(Лекция) ①

Собственные колебания стержня с грузом на конце

ρ, F, E, J, m, I_c, l

m – масса груза, I_c – его момент инерции относительно точки C

Найдём действие по Гамильтону

$$V = \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi)\, dt$$

$$V = \int_{t_1}^{t_2} \Big[\frac{1}{2}\rho F \int_0^l \dot v^2 dz + \frac{1}{2} m \dot v^2(l) + \frac{1}{2} I_c [\dot v'(l)]^2 - \frac{1}{2} EJ \int_0^l v''^2 dz \Big] dt \qquad (1)$$

Воспользуемся уравнением:

$$\delta V = 0 \qquad (2)$$

$$\delta V = \int_{t_1}^{t_2} \Big[\rho F \int_0^l \dot v\, \delta \dot v\, dz + m \dot v(l)\, \delta \dot v(l) + I_c\, \dot v'(l)\, \delta \dot v'(l) - EJ \int_0^l v''\, \delta v''\, dz \Big] dt = 0 \qquad (3)$$

Интегрируя ур-ие (3) по частям, получаем:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \int_0^l \big[-\rho F \ddot v - EJ v^{IV} \big] \delta v\, dz - m \ddot v(l)\, \delta v(l) - I_c\, \ddot v'(l)\, \delta v'(l) - EJ\, v''(l)\, \delta v'(l) + EJ\, v'''(l)\, \delta v(l) \Big\} dt = 0 \qquad (4)$$

Т.к. вариации δv, $\delta v(\ell)$ и $\delta v'(\ell)$ являются независимыми переменными, то для выполнения условия (4) необходимо чтобы сомножители при этих вариациях обращались в нуль.

В результате получаем дифференциальное ур-ие колебаний стержня и естественные граничные условия.

$$\rho F \ddot{v} + EJ v^{IV} = 0 \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} &EJ v'''(\ell) - m\ddot{v}(\ell) = 0 \\ &I_c \ddot{v}'(\ell) + EJ v''(\ell) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Нахождение собственных форм и собственных частот колебаний стержня проведём после нормализации уравнения (5) и условий (6).

Введём

$$\xi = \frac{z}{\ell}; \qquad \tau = \frac{t}{T}$$

в результате получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4} = 0 \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} &v'''(1) - \mu \ddot{v}(1) = 0 \\ &I_0 v''(1) + \ddot{v}'(1) = 0 \end{aligned}\right\} (8) \qquad (\dot{\ }) = \frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$I_0 = \frac{e^3 \rho F}{I_c}; \quad \mu = \frac{m}{e \rho F} = \frac{m}{m_{ст}}.$$

Пример.

Решим спектральную задачу (7), (8) добавляя для определенности граничные условия:

$$\cancel{v(0)} \; v(0) = 0; \quad v'(0) = 0 \qquad (9)$$

Решение ур-ния (7) ищем в виде:

$$v = V(s)\, e^{i \omega t} \qquad (10)$$

Подставляя в (7), (8) и (9), получаем:

$$\frac{d^4 V}{d s^4} - \lambda^4 V = 0 \qquad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} & V'''(1) + \mu \lambda^4 V(1) = 0 \\ & I_0 V''(1) - \lambda^4 V'(1) = 0 \\ & V(0) = 0, \quad V'(0) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Решение ур-ния (11) имеет вид:

$$V = C_1 \operatorname{sh} \lambda s + C_2 \operatorname{ch} \lambda s + C_3 \sin \lambda s + C_4 \cos \lambda s$$

Удовлетворяя граничным условиям (12) получаем однородную систему алгебраических ур-ий отно-

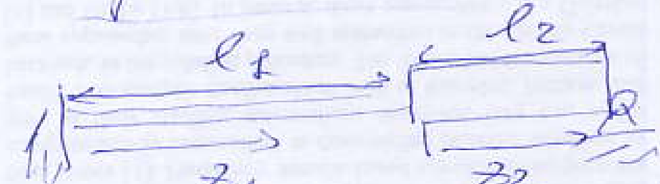
сительно постоянные C_1, C_2, C_3, C_4.
Обращая определитель этой системы в 0, находим собственные значения

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$.

Лекция

Собственные колебания стержня кусочно-постоянного поперечного сечения

Дано:
E_1, l_1, F_1, J_1,
E_2, l_2, F_2, J_2



Действие по Гамильтону имеет вид:

$$U_1 = \int_{t_1}^{t_2} (T_1 - \Pi_1)\,dt, \quad U_2 = \int_{t_1}^{t_2} (T_2 - \Pi_2)\,dt$$

$$U_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\rho_1 F_1}{2} \int_0^{l_1} \dot{v}_1^2\, dz_1 - \frac{E_1 J_1}{2} \int_0^{l_1} v_1''^2\, dz_1 \right] dt$$

$$\delta U_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\rho_1 F_1 \int_0^{l_1} \dot{v}_1 \delta \dot{v}_1\, dz_1 - E_1 J_1 \int_0^{l_1} v_1'' \delta v_1''\, dz_1 \right] dt = 0 \qquad (1)$$

Выполняя интегрирование по частям, получаем

$$\int_0^{l_1} v_1'' \delta v_1''\, dz_1 = v_1'' \delta v_1' \Big|_{z_1 = l_1} - v_1''' \delta v_1 \Big|_{z_1 = l_1} + \int_0^{l_1} v_1^{IV} \delta v_1\, dz_1 \qquad (2)$$

Далее имеем:

$$\upsilon_2=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\rho_2 F_2}{2}\int_0^{l_1}\dot{v}^2 dz_2-\frac{E_2 J_2}{2}\int_0^{l_2}\upsilon_2''^2 dz_1\right]dt$$

$$\delta\upsilon_2=\int_{t_1}^{t_2}\left[\rho_2 F_2\int_0^{l_2}\dot{\upsilon}_2^{\,2}\,\delta\dot{\upsilon}_2\,dz_2-E_2 J_2\int_0^{l_2}\upsilon_2''^{\,2}\,\delta\upsilon_2''\,dz_2\right]dt=0$$

интегрируя по частям получаем

$$\int_0^{l_2}\upsilon_2''\,\delta\upsilon_2''\,dz_2=-\upsilon_2''\,\delta\upsilon_2'\Big|_{z_2=0}+\upsilon_2'''\,\delta\upsilon_2\Big|_{z_2=0}+\int_0^{l_2}\upsilon_2^{IV}\,\delta\upsilon_2\,dz_2$$

Таким образом находим:

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\int_0^{l_2}\left(-\rho_2 F_2\ddot{\upsilon}_2-E_2 J_2\upsilon_2^{IV}\right)\delta\upsilon_2\,dz_2+ \tag{3}$$

$$-E_2 J_2\upsilon_2'''\,\delta\upsilon_2\Big|_{z_2=0}+$$

$$+E_2 J_2\upsilon_2''\,\delta\upsilon_2'\Big|_{z_2=0}+$$

$$+\int_0^{l_1}\left(-\rho_1 F_1\ddot{\upsilon}_1-E_1 J_1\upsilon_1^{IV}\right)\delta\upsilon_1\,dz_1-$$

$$-E_1 J_1\upsilon_1''\,\delta\upsilon_1'\Big|_{z_1=l_1}+E_1 J_1\upsilon_1'''\,\delta\upsilon_1\Big|_{z_1=l_1}\Big\}dt=0$$

Далее имеем

$$\left.\begin{aligned}&\delta\upsilon_2'\Big|_{z_2=0}=\delta\upsilon_1'\Big|_{z_1=l_1}\\&\delta\upsilon_2\Big|_{z_2=0}=\delta\upsilon_1\Big|_{z_1=l_1}\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Используя условия независимости вариаций и условия (4), из ур-ния (3) получим дифференциальные ур-ния колебания стержня и естественные граничные условия:

$$\rho_1 F_1 \ddot{v}_1 + E_1 J_1 v_1^{IV} = 0$$

$$\rho_2 F_2 \ddot{v}_2 + E_2 J_2 v_2^{IV} = 0$$

$$E_2 J_2 v_2''\Big|_{z_2=0} - E_1 J_1 v_1''\Big|_{z_1=l_1} = 0$$

$$-E_2 J_2 v_2'''\Big|_{z_2=0} + E_1 J_1 v_1'''\Big|_{z_1=l_1} = 0$$

На стыке соединения стержней имеем кинематические граничные условия

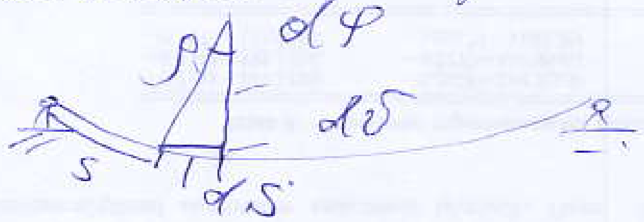
$$\left.\begin{aligned} v_1\Big|_{z_1=l_1} &= v_2\Big|_{z_2=0} \\ v_1'\Big|_{z_1=l_1} &= v_2'\Big|_{z_2=0} \end{aligned}\right\}$$

Далее спектральная задача решается способом изложенным выше.

Лекция

Нелинейные собственные колебания стержня

Найдём в начале радиус кривизны стержня.



l – длина стержня

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\varphi}{ds};\quad \sin\varphi=\frac{dv}{ds}$$

$$\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{ds}=\frac{d^2v}{ds^2}$$

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{d^2v}{ds^2};\quad \frac{d\varphi}{ds}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}\,\frac{d^2v}{ds^2}$$

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\varphi}{ds}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{dv}{ds}\right)^2}}\,\frac{d^2v}{ds^2}\Rightarrow$$

Изгибающий момент

$$M_x=+EJ_x\,\frac{1}{\sqrt{1-(v')^2}}\,v'' \quad (1)$$

Принимая во внимание (1), находим ур-ия для изгибных колебаний стержня.

$$EJ_x\left[\frac{v''}{\sqrt{1-(v')^2}}\right]''+\rho F\ddot{v}=0 \quad (2)$$

Т. к. мы рассматриваем малые колебания стержня, то ур-ие (2) можно преобразовать к виду

$$EJ_x\left\{\left[1+\frac{1}{2}(\vartheta')^2\right]\vartheta''\right\}''+\rho F\ddot{\vartheta}=0 \quad (3)$$

Рассмотрим шарнирное опирание стержня. Тогда в одномодовом приближение решение ур-ия (3) можно представить в виде:

$$\vartheta=f(t)\sin\frac{\pi}{l}z \quad (4)$$

Подставим (4) в (3) и применим процедуру Бубнова-Галеркина:

$$EJ_x\int_0^l\left\{\left[1+\frac{1}{2}(\vartheta')^2\right]\vartheta''\right\}''\sin\frac{\pi}{l}z\,dz+\rho F\ddot{f}\int_0^l\sin^2\frac{\pi}{l}z\,dz=0$$

$$EJ f\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\frac{1}{2}l-EJ\frac{1}{16}f^3\left(\frac{\pi}{l}\right)^6 l+\rho F\frac{1}{2}l\ddot{f}=0 \Rightarrow$$

$$\ddot{f}+\omega_0^2 f+\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\omega_0^2 f^3=0 \quad (5)$$

$$\omega_0=\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}$$

где ω_0 — частота колебаний стержня при решении задачи в линейной постановке

Т.к. прогиб $f \ll l$, то удобно ввести новую переменную

$$\frac{f}{l} = \sqrt{\varepsilon}\,\varphi, \text{ где } \varepsilon \ll 1.$$

Из ур-ния (5) получаем

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi - \pi^2 \varepsilon\, \omega_0^2 \varphi^3 = 0 \qquad (6)$$

Решения ур-ния (6) ищем методом двух масштабов.

~~Полаг~~ Полагаем

$$\varphi = A(\tau) \cos[\omega_0 t + \alpha(\tau)] + \varepsilon \varphi_1(t)$$

$\tau = \varepsilon t$ – медленное время.

Тогда с точностью до величин первого порядка малости имеем:

$$\dot{\varphi} = \mathring{A} \cos[\omega_0 t + \alpha(\tau)] - A(\omega + \mathring{\alpha}) \sin[\omega_0 t + \alpha(\tau)] + \varepsilon \dot{\varphi}_1$$

$$\ddot{\varphi} = -2\omega_0 \mathring{A} \sin[\omega_0 t + \alpha) - A(\omega_0^2 + 2\mathring{\alpha}\,\omega_0) \cos(\omega_0 t + \alpha(\tau)] + \varepsilon \ddot{\varphi}_1 \qquad (7) ~~(6)~~$$

Подставим ~~(6)~~ (7) в (6) и в результате получим:

$$-2\omega_0 \mathring{A} \sin[\omega_0 t + \alpha(\tau)] - 2A\mathring{\alpha}\omega_0 \cos[\omega_0 t + \alpha(\tau)] +$$

$$+\varepsilon\left(\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1\right) = -\pi^2 \varepsilon \omega_0^2 A^3 \cos^3[\omega_0 t + \alpha]$$

Преобразуем данное уравнение к виду:

$$-2\omega_0 \mathring{A} \sin[\omega_0 t + \alpha(\tau)] - 2A\mathring{\alpha}\omega_0 \cos[\omega_0 t + \alpha(\tau)] +$$

$$+\varepsilon\left(\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1\right) = -\frac{3}{4}\varepsilon A^3 \omega_0^2 \cos[\omega_0 t + \alpha(\tau)] + \qquad (8)$$

$$+\frac{\varepsilon}{4} A^3 \omega_0^2 \cos 3[\omega_0 t + \alpha(\tau)]$$

Для того чтобы отсутствовали резонансные слагаемые в ур-ии (8) следует приравнять сомножители при $\sin[\omega t + \alpha]$ и $\cos[\omega t + \alpha]$ слева и справа.

$$\left.\begin{aligned} -2\omega_0 \mathring{A} &= 0 \\ -2A\omega_0 \mathring{\alpha} &= -\frac{3}{4}\varepsilon A^3 \omega_0^2 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

из (9) получаем:

$$A = const = A_0$$

$$\mathring{\alpha} = +\frac{3}{8}\varepsilon \omega_0 A_0^2 \Rightarrow$$

$$\alpha = +\frac{3}{8}\omega_0 \varepsilon A_0^2 t + \alpha_0$$

Окончательно получаем:

$$\varphi = A_0 \cos\left[\left(1 + \frac{3}{8}\varepsilon A_0^2\right)\omega_0 t + \alpha_0\right]$$

Таким образом учёт нелинейной деформации вызывает повышение собственных частот колебаний.

(Лекция)

Нелинейные собственные колебания стержня при наличии сил вязкого трения

В этом случае ур-ие (6) примет вид:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi - \pi^2\varepsilon\,\omega_0^2\varphi^3 = -2\gamma\varepsilon\omega_0\dot{\varphi} \qquad (1)$$

Здесь $\gamma \simeq 1$ – коэффициент вязкого трения.

Решение ур-ия (1) ищем как и ранее в виде:

$$\varphi = A(\tau)\cos[\omega_0 t + \alpha(\tau)] + \varepsilon\varphi_1(t) \qquad (2)$$

Тогда

$$\dot{\varphi} = \dot{A}\cos[\omega_0 t + \alpha(\tau)] - A(\omega_0 + \dot{\alpha})\sin[\omega_0 t + \alpha(\tau)] + \varepsilon\dot{\varphi}_1$$

$$\ddot{\varphi} = -2\omega_0\dot{A}\sin[\omega_0 t + \alpha(\tau)] - A(\omega_0^2 + 2\dot{\alpha}\omega_0)\cos[\omega t + \alpha(\tau)] + \varepsilon\ddot{\varphi}_1$$

Подставляя (2) в (1), получаем:

$$-2\omega_0\dot{A}\sin[\omega_0 t + \alpha(\tau)] - 2A\omega_0\dot{\alpha}\cos[\omega_0 t + \alpha(\tau)] + \varepsilon(\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2\varphi_1) = -\frac{3}{4}\varepsilon\omega_0 A^3\cos[\omega_0 t + \alpha(\tau)] + 2\gamma\varepsilon A\omega_0^2\sin[\omega_0 t + \alpha(\tau)] + \frac{1}{4}\varepsilon A\omega_0^3\cos 3[\omega_0 t + \alpha(\tau)] \qquad (3)$$

Приравнивая сомножители при одинаковых $\sin[\omega_0 t + \alpha(\tau)]$ и $\cos[\omega_0 t + \alpha(\tau)]$ слева и справа в ур-ии (3), получаем:

$$\ddot{A} + \gamma\varepsilon\omega_0 A = 0$$

$$\dot{\alpha} = \frac{3}{8}\varepsilon\omega_0 A^2$$

Далее находим:

$$A = A_0 e^{-\gamma\varepsilon\omega_0 t}$$

$$\alpha = -\frac{3}{8\gamma} A_0^2 e^{-\gamma\varepsilon\omega_0 t} + \alpha_0$$

Устойчивость стержня. Задача Эйлера.

Рассмотрим стержень, один конец которого неподвижен, а на другой подвижный конец стержня действует продольная сила.

имеем ур-ие равновесия:

$-Pv + M_x = 0 \Rightarrow$ т.к. $M_x = -EJ_x \frac{d^2 v}{dz^2}$

то

$$EJ_x \frac{d^2 v}{dz^2} + Pv = 0 \quad (1)$$

Рассмотрим шарнирное опирание стержня, тогда

$$v = C \sin\frac{\pi n z}{l} \quad (2)$$

Подставим (2) в (1)

$$C\left[P_n - EJ_x\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right]\sin\frac{\pi n z}{l} = 0$$

откуда находим

$$P_n = EJ_x \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

это и есть критическая сила по Эйлеру, при которой стержень потеряет устойчивость.

Найдем далее прогиб стержня после потери устойчивости. Для этого воспользуемся полученным ранее уравнением для кривизны

$$\frac{1}{\rho} = \frac{v''}{\sqrt{1 - v'^2}} = \left[1 + \frac{1}{2} v'^2\right] v'' \quad (3)$$

Подставим (3) в (1) и получим:

$$EJ_x v'' \left[1 + \frac{1}{2}(v')^2\right] + Pv = 0 \quad (4)$$

Рассмотрим стержень с шарнирным опиранием и положим

$$v = C_n \sin\frac{\pi n z}{l} \quad (5)$$

Подставим (5) в (4) и выполним процедуру Бубнова–Галеркина. В результате будем иметь:

$$-EJ_x \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - EJ_x \left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 C_n^2 + P = 0$$

или

$$P - P_n = P_n \frac{C_n^2}{8} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

Окончательно получаем:

$$C_n = \frac{2l}{\pi n}\sqrt{\left(\frac{P}{P_n}-1\right)} \quad (6)$$

Формула (6) определяет амплитуду прогиба стержня после потери устойчивости.

Влияние продольного усилия на собственные частоты поперечных колебаний стержня

Имеем

$$EJ_x v^{IV} + P v'' + \rho F \ddot{v} = 0 \quad (7)$$

Рассмотрим шарнирное опирание стержня, тогда:

$$v = C e^{i\omega t} \sin\frac{\pi n z}{l} \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), получаем:

$$EJ_x\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 P - \rho F \omega^2 = 0$$

Откуда находим:

$$\omega^2 = \frac{1}{\rho F}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\left[EJ_x\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - P\right] \quad (9)$$

Из (9) следует. Сжимающее усилие уменьшает частоту собственных колебаний, а растягивающее увеличивает.

Параметрические колебания стержня

Колебания стержня при наличии гармонической продольной силы удовлетворяют уравнению.

$$EJ v^{IV} + P_0 \cos 2\omega t + \rho F \ddot{v} = 0 \quad (1)$$

2ω – частота вынуждающей силы.

Решение уравнения (1) ищем в виде:

$$v = f(t) \sin \frac{\pi z}{l}$$

Тогда для функции $f(t)$ получаем уравнение:

$$\ddot{f} + \varepsilon \omega_0^2 \cos 2\omega t \, f + \omega_0^2 f = 0 \quad (2)$$

где $$\omega_0^2 = \frac{EJ \left(\frac{\pi}{l}\right)^4}{\rho F}$$

$$\varepsilon = \frac{P_0}{EJ\left(\frac{\pi}{l}\right)^2} \ll 1$$

Т.е. амплитуда продольной силы является бесконечно малой величиной.

Рассмотрим в начале случай, когда частота продольной силы ω находится вдали от частоты собственных колебаний ω_0. Т.е. $\omega \neq \omega_0$

Тогда решение ур-ия (2) ищем в виде:

$$f = A(\tau)\cos[\omega_0 t + \alpha(\tau)] + \varepsilon f_1(t) \quad (3)$$

где

$\tau = \varepsilon t$ – медленное время

Из уравнения (2) с точностью до величин первого порядка малости получаем:

$$\dot f = \dot A\cos(\omega_0 t + \alpha) + A(\omega_0 + \dot\alpha)\sin(\omega_0 t + \alpha) + \varepsilon \dot f_1 \quad (4)$$

$$\ddot f = -2\omega_0 \dot A \sin(\omega_0 t + \alpha) - A(\omega_0^2 + 2\dot\alpha\omega_0)\cos(\omega_0 t + \alpha) + \varepsilon \ddot f_1$$

Подставляя (4) в (3), получим:

$$-2\omega_0 \dot A \sin(\omega_0 t + \alpha) - 2A\dot\alpha\omega_0\cos(\omega_0 t + \alpha) + \varepsilon(\ddot f_1 + \omega_0^2 f_1) = -\frac{1}{2}\varepsilon\omega_0^2\{\cos[(2\omega - \omega_0)t - \alpha] + \cos[(2\omega + \omega_0)t + \alpha]\} \quad (5)$$

Для того чтобы отсутствовали резонансные слагаемые, следует положить в уравнении (5):

$$\dot A = 0; \ \dot\alpha = 0$$

или $A = A_0$; $\alpha = \alpha_0$

Таким образом будем иметь:

$$f = A_0 \cos(\omega t + \alpha) + f_1(t)$$

~~где A_1~~ где f_1 получается как частное решение следующего ур-ния:

$$\ddot{f}_1 + \omega_0^2 f_1 = \frac{1}{2}\varepsilon\omega_0^2 \{\cos[(2\omega - \omega_0)t - \alpha_0] +$$
$$+ \cos[(2\omega + \omega_0)t + \alpha_0]\}$$

Рассмотрим далее случай когда $\omega \approx \omega_0$, т.е. $\omega - \omega_0 = \Delta\omega$; $\Delta\omega \ll \omega, \omega_0$.

если $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = K\varepsilon\omega_0$; $K \approx 1$

Решение уравнения (2) ищем в виде:

$$f = p(\tau)\cos\omega t + q(\tau)\sin\omega t + \varepsilon f_1(t)$$

тогда

$$\dot{f} = \dot{p}\cos\omega t - \omega p\sin\omega t + \dot{q}\sin\omega t - \omega q\cos\omega t + \varepsilon\dot{q}_1 \quad (3)$$

$$\ddot{f} = -2\omega\dot{p}\sin\omega t - \omega^2 p\cos\omega t + 2\omega\dot{q}\cos\omega t - \omega^2 q\,\cancel{\sin\omega t} + \varepsilon\ddot{q}_1$$

Подставляя (3) в (2), получаем

$$-2\omega\dot{p}\sin\omega t + 2\omega\dot{q}\cos\omega t - 2\omega^2\varepsilon K p\cos\omega t -$$
$$-2\omega_0^2 K q\sin\omega t + \varepsilon(\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1) = \quad (4)$$
$$= -\varepsilon\omega^2 p\cos 2\omega_0 t\cos\omega t -$$
$$-\varepsilon\omega^2 q\cos 2\omega_0 t\sin\omega t$$

После преобразования правой части уравнения (4), получаем

$$-2\omega\dot p\sin\omega t + 2\omega\dot q\cos\omega t - 2\omega^2\varepsilon k p\cos\omega t -$$

$$+\varepsilon(\ddot q_1 + \omega_0^2 q_1) =$$

$$-2\omega^2\varepsilon k q\sin\omega t$$

$$= -\varepsilon\omega^2 p\frac{1}{2}\left[\cos\omega t + \cos 3\omega t\right] -$$

$$-\varepsilon\omega^2 q\frac{1}{2}\left[-\sin\omega t + \sin 3\omega t\right]$$

Чтобы отсутствовали резонансные слагаемые следует приравнять в данном уравнении при сомножители

$\sin\omega t$ и $\cos\omega t$

$$\left.\begin{aligned} -2\omega\dot p - 2\omega^2\varepsilon k q - \varepsilon\omega^2\frac{1}{2}q &= 0 \\ 2\omega\dot q - 2\omega^2\varepsilon k p + \varepsilon\omega^2\frac{1}{2}p &= 0 \end{aligned}\right\}$$

или будем иметь

$$\dot p + \varepsilon\omega\left(k + \frac{1}{4}\right)q = 0$$

$$-\varepsilon\omega\left(k - \frac{1}{4}\right)p + \dot q = 0$$

$$p = c_1 e^{\lambda t}, \quad q = c_2 e^{\lambda t}$$

$$\left\{\begin{aligned} c_1\lambda + c_2\varepsilon\omega\left(k + \frac{1}{4}\right) &= 0 \\ -c_1\left(k - \frac{1}{4}\right) + c_2\lambda &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda, & \varepsilon\omega\left(k + \frac{1}{4}\right) \\ -\left(k - \frac{1}{4}\right); & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Далее имеем

$$\lambda^2 + \varepsilon^2 \omega^2 \left(k^2 - \frac{1}{16} \right) = 0$$

откуда находим:

$$\lambda_{1,2} = \pm \varepsilon \omega \sqrt{\frac{1}{16} - k^2}$$

Если

$\frac{1}{16} - k^2 > 0$, то получается неустойчивое решение задачи.