega_k = \frac{\pi^2 k^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{Fm}}$$

Модуль упругости материала $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа;
Масса в каждом узле фермы $M = 100$ кг;
Размер балки $r_1 = 0,05$ м; $l = 24$ м — длина балки
 $J = r_1 \cdot r_1^3 / 12$ — момент инерции балки;
 $m = M/V$ — Масса единицы объема, здесь
 $V = l \cdot r_1^2$.

Зависимость спектра собственных частот от геометрических параметров статически определимой плоской фермы

Рассмотрим ферму на рисунке 1

Количество собственных частот: $4n+10$

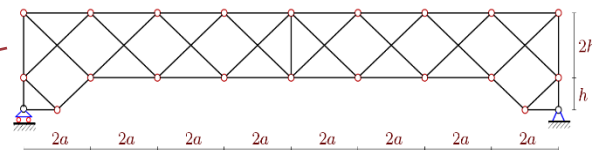


Рис. 1. Статически определимая симметричная ферма, $n=3$

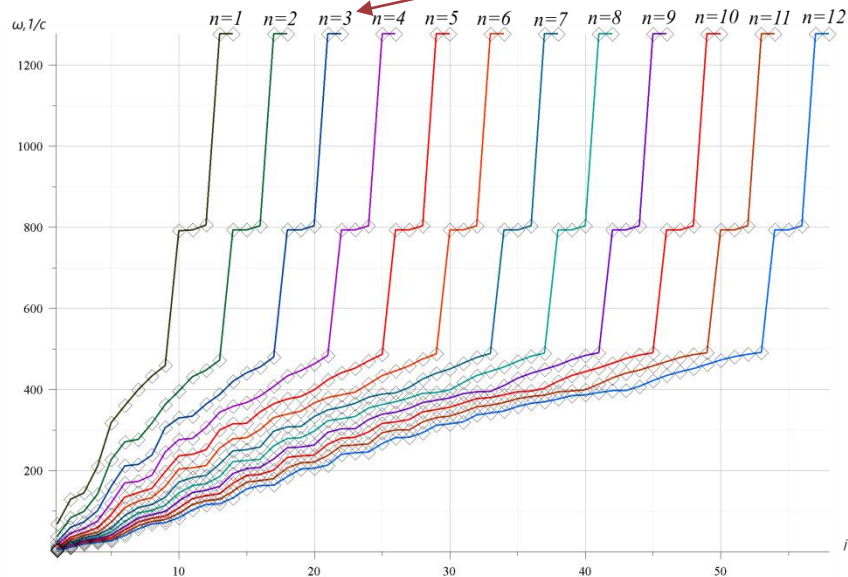


Рис. 20 Спектры регулярных ферм, $a=2м, h=1м$

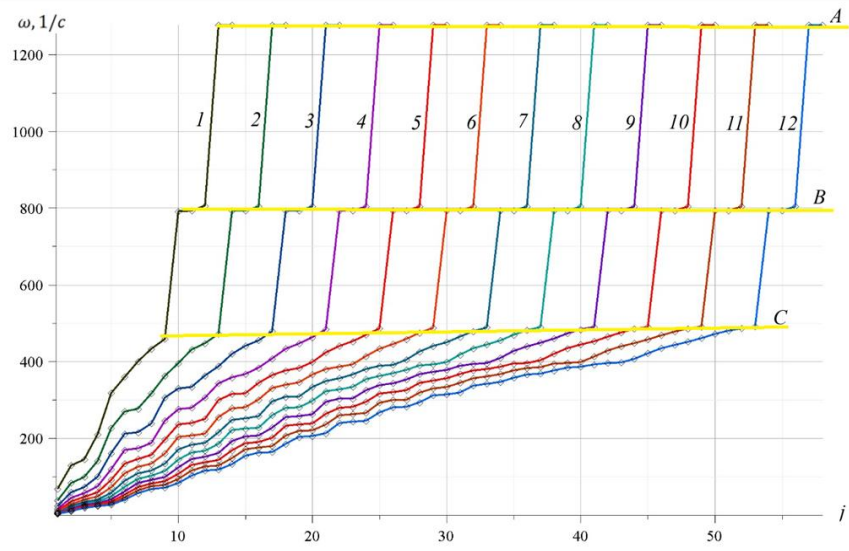


Рис. 21 Спектры регулярных ферм, $a=2м, h=3м$

Зависимость спектра собственных частот от геометрических параметров статически определимой плоской фермы

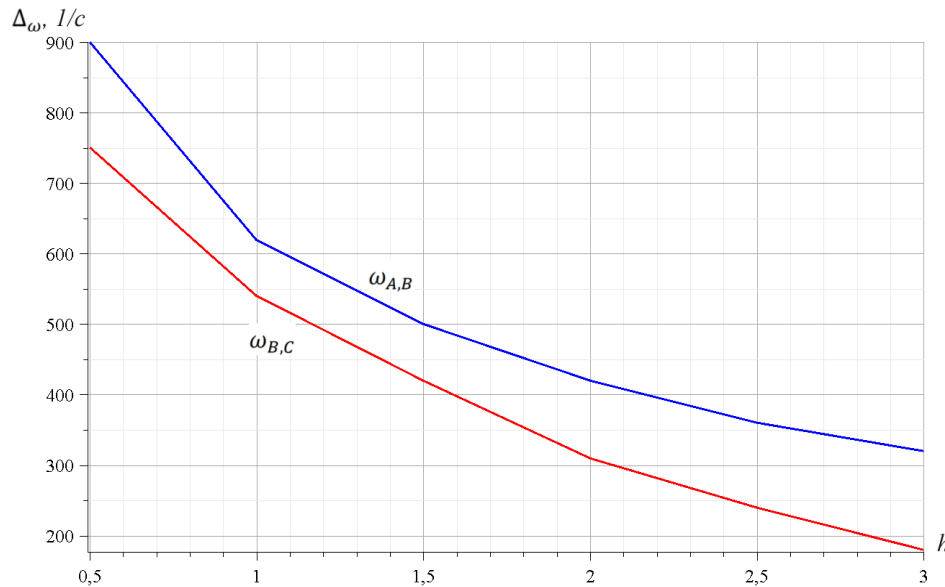


Рис. 22. Зависимость безопасного диапазона частот $\Delta_{A,B}$ от $\Delta_{B,C}$ от h

- ✓ На рисунках 20 и 21 представлены спектры собственных частот ферм с различным числом панелей, а также выделены спектральные интервалы, свободные от собственных частот.
- ✓ Указанные интервалы характеризуют диапазоны частот, в которых отсутствуют резонансные совпадения, что имеет значение при оценке работы конструкции под внешними воздействиями.
- ✓ С увеличением высоты фермы h ширина спектральных интервалов между уровнями А–В и В–С последовательно уменьшается.

Зависимость спектра собственных частот от геометрических параметров статически определимой плоской фермы

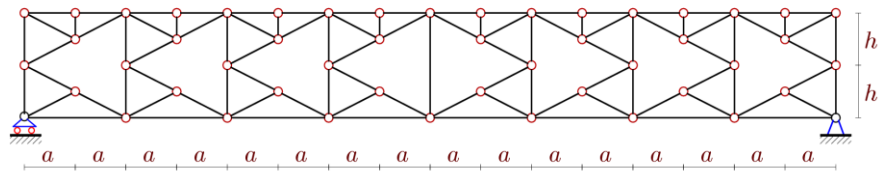


Рис. 23. Статически определимая плоская симметричная ферма, $n=5$

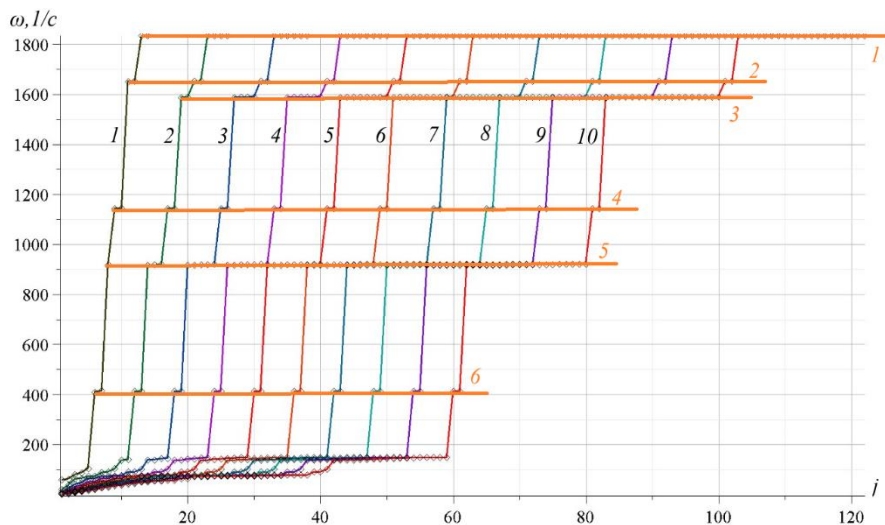


Рис. 24. Спектры регулярных ферм, $a=3м, h=1м$

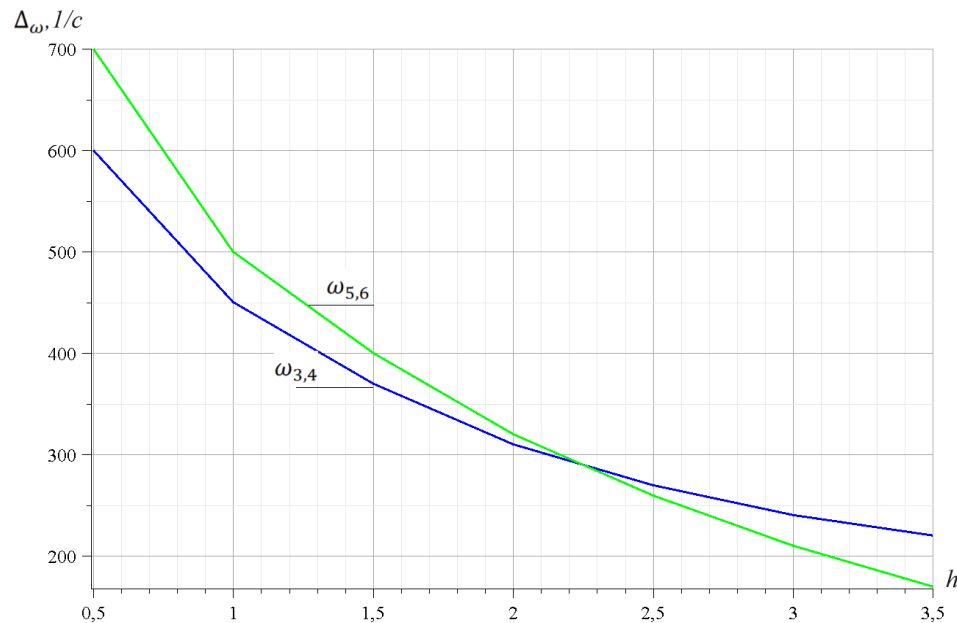


Рис. 25. Зависимость безопасного диапазона частот $\Delta_{5,6}, \Delta_{3,4}$ от h

Рассматривается ферма в виде замкнутого прямоугольника на рисунке 4.

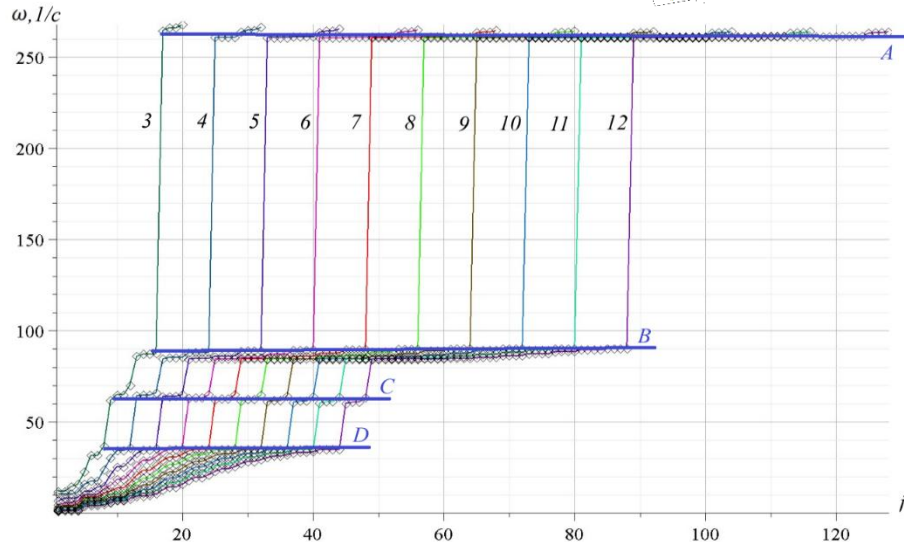
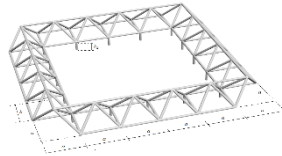


Рис. 26. Спектры регулярных пространственных ферм, $a=5\text{ м}$, $h=1\text{ м}$

- ✓ Чётко выделяются четыре горизонтальные линии, обозначенные как А, В, С и D. Они называются спектральными константами;
- ✓ Основная масса частот сгруппирована в пределах трёх зон;
- ✓ Самая высокая спектральная константа А проявляется одинаково для всех значений n , что указывает на их инвариантность относительно числа панелей;
- ✓ С увеличением n количество собственных частот возрастает, но структура спектра остаётся качественно неизменной.

Закономерности изменения собственных частот пространственных ферм

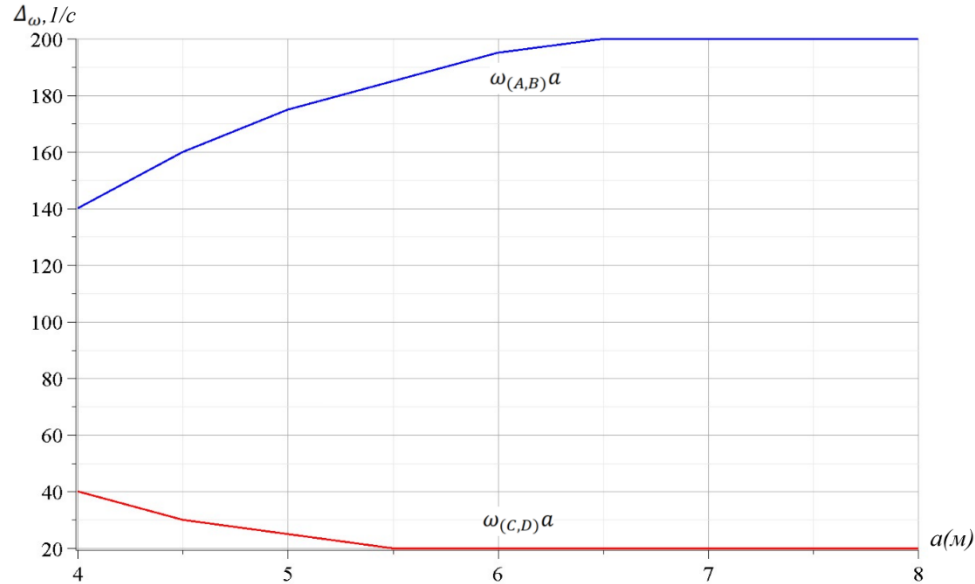


Рис. 27. Зависимость ширины спектрального интервала от параметра a

$\omega_{(A,B)}a$ — ширина диапазона между спектральными константами A и B, $\omega_{(C,D)}a$ — C и D.

- ✓ Наибольшая ширина спектральных интервалов наблюдается при $a \geq 6,5$ м, где соответствующие частотные диапазоны выходят на постоянный уровень.
- ✓ Увеличение параметра a приводит к расширению спектрального интервала до некоторого предельного значения, после чего его ширина практически не изменяется.

Пирамидальная пространственная ферма,
изображённая на рисунке 3

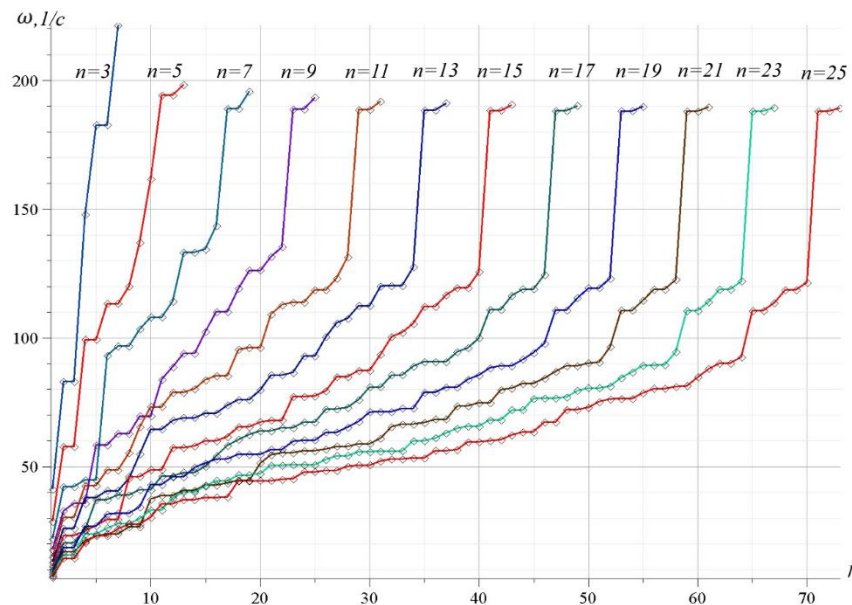


Рис. 28. Спектры пирамидальных пространственных ферм, $a=5m, h=5m$

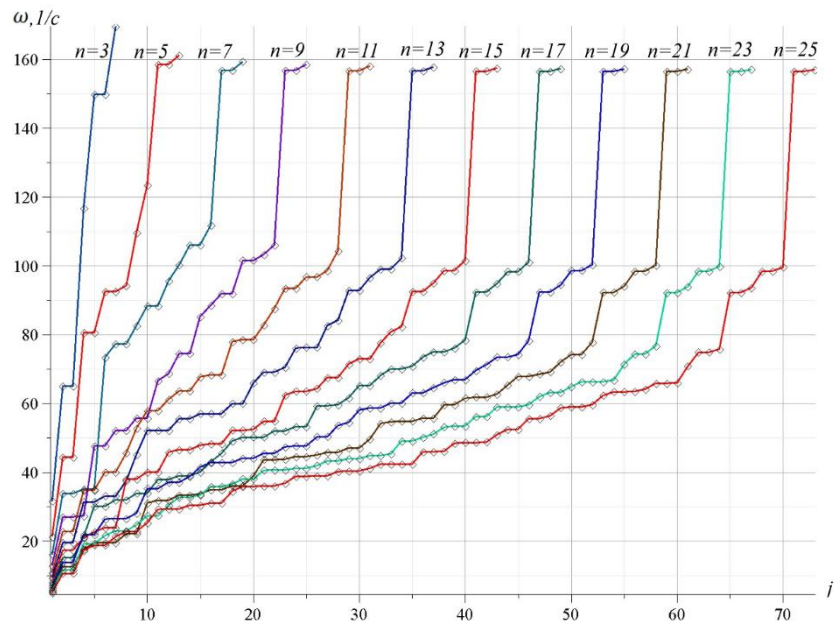
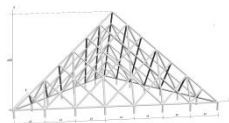


Рис. 29. Спектры пирамидальных пространственных ферм, $a=8m, h=5m$

В работе разработан аналитический подход к исследованию регулярных плоских и пространственных ферм с произвольным числом панелей. Получены приближённые аналитические оценки первой собственной частоты для конструкций переменной размерности в рамках принятой модели.

1. Разработан аналитический подход к оценке первой собственной частоты регулярных ферм и подтверждена его точность сравнением с методами Донкерлея и Рэлея.
2. Выявлены спектральные константы и частотные области, свободные от собственных значений.
3. Установлено влияние геометрии, увеличение высоты сужает частотные интервалы, влияние длины панели менее существенно.
4. Показано сохранение структуры спектра при увеличении числа панелей, что важно для анализа крупнопролётных конструкций.

- Полученные результаты справедливы в рамках принятой модели, учитывающей регулярные статически определимые фермы с сосредоточенными массами, линейно-упругое поведение и без учёта демпфирования, что определяет область их применимости.
- Разработанный аналитический подход расширяет возможности исследования ферменных систем, снижает зависимость от численных расчётов и может использоваться для оценки колебательных характеристик, анализа спектра собственных частот, выбора рациональных параметров и разработки инженерных решений при проектировании конструкций.

1. **Kirsanov, M.N., Luong, C.L.** Simplified method for estimating the first natural frequency of a symmetric arch truss. Magazine of Civil Engineering. 2024. 17(6). Article no. 13001. DOI: 10.34910/MCE.130.1
2. **Luong C. L. and Kirsanov M. N.**, "Formula for the Dependence of the Fundamental Natural Frequency of a Regular Truss on the Number of Panels," 2024 6th International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE), Moscow, Russian Federation, 2024, pp. 1-5, doi: 10.1109/REEPE60449.2024.10479871.
3. **Luong, C.L.** Resonance safety zones of a truss structure with an arbitrary number of panels; 2024; Construction of Unique Buildings and Structures; 113 Article No 11304. doi: 10.4123/CUBS.113.4
4. **Luong, C.L.; Kirsanov, M.** Effect of truss height on the safe frequency region of a statically determined flat truss; 2024; Construction of Unique Buildings and Structures; 110 Article No 11003. doi: 10.4123/CUBS.110.3
5. **Kirsanov, M, Luong, C. L.** Frequency spectrum of natural oscillations of the spatial structure of the rod pyramid; 2023; Construction of Unique Buildings and Structures; 107 Article No 10702. doi: 10.4123/CUBS.107.2
6. **Kirsanov, M.; Luong, C.** Natural frequency spectra of spatial structure 2023; Construction of Unique Buildings and Structures; 106 Article No 10604. doi: 10.4123/CUBS.106.04

7. **Льонг Конг Луан** Оценки прогиба и частоты собственных колебаний шарнирно-стержневой рамы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2024. №4(43). С.42-53. DOI 10.36622/2219-1038.2024.43.4.004
8. **Льонг Конг Луан** Зависимость области резонансно безопасных частот от размеров статически определимой плоской фермы // Строительная механика и конструкции. 2024. №2(41). С. 16-26. DOI 10.36622/2219-1038.2024.41.2.002
9. **Luong C. L., Kirsanov M.** The first frequency and frequency safety area of a cantilever truss with an arbitrary number of panels; 2024; AlfaBuild; 31 Article No 3104. doi: 10.57728/ALF.31.4
10. **Кирсанов М.Н., Льонг Конг Луан** Аналитическое решение задачи о зависимости первой частоты колебаний фермы рамного типа от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2023. №3(38). С. 108-116. DOI 10.36622/VSTU.2023.38.3.010
11. **Kirsanov, M., Luong C.L.** Deformations and natural frequency spectrum of a planar truss with an arbitrary number of panels. 2022; AlfaBuild; 25 Article No 2507. doi: 10.57728/ALF.25.7
12. **Кирсанов М.Н., Льонг Конг Луан** Прогиб и нижняя граница основной частоты собственных колебаний балочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2022. №4(35). С. 24-33. DOI 10.36622/VSTU.2022.35.4.003



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!