Ортогональность балочных функций.

Две функции наз. ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю при $m \neq k$.

$$V_m \cdot V_k = \int_0^l V_m(\lambda_m z)\, V_k(\lambda_k z)\, dz = 0$$

Доказательство

$$\left.\begin{aligned} V_m^{IV} - \lambda_m^4 V_m = 0 \\ - \quad V_k^{IV} - \lambda_k^4 V_k = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \cdot V_k \\ \cdot V_m \end{aligned}$$

$$V_m^{IV} \cdot V_k - V_k^{IV} \cdot V_m - (\lambda_m^4 - \lambda_k^4) V_k \cdot V_m = 0 \quad (1)$$

$$V_m^{IV} \cdot V_k = \int_0^l V_m^{IV} V_k\, dz = [V_k V_m^{III}]_0^l - \int_0^l V_m^{III} V_k'\, dz =$$

$$= -\int_0^l V_k'\, dV_m^{II} = -[V_k^{I} V_m^{II}]_0^l + \int_0^l V_m^{II} V_k^{II}\, dz$$

$$V_m^{IV} \cdot V_k = \int_0^l V_m^{II} V_k^{II}\, dz \quad (2)$$

$$[V_k V_m^{III}]_0^l = [V_k^{I} V_m^{II}]_0^l = 0 \quad (3)$$

~~Условие~~ Выражение (3) имеет место в силу граничных условий:

Заделка, шарнирное опирание, свободный край.

Аналогично имеем:

$$V_k^{IV} V_m = \int V_k^{II} V_m^{II}\, dz \quad (4)$$

Принимая во внимание (2) и (4), (2)

получаем:

$$(\lambda_m^4-\lambda_k^4)\,V_m\cdot V_k=0$$

или

$$V_m\cdot V_k=0 \quad \text{при} \quad m\neq k$$

Функции Крылова:

$$\bar X_{1k}=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}\lambda_k z+\cos\lambda_k z)$$

$$\bar X_{2k}=\frac{1}{2\lambda_k}(\operatorname{sh}\lambda_k z+\sin\lambda_k z)$$

$$\bar X_{3k}=\frac{1}{2\lambda_k^2}(\operatorname{ch}\lambda_k z-\cos\lambda_k z)$$

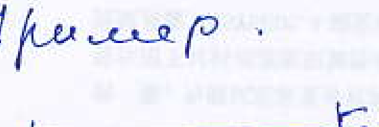
(5)

$$\bar X_{4k}=\frac{1}{2\lambda_k^3}(\operatorname{sh}\lambda_k z-\sin\lambda_k z)$$

Из (5) следует:

$$\bar X'_{4k}=\bar X_{3k},\quad \bar X'_{3k}=\bar X_{2k},\quad \bar X'_{2k}=\bar X_{1k};\quad \bar X'_{1k}=\bar X_{4k}\lambda_k^4$$

Пример.



стержень с заделанными концами.

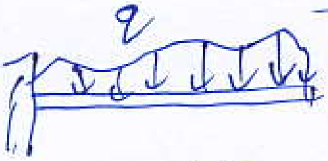
$$V(\lambda z)=C_1\bar X_1+C_2\bar X_2+C_3\bar X_3+C_4\bar X_4$$

Используя граничные условия при $z=0$: $V|_{z=0}=0$; $V'(z)=0$, получаем

$C_1=0$; $C_2=0$. Получаем однородную систему ур-ий при помощи граничных услов. при $z=l$ относительно C_3 и C_4

Вынужденные колебания (Лекция)

стержня



$$q = q(z,t)$$

$$\rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EJ\frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = q(z,t) \quad (1)$$

Решение ур-ния (1) представим в виде ряда по балочным функциям:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)\bar{V}_n(\lambda_n z) \quad (2)$$

Подставим (2) в (1) и получим

$$\rho F\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{\varphi}_n \bar{V}_n + EJ\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n \bar{V}^{IV} = q(t,z)$$

Принимая во внимание ур-ие:

$$\bar{V}_n^{IV} - \lambda_n^4 \bar{V}_n = 0$$

получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\rho F\ddot{\varphi}_n - EJ\lambda_n^4\varphi_n\right]\bar{V}_n(\lambda_n z) = q(t,z) \quad (3)$$

Умножая ур-ие (3) на координатную функцию $\bar{V}_n$, получаем:

$$\left[\rho F\ddot{\varphi}_n + EJ\lambda_n^4\varphi_n\right]\bar{V}(\lambda_n z)\cdot\bar{V}_n(\lambda_n z) = q\bar{V}(\lambda_n z) \quad (4)$$

из (4) получаем:

$$\ddot{\varphi}_n + \omega_n^2\varphi_n = H_n(t) \quad (5)$$

Здесь

$$\omega_n^2 = \frac{EJ\lambda_n^4}{\rho F}, \quad H_n(t) = \frac{q(t,z)\cdot\bar{V}(\lambda_n z)}{\rho F\bar{V}(\lambda_n z)\cdot\bar{V}(\lambda_n z)}$$

Решение ур-ия (5) ищем при помощи метода вариации произвольных постоянных.

Имеем однородное ур-ие:

$$\ddot{\varphi}_{n0} + \omega_n^2 \varphi_{n0} = 0$$

Его решение

$$\varphi_{n0} = C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t$$

Полагаем $C_n = C_n(t)$, $D_n = D(t)$

Сделаем замену переменных:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{nr} &= C_n(t) \sin \omega_n t + D_n(t) \cos \omega_n t \\ \dot{\varphi}_{nr} &= C_n(t)\, \omega_n \cos \omega_n t - D_n(t)\, \omega_n \sin \omega_n t \end{aligned}\right\} (6)$$

Далее имеем:

$$\ddot{\varphi}_{nr} = \omega_n \dot{C}_n \cos \omega_n t - C_n \omega_n^2 \sin \omega_n t - \qquad (7)$$

$$- \dot{D}_n \omega_n \sin \omega_n t - D_n \omega^2 \cos \omega_n t$$

Подставляя (6) и (7) в (5), получаем:

$$\left.\begin{aligned} \dot{C}_n \omega_n \cos \omega_n t - \dot{D}_n \omega_n \sin \omega_n t &= H_n \\ \dot{C}_n \omega_n \sin \omega_n t + \dot{D}_n \omega_n \cos \omega_n t &= 0 \end{aligned}\right. \begin{aligned} &\Big\} \cdot \cos \omega_n t \\ &\Big\} \cdot \sin \omega_n t \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) находим:

$$\left.\begin{aligned} \dot{C}_n \omega_n &= H_n(t) \cos \omega_n t \\ - \dot{D}_n \omega_n &= H_n(t) \sin \omega_n t \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{\omega_n}\int_0^t H_n(\tau)\cos\omega_n\tau\,d\tau \\ D_n &= -\frac{1}{\omega_n}\int_0^t H_n(\tau)\sin\omega_n\tau\,d\tau \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Принимая во внимание (6) и (10), получаем:

$$\varphi_{n\tau} = \frac{1}{\omega_n}\int_0^t H_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau$$

Окончательное общее решение имеет вид:

$$\varphi_n = C_n\sin\omega_n t + D_n\cos\omega_n t + \frac{1}{\omega_n}\int_0^t H_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau$$

Постоянные C_n и D_n находим из начальных условий.

$\boxed{\text{Лекция}}$

<u>Собственные колебания стержня при наличии сил вязкого трения</u>

Рассмотрим модель вязкого трения Кельвина – Фохта:

$$\sigma = E\varepsilon + E_* \dot{\varepsilon}$$

E_* – коэффициент вязкого трения.

В этом случае ур-ие собственных колебаний имеет вид:

$$\rho F\ddot{v} + EJv^{IV} + E_*J\dot{v}^{IV} = 0 \quad (1)$$

Решения ур-ния (1) ищем в виде: ⑥

$$v_n = V_n(\lambda_n z)\varphi_n(t)$$

$$\rho F \ddot{\varphi} V_n + EJ V^{IV} \varphi_n + E_* J V^{IV} \dot{\varphi}_n = 0$$

Используя ур-ие для балочных функций, получаем:

$$\ddot{\varphi}_n + 2e_* \omega_n \dot{\varphi}_n + \omega_n^2 \varphi_n = 0 \quad (2) \quad 2e_* = \frac{E_*}{E}\omega_n$$

$(n = 1, 2, \dots)$

Далее рассмотрим случай малого трения, т.е. $\boxed{2e_* \ll 1}$

Решение ур-ия (2) ищем в виде:

$$\varphi_n = C_n e^{\lambda t} \quad (3)$$

из (2) находим:

$$\lambda^2 + 2e_* \omega_n \lambda + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = -e_* \omega_n \pm \sqrt{e_*^2 \omega_n^2 - \omega_n^2} \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = -e_* \omega_n \pm i\omega_n \sqrt{1 - e_*^2}$$

или

$$\lambda_{1,2} = -e_* \omega_n \pm i\hat{\omega}_n \quad (4)$$ где

$$\hat{\omega}_n = \omega_n \sqrt{1 - e_*^2}$$

Принимая во внимание (3) и (4), находим:

$$\varphi_n = C_{1n} e^{\lambda_1 t} + C_{2n} e^{\lambda_2 t} \quad (5)$$

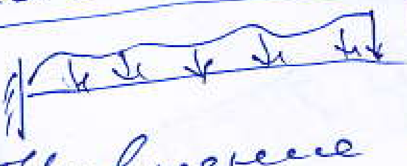
Переходя в (5) к действительным переменным получаем:

$$\varphi_n = e^{-\varepsilon_* \omega_n t}\left(C_1 \sin \hat{\omega}_n t + C_2 \cos \omega_n t\right) \quad (6)$$

Постоянные (5) и (6) находим из начальных условий.

Вынужденные колебания при наличии сил вязкого трения

$q = q(t, z)$



Уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$EJ v^{IV} + E_* J \dot{v}^{IV} + \rho F \ddot{v} = q(t,z) \quad (7)$$

Найдём в начале частное решение ур-ния (7). Положим:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\lambda_n z)\,\varphi_n(t) \quad (8)$$

Подставим (8) в (7) и представим

$$q(t,z) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(t)\, V_n(\lambda_n z)$$

в результате получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\rho F \ddot{\varphi}_n V_n(\lambda_n z) + E_* J \dot{\varphi}_n \lambda_n^4 V_n + EJ \varphi_n \lambda_n^4 V_n(\lambda_n z)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(t)\, V_n(\lambda_n z) \quad (9)$$

из уравнения (9) получаем:

$$\ddot{\varphi}_n + 2\varepsilon_* \omega_n \dot{\varphi}_n + \omega_n^2 \varphi_n = \hat{H}_n(t); \quad (10)$$

$$\hat{H}_n(t) = \frac{H(t)}{\rho F}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Частное решение ур-ния (10) ищем методом вариации произвольных постоянных:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{nч} &= C_n(t) e^{\lambda_1 t} + D_n(t) e^{\lambda_2 t} \\ \dot{\varphi}_{nч} &= C_n(t) \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + D_n(t) \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

где $\lambda_{1,2}$ определяются формулами (4).

Далее находим:

$$\ddot{\varphi}_{nч} = \dot{C}_n \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_n \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + \dot{D}_n \lambda_2 e^{\lambda_2 t} + D_n \lambda_2^2 e^{\lambda_2 t} \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10) и используя дополнительное условие, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \dot{C}_n \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \dot{D}_n \lambda_2 e^{\lambda_2 t} &= \hat{H}_n(t) \\ \dot{C}_n e^{\lambda_1 t} + \dot{D}_n e^{\lambda_2 t} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Из (13) находим:

$$\dot{C}_n = \frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \hat{H}_n(t); \quad \dot{D}_n = -\frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \hat{H}_n(t) \quad (14)$$

Интегрируя систему (14) и принимая во внимание (4), получаем:

$$\left.\begin{aligned} C_n &= -\frac{i}{2\hat{\omega}_n} \int_0^t e^{-\lambda_1 \tau} \hat{H}_n(\tau)\, d\tau \\ D_n &= \frac{i}{2\hat{\omega}_n} \int_0^t e^{-\lambda_2 \tau} \hat{H}_n(\tau)\, d\tau \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Подставляя (15) в (11) получаем:

$$\varphi_{nr} = -\frac{i}{2\hat{\omega}_n}\int_0^t \left[e^{\lambda_1(t-\tau)} - e^{\lambda_2(t-\tau)} \right] \hat{H}_n(\tau)\, d\tau \quad (16)$$

Совершая ~~в (t)~~ в (16) переход к действительным и мнимым переменным, получаем:

$$\varphi_{nr}(t) = \frac{1}{\hat{\omega}_n}\int_0^t e^{-\varepsilon_* \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_n (t-\tau)\, \hat{H}_n(\tau)\, d\tau \quad (17)$$

Подставляя (17) в (8), получаем окончательное выражение для частного решения: