§ 1. Динамика точки

1. Законы Ньютона

Динамика – раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных точек и твердых тел под действием приложенных к ним сил.

Наш параграф называется “Динамика точки”; значит, речь сейчас пойдет о движении одной материальной точки. Вспомним, что это такое.

Материальная точка – простейшая модель материального объекта, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

Вовсе не обязательно считать материальную точку малой частицей. Так, в большинстве задач небесной механики вполне разумно считать материальными точками и Солнце, и отдельные планеты (включая нашу Землю).

В следующем параграфе мы аккуратно сформулируем условия, при которых материальный объект можно считать материальной точкой.

Когда пользуются моделью материальной точки, то пренебрегают любыми характеристиками моделируемого объекта – формой, цветом, температурой и т.д. Только одной характеристикой пренебрегать нельзя: массой.

Аксиома массы: любой материальной точке сопоставлена постоянная положительная величина, называемая **массой точки**:

$$m = \text{const}\,, \quad m > 0\,.$$

Данная аксиома не говорит о том, что такое масса. Реальный смысл этого понятия раскрывается в других аксиомах, к которым мы и переходим.

Речь идет об известных законах Ньютона.

Запишем название книги, в которой они впервые были сформулированы.

“Математические начала натуральной философии” Исаа́ка Ньюто́на (1710 – 1761): **1687 г.**

Запишем оригинальную формулировку законов Ньютона, в соответствии с переводом этого трактата, выполненным академиком А.Н.Крыловым. Попутно дадим и современную их трактовку. Надо только иметь в виду, что терминология Ньютона отличается от ныне используемой.

“Тело” (по Ньютону) = материальная точка.

I закон Ньютона: “Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние”.

В современных курсах теоретической механики этот закон формулируется иначе. Из кинематики Вы знаете, что для описания движения можно пользоваться различными системами отсчета. Если в одной из них движение точки будет равномерным и прямолинейным, то в другой оно не обязательно будет таким. Поэтому запишем, какой смысл ныне вкладывается в I закон Ньютона.

Смысл – существуют системы отсчета, называемые **<u>инерциальными</u>**, в которых <u>*свободная*</u> материальная точка, на которую не действуют силы, движется равномерно и прямолинейно: $\overline{\mathbf{w}} = 0$.

Последняя формула сжато выражает существо дела. Если точка движется равномерно и прямолинейно, то ее вектор скорости $\overline{\mathbf{v}}$ постоянен по величине и направлению; а это равносильно тому, что производная от вектора $\overline{\mathbf{v}}$, т.е. ускорение $\overline{\mathbf{w}}$, равна нулю. Случай покоя, когда $\overline{\mathbf{v}} = 0$, сюда также укладывается. Мы выделили в приведенной формулировке слово “свободная”. Это – тоже важно.

<u>Свободная точка</u> – точка, на которую не наложены связи.

Если точка несвободная (например, если связи дозволяют ей двигаться только по какой-либо поверхности или кривой), то ее движение даже при отсутствии активных сил может быть отнюдь не равномерным и прямолинейным. Итак, первый закон Ньютона утверждает существование инерциальных систем отсчета. Если мы нашли одну такую систему, то все системы, которые движутся относительно нее поступательно с постоянной скоростью, также будут инерциальными, а другие системы отсчета – не будут. Это сразу следует из известной теоремы Кориолиса о сложении ускорений в сложном движении точки. Выбор инерциальной системы отсчета в конкретных задачах, рассматриваемых в динамике, осуществляется по-разному. Например, возьмем систему координат с началом в центре масс Солнечной системы и осями, направленными на неподвижные звезды. Этим определяется система отсчета, которая является инерциальной с весьма высокой степенью точности. Такой системой отсчета пользуются в астрономии и космонавтике.

С другой стороны, в задачах динамики машин и механизмов обычно достаточно считать инерциальной систему отсчета, жестко связанную с Землей.

Переходим ко второму закону Ньютона. Чтобы записать оригинальную формулировку Ньютона, введем одно определение.

<u>Количество движения</u> материальной точки – векторная мера ее механического движения, равная произведению ее массы на скорость:

$$\overline{\mathbf{Q}} = m\,\overline{\mathbf{v}}\,.$$

<u>II закон Ньютона</u>: “Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует”.

Под “изменением” Ньютон понимал приращение за малый промежуток времени, т.е. производную по времени. Кстати, именно он и ввел в математику производные; но в своем трактате, рассчитанном на достаточно широкий круг читателей, он этим нововведением не пользовался.

Далее, он говорит о пропорциональности, а не о равенстве. Но в системе единиц СИ, которой мы пользуемся, единица измерения силы выбрана так, что коэффициент пропорциональности равен единице.

Итак, смысл II закона Ньютона – следующий.

Смысл – для свободной материальной точки в инерциальной СО

$$\frac{\mathrm{d}\,(m\,\overline{\mathbf{v}})}{\mathrm{d}t} = \overline{\mathbf{F}}\,, \quad \text{т.е.}$$

$$\boxed{m\,\overline{\mathbf{w}} = \overline{\mathbf{F}}}\;.$$

Здесь мы воспользовались аксиомой массы.

Кстати, II закон Ньютона позволяет раскрыть смысл понятия массы. При одном и том же векторе силы ускорение будет тем меньше, чем больше масса.

Вывод: масса точки есть мера ее *инертности*, т.е. способности сопротивляться изменению вектора $\overline{\mathbf{v}}$.

Действительно, изменение вектора скорости за данный отрезок времени равно интегралу от ускорения; чем больше масса, тем больше должна быть сила, вызывающая данное изменение.

Заметьте: в формулировке второго закона Ньютона предполагается, что на материальную точку действует только одна сила. Как быть, если их – несколько?

Ответ на этот вопрос дает следующая аксиома.

Закон независимости действия сил: несколько сил, одновременно действующих на материальную точку, сообщают ей такое ускорение, какое сообщила бы ей одна сила, равная их геометрической сумме, т.е.

$$m\,\overline{\mathbf{w}} = \sum_k \overline{\mathbf{F}}_k\,.$$

Можно этот закон формулировать и иначе.

$$\overline{\mathbf{w}} = \sum_k \frac{\overline{\mathbf{F}}_k}{m} = \overline{\mathbf{w}}_k\,,$$

где $\overline{\mathbf{w}}_k$ – ускорение, которое имела бы точка, если бы на нее действовала только сила $\overline{\mathbf{F}}_k$.

Ньютон, между прочим, данного закона не формулировал, хотя эквивалентное утверждение в его трактате имеется. Но он не рассматривал его как аксиому, а пытался доказывать (в общем-то, неудачно, так как данный закон из других законов Ньютона не следует – это независимый закон природы).

Если бы Ньютон поступил иначе, мы говорили бы сегодня о *четырех* законах Ньютона.

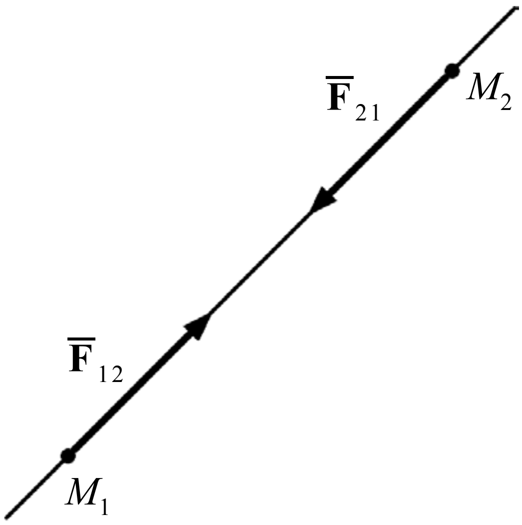
Теперь переходим к III закону Ньютона (в общепринятой нумерации).

Вспомним, что сила – это мера взаимодействия материальных тел. Для случая материальных точек оригинальная формулировка Ньютона такова.

III закон Ньютона: "Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе – взаимодействия двух тел друг на друга всегда между собою равны и направлены в противоположные стороны".

Смысл – силы взаимодействия между двумя материальными точками:

1) равны по модулю;
2) противоположны по направлению;
3) лежат на одной прямой.



$$\begin{cases} 1-2) \quad \overline{\mathbf{F}}_{12} = -\overline{\mathbf{F}}_{21} \\ 3) \quad \overline{\mathbf{F}}_{12} \parallel \overline{M_1 M_2} \end{cases}$$

Эта аксиома выполняется в любой системе отсчета (как инерциальной, так и неинерциальной); точки при этом не обязаны быть свободными.

Напомним, что предыдущие законы справедливы для свободных материальных точек. Как быть, если на точку наложены связи?

Здесь приходится пользоваться еще одной аксиомой. Она известна из статики, а для случая материальной точки формулируется так:

Принцип освобождаемости от связей: любую несвободную точку можно рассматривать как свободную, если отбросить связи, заменив их действие реакциями.

Итак,

$$m\,\overline{\mathbf{w}} = \overline{\mathbf{F}}^{\text{активн}} + \overline{\mathbf{N}},$$

где $\overline{\mathbf{N}}$ – равнодействующая реакций связей.

При решении задач динамики для несвободной материальной точки используется именно это соотношение, а не исходная форма II закона Ньютона.

2. Две основные задачи динамики точки

Вновь рассмотрим свободную материальную точку. Пусть на нее действует сила $\overline{\mathbf{F}}$; последнюю можно рассматривать как равнодействующую сил, действующих на нее со стороны других материальных объектов, т.е. других тел или, скажем, полей.

Для простоты будем считать, что на точку действуют силы, вызванные ее взаимодействием с другими материальными точками.

Допущение: в задачах динамики одной материальной точки предполагается, что действующая на нее сила определяется *только* положением точки, ее скоростью и, возможно, временем:

$$\overline{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{F}}\,(\,\overline{\mathbf{r}},\,\dot{\overline{\mathbf{r}}},\,t\,)\ .$$

Это – вовсе не аксиома, не закон природы. Фактически здесь предполагается, что рассматриваемая материальная точка не оказывает существенного влияния на движение взаимодействующих с ней точек.

Например, пусть космический аппарат летит от Земли к Луне.

На него действуют силы притяжения со стороны Земли и Луны, влияющие на движение аппарата.

По III закону Ньютона, такие же силы со стороны аппарата действуют на Землю и Луну. Но масса аппарата ничтожно мала по сравнению с массами этих небесных тел и на их движение практически не влияет.

Поскольку Земля и Луна движутся друг относительно друга, то сила $\overline{\mathbf{F}}$ будет зависеть не только от положения самого аппарата, но и от относительного положения Земли и Луны; это влияние отражается зависимостью $\overline{\mathbf{F}}$ от t.

Если же влияние рассматриваемой материальной точки на движение других точек существенно, то записанная нами формула уже не будет иметь место. Тогда речь будет идти не о задаче динамики одной точки, а о задаче динамики системы материальных точек; такими задачами мы займемся позже.

Подставим записанное выражение для $\overline{\mathbf{F}}$ во II закон Ньютона:

$$m\,\overline{\mathbf{w}} = \overline{\mathbf{F}}\ .$$

Ускорение – это вторая производная от радиус-вектора. Получаем:

$$\boxed{m\,\frac{\mathrm{d}^2\,\overline{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t^2} = \overline{\mathbf{F}}\,(\,\overline{\mathbf{r}},\,\dot{\overline{\mathbf{r}}},\,t\,)}\ .$$

Это – дифференциальное уравнение движения свободной материальной точки в векторной форме; записано в инерциальной СО.

Можно записать это уравнение и в проекциях на оси декартовой системы координат. Будем предполагать, что эта система координат неизменно связана с той инерциальной системой отсчета, в которой записано векторное уравнение.

Имеем:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_x\,, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = F_y\,, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = F_z \qquad \text{(Эйлер, 1750).} \end{cases}$$

Ньютон такими уравнениями еще не пользовался. Аргументы у функций F_x, F_y, F_z для краткости не выписаны (это мы сделаем чуть позже, но и так понятно, что это – координаты точки, их первые производные по времени и время).

Итак, в нашем распоряжении – три скалярных дифференциальных уравнения второго порядка. Переходим к рассмотрению двух основных задач динамики материальной точки.

<u>Первая задача</u>: задан закон движения $\overline{\mathbf{r}} = \overline{\mathbf{r}}\,(t)$. Найти силу, сообщающую точке данное движение.

Если воспользоваться дифференциальными уравнениями движения свободной материальной точки, то эта задача решается просто.

Двукратное дифференцирование:

$$\overline{\mathbf{F}} = m\,\frac{d^2\,\overline{\mathbf{r}}}{dt^2}\;;$$

при этом сила находится в виде $\overline{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{F}}\,(t)$.

Часто этого бывает достаточно, ведь теперь мы можем найти силу в любой момент времени. Однако это решение является <u>*неполным*</u>, так как в общем случае в динамике свободной материальной точки сила рассматривается как функция положения, скорости и времени. Значит, в общем виде получить полное решение первой задачи только двукратным дифференцированием нельзя. Если же о силе известна какая-либо дополнительная информация, то иногда полное решение оказывается возможным.

<u>Вторая задача</u>: заданы сила $\overline{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{F}}\,(\,\overline{\mathbf{r}},\,\dot{\overline{\mathbf{r}}},\,t\,)$, а также $\overline{\mathbf{r}}\,(0)$ и $\dot{\overline{\mathbf{r}}}\,(0)$. Найти закон движения точки.

Иными словами, здесь обязательно задаются положение и скорость точки в начальный момент времени (для простоты мы считаем его нулевым).

Распишем дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на декартовы оси, причем более подробно, чем мы делали это раньше:

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)\,, \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)\,, \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)\,. \end{cases}$$

Решение задачи сводится к интегрированию данной системы дифференциальных уравнений с учетом начальных условий.

Значит, вторая задача динамики значительно сложнее первой. Если там речь шла о дифференцировании заданной функции времени, то теперь речь идет об интегрировании системы дифференциальных уравнений (как правило, нелинейных). В общем случае это интегрирование не может быть выполнено в замкнутой форме. Тогда прибегают к численному интегрированию (при помощи компьютера); решение при этом получается приближенным. Рассмотрим последовательность действий в том случае, когда аналитическое решение задачи все же оказывается возможным. Обычно и для численного, и для аналитического решения систему дифференциальных уравнений преобразуют к нормальной форме Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x\,, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y\,, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_z\,, \\ \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{m}F_x\,, \\ \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{m}F_y\,, \\ \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{m}F_z\,. \end{cases}$$

Предположим, нам удалось в аналитическом виде получить решение этой системы шести дифференциальных уравнений первого порядка.

Общее решение:

$$(*) \qquad \begin{cases} x = x(t, C_1, \ldots, C_6), \\ \ldots \\ v_z = v_z(t, C_1, \ldots, C_6), \end{cases}$$

где $C_1, \ldots, C_6$ – постоянные интегрирования.

Число этих произвольных постоянных равно порядку системы.

Для получения закона движения нужно теперь воспользоваться известными в нулевой момент времени положением и скоростью точки.

Начальные условия при $t = 0$:

$$x = x(0), \quad y = y(0), \quad z = z(0),$$

$$v_x = \dot{x}(0), \quad v_y = \dot{y}(0), \quad v_z = \dot{z}(0).$$

Подставляя в (*) $t = 0$ и эти начальные условия, получаем шесть алгебраических уравнений относительно $C_1, \ldots, C_6$. Найдя их значения, подставляем эти значения в (*) и получаем искомый закон движения.

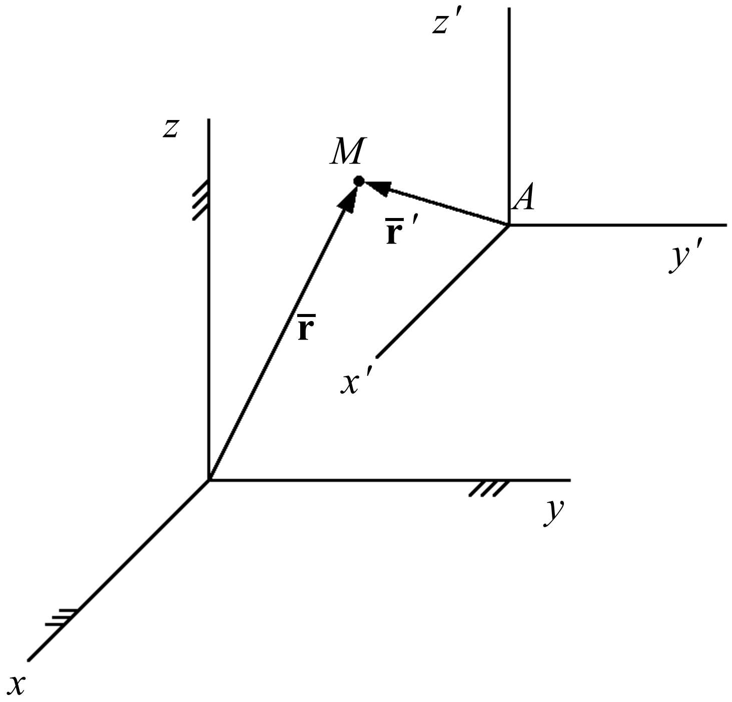
Замечание. При решении задач динамики *несвободной* материальной точки нужно дополнить уравнения движения уравнениями связей.

3. Динамика точки в неинерциальной системе отсчета

Напоминаю, что II закон Ньютона справедлив только в инерциальной системе отсчета. Уравнения движения свободной материальной точки мы писали тоже в инерциальной системе отсчета. В некоторых задачах использование разумно выбранной неинерциальной системы отсчета может, однако, доставлять определенные преимущества. Чтобы найти уравнения движения материальной точки, мы будем рассматривать ее движение как *сложное*.

Пусть Е – фиксированная инерциальная система отсчета (*условно неподвижная СО*, у.н.СО) с системой координат xyz.

Пусть Е$'$ – произвольно движущаяся СО с системой координат $x'y'z'$. Она может быть и неинерциальной.



В системе Е II закон Ньютона:

$$m\,\overline{\mathbf{w}}^{\,\text{абс}} = \overline{\mathbf{F}}\,, \qquad \overline{\mathbf{w}}^{\,\text{абс}} \equiv \frac{\mathrm{d}^2\,\overline{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t^2}\,.$$

Индекс “абс” говорит нам, что данная величина определяется для абсолютного движения. В кинематике абсолютное движение определялось как движение относительно исходной системы отсчета (которая могла быть любой). В динамике данный термин имеет более узкое значение.

<u>**Абсолютное движение**</u> (в динамике) – движение относительно у.н.СО (обязательно инерциальной).

Значит, $\overline{\mathbf{w}}^{\,\text{абс}}$ – это вектор ускорения точки M в ее абсолютном движении.

Мы же собираемся работать с относительными величинами, определенными относительно системы отсчета Е$'$. В частности, нам потребуется относительное ускорение точки M.

Связь между относительным и абсолютным ускорениями дает известная Вам теорема Кориолиса.

По теореме Кориолиса:

$$\overline{\mathbf{w}}^{\,\text{абс}} = \overline{\mathbf{w}}^{\,\text{отн}} + \overline{\mathbf{w}}^{\,\text{пер}} + \overline{\mathbf{w}}^{\,\text{кор}}\,,$$

где:

$$\overline{\mathbf{w}}^{\,\text{отн}} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}^2\,\overline{\mathbf{r}}\,'}{\mathrm{d}t^2}$$

локальная производная

$$\overline{\mathbf{w}}^{\,\text{пер}} = \overline{\mathbf{w}}_A + [\,\overline{\odot}, \overline{\mathbf{r}}\,'\,] + [\,\overline{\square}, [\,\overline{\square}, \overline{\mathbf{r}}\,'\,]\,]\,;$$

$$\overline{\mathbf{w}}^{\,\text{кор}} = 2\,[\,\overline{\square}, \overline{\mathbf{v}}^{\,\text{отн}}\,]\,.$$

Напомним, что локальная производная считается в предположении, что оси $x'y'z'$ – неподвижны. Иными словами, вектор определяется своими проекциями на подвижные оси, а компоненты локальной производной этого вектора находятся как производные от данных проекций. Относительная скорость, тоже представляет собой локальную производную

$$\overline{\mathbf{v}}^{\,\text{отн}} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\,\overline{\mathbf{r}}\,'}{\mathrm{d}t}\,.$$

Подставим выражение для вектора $\overline{\mathbf{w}}^{\,\text{абс}}$ во II закон Ньютона:

$$m\,\overline{\mathbf{w}}^{\,\text{отн}} = \overline{\mathbf{F}} + (-m\,\overline{\mathbf{w}}^{\,\text{пер}}) + (-m\,\overline{\mathbf{w}}^{\,\text{кор}})\,.$$

Слагаемые, содержащие переносное и кориолисово ускорения, перенесены в правую часть, потому что это – *известные* величины (движение системы отсчета E' относительно условно неподвижной системы отсчета предполагается известным). Для этих слагаемых (а по размерности это – силы) существуют специальные названия.

Векторы $\overline{\mathbf{\Phi}}^{\,\text{пер}} = -m\,\overline{\mathbf{w}}^{\,\text{пер}}$ и $\overline{\mathbf{\Phi}}^{\,\text{кор}} = -m\,\overline{\mathbf{w}}^{\,\text{кор}}$ называются **переносной и кориолисовой силами инерции**.

Получены уравнения движения материальной точки в неинерциальной СО:

$$\boxed{m\,\frac{\tilde{\mathrm{d}}^{2}\,\overline{\mathbf{r}}\,'}{\mathrm{d}t^{2}} = \overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{\Phi}}^{\,\text{пер}} + \overline{\mathbf{\Phi}}^{\,\text{кор}}}\,.$$

Таким образом, уравнения динамики материальной точки можно писать и в неинерциальных системах отсчета, только надо к ньютоновым силам добавить переносную и кориолисову силы инерции. Позже в этом курсе мы встретимся и с другой разновидностью сил инерции. Введенные в данном пункте переносная и кориолисова силы инерции существенно отличаются от ньютоновых сил. Сформулируем, в чем проявляются эти различия.

Ньютоновы силы:

1) характеризуют взаимодействия материальных тел;

2) не меняются при переходе к другой системе отсчета.

Переносная и кориолисова силы инерции:

1) не связаны с взаимодействиями (вычисляются по кинематическим характеристикам движения);

2) меняются при переходе от одной системы отсчета к другой (в инерциальных СО их просто нет).

Но вернемся к уравнениям динамики материальной точки в неинерциальной системе отсчета:

$$m\,\overline{\mathbf{w}}^{\,\text{отн}} = \overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{\Phi}}^{\,\text{пер}} + \overline{\mathbf{\Phi}}^{\,\text{кор}}\,.$$

Рассмотрим частный случай этих уравнений.

Частный случай: пусть материальная точка покоится в подвижной СО E' (относительный покой).

Имеем:

$$\overline{\mathbf{w}}^{\,\text{отн}} = 0\,; \qquad \overline{\mathbf{v}}^{\,\text{отн}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{\Phi}}^{\,\text{кор}} = 0\,.$$

Действительно, кориолисова сила инерции определяется как взятое со знаком минус произведение массы на кориолисово ускорение, но последнее пропорционально относительной скорости.

Итак,

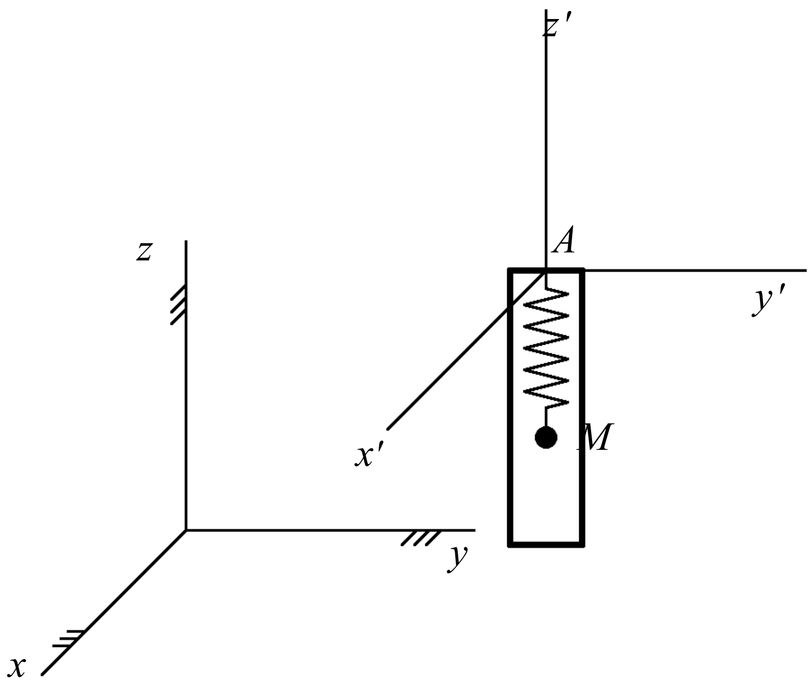
$$0 = \overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{\Phi}}^{\,\text{пер}}\,.$$

Это – уравнение относительного равновесия точки.

Вектор ньютоновой силы $\overline{\mathbf{F}}$ и переносная сила инерции взаимно уравновешиваются.

4. Акселерометры

Рассмотрим относительное равновесие груза, подвешенного в камере, движущейся поступательно по вертикали в поле силы тяжести.



На рисунке показано, что подвижную систему отсчета мы связали с камерой, ось z' направили по вертикали, а начало подвижной системы координат взяли в положении, при котором пружина не деформирована.

Стенки камеры здесь – узкие и гладкие. Они нужны, чтобы исключить поперечное движение груза, при котором он раскачивался бы подобно маятнику.

Груз в данной задаче естественно считать материальной точкой. Запишем для нее уравнения относительного равновесия.

Имеем:

$$0 \;=\; \overline{\mathbf{F}}^{\,\text{упр}} + \overline{\mathbf{F}}^{\,\text{тяж}} + \overline{\mathbf{\Phi}}^{\,\text{пер}},$$

или

$$0 \;=\; -\,k\,\overline{\mathbf{r}}\,' + m\,\overline{\mathbf{g}} - m\,\overline{\mathbf{w}}^{\,\text{пер}}.$$

В общем случае

$$\overline{\mathbf{w}}^{\,\text{пер}} \;=\; \overline{\mathbf{w}}_A + [\,\overline{\odot}, \overline{\mathbf{r}}\,'\,] + [\,\overline{\square}, [\,\overline{\square}, \overline{\mathbf{r}}\,'\,]\,];$$

но сейчас $\overline{\square} = 0$, $\overline{\odot} = 0$ $\quad\Rightarrow\quad \overline{\mathbf{w}}^{\,\text{пер}} = \overline{\mathbf{w}}_A \equiv \overline{\mathbf{w}}^{\,\text{абс}}$.

Последнее равенство очевидно: поскольку наш груз покоится относительно поступательно движущейся системы отсчета, то ускорения начала системы координат A и самой материальной точки совпадают.

В дальнейшем изложении нам потребуется одно общее определение, относящееся не только к данному примеру.

Кажущееся ускорение – разность абсолютного ускорения точки и ускорения свободного падения:

$$\overline{\mathbf{w}}^{\,\text{каж}} \;=\; \overline{\mathbf{w}}^{\,\text{абс}} - \overline{\mathbf{g}}.$$

Сейчас мы выясним, как это кажущееся ускорение можно найти.

Проектируем уравнение относительного равновесия на ось z':

$$0 \;=\; -\,kz' - mg - m w_z^{\text{абс}} \;\equiv\; -\,kz' - m\,\underbrace{(w_z^{\text{абс}} + g)}_{w_z^{\text{каж}}}.$$

Здесь g – модуль ускорения свободного падения, k – коэффициент жесткости пружины. z' у нас совпадает с деформацией пружины.

Штрих в индексах мы опустили: ведь в нашем примере проекции векторов на оси z и z' совпадают. Ясно, что в обозначении деформации пружины штрих опускать нельзя.

Отсюда

$$\boxed{w_z^{\text{абс}} + g \;=\; -\frac{kz'}{m}}\,.$$

Но величину z' можно измерить. Зная массу m и коэффициент жесткости k, находим из записанной нами формулы кажущееся ускорение точки M.

Мы рассмотрели принцип работы **акселерометра** – прибора для измерения кажущегося ускорения.

Основу такого механического акселерометра (а бывают еще акселерометры, основанные на других физических принципах) составляет чувствительный элемент (т.е. наш грузик), упруго соединенный со стенками камеры. Наш акселерометр является *одноосным* – измеряет только проекцию кажущегося ускорения на ось z. Чтобы найти весь вектор кажущегося ускорения, нужны еще два аналогичных акселерометра, работающие в направлении осей x и y. Мы нашли только кажущееся ускорение груза; но его абсолютное ускорение найти легко: достаточно только вычесть g. В действительности все не так просто. Если от акселерометра требуется высокая точность, то надо учитывать, что g несколько меняется с изменением положения груза относительно Земли (подробнее об этом мы поговорим в следующем пункте). Но это в принципе – решаемая задача.

Зачем нужно знать абсолютное ускорение груза (или, что то же самое, камеры)? А вот зачем.

Если z – координата в системе xyz объекта, на котором установлен акселерометр, то

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = w_z^{\text{абс}} \equiv -g - \frac{kz'}{m}.$$

Дважды интегрируем по времени:

$$v_z(t) = v_z(0) + \int_0^t w_z^{\text{абс}}(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

$$z(t) = z(0) + \int_0^t v_z(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Здесь $z(0)$ и $v_z(0)$ – начальные значения координаты и скорости объекта.

Разместим на объекте два аналогичных акселерометра, измеряющих проекции ускорения на оси x и y (с ними все проще – при нахождении абсолютного ускорения не надо вычитать g, так что эти акселерометры непосредственно измеряют проекции абсолютного ускорения объекта). Тогда мы в результате получим все три координаты объекта, т.е. будем знать его положение полностью.

Делаем вывод.

Акселерометры используются в **<u>системах инерциальной навигации</u>** – устройствах для определения местоположения и ориентации подвижных объектов без использования внешних ориентиров или сигналов извне.

Ориентацию объекта с помощью акселерометра не найдешь. Для этого нужны иные приборы, о которых мы будем говорить позднее.

Системы инерциальной навигации устанавливаются на самолетах, баллистических ракетах, космических аппаратах, подводных лодках (которые могут по полгода не всплывать на поверхность океана, так что внешних ориентиров нет, а радиосвязь доступна не всегда – засечь могут).

Заканчивая разговор об акселерометрах, рассмотрим частный случай.

При $w_z^{\text{абс}} = -g$ (камера свободно падает вниз) $kz' = 0$, т.е. $\overline{\mathbf{F}}^{\text{упр}} = 0$ и пружина не деформирована.

Но Вы еще из школьного курса физики знаете, что сила, с которой тело вследствие притяжения к Земле действует на опору или подвес, называется *<u>весом</u>* тела. Только для покоящегося тела вес совпадает с силой тяжести (и то не вполне, как мы скоро убедимся). В нашем же случае вес исчез.

Итак:

При этом груз находится в невесомости.

Точно в таком же состоянии находился бы груз, если бы он покоился на дне платформы, свободно падающей вниз. Груз не оказывал бы на пол платформы никакого давления.

Более того, для протяженного груза отсутствовало бы и взаимное давление отдельных его частей друг на друга, вызванное в общем случае их ненулевым весом. Запишем в связи с этим определение невесомости.

<u>Невесомость</u> – состояние тела, при котором действующие на него силы тяготения не вызывают взаимного давления одной части тела на другую.

Если данное "тело" – это тело человека, который находится в свободно падающем лифте, то человек испытывает достаточно необычные ощущения.

Если бы при этом человек в лифте стоял на пружинных весах, то стрелка весов находилась бы на нулевой отметке.

Рассмотрим еще одно важное приложение уравнений движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета.

5. Равновесие материальной точки на поверхности Земли

Обсудим некоторые механические эффекты, связанные с вращением Земли вокруг своей оси.

Будем считать поверхность Земли сферой радиуса R ($R \approx 6\,370$ км); это – модель **<u>стандартной Земли</u>**.

В действительности форма Земли больше напоминает слегка сплюснутый эллипсоид, но этим мы пока будем пренебрегать. А фактически приведенное значение R – это среднее значение земного радиуса.

Свяжем с поверхностью Земли неинерциальную СО E'.

Она действительно неинерциальна, так как вращение Земли мы учитываем.

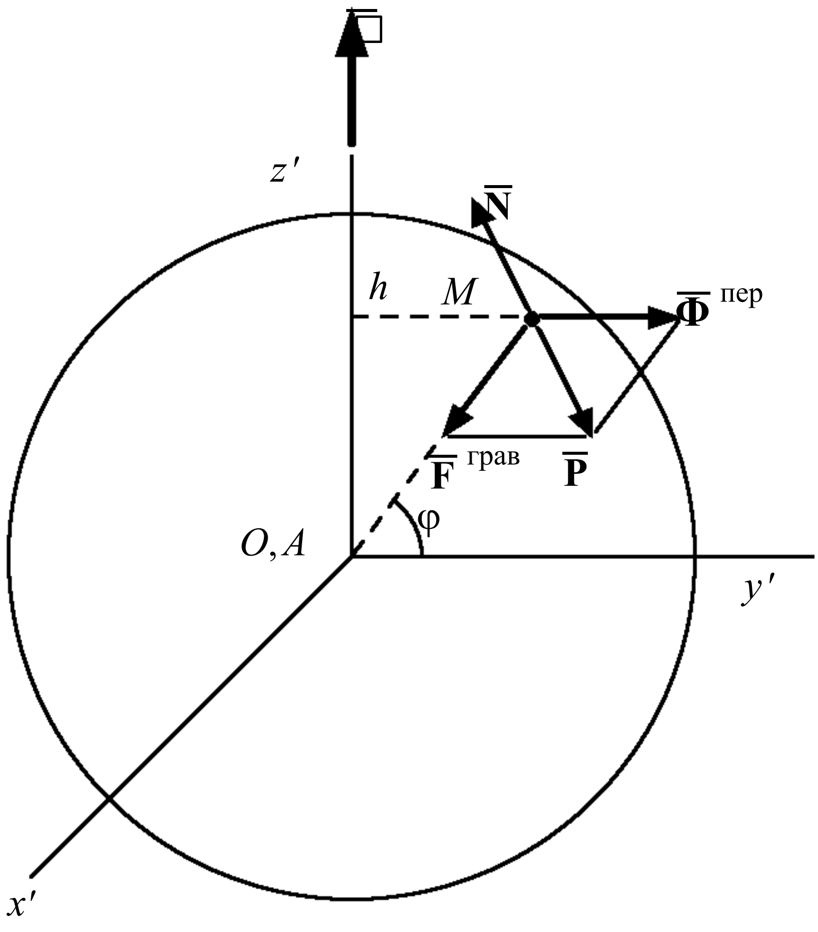
А что в данном случае будет условно неподвижной системой отсчета?

Рассмотрим одно понятие, которым часто пользуются в механике – например, в задачах, связанных с навигацией судов и самолетов.

<u>Сфера Ишлинского</u>[1] – воображаемая сфера с центром в центре Земли и радиусом, равным земному радиусу, которая не вращается относительно неподвижных звезд. Условно неподвижную СО E свяжем со сферой Ишлинского.

Инерциальна ли она? В астрономии и космонавтике инерциальную систему отсчета связывают с неподвижными звездами. Сфера Ишлинского движется поступательно, но не прямолинейно: ее центр, т.е. центр Земли, движется по окружности вокруг Солнца. В решаемой нами задаче – и во многих других – этой небольшой неинерциальностью можно пренебречь.

Пусть теперь точка M находится на широте φ.



Уравнения относительного равновесия:

$$0 \;=\; \underbrace{\overline{\mathbf{F}}^{\,\text{грав}}}_{\text{сила гравитационного притяжения}} + \overline{\mathbf{N}} + \overline{\mathbf{\Phi}}^{\,\text{пер}} .$$

[1] Ишлинский Александр Юльевич (1913 – 2003), выдающийся советский механик, академик, признанный глава отечественной школы механики. Плодотворно использовал данное понятие при решении важных задач механики. Ишлинский А. работал в разных областях механики, в частности – в теории гироскопов. Внес большой вклад в развитие отечественной ракетно-космической программы. Многие преподаватели кафедры теоретической механики МЭИ, включая Юрия Григорьевича Мартыненко и автора этих лекций, являются его учениками.

Что такое вес тела? Мы уже говорили об этом, давайте повторим.

Сила, с которой покоящееся на Земле тело действует на основание, называется **<u>весом</u>** тела.

По III закону Ньютона:

$$\overline{\mathbf{P}} = -\overline{\mathbf{N}} = \overline{\mathbf{F}}^{\text{грав}} + \overline{\mathbf{\Phi}}^{\text{пер}} .$$

Во многих задачах вторым слагаемым можно пренебречь, и вес тогда будет равен силе притяжения Земли. Но вообще-то это разные понятия, и мы сейчас оценим, насколько вес по модулю отличается от mg.

Итак, проведем количественные оценки.

Займемся сначала первым слагаемым в выражении для веса $\overline{\mathbf{P}}$.

$\overline{\mathbf{F}}^{\text{грав}}$ – сила гравитационного притяжения точки к Земле; по закону всемирного тяготения

$$\overline{\mathbf{F}}^{\text{грав}} = \gamma \frac{m M_З}{R^2},$$

или

$$F^{\text{грав}} = m\, g_{\text{грав}} ,$$

где $g_{\text{грав}} = \dfrac{\gamma M_З}{R^2}$ – модуль ускорения гравитации на поверхности стандартной Земли, $M_З$ – масса Земли, γ – гравитационная постоянная.

Ускорение гравитации, как мы увидим, несколько отличается от ускорения свободного падения.

Вычисляем:

$$M_З = 5{,}977 \cdot 10^{24}\ \text{кг} , \qquad \gamma = 6{,}672 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2} ,$$

так что

$$g_{\text{грав}} = 9{,}828\ {}^{\text{м}}/_{\text{с}^2} .$$

Умножая это значение на m, получаем модуль первого слагаемого в формуле для веса.

Переходим ко второму слагаемому в формуле для веса $\overline{\mathbf{P}}$.

Переносная сила инерции $\overline{\mathbf{\Phi}}^{\text{пер}}$ определяется переносным ускорением, а оно складывается, как мы знаем, из трех составляющих: ускорения полюса, вращательного и осестремительного ускорений. В нашем случае:

$$\overline{\mathbf{w}}_A = 0 , \ \overline{\square} = \text{const} , \ \overline{\odot} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{\Phi}}^{\text{пер}} =$$

$$= -m \left[\overline{\square}, \left[\overline{\square}, \overline{\mathbf{R}} \right] \right] = -m\, \overline{\mathbf{w}}^{\text{ос}} .$$

$$w^{\text{ос}} = \Omega^2 h = \Omega^2 R \cos\varphi .$$

Направлено осестремительное ускорение от точки M к земной оси; переносная сила инерции за счет знака “минус” направлена в противоположную сторону.

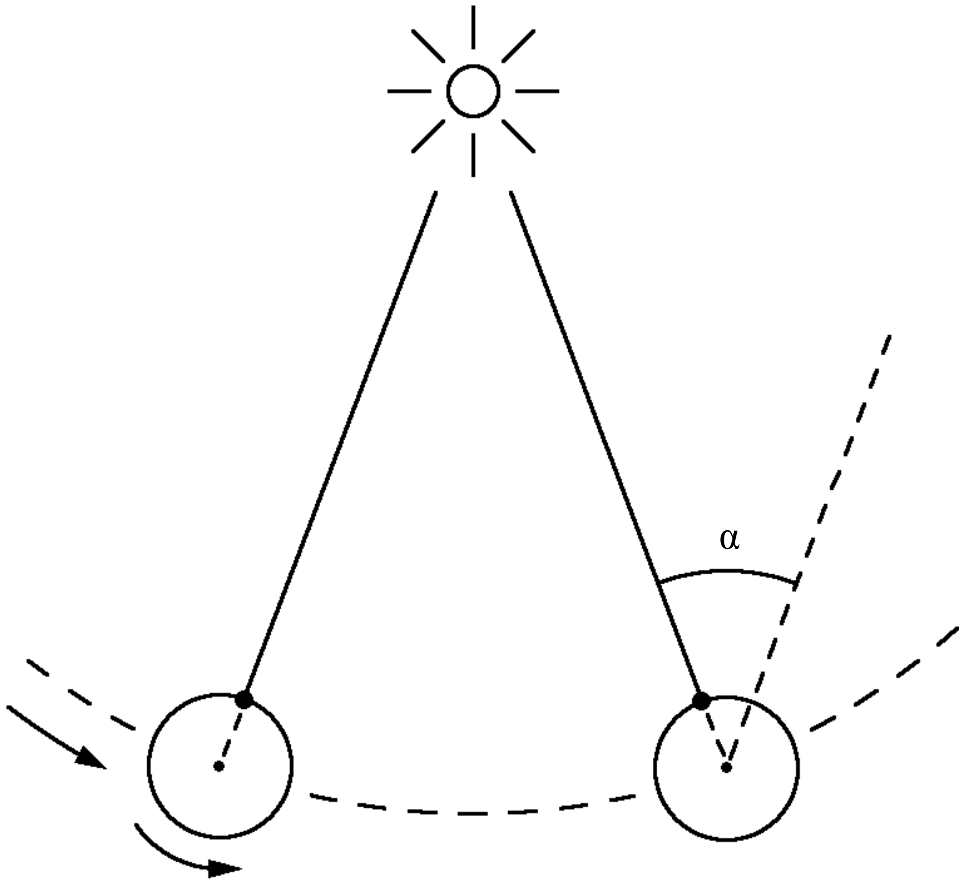
Для количественных расчетов нам нужен модуль угловой скорости Земли.

Вообще говоря, его найти просто. За сутки Земля совершает один оборот вокруг своей оси, так что надо 2π разделить на число секунд в сутках. Только надо разобраться, какие сутки имеются в виду. А сутки бывают разные.

Солнечные сутки – промежуток между двумя последовательными моментами времени, в которые точка земной поверхности обращена к Солнцу.

Звездные сутки – время, за которое Земля совершает один оборот по отношению к неподвижным звездам.

Сделаем рисунок.



Здесь изображена Земля в двух положениях на ее орбите: в текущий момент и по истечении солнечных суток. На поверхности Земли отмечена точка, обращенная к Солнцу; нарисован также – сплошной линией – отрезок, являющийся продолжением радиуса, проведенного в отмеченную точку.

Если бы речь шла не о солнечных, а о звездных сутках, то по их истечении данный отрезок занял бы положение, показанное штриховой линией.

Из рисунка видно, что Земля, повернувшись на полный оборот по отношению к неподвижным звездам, должна еще довернуться на угол α, чтобы точка ее поверхности вновь “смотрела” на Солнце. Значит, солнечные сутки длиннее звездных.

Поскольку наша инерциальная система отсчета, связанная со сферой Ишлинского, не вращается именно относительно неподвижных звезд, то надо пользоваться именно звездными сутками.

Звездные сутки короче солнечных на $1/_{365,25}$ их часть, так что их продолжительность равна:

$$T = 24 \text{ часа} - 3 \text{ мин } 56 \text{ с} = 23 \text{ часа } 56 \text{ мин } 4 \text{ с} = 86\,164 \text{ с} .$$

Поэтому

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86\,164} = 0{,}729 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1} .$$

Итак, мы нашли модуль угловой скорости Земли.

Теперь можно вычислить модуль силы $\overline{\mathbf{P}}$. Его мы найдем по теореме косинусов.

Так как угол между $\overline{\mathbf{F}}^{\text{грав}}$ и $\overline{\mathbf{\Phi}}^{\text{пер}}$ равен $\pi - \varphi$, то по теореме косинусов

$$P^2 = (F^{\text{грав}})^2 + (\Phi^{\text{пер}})^2 - 2F^{\text{грав}}\Phi^{\text{пер}}\cos\varphi ,$$

или

$$P^2 = m^2 g^2_{\text{грав}} + m^2\Omega^4 R^2\cos^2\varphi - 2m^2 g_{\text{грав}}\Omega^2 R\cos^2\varphi =$$

$$= m^2 g^2_{\text{грав}}\left(1 + \frac{\Omega^4 R^2}{g^2_{\text{грав}}}\cos^2\varphi - 2\frac{\Omega^2 R}{g_{\text{грав}}}\cos^2\varphi\right) .$$

Теперь упростим немного наши обозначения.

Обозначим:

$$\varepsilon = \frac{\Omega^2 R}{g_{\text{грав}}} .$$

Получаем основной результат данного пункта.

Итак, зависимость веса от широты места такова:

$$\boxed{P = m g_{\text{грав}}\sqrt{1 - \varepsilon(2-\varepsilon)\cos^2\varphi}} .$$

Или:

$$P = m g_{\varphi} ,$$

где

$$g_{\varphi} = g_{\text{грав}}\sqrt{1 - \varepsilon(2-\varepsilon)\cos^2\varphi}$$

– модуль ускорения свободного падения на широте φ.

Индекс φ подчеркивает, что данная величина зависит от φ.

Заметим, что при изменении широты φ от 0° до 90° косинус убывает от 1 до 0, а вес соответственно возрастает. Значит, минимальное значение вес будет иметь на экваторе, а максимальное – на полюсе.

Найдем, чему равен безразмерный параметр ε.

$$\varepsilon = \frac{\Omega^2 R}{g_{\text{грав}}} = \frac{1}{290} .$$

Таким образом, этот параметр достаточно мал. Но все же к отличиям в третьей значащей цифре он приводит.

На экваторе:

$$P = P_{\min} = m g_{0^\circ} , \text{ где } g_{0^\circ} = g_{\text{грав}} \sqrt{1 - \varepsilon(2-\varepsilon)} = 9{,}794 \ {}^{\text{м}}/_{\text{с}^2} .$$

На полюсе:

$$P = P_{\max} = m g_{90^\circ} , \text{ где } g_{90^\circ} = g_{\text{грав}} = 9{,}828 \ {}^{\text{м}}/_{\text{с}^2} .$$

Итак, только на полюсе вес совпадает с силой гравитационного притяжения. Напомним, что все наши результаты мы получили для модели стандартной Земли. В действительности форма Земли отлична от сферической, и причину этого мы сейчас уже можем объяснить.

Замечание. Частицы Земли с одинаковой массой, находящиеся у полюса, имеют больший вес, чем у экватора, что вызывает сжатие Земли.

В результате форма Земли отклоняется от стандартной и становится похожей на эллипсоид вращения.

При этом:

$$R_{\text{экв}} = 6\,378{,}140 \text{ км} ,$$

$$R_{\text{пол}} = 6\,356{,}774 \text{ км} ,$$

$$\frac{R_{\text{экв}} - R_{\text{пол}}}{R_{\text{экв}}} = \frac{21{,}366}{6\,378{,}14} = \frac{1}{298{,}5} .$$

Это число – сплюснутость земного эллипсоида – близко к значению нашего параметра ε, но в точности ему не равно. Связано это с тем, что как только форма Земли начинает отклоняться от стандартной, наша формула зависимости веса от широты, полученная для стандартной Земли, оказывается уже приближенной.

Кстати, это значение – 298 – теоретически обосновал еще сам Ньютон (вскоре после того, как он открыл закон всемирного тяготения). В отличие от нас, он не использовал модель стандартной Земли, а честно оперировал с гравитационным полем земного эллипсоида, поэтому точность его выкладок оказалась выше. Опубликовал он этот результат в известном трактате “Математические начала натуральной философии”.

Поскольку все выкладки мы проводили для модели стандартной Земли, т.е. полагали, что она имеет сферическую форму, то для реальной Земли значения ускорения свободного падения будут отличаться от вычисленных нами.

Для реальной Земли:

$$g_{0^\circ} \;=\; 9{,}780\ {}^{\text{м}}\!/_{\text{с}^2}\ ;$$

$$g_{45^\circ} \;=\; 9{,}80665\ {}^{\text{м}}\!/_{\text{с}^2}\ \ \text{(стандартное)};$$

$$g_{90^\circ} \;=\; 9{,}832\ {}^{\text{м}}\!/_{\text{с}^2}\ .$$

Напомним, что для экватора мы получили значение 9,794 ${}^{\text{м}}\!/_{\text{с}^2}$, а для полюса – 9,828 ${}^{\text{м}}\!/_{\text{с}^2}$. Отличия, в общем, невелики. Таким образом, наши достаточно элементарные выкладки позволили получить не только качественное, но и количественное совпадение с результатами измерений.

Все эти данные для реальной Земли приведены для справки. Обратите внимание на значение g_φ для широты 45° – широты Парижа. Это значение ускорения свободного падения является *стандартным*; оно используется для перехода от тех единиц измерения, где силы измеряются в килограммах, в систему СИ. В большинстве же практических задач достаточно считать g равным 9,81 ${}^{\text{м}}\!/_{\text{с}^2}$. Кстати, для широты Москвы это – лучшее приближение к точному значению ускорения свободного падения, чем стандартное значение.

6. Первая космическая скорость

Выясним, с какой угловой скоростью должна была бы вращаться Земля, чтобы на экваторе была невесомость.

Решим эту задачу.

Мы уже знаем, как зависит вес от широты места:

$$P \;=\; m\,g_\varphi\ ,$$

где

$$g_\varphi \;=\; g_{\text{грав}}\sqrt{\,1 - \varepsilon\,(\,2 - \varepsilon\,)\cos^2\varphi\,}\ .$$

Здесь g_φ – модуль ускорения свободного падения на широте φ, а $g_{\text{грав}}$ – модуль ускорения гравитации на поверхности стандартной Земли. Безразмерный параметр ε равен отношению произведения квадрата угловой скорости Земли на ее радиус к ускорению гравитации.

Имеем:

$$g_{0^\circ} \;\equiv\; g_{\text{грав}}\sqrt{\,1 - \varepsilon\,(\,2 - \varepsilon\,)\cos^2\varphi\,} \;=\; 0$$

□

$$\varepsilon\,(\,2 - \varepsilon\,) \;=\; 1$$

□

$$\varepsilon \;=\; 1\ .$$

То есть

$$\frac{\Omega^2 R}{g_{\text{грав}}} = 1 ,$$

но $R = 6\,370$ км , $g_{\text{грав}} = 9{,}828\ ^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$, так что

$$\Omega = \sqrt{\frac{g_{\text{грав}}}{R}} = 0{,}001242\ \text{с}^{-1} .$$

Полученное значение примерно в 17 раз больше настоящего значения Ω. Период T обращения Земли вокруг своей оси (т.е. сутки) равнялся бы

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \equiv 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_{\text{грав}}}} = 84{,}4\ \text{мин} ;$$

этот период называется **периодом Шулера**.

Названо полученное значение в честь немецкого механика Макса Шулера, который получил его совсем в другой задаче. Выяснилось, что данное значение, в частности, играет важную роль во многих задачах инерциальной навигации.

Но мы сейчас дадим периоду Шулера иное толкование.

Скорость точки на экваторе в данном случае:

$$V = \Omega R = \sqrt{g_{\text{грав}} R} = 7{,}91\ ^{\text{км}}/_{\text{с}}$$

– **первая космическая скорость**, т.е. скорость полета ИСЗ по круговой орбите с радиусом, равным радиусу Земли. Период обращения для такого ИСЗ равен периоду Шулера.

В действительности искусственные спутники Земли летают по более высоким орбитам, где тормозящее воздействие атмосферы невелико. При этом их линейная скорость меньше, а период обращения – больше. Так, Юрий Гагарин на корабле “Восток” облетел Землю за 89 минут; средняя высота его орбиты составляла 250 км (небольшой добавок к R).

Понятно ли, почему в нашем примере мы для точки на экваторе получили именно первую космическую скорость? Представьте себе, что мы, стоя на экваторе, поднимем рукой какой-либо предмет и отпустим его. Имея нулевой вес, он не будет падать на Землю, а будет двигаться вокруг центра Земли – с той же скоростью, что и другие точки на экваторе, т.е. станет настоящим искусственным спутником Земли. Для сравнения приведем значение скорости точки, находящейся на экваторе реальной Земли. Реально скорость точки на экваторе Земли равна 465 $^{\text{м}}/_{\text{с}}$. Это значение Вы без труда получите, если умножите значение угловой скорости Земли на радиус Земли; все числа в нашем распоряжении есть. Тоже немалое значение, но намного – в 17 раз – меньше, чем первая космическая скорость. Если же точка находится на широте φ, то данное значение надо умножить на $\cos\varphi$.

Теперь от задач динамики одной материальной точки перейдем к задачам динамики системы материальных точек.

§ 2. Динамика системы материальных точек

1. Свойства внутренних сил

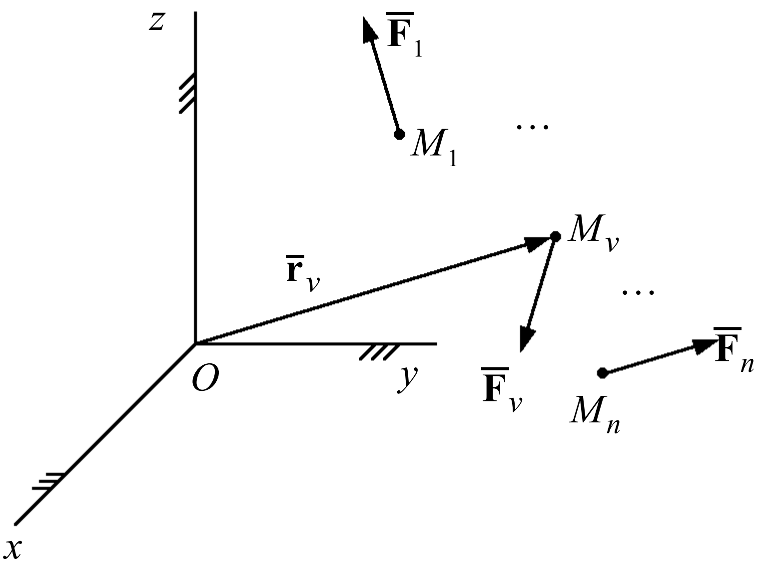
Система материальных точек (СМТ) – конечное множество материальных точек.

Их мы будем сейчас предполагать пронумерованными от 1 до n:

$$\{ M_1, M_2, \ldots, M_n \} .$$

Различные характеристики этих точек мы также будем нумеровать.

Пусть Е – инерциальная система отсчета (у.н.СО) с системой координат $Oxyz$. Пусть $\overline{\mathbf{r}}_\nu$ – радиус-вектор точки M_ν, m_ν – ее масса, $\overline{\mathbf{F}}_\nu$ – равнодействующая приложенных к ней сил.



А какие силы приложены к данной точке? Удобно будет разделить их на два класса.

Внешние силы – силы, действующие на точку системы со стороны объектов, не входящих в эту систему.

В роли объектов могут выступать материальные точки, материальные тела или же поля.

Обозначают внешние силы индексом (e) – от французского слова extérieur ‘внешний’.

$\overline{\mathbf{F}}_\nu^{(e)}$ – равнодействующая внешних сил, приложенных к точке M_ν.

Часто мы будем говорить короче: “внешняя сила”.

Внутренние силы – силы, действующие на точку системы со стороны других точек системы.

Обозначают внутренние силы индексом (i) – от французского слова intèrieur ‘внутренний’.

$\overline{\mathbf{F}}_\nu^{(i)} = \sum\limits_\mu \overline{\mathbf{F}}_{\nu\mu}$ – равнодействующая внутренних сил.

Обратите внимание на расположение индексов. $\overline{\mathbf{F}}_{\nu\mu}$ – сила, действующая на ν-ю точку со стороны μ-й. Мы уже пользовались такой нумерацией, когда рассматривали III закон Ньютона (только тогда мы говорили лишь о двух материальных точках – с номерами 1 и 2).

Итак:

$$\overline{\mathbf{F}}_\nu = \overline{\mathbf{F}}_\nu^{(e)} + \overline{\mathbf{F}}_\nu^{(i)} \equiv \overline{\mathbf{F}}_\nu^{(e)} + \sum_\mu \overline{\mathbf{F}}_{\nu\mu}\,.$$

Вопрос: какие значения принимает в этой сумме индекс μ? Можно ли считать, что он принимает *все* значения от единицы до n? Давайте с этим разбираться.

В свое время мы записали словесную формулировку III закона Ньютона, затем проиллюстрировали ее рисунком и, наконец, выяснили, что формально этот закон выражается при помощи *двух* соотношений. Выпишем эти соотношения в обозначениях данного пункта.

По III закону Ньютона:

$$\overline{\mathbf{F}}_{\nu\mu} = -\overline{\mathbf{F}}_{\mu\nu} \quad \text{и} \quad \overline{\mathbf{F}}_{\nu\mu} \parallel \overline{M_\nu M_\mu}$$

Заметьте: на иллюстрирующем рисунке точки предполагались различными. Но ни в словесной формулировке закона, ни в записанных формулах этого вовсе не утверждалось.

Поэтому возьмем ν-ю точку системы и предположим, что она взаимодействует сама с собой, создавая силу $\overline{\mathbf{F}}_{\nu\nu}$. Тогда имеем:

$$\overline{\mathbf{F}}_{\nu\nu} = -\overline{\mathbf{F}}_{\nu\nu} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{F}}_{\nu\nu} = 0\,,$$

т.е. материальные точки в механике не обладают самовоздействием.

Между прочим, в некоторых разделах физики понятие самовоздействия встречается. В частности, в термодинамике именно явление самовоздействия является одной из причин роста энтропии у изолированной неравновесной системы.

Но для нас отмеченный факт прежде всего позволяет упростить обозначения. Так, мы можем писать:

$$\sum_\mu \overline{\mathbf{F}}_{\nu\mu} \equiv \sum_{\mu=1}^{n} \overline{\mathbf{F}}_{\nu\mu} \equiv \sum_{\mu\neq\nu} \overline{\mathbf{F}}_{\nu\mu}\,.$$

Иными словами, мы можем оставлять в наших формулах силы взаимодействия с одинаковыми индексами или отбрасывать их, не оговаривая этого специально.

Заметим еще, что деление сил на внешние и внутренние не носит абсолютного характера, а зависит от выбранной модели – от того, какие материальные точки мы включили в состав рассматриваемой системы.

А теперь сформулируем и докажем теорему о свойствах внутренних сил.

Теорема. Главный вектор и главный момент внутренних сил любой СМТ равны нулю.

■ $1^\circ.\quad \overline{\mathbf{R}}^{(i)} \equiv \sum\limits_{\nu} \overline{\mathbf{F}}_{\nu}^{(i)} = \sum\limits_{\nu}\sum\limits_{\mu} \overline{\mathbf{F}}_{\nu\mu} =$

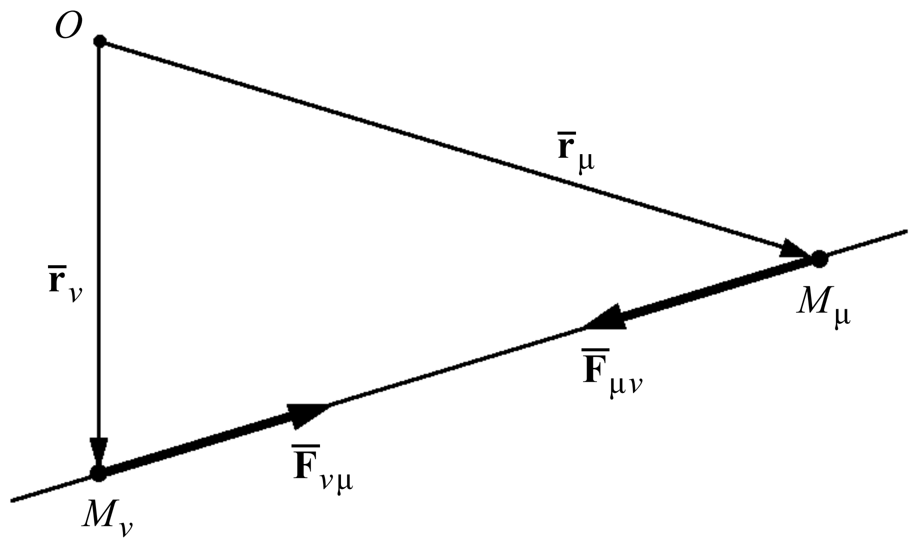
$$= \sum_{\nu}\ \sum_{\mu<\nu} \underbrace{\left(\overline{\mathbf{F}}_{\nu\mu} + \overline{\mathbf{F}}_{\mu\nu}\right)}_{0,\ \text{III закон}} = 0\,.$$

сгруп-пируем попарно — чтобы 2 раза не считать

Первое утверждение теоремы доказано. Для доказательства второго утверждения сделаем рисунок, на котором изобразим только две (произвольные) точки рассматриваемой системы.

2°. Пусть точка O – произвольный полюс.

Иначе говоря, мы не предполагаем, что это – обязательно начало условно неподвижной системы координат.



$$\overline{\mathbf{L}}_{O}^{(i)} = \sum_{\nu}\left[\,\overline{\mathbf{r}}_{\nu}, \overline{\mathbf{F}}_{\nu}^{(i)}\right] = \sum_{\nu}\sum_{\mu<\nu}\Big(\big[\,\overline{\mathbf{r}}_{\nu}, \underbrace{\overline{\mathbf{F}}_{\nu\mu}}_{-\overline{\mathbf{F}}_{\mu\nu}}\big] + \big[\,\underbrace{\overline{\mathbf{r}}_{\nu}}_{\overline{\mathbf{r}}_{\nu}+\overline{M_{\nu}M_{\mu}}}, \overline{\mathbf{F}}_{\mu\nu}\big]\Big) =$$

$$= \sum_{\nu}\sum_{\mu<\nu}\Big(\underbrace{-\big[\,\overline{\mathbf{r}}_{\nu}, \overline{\mathbf{F}}_{\mu\nu}\big] + \big[\,\overline{\mathbf{r}}_{\nu}, \overline{\mathbf{F}}_{\mu\nu}\big]}_{0} + \underbrace{\big[\,\overline{M_{\nu}M_{\mu}}, \overline{\mathbf{F}}_{\mu\nu}\big]}_{0,\ \text{III закон}}\Big) = 0\,.$$

■

Мы дали только словесную формулировку теоремы о свойствах внутренних сил. Запишем также доказанное нами утверждение в виде формулы.

Итак:

$$\overline{\mathbf{R}}^{(i)} = 0\,, \qquad \overline{\mathbf{L}}_{O}^{(i)} = 0\,.$$

Формально эти равенства имеют тот же вид, что и условия равновесия абсолютно твердого тела. Но в данном случае даже при отсутствии внешних сил равновесия в общем случае *не будет*, так как внутренние силы приложены к разным материальным точкам.

Например, возьмем в качестве системы материальных точек Солнечную систему. Внутренними силами здесь будут силы гравитационного притяжения. Главный вектор и главный момент этих сил будут равны нулю, но равновесия нет: планеты движутся по своим орбитам, т.е. отнюдь не равномерно и прямолинейно.

Заметим еще, что рассмотренные свойства внутренних сил обобщают сформулированное нами в этом пункте свойство материальной точки, состоящее в отсутствии самовоздействия.

2. Теорема об изменении количества движения СМТ

Запишем для каждой точки системы материальных точек II закон Ньютона, учитывая разделение сил на внутренние и внешние:

$$m_\nu \frac{\mathrm{d}^2 \overline{\mathbf{r}}_\nu}{\mathrm{d}t^2} = \overline{\mathbf{F}}_\nu^{(e)} + \overline{\mathbf{F}}_\nu^{(i)}, \qquad \nu = 1, \ldots, n .$$

Это – **дифференциальные уравнения движения СМТ** (система n векторных дифференциальных уравнений 2-го порядка, эквивалентных $3n$ скалярным уравнениям).

Относительно сил делается то же предположение, что и в динамике точки: они могут зависеть от положений и скоростей точек, а также от времени. Точнее:

$$\overline{\mathbf{F}}_\nu^{(e)} = \overline{\mathbf{F}}_\nu^{(e)}(\overline{\mathbf{r}}_\nu, \dot{\overline{\mathbf{r}}}_\nu, t),$$

$$\overline{\mathbf{F}}_\nu^{(i)} = \overline{\mathbf{F}}_\nu^{(i)}(\overline{\mathbf{r}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{r}}_n, \dot{\overline{\mathbf{r}}}_1, \ldots, \dot{\overline{\mathbf{r}}}_n, t) .$$

Последняя запись связана с тем, что внутренняя сила $\overline{\mathbf{F}}_\nu^{(i)}$ – равнодействующая сил взаимодействия между точками системы, а каждая такая сила может зависеть от положений и скоростей обеих взаимодействующих точек.

Общее решение такой системы будет зависеть от $6n$ скалярных постоянных интегрирования. Поэтому:

Для нахождения *закона движения* СМТ (функций $\overline{\mathbf{r}}_\nu = \overline{\mathbf{r}}_\nu(t)$) нужно знать $6n$ начальных условий:

$$\overline{\mathbf{r}}_\nu \big|_{t=0} = \overline{\mathbf{r}}_\nu^{\circ}, \qquad \overline{\mathbf{v}}_\nu \big|_{t=0} = \overline{\mathbf{v}}_\nu^{\circ}, \qquad \nu = 1, \ldots, n .$$

Здесь записано $2n$ векторных равенств; в скалярной форме их будет как раз $6n$.

Фактически мы записали постановку 2-й задачи динамики для системы материальных точек.

Приведем пример конкретной системы уравнений движения.

<u>Пример.</u> Задача n тел в небесной механике. Уравнения движения небесных тел в соответствии с законом всемирного тяготения имеют вид:

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 \bar{\mathbf{r}}_1}{dt^2} = \gamma m_1 m_2 \dfrac{\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}}_1}{|\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}}_1|^3} + \ldots + \gamma m_1 m_n \dfrac{\bar{\mathbf{r}}_n - \bar{\mathbf{r}}_1}{|\bar{\mathbf{r}}_n - \bar{\mathbf{r}}_1|^3}, \\ \qquad \ldots \\ m_n \dfrac{d^2 \bar{\mathbf{r}}_n}{dt^2} = \gamma m_n m_1 \dfrac{\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_n}{|\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_n|^3} + \ldots + \gamma m_n m_{n-1} \dfrac{\bar{\mathbf{r}}_{n-1} - \bar{\mathbf{r}}_n}{|\bar{\mathbf{r}}_{n-1} - \bar{\mathbf{r}}_n|^3}. \end{cases}$$

Речь здесь может идти, например, о Солнце и планетах, или о планете и ее спутниках, и т.д.

Даны $\bar{\mathbf{r}}_\nu^\circ, \bar{\mathbf{v}}_\nu^\circ$; найти закон движения каждого тела.

Задача n тел – задача, весьма сложная в математическом плане. Аналитически она может быть решена в простейшем случае, когда $n = 2$.

Доказано, что при $n > 2$ уравнения этой задачи не интегрируются в квадратурах.

Численно же – с помощью компьютеров – эту задачу успешно решают с приемлемой точностью.

Однако если не ставить целью полное решение задачи, то часто можно получить некоторые общие (интегральные) свойства движения. Для этого используются – прежде всего – так называемые общие теоремы динамики.

Первую из них мы сейчас и рассмотрим. Но сперва – одно определение.

Мы с Вами уже знаем, что для материальной точки количеством движения называется вектор, равный произведению ее массы на скорость. Аналогичное определение вводят и для системы материальных точек.

<u>Количество движения</u> СМТ – свободный вектор, равный сумме количеств движения всех точек системы:

$$\boxed{\bar{\mathbf{Q}} = \sum_\nu \bar{\mathbf{Q}}_\nu \equiv \sum_\nu m_\nu \bar{\mathbf{v}}_\nu}\ .$$

<u>Теорема.</u> Производная по времени от количества движения СМТ равна главному вектору внешних сил:

$$\boxed{\frac{d\bar{\mathbf{Q}}}{dt} = \bar{\mathbf{R}}^{(e)}}\ .$$

Теорема верна в любой инерциальной системе отсчета (а мы в начале параграфа условились, что работаем именно в такой системе). Теорема эта – очень важна, но ее доказательство – тривиально.

■ Запишем для каждой точки уравнение II закона Ньютона и сложим их почленно:

$$\sum_{\nu} \frac{\mathrm{d}\,(m_{\nu}\,\overline{\mathbf{v}}_{\nu})}{\mathrm{d}t} = \sum_{\nu} \left(\overline{\mathbf{F}}_{\nu}^{(e)} + \overline{\mathbf{F}}_{\nu}^{(i)} \right)$$

□

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{\nu} m_{\nu}\,\overline{\mathbf{v}}_{\nu} = \overline{\mathbf{R}}^{(e)} + \underbrace{\overline{\mathbf{R}}^{(i)}}_{0}$$

□

$$\frac{\mathrm{d}\,\overline{\mathbf{Q}}}{\mathrm{d}t} = \overline{\mathbf{R}}^{(e)} .$$

■

Мы сформулировали и доказали теорему об изменении количества движения системы материальных точек. Эта теорема утверждает, что

$$\frac{\mathrm{d}\,\overline{\mathbf{Q}}}{\mathrm{d}t} = \overline{\mathbf{R}}^{(e)}, \quad \text{где } \overline{\mathbf{Q}} = \sum_{\nu} m_{\nu}\,\overline{\mathbf{v}}_{\nu} .$$

Заметим, что доказанное равенство имеет место в любой момент времени. Простым интегрированием этого равенства на интервале времени от t_1 до t_2 получается интегральная форма данной теоремы.

Интегрируем:

$$\overline{\mathbf{Q}}\,(t_2) - \overline{\mathbf{Q}}\,(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \overline{\mathbf{R}}^{(e)}\,\mathrm{d}t .$$

Итак:

Изменение количества движения СМТ за конечное время равно импульсу главного вектора внешних сил за это время (теорема об изменении количества движения СМТ в *интегральной* форме).

Стоящий справа интеграл как раз и называется импульсом главного вектора внешних сил.

Получим из теоремы об изменении количества движения два простых, но важных следствия.

Следствие 1. Если на данном отрезке времени $\overline{\mathbf{R}}^{(e)} \equiv 0$, то $\overline{\mathbf{Q}} = \mathrm{const}$.

Иными словами, если главный вектор внешних сил тождественно равен нулю, то вектор количества движения остается постоянным по величине и направлению.

Действительно, $\overline{\mathbf{R}}^{(e)} = 0, \quad \dfrac{\mathrm{d}\overline{\mathbf{Q}}}{\mathrm{d}t} = 0 .$

Если последнее равенство на данном отрезке времени выполняется тождественно, то тогда сам вектор $\overline{\mathbf{Q}}$ остается постоянным.

Может случиться и так, что главный вектор внешних сил остается отличным от нуля, но его проекция на какую-либо ось тождественно равна нулю. Для определенности, пусть это будет ось x.

Следствие 2. Если на данном отрезке времени $R_x^{(e)} \equiv 0$, то $Q_x = \mathrm{const}$.

Другие компоненты вектора количества движения при этом могут изменяться.

Действительно, $\dfrac{\mathrm{d}Q_x}{\mathrm{d}t} = R_x^{(e)}$ и $R_x^{(e)} = 0, \quad \dfrac{\mathrm{d}Q_x}{\mathrm{d}t} = 0 .$

Оба этих следствия, по существу, носят интегральный характер.

Следствия 1,2 иногда называют *законами сохранения* количества движения СМТ.

В первом речь идет о сохранении всего вектора $\overline{\mathbf{Q}}$, во втором – о сохранении его проекции на ось. Сохранение имеет место, если выполнено соответствующее условие для внешних сил.

3. Теорема о движении центра масс СМТ

Введем два определения.

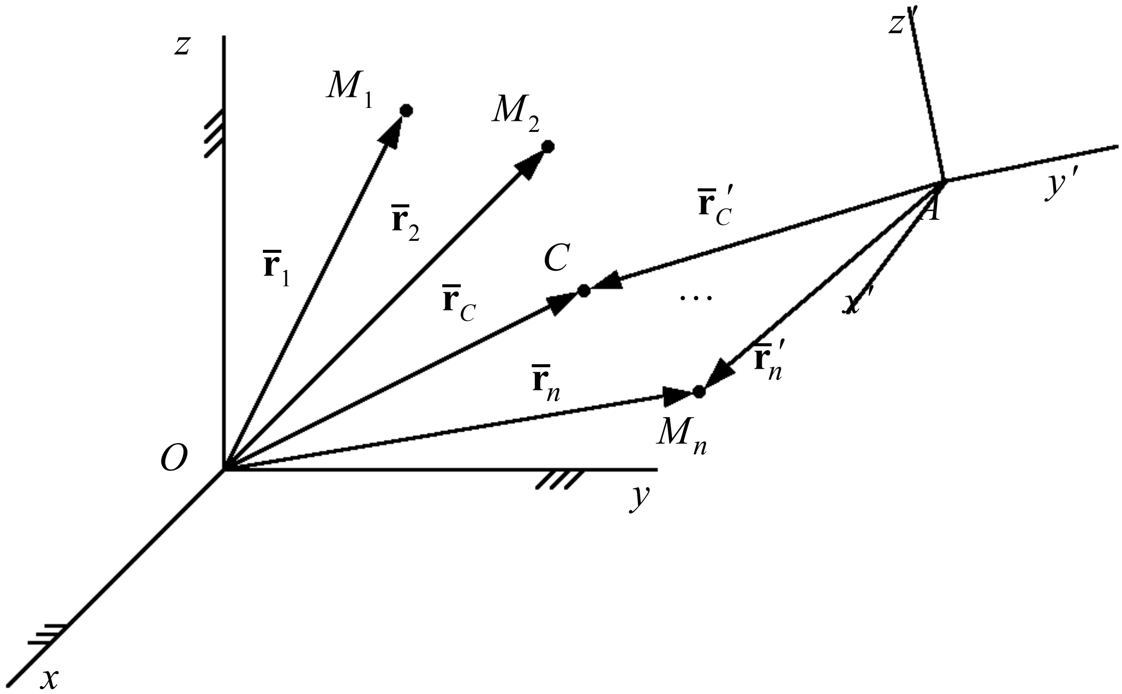
Масса СМТ: $m = \sum\limits_{\nu} m_{\nu}$.

Центр масс СМТ – геометрическая точка C, положение которой определяется равенством

$$m\,\overline{\mathbf{r}}_C = \sum_{\nu} m_{\nu}\,\overline{\mathbf{r}}_{\nu} ,$$

т.е.

$$\boxed{\overline{\mathbf{r}}_C = \frac{1}{m}\sum_{\nu} m_{\nu}\,\overline{\mathbf{r}}_{\nu}} \ .$$



Запишем в координатной форме определяющее равенство для центра масс:

$$m x_C = \sum_{\nu} m_\nu x_\nu ,\quad m y_C = \sum_{\nu} m_\nu y_\nu ,\quad m z_C = \sum_{\nu} m_\nu z_\nu .$$

Величины, стоящие справа, называются **<u>статическими моментами</u>** относительно плоскостей Oyz, Ozx и Oxy.

Свойства центра масс.

Поскольку положение центра масс определяется через радиус-вектор, то может показаться, что оно зависит от выбора системы отсчета и от выбора начала системы координат. На самом деле это не так.

1°. Положение центра масс не зависит от того, в какой СО оно определяется:

$$\bar{\mathbf{r}}_C = \overline{OA} + \bar{\mathbf{r}}_C' = \frac{\sum_{\nu} m_\nu}{m}\,\overline{OA} + \frac{1}{m}\sum_{\nu} m_\nu \bar{\mathbf{r}}_\nu' =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{\nu} m_\nu \left(\overline{OA} + \bar{\mathbf{r}}_\nu'\right) = \frac{1}{m}\sum_{\nu} m_\nu \bar{\mathbf{r}}_\nu .$$

2°. Если центр масс лежит в координатной плоскости, то соответствующий статический момент равен нулю.

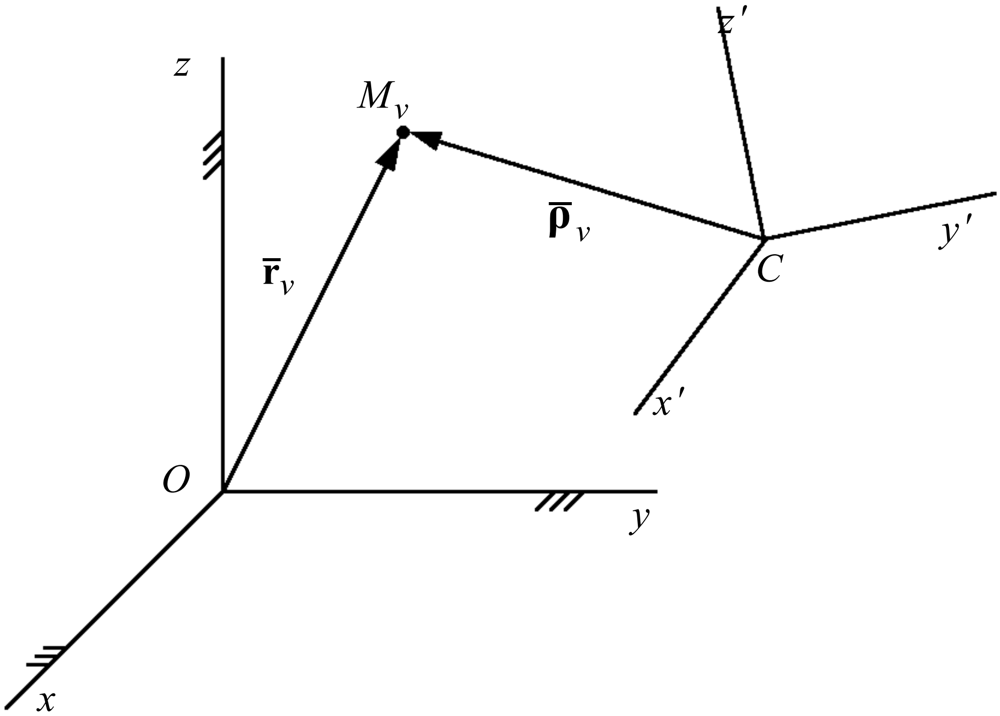
$$C \in Oxy \quad \Rightarrow \quad z_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\nu} m_\nu z_\nu = 0 .$$

А если все три статических момента равны нулю?

3°. Если начало подвижной системы координат поместить в центр масс, то

$$\sum_{\nu} m_\nu \,\bar{\boldsymbol{\rho}}_\nu \;=\; 0\,,$$

так как $m\,\bar{\boldsymbol{\rho}}_C \;=\; 0\,.$



Здесь центром масс C совмещен с началом A подвижной системы координат; радиус-векторы с началом в центре масс мы будем обозначать уже не $\bar{\mathbf{r}}'_\nu$, а $\bar{\boldsymbol{\rho}}_\nu$. Вообще говоря, с полюсом инерциальной системы координат центр масс можно совместить лишь в какой-то один момент времени (ведь центр масс не обязан двигаться равномерно и прямолинейно).

Переходим к четвертому свойству, которое для динамики системы материальных точек является основным.

4°. Количество движения СМТ равно произведению массы системы на скорость центра масс:

$$\boxed{\bar{\mathbf{Q}} \;=\; m\,\bar{\mathbf{v}}_C}\;.$$

Действительно,

$$\bar{\mathbf{Q}} \;=\; \sum_{\nu} m_\nu \,\bar{\mathbf{v}}_\nu \;=\; \sum_{\nu} m_\nu \frac{\mathrm{d}\bar{\mathbf{r}}_\nu}{\mathrm{d}t} \;=$$

$$=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\nu} m_\nu \,\bar{\mathbf{r}}_\nu \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, m\,\bar{\mathbf{r}}_C \;=\; m\,\bar{\mathbf{v}}_C\,.$$

Докажем теперь теорему, по содержанию тесно связанную с теоремой об изменении количества движения.

<u>Теорема.</u> Центр масс СМТ движется как материальная точка с массой $m = \sum_{\nu} m_{\nu}$, к которой приложена сила, равная главному вектору внешних сил.

$$\boxed{m\,\overline{\mathbf{w}}_C = \overline{\mathbf{R}}^{(e)}} \; .$$

■ По теореме об изменении количества движения СМТ

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\mathbf{Q}}}{\mathrm{d}t} = \overline{\mathbf{R}}^{(e)} ;$$

но $$\frac{\mathrm{d}\overline{\mathbf{Q}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\,\overline{\mathbf{v}}_C) = m\frac{\mathrm{d}\overline{\mathbf{v}}_C}{\mathrm{d}t} = m\,\overline{\mathbf{w}}_C .$$ ■

Из данной теоремы вытекают два следствия (если хотите, Вы можете рассматривать их как иные формулировки аналогичных следствий из теоремы об изменении количества движения системы материальных точек).

<u>Следствие 1.</u> Если на данном отрезке времени $\overline{\mathbf{R}}^{(e)} \equiv 0$, то центр масс СМТ движется равномерно и прямолинейно:

$$\overline{\mathbf{R}}^{(e)} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{w}}_C \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{v}}_C = \mathrm{const} .$$

Иначе говоря, центр масс ведет себя как материальная точка, на которую не действуют силы, т.е. как точка из I закона Ньютона.

В частности, если в начальный момент времени скорость центра масс равнялась нулю, то он будет оставаться в покое.

<u>Следствие 2.</u> Если на данном отрезке времени $R_x^{(e)} \equiv 0$, то проекция $\overline{\mathbf{v}}_C$ на ось x остается постоянной:

$$R_x^{(e)} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad m w_{Cx} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad v_{Cx} = \mathrm{const} .$$

Следствия 1,2 иногда называют <u>*законами сохранения*</u> движения центра масс СМТ.

Из теоремы следует еще такой вывод:

Внутренние силы непосредственно не влияют на движение центра масс СМТ.

Фундаментальное значение теоремы о движении центра масс состоит, между прочим, в том, что она запрещает создание так называемых инерцоидов. Это – в принципе не реализуемые технические устройства, обеспечивающие “безопорное” движение только за счет внутренних сил, возникающих, например, при вращении неуравновешенных роторов.

Такие проекты часто предлагались горе-изобретателями. В библиотеке имени Ленина даже появился новый раздел библиографии: “Инерцоиды. Их теория”, хотя на деле инерцоиды ничем не лучше вечных двигателей.

Рассмотрим одно из важных приложений теорем об изменении количества движения и о движении центра масс.

4. Динамика точки переменной массы

Тело переменной массы – тело, масса которого непрерывно изменяется в результате либо присоединения к нему материальных частиц, либо их отделения. Его масса: $m = m(t)$.

Таким образом, здесь тело изменяет свой состав. Иногда так и говорят: “тело переменного состава”.

Примеры: вращающееся веретено, на которое навивается нить; ракета, масса которой убывает при выгорании топлива; плавающий в море и постепенно тающий айсберг, и тому подобное.

Если размерами такого тела можно пренебречь, то его называют **точкой переменной массы**.

Например, материальной точкой переменной массы часто можно считать поступательно движущееся тело переменного состава.

Мы записали определение точки переменной массы. Это – простейшая модель тела переменного состава, т.е. системы, к которой материальные частицы непрерывно либо присоединяются, либо отделяются.

Ясно, что это – более сложный объект, чем обыкновенная материальная точка. Для него не выполняются аксиома массы и II закон Ньютона в использовавшихся нами формулировках.

Тем не менее, мы сейчас получим для точки переменной массы уравнения движения. Для этого воспользуемся специально выбранной системой материальных точек постоянного состава.

Для определенности примем, что частицы *отделяются*, причем в момент отделения они скачком приобретают скорость $\bar{\mathbf{u}}^{\text{отн}}$ относительно точки переменной массы M.

Возьмем два близких момента времени t и $t+\Delta t$ и рассмотрим систему материальных частиц, которые составляли точку M в момент времени t. Тогда в момент $t+\Delta t$ в эту СМТ входят: точка M с массой $m+\Delta m$, где $\Delta m < 0$, и отделившиеся частицы с суммарной массой $|\Delta m|$.

Находим количество движения этой СМТ.

В момент t:

$$\overline{\mathbf{Q}}\,(t) \;=\; m\overline{\mathbf{v}}\;;$$

в момент $t+\Delta t$:

$$\overline{\mathbf{Q}}\,(t+\Delta t) \;=\; (m+\Delta m)\,(\overline{\mathbf{v}}+\Delta\overline{\mathbf{v}}) \;+\; \underbrace{|\Delta m|}_{-\,\Delta m}\,\overline{\mathbf{u}}^{\,\text{абс}}\;.$$

Так как $\overline{\mathbf{u}}^{\,\text{абс}} \;=\; \overline{\mathbf{v}} \;+\; \overline{\mathbf{u}}^{\,\text{отн}}$, то

$$\begin{aligned} \Delta\overline{\mathbf{Q}} \;&\equiv\; \overline{\mathbf{Q}}\,(t+\Delta t) \;-\; \overline{\mathbf{Q}}\,(t) \;=\\ &=\; \cancel{m\overline{\mathbf{v}}}\;\; \underline{\underline{\Delta m\,\overline{\mathbf{v}}}} \;+\; m\,\Delta\overline{\mathbf{v}} \;+\; \Delta m\,\Delta\overline{\mathbf{v}} \;-\\ &\quad\;-\; \underline{\underline{\Delta m\,\overline{\mathbf{v}}}} \;-\; \Delta m\,\overline{\mathbf{u}}^{\,\text{отн}} \;-\; \cancel{m\overline{\mathbf{v}}} \;=\\ &=\; m\,\Delta\overline{\mathbf{v}} \;+\; \Delta m\,\Delta\overline{\mathbf{v}} \;-\; \Delta m\,\overline{\mathbf{u}}^{\,\text{отн}}\;. \end{aligned}$$

По теореме об изменении количества движения СМТ

$$\overline{\mathbf{R}}^{\,(e)} \;=\; \frac{\mathrm{d}\overline{\mathbf{Q}}}{\mathrm{d}t} \;=\; \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathrm{d}\overline{\mathbf{Q}}}{\mathrm{d}t} \;=\; m\,\frac{\mathrm{d}\overline{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t} \;-\; \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,\overline{\mathbf{u}}^{\,\text{отн}}\;.$$

(Второе слагаемое, деленное на Δt, при $\Delta t \to 0$ дало нуль.)

Получаем **уравнение Мещерского**[2] (1897 г.):

$$\boxed{\;m\,\frac{\mathrm{d}\overline{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t} \;=\; \overline{\mathbf{R}}^{\,(e)} + \overline{\mathbf{F}}^{\,\text{реакт}}\;}\;.$$

где $\overline{\mathbf{F}}^{\,\text{реакт}} \;=\; \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,\overline{\mathbf{u}}^{\,\text{отн}}$ – **реактивная сила**; в силу $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \;<\; 0$ она направлена против $\overline{\mathbf{u}}^{\,\text{отн}}$.

Уравнение Мещерского было выведено нами для случая отделения частиц.

В случае *присоединения* частиц уравнение Мещерского не изменяется (только тогда $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \;>\; 0$).

Стало быть, в этом случае реактивная сила будет направлена в ту же сторону, что и $\overline{\mathbf{u}}^{\,\text{отн}}$.

---

[2] Мещерский, Иван Всеволодович (1859 – 1935) – выдающийся русский механик, основоположник динамики тела переменной массы. Является также автором популярного задачника по теоретической механике, впервые изданного в 1907 г. и с тех пор многократно переиздававшегося (с изменениями и дополнениями).

Заметим еще, что если частицы отделяются с нулевой относительной скоростью (как в примере с тающим айсбергом), то реактивная сила будет равной нулю. В этом случае уравнение Мещерского формально выглядит так же, как и уравнение II закона Ньютона для обычной материальной точки (только масса будет величиной переменной).

Вывод: эффект отделения или присоединения частиц эквивалентен действию на точку некоторой добавочной силы – реактивной силы.

Рассмотрим пример, давно ставший классическим.

Пример. Рассмотрим вертикальное движение ракеты в безвоздушном пространстве вне поля сил тяжести.

Иными словами, их действием мы сейчас пренебрегаем.

Масса ракеты при $t = 0$ складывается из массы корпуса и массы топлива:

$$m_0 = m_{\text{к}} + m_{\text{т}} .$$

В состав массы корпуса включается и масса нагрузки.

В ходе полета ракеты масса корпуса не меняется, а топливо постепенно сгорает; полученные продукты сгорания выбрасываются из сопла.

Спроектируем уравнение Мещерского на вертикальную ось z:

$$m \frac{\mathrm{d} v_z}{\mathrm{d} t} = \frac{\mathrm{d} m}{\mathrm{d} t} \cdot (- u^{\text{отн}}) .$$

Главный вектор внешних сил здесь равен нулю, а знак “минус” при модуле относительной скорости истечения продуктов сгорания появился потому, что эта скорость направлена вниз. Эту скорость считаем постоянной.

Разделим переменные:

$$\mathrm{d} v_z = - u^{\text{отн}} \frac{\mathrm{d} m}{m} .$$

Интегрируем от нулевого до текущего значения времени:

$$v_z - v_0 = - u^{\text{отн}} \left[\ln m - \ln m_0 \right] .$$

Отсюда можно в любой момент времени найти v_z, если известно, по какому закону расходуется топливо. Значение v_0 может быть отлично от нуля, – например, если ракета стартует с разгонного самолета.

Наибольший интерес представляет случай, когда все топливо сгорает, а ракета приобретает максимальную скорость.

Получаем **формулу Циолковского**[3] для предельной скорости ракеты после выгорания топлива (1903 г.):

---

[3] Циолковский, Константин Эдуардович (1857 – 1935) – выдающийся ученый и изобретатель, один из основоположников космонавтики.

$$\boxed{V_z^{\max} = V_0 + u^{\text{отн}} \ln \frac{m_0}{m_\text{к}}} \; .$$

Формула Циолковского лежит в основе практической космонавтики. Нередко ее записывают в несколько иной форме. Вспоминая, что начальная масса ракеты складывается из массы корпуса и массы топлива, получаем:

$$V_z^{\max} - V_0 = u^{\text{отн}} \ln \left(1 + \frac{m_\text{т}}{m_\text{к}} \right) .$$

Вывод: разность предельной и начальной скоростей ракеты определяется лишь относительной скоростью истечения продуктов сгорания и относительным запасом топлива; она не зависит от закона, по которому расходуется топливо.

Напомним, что в уравнение Мещерского входит производная $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$, так что текущее ускорение ракеты очень даже зависит от того, по какому закону расходуется топливо.

Формула Циолковского получена в результате решения *первой задачи* Циолковского, когда движение происходит вне поля сил тяжести. В механике космического полета рассматривается и *вторая задача* Циолковского, в которой движение происходит в однородном поле тяжести.

В этом случае предельная скорость оказывается меньшей, и она зависит от $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$. Это и понятно: ведь эта величина должна быть достаточно велика для того, чтобы реактивная сила была по модулю больше, чем сила тяжести.

Вернемся теперь к вопросу о движении центра масс системы материальных точек.

5. Движение центра масс СМТ по отношению к неинерциальной СО

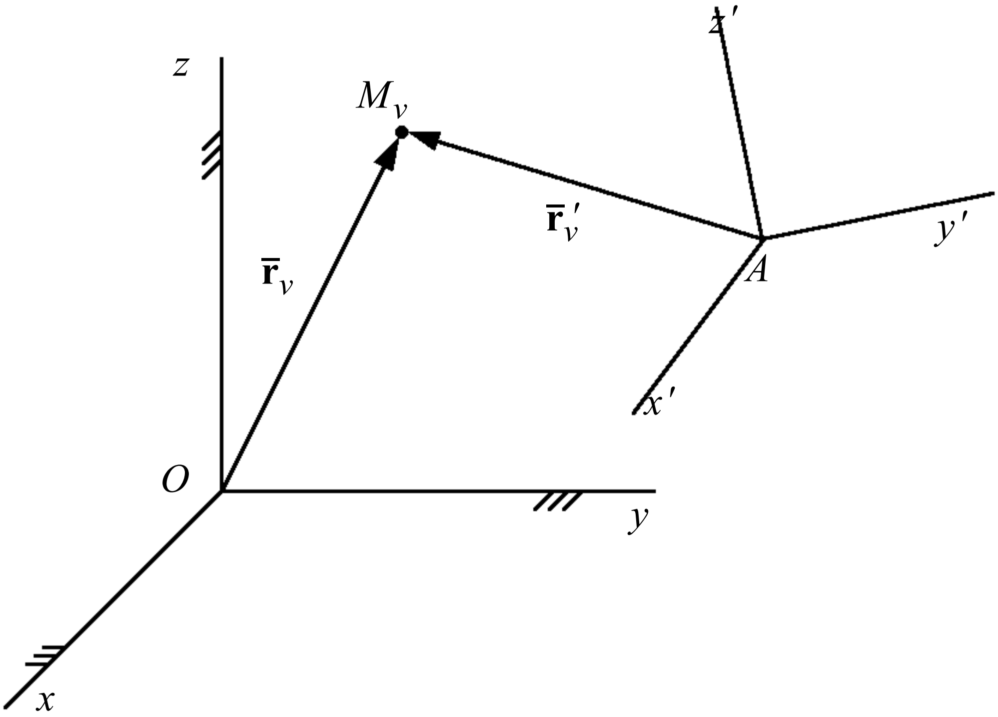
Рассмотрим условно неподвижную СО Е с системой координат $Oxyz$ и произвольную СО Е$'$ с системой координат $Ax'y'z'$.

В общем случае система отсчета Е$'$ будет неинерциальной.

Мы с Вами знаем из динамики точки, что уравнения движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета выглядят так же, как и в инерциальной, только к действующим ньютоновым силам надо добавить переносную и кориолисову силы инерции.

Для точек СМТ:

$$m_\nu \overline{\mathbf{w}}_\nu^{\text{отн}} = \overline{\mathbf{F}}_\nu^{(e)} + \overline{\mathbf{F}}_\nu^{(i)} + \overline{\mathbf{\Phi}}_\nu^{\text{пер}} + \overline{\mathbf{\Phi}}_\nu^{\text{кор}} , \quad \nu = 1, \ldots, n .$$



Мы хотим получить аналог теоремы о движении центра масс для случая, когда используются относительные ускорения.

Действуем так же, как и при выводе уже известных нам теорем об изменении количества движения системы материальных точек и о движении ее центра масс.

Сложим эти уравнения почленно; так как

$$\sum_\nu m_\nu \,\overline{\mathbf{w}}_\nu^{\text{отн}} = \sum_\nu m_\nu \frac{\widetilde{\mathrm{d}}^{\,2}\,\bar{\mathbf{r}}'_\nu}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\widetilde{\mathrm{d}}^{\,2}}{\mathrm{d}t^2}\sum_\nu m_\nu\,\bar{\mathbf{r}}'_\nu =$$

$$= \frac{\widetilde{\mathrm{d}}^{\,2}}{\mathrm{d}t^2}\, m\,\bar{\mathbf{r}}'_C = m\,\overline{\mathbf{w}}_C^{\text{отн}},$$

то

$$\boxed{m\,\overline{\mathbf{w}}_C^{\text{отн}} = \overline{\mathbf{R}}^{(e)} + \overline{\mathbf{R}}^{\text{пер}} + \overline{\mathbf{R}}^{\text{кор}}}\,.$$

Здесь мы учли, что главный вектор внутренних сил равен нулю.

Вывод: центр масс СМТ движется по отношению к инерциальной СО как материальная точка с массой $m = \sum_\nu m_\nu$, к которой приложена сила, равная сумме главных векторов внешних сил и переносных и кориолисовых сил инерции.

Данное утверждение можно было бы назвать теоремой о движении центра масс системы материальных точек по отношению к неинерциальной системе отсчета.

Получим явные выражения для главных векторов сил инерции.

$$\overline{\mathbf{R}}^{\text{пер}} \equiv \sum_{\nu} \overline{\mathbf{\Phi}}_{\nu}^{\text{пер}} = \sum_{\nu} (- m_{\nu} \overline{\mathbf{w}}_{\nu}^{\text{пер}}) =$$

$$= - \sum_{\nu} m_{\nu} \overline{\mathbf{w}}_{A} - \sum_{\nu} m_{\nu} [\overline{\odot}, \overline{\mathbf{r}}'_{\nu}] - \sum_{\nu} m_{\nu} [\overline{\square}, [\overline{\square}, \overline{\mathbf{r}}'_{\nu}]] =$$

$$= - m \overline{\mathbf{w}}_{A} - [\overline{\odot}, \underbrace{\sum_{\nu} m_{\nu} \overline{\mathbf{r}}'_{\nu}}_{m \overline{\mathbf{r}}'_{C}}] - [\overline{\square}, [\overline{\square}, \sum_{\nu} m_{\nu} \overline{\mathbf{r}}'_{\nu}]] =$$

$$= - m \overline{\mathbf{w}}_{A} - [\overline{\odot}, \overline{\mathbf{r}}'_{C}] - [\overline{\square}, [\overline{\square}, \overline{\mathbf{r}}'_{C}]] .$$

$$\overline{\mathbf{R}}^{\text{кор}} \equiv \sum_{\nu} \overline{\mathbf{\Phi}}_{\nu}^{\text{кор}} = \sum_{\nu} (- m_{\nu} \overline{\mathbf{w}}_{\nu}^{\text{кор}}) =$$

$$= - \sum_{\nu} m_{\nu} \cdot 2 [\overline{\square}, \overline{\mathbf{v}}_{\nu}^{\text{отн}}] = - 2 [\overline{\square}, \sum_{\nu} m_{\nu} \frac{\widetilde{\mathrm{d}} \overline{\mathbf{r}}'_{\nu}}{\mathrm{d} t}] =$$

$$= - 2 [\overline{\square}, \frac{\widetilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d} t} \underbrace{\sum_{\nu} m_{\nu} \overline{\mathbf{r}}'_{\nu}}_{m \overline{\mathbf{r}}'_{C}}] = - 2 m [\overline{\square}, \overline{\mathbf{v}}_{C}^{\text{отн}}] .$$

Если в правых частях полученных формул опустить множители $-m$, получатся соответственно переносное и кориолисово ускорения центра масс.

Итак, главные векторы переносных и кориолисовых сил инерции равны взятым со знаком минус произведениям массы системы на переносное и кориолисово ускорения ее центра масс C:

$$\boxed{\overline{\mathbf{R}}^{\text{пер}} = - m_{\nu} \overline{\mathbf{w}}_{C}^{\text{пер}} , \quad \overline{\mathbf{R}}^{\text{кор}} = - m_{\nu} \overline{\mathbf{w}}_{C}^{\text{кор}}} \; .$$

Рассмотрим теперь важный класс неинерциальных систем отсчета.

6. Невращающиеся системы отсчета

Система отсчета E' называется **невращающейся**, если она совершает по отношению к у.н.СО E *поступательное* движение.

Это означает:

Для E' $\overline{\square} \equiv 0$, а поэтому и $\overline{\odot} \equiv 0$.

Действительно, если угловая скорость системы отсчета тождественно равна нулю, то это эквивалентно тому, что она совершает поступательное движение.

Напомним, что в динамике в качестве условно неподвижной системы отсчета выбирают какую-либо инерциальную систему отсчета. Поскольку всякая инерциальная система отсчета движется поступательно относительно любой другой такой системы, то наше определение можно было бы сформулировать и так: “невращающаяся система отсчета – это такая СО, которая движется *поступательно* относительно какой-либо инерциальной системы отсчета”.

Если с невращающейся системой отсчета связать какую-либо систему координат, то ее координатные оси по отношению к осям неподвижной системы координат также будут перемещаться поступательно. Удобно выбирать оси так, чтобы проекции векторов на данные оси *совпадали* с проекциями этих же векторов на неподвижные оси. Запишем это.

Пусть $Ax'y'z'$ – система координат в невращающейся СО (невращающаяся система координат); обычно ее оси выбирают параллельными осям неподвижной системы координат.

В силу поступательного характера движения невращающихся осей: если такая параллельность имела место в какой-либо момент времени, то она сохраняется и во все время движения.

Отметим очевидные упрощения, которые возникают при рассмотрении движения материальных точек относительно невращающейся системы отсчета Е$'$.

Для движения СМТ относительно невращающейся СО:

$$\overline{\square} = 0, \quad \overline{\odot} = 0 \quad \square \quad \frac{\widetilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t};$$

$$\overline{\mathbf{w}}_{\nu}^{\text{пер}} = \overline{\mathbf{w}}_{A}, \quad \overline{\mathbf{w}}_{\nu}^{\text{кор}} = 0;$$

$$\overline{\mathbf{\Phi}}_{\nu}^{\text{пер}} = -m_{\nu}\overline{\mathbf{w}}_{A}, \quad \overline{\mathbf{\Phi}}_{\nu}^{\text{кор}} = 0.$$

Очевидно, что за полюс A можно брать любую точку невращающейся системы отсчета.

Вывод: каждая точка СМТ относительно невращающейся СО движется так же, как она двигалась бы относительно инерциальной СО при условии, что к ньютоновым силам добавляется сила $\overline{\mathbf{\Phi}}_{\nu}^{\text{пер}}$, пропорциональная массе точки и не зависящая ни от ее скорости, ни от ее положения:

$$m_{\nu}\overline{\mathbf{w}}_{\nu}^{\text{отн}} = \overline{\mathbf{F}}_{\nu}^{(e)} + \overline{\mathbf{F}}_{\nu}^{(i)} + \overline{\mathbf{\Phi}}_{\nu}^{\text{пер}}, \quad \overline{\mathbf{\Phi}}_{\nu}^{\text{пер}} \equiv -m_{\nu}\overline{\mathbf{w}}_{A}.$$

В соответствии со сказанным выше для главных векторов сил инерции получаем следующие выражения.

Главные векторы сил инерции:

$$\overline{\mathbf{R}}^{\text{пер}} \equiv \sum_{\nu}\overline{\mathbf{\Phi}}_{\nu}^{\text{пер}} = -m\overline{\mathbf{w}}_{A}, \quad \overline{\mathbf{R}}^{\text{кор}} = 0.$$

Весьма простое выражение при использовании невращающихся систем отсчета получается и для главных моментов сил инерции.

Главные моменты сил инерции:

$$\overline{\mathbf{L}}_A^{\text{пер}} \equiv \sum_\nu [\, \overline{\mathbf{r}}'_\nu, \overline{\mathbf{\Phi}}_\nu^{\text{пер}} \,] = \sum_\nu [\, \overline{\mathbf{r}}'_\nu, -m_\nu \overline{\mathbf{w}}_A \,] =$$

$$= [\, \sum_\nu m_\nu \overline{\mathbf{r}}'_\nu, -\overline{\mathbf{w}}_A \,] = [\, m \overline{\mathbf{r}}'_C, -\overline{\mathbf{w}}_A \,] =$$

$$= [\, \overline{\mathbf{r}}'_C, -\overline{\mathbf{w}}_A \,] ;$$

$$\overline{\mathbf{L}}_A^{\text{кор}} = 0 .$$

Сравнивая выражение, полученное для $\overline{\mathbf{L}}_A^{\text{пер}}$, с выражением для $\overline{\mathbf{R}}^{\text{пер}}$, приходим к следующему выводу: в невращающейся СО главный вектор и главный момент переносных сил инерции – такие же, как для одной силы, равной $-m\,\overline{\mathbf{w}}_A$ и приложенной в центре масс СМТ.

Нельзя при этом только говорить, что система сил инерции эквивалентна такой силе: в отличие от случая абсолютно твердого тела силы, действующие на разные точки системы материальных точек, складывать нельзя.

Для движения центра масс СМТ:

$$m\,\overline{\mathbf{w}}_C^{\text{отн}} = \overline{\mathbf{R}}^{(e)} + \overline{\mathbf{R}}^{\text{пер}}, \quad \text{где } \overline{\mathbf{R}}^{\text{пер}} = -m\,\overline{\mathbf{w}}_A .$$

Мы воспользовались формулой для движения центра масс по отношению к неинерциальной системе отсчета и внесли упрощения, связанные с тем, что E' является невращающейся.

Для всякой системы материальных точек можно ввести замечательную невращающуюся систему отсчета, относительно которой многие формулы выглядят наиболее просто.

Система отсчета E_C называется **кениговой**, если относительно нее положение центра масс C данной СМТ остается неизменным, а сама она совершает по отношению к у.н.СО поступательное движение.

Иначе говоря, кенигова система отсчета – это невращающаяся система отсчета, движущаяся вместе с центром масс. Иногда кенигову систему отсчета так и называют: “система центра масс”.

По определению:

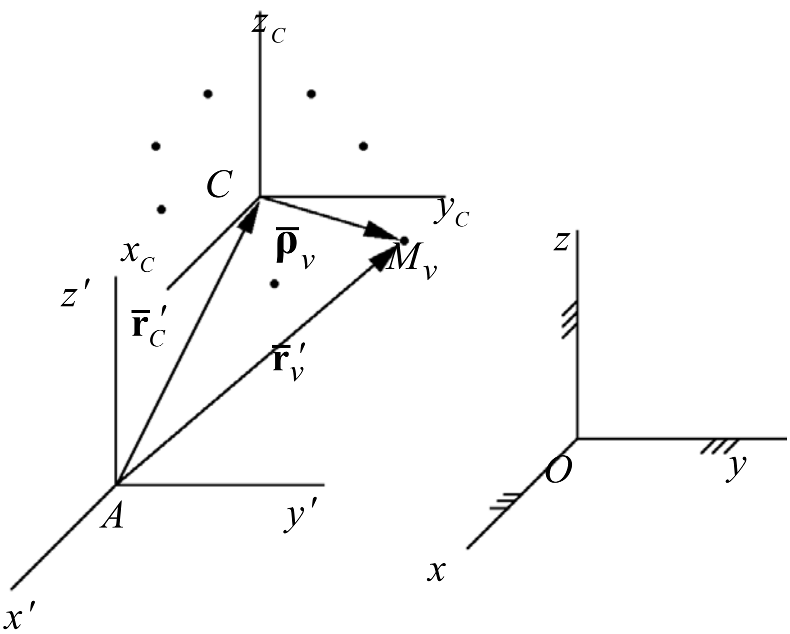
$$\overline{\mathbf{r}}'_C = \text{const} .$$

Относительно какого полюса здесь определяется радиус-вектор центра масс? Относительно какого-то полюса A, который может служить началом системы координат, связанной с кениговой системой отсчета.

В частности, за полюс можно взять и сам центр масс. Оси координат выберем так, как это принято делать для невращающихся систем отсчета.

<u>Оси Кенига</u> [4] – оси с началом в центре масс C, параллельные осям неподвижной системы координат.

Поскольку параллельность сохраняется во все время движения, то оси Кенига перемещаются параллельно своему первоначальному положению. Иначе говоря, они совершают <u>*поступательное*</u> движение. Рассмотрим количество движения системы материальных точек относительно кениговой системы отсчета. Для общности будем за полюс брать все-таки произвольную точку A этой системы отсчета.



Относительное количество движения СМТ в кениговой СО:

$$\bar{\mathbf{Q}}^{\text{отн}} \equiv \sum_\nu m_\nu \bar{\mathbf{v}}_\nu^{\text{отн}} = \sum_\nu m_\nu \frac{\mathrm{d}\,\bar{\mathbf{r}}'_\nu}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_\nu m_\nu \bar{\mathbf{r}}'_\nu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\,\bar{\mathbf{r}}'_C \;;$$

но $\bar{\mathbf{r}}'_C = \text{const}$, так что

$$\boxed{\bar{\mathbf{Q}}^{\text{отн}} = 0} \;.$$

Это – <u>*основное свойство*</u> кениговой СО: количество движения СМТ относительно системы E_C равно нулю.

Интересно, что в специальной теории относительности понятие центра масс ввести нельзя: в разных системах отсчета это будут разные точки. Но всегда можно найти такую систему отсчета, относительно которой количество движения равно нулю. Так что в ре-

[4] Иоганн Самуэль Кениг (1712 – 1757) – швейцарский математик и механик. Он впервые применил аппарат поступательно перемещающихся осей с началом в центре масс (т.е. осей Кенига) к исследованию динамики системы материальных точек.

лятивистской механике основное свойство кениговой системы отсчета в действительности служит ее определением.

§ 3. Теоремы об изменении кинетического момента

Этих теорем – несколько. Все они тоже относятся к теме “Динамика системы материальных точек”, но предпчтительно вынести этот материал в отдельный параграф. Здесь рассматривается разнообразный материал, и он сложнее того, с которым мы сталкивались, обсуждая уже известные нам общие теоремы динамики.

1. Кинетический момент СМТ

В теоремах о движении центра масс и об изменении количества движения системы материальных точек влияние приложенных к этим точкам сил выражалось однойединственной характеристикой: главным вектором внешних сил.

В статике важную роль играла и другая характеристика системы сил: главный момент. Мы обсудим значение главного момента внешних сил в динамике системы материальных точек.

Прежде всего, рассмотрим одну материальную точку. Определим для ее количества движения (а это – связанный вектор, приложенный к данной точке) понятие момента. Делается все так же, как и для силы:

Момент количества движения материальной точки относительно неподвижного полюса O – векторное произведение радиус-вектора точки на вектор количества движения:

$$\overline{\mathbf{K}}_{O\nu} = [\,\overline{\mathbf{r}}_\nu\,,\, m_\nu \overline{\mathbf{v}}_\nu\,]\,.$$

Это – связанный вектор с точкой приложения O, что и отражено в обозначениях.

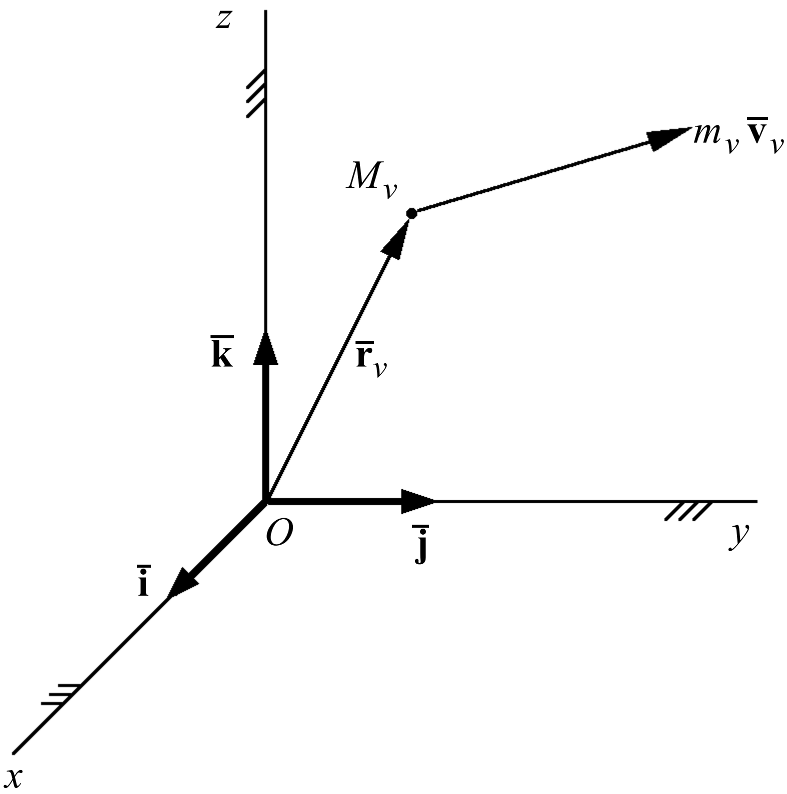
Суммирование всех таких связанных векторов дает *момент количества движения системы материальных точек*. Обычно в теоретической механике для этой величины используют более короткое название: “кинетический момент”.

Кинетический момент СМТ относительно неподвижного полюса O – вектор, равный сумме моментов количеств движения всех точек системы:

$$\boxed{\overline{\mathbf{K}}_O = \sum_\nu \overline{\mathbf{K}}_{O\nu} \equiv \sum_\nu [\,\overline{\mathbf{r}}_\nu\,,\, m_\nu \overline{\mathbf{v}}_\nu\,]}\,.$$

Иными словами, вектор $\overline{\mathbf{K}}_O$ играет роль *главного момента* векторов количеств движения точек системы.

Рассмотрим проекции этого вектора на оси системы координат $Oxyz$ с началом в точке O.



Разложим радиус-вектор точки M_ν и вектор ее скорости по единичным векторам координатных осей.

Имеем:

$$\overline{\mathbf{r}}_\nu = x_\nu\,\overline{\mathbf{i}} + y_\nu\,\overline{\mathbf{j}} + z_\nu\,\overline{\mathbf{k}}\,; \qquad \overline{\mathbf{v}}_\nu = \frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}t}\,\overline{\mathbf{i}} + \frac{\mathrm{d}y_\nu}{\mathrm{d}t}\,\overline{\mathbf{j}} + \frac{\mathrm{d}z_\nu}{\mathrm{d}t}\,\overline{\mathbf{k}}\,.$$

Отсюда, вычисляя векторные произведения, получаем:

$$K_{Ox} = \sum_\nu m_\nu \left(y_\nu \frac{\mathrm{d}z_\nu}{\mathrm{d}t} - z_\nu \frac{\mathrm{d}y_\nu}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$K_{Oy} = \sum_\nu m_\nu \left(z_\nu \frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}t} - x_\nu \frac{\mathrm{d}z_\nu}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$K_{Oz} = \sum_\nu m_\nu \left(x_\nu \frac{\mathrm{d}y_\nu}{\mathrm{d}t} - y_\nu \frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}t}\right).$$

Используется следующая терминология.

<u>**Кинетический момент относительно оси**</u> – проекция вектора кинетического момента на эту ось.

Значит, мы только что нашли кинетические моменты системы материальных точек относительно координатных осей.

Выясним, как преобразуется кинетический момент при смене полюса.

Если A – другая точка, то

$$\overline{\mathbf{K}}_A \equiv \sum_{\nu} [\, \underbrace{\overline{\mathbf{r}}'_{\nu}}_{\overline{\mathbf{r}}_{AO} + \overline{\mathbf{r}}_{\nu}},\, m_{\nu} \overline{\mathbf{v}}_{\nu} \,] =$$

$$= \sum_{\nu} [\, \overline{\mathbf{r}}_{AO},\, m_{\nu} \overline{\mathbf{v}}_{\nu} \,] + \sum_{\nu} [\, \overline{\mathbf{r}}_{\nu},\, m_{\nu} \overline{\mathbf{v}}_{\nu} \,] =$$

$$= [\, \overline{\mathbf{r}}_{AO},\, \sum_{\nu} m_{\nu} \overline{\mathbf{v}}_{\nu} \,] + \overline{\mathbf{K}}_O \,.$$

Но сумма в квадратных скобках – это количество движения системы материальных точек.

Вывод: кинетический момент СМТ относительно нового полюса есть сумма кинетического момента относительно старого полюса и момента (относительно нового полюса) вектора количества движения СМТ, приложенного к старому полюсу.

Итак:

$$\boxed{\overline{\mathbf{K}}_A = [\, \overline{\mathbf{r}}_{AO},\, \overline{\mathbf{Q}} \,] + \overline{\mathbf{K}}_O} \,.$$

Аналогичная формула Вам известна из статики. Напомним ее:

Аналогия – для главного момента системы сил

$$\overline{\mathbf{L}}_A = [\, \overline{\mathbf{r}}_{AO},\, \overline{\mathbf{R}} \,] + \overline{\mathbf{L}}_O \,.$$

Каждая из этих формул выражает преобразование главного момента системы связанных векторов при смене полюса.

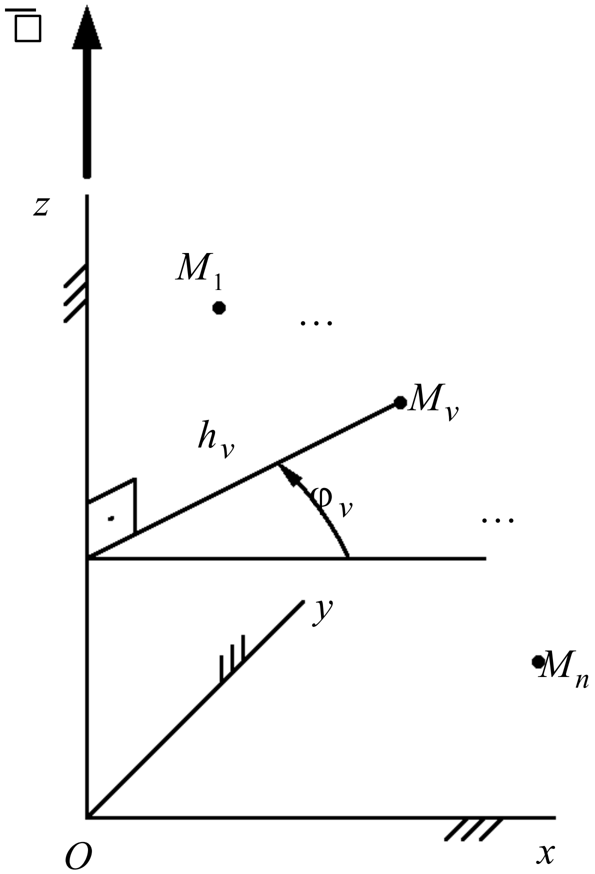
Так что мы могли бы просто сослаться на известную формулу для главного момента системы сил и не выводить формулу для кинетического момента заново. Но предпочтительней привести прямой вывод. Рассмотрим пример вычисления кинетического момента. Но предварительно запишем одно общее определение.

<u>Жесткое движение</u> СМТ – движение, при котором расстояния между любыми двумя ее точками остаются неизменными.

Иными словами, точки системы движутся как точки абсолютно твердого тела.

Это бывает в двух случаях – либо при специально подобранных активных силах, либо при наложении на систему связей, не допускающих изменения расстояний между точками.

Пример. Вычислим кинетический момент относительно неподвижной оси Oz для системы, совершающей жесткое движение: вращение относительно данной оси.



Для координат точек системы имеем:

$$\begin{cases} x_\nu = h_\nu \cos\varphi_\nu \,, \\ y_\nu = h_\nu \sin\varphi_\nu \,. \end{cases}$$

Поскольку точки системы движутся как точки абсолютно твердого тела, то проекции их скоростей можно считать по известным формулам для проекций скоростей точек в плоском движении (а вращение вокруг неподвижной оси – частный случай плоского движения). Получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}t} = -\, h_\nu\, \Omega_z \sin\varphi_\nu \,, \\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y_\nu}{\mathrm{d}t} = h_\nu\, \Omega_z \cos\varphi_\nu \,. \end{cases}$$

Теперь по известной нам формуле вычисляем кинетический момент системы относительно оси Oz.

$$K_{Oz} = \sum_\nu m_\nu \left(x_\nu \frac{\mathrm{d}y_\nu}{\mathrm{d}t} - y_\nu \frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}t} \right) =$$

$$= \sum_{\nu} m_{\nu} \, (\, h_{\nu}^2 \, \Omega_z \cos^2 \varphi_{\nu} \, + \, h_{\nu}^2 \, \Omega_z \sin^2 \varphi_{\nu} \,) \quad =$$

$$= \sum_{\nu} m_{\nu} \, h_{\nu}^2 \, \Omega_z \quad \equiv \quad I_{zz} \, \Omega_z \, .$$

Здесь

$$I_{zz} \;=\; \sum_{\nu} m_{\nu} \, h_{\nu}^2 \;\equiv\; \sum_{\nu} m_{\nu} \, (\, x_{\nu}^2 + y_{\nu}^2 \,)$$

– **момент инерции** СМТ относительно оси Oz; это – сумма произведений масс точек на квадраты их расстояний до оси.

Момент инерции I_{zz} зависит только от масс и расположения точек системы относительно оси вращения. В рассматриваемой задаче это – постоянная величина. Позднее мы увидим, что момент инерции представляет меру инерции системы во вращательном движении.

Отдельные слагаемые в записанной сумме представляют собой моменты инерции точек относительно оси.

Нередко в качестве характеристики инерционных свойств системы по отношению к вращательному движению вместо момента инерции используют другую величину – радиус инерции.

Радиус инерции СМТ относительно оси Oz – расстояние ϱ от оси до точки, в которой нужно сосредоточить массу m всей системы, чтобы момент инерции этой точки был равен моменту инерции системы:

$$I_{zz} \;=\; m \, \varrho^2 \, .$$

Но вернемся к полученной нами формуле для кинетического момента.

Итак,

$$\boxed{K_{Oz} \;=\; I_{zz} \, \Omega_z} \; .$$

Особенно важное значение полученная формула имеет в динамике абсолютно твердого тела.

2. Относительный кинетический момент

В предыдущем пункте была получена формула, связывающая кинетические моменты относительно старого полюса O и нового полюса A. Обратите внимание: не оговаривалось, что новый полюс A – неподвижная точка. Кинетический момент можно вычислять по одним и тем же формулам относительно любого полюса – и неподвижного, и движущегося произвольным образом.

Тем не менее в основных формулировках предыдущего пункта подчеркивалось, что полюс O неподвижен. Связано это вот с чем.

Обычно в случае подвижного полюса рассматривают моменты количеств <u>*относительного*</u> движения.

Что это значит? Введем необходимые обозначения.

$$\overline{\mathbf{v}}_\nu^{\,\text{отн}} = \overline{\mathbf{v}}_\nu - \overline{\mathbf{v}}_A \,; \qquad \overline{\mathbf{Q}}_\nu^{\,\text{отн}} = m_\nu \overline{\mathbf{v}}_\nu^{\,\text{отн}} \,.$$

<u>**Кинетический момент СМТ**</u> относительно произвольного полюса A для случая относительного движения (относительный кинетический момент):

$$\boxed{\overline{\mathbf{K}}_A^{\,\text{отн}} = \sum_\nu \overline{\mathbf{K}}_{A\nu}^{\,\text{отн}} \equiv \sum_\nu \left[\, \overline{\mathbf{r}}'_\nu ,\, m_\nu \overline{\mathbf{v}}_\nu^{\,\text{отн}} \,\right]} \,.$$

Можно, однако, рассматривать – как и в случае неподвижного полюса – кинетический момент для абсолютного движения. С целью сравнения приведем формулу и для него.

Для абсолютного кинетического момента имеем:

$$\overline{\mathbf{K}}_A = \sum_\nu \left[\, \overline{\mathbf{r}}'_\nu ,\, m_\nu \overline{\mathbf{v}}_\nu \,\right] .$$

Эта формула Вам уже знакома.

Итак, в определении относительного кинетического момента вместо абсолютных скоростей $\overline{\mathbf{v}}_\nu$ используются относительные скорости $\overline{\mathbf{v}}_\nu^{\,\text{отн}}$. Их мы определили просто как разности скорости материальной точки и скорости полюса.

Иначе говоря, здесь вовсе не шла речь о сложном движении точки, когда движение одновременно рассматривается по отношению к двум системам отсчета: инерциальной и произвольной. Все наши выкладки велись в инерциальной системе отсчета.

Тем не менее имеет право на существование и другой подход.

<u>**Замечание.**</u> Вектор $\overline{\mathbf{K}}_A^{\,\text{отн}}$ можно трактовать как кинетический момент для относительного движения СМТ в невращающейся СО E', движущейся вместе с полюсом A.

При такой трактовке скорости $\overline{\mathbf{v}}_\nu^{\,\text{отн}}$ – это действительно относительные скорости, как они определяются в кинематике сложного движения точки, а скорость полюса играет роль переносной скорости.

Обсудим еще ситуацию, когда и для абсолютного, и для относительного движения кинетический момент получается одним и тем же.

Когда $\overline{\mathbf{K}}_A^{\,\text{отн}} = \overline{\mathbf{K}}_A$?

Такое совпадение имеет место в следующих двух важных случаях.

1°. Если точка A – неподвижная:

$$\overline{\mathbf{v}}_A = 0 \quad \square \quad \overline{\mathbf{v}}_\nu^{\,\text{отн}} = \overline{\mathbf{v}}_\nu \quad \square \quad \overline{\mathbf{K}}_A^{\,\text{отн}} = \overline{\mathbf{K}}_A \,.$$

2°. Если точка A – центр масс C:

$$\overline{\mathbf{K}}_C^{\text{отн}} = \sum_\nu [\, \overline{\boldsymbol{\rho}}_\nu ,\, m_\nu \underbrace{\overline{\mathbf{v}}_\nu^{\text{отн}}}_{\overline{\mathbf{v}}_\nu - \overline{\mathbf{v}}_C} \,] =$$

$$= \sum_\nu [\, \overline{\boldsymbol{\rho}}_\nu ,\, m_\nu \overline{\mathbf{v}}_\nu \,] - \sum_\nu [\, m_\nu \overline{\boldsymbol{\rho}}_\nu ,\, \overline{\mathbf{v}}_C \,] =$$

$$= \overline{\mathbf{K}}_C - \sum_\nu [\, \underbrace{m_\nu \overline{\boldsymbol{\rho}}_\nu}_{0} ,\, \overline{\mathbf{v}}_C \,] = \overline{\mathbf{K}}_C \,,$$

так что

(∗) $$\boxed{\overline{\mathbf{K}}_C^{\text{отн}} = \overline{\mathbf{K}}_C} \,.$$

Мы воспользовались одним из свойств центра масс – свойством 3°.

Кинетический момент СМТ относительно ее центра масс иначе называется **<u>собственным кинетическим моментом</u>** СМТ.

Формула (∗) выражает *<u>первое свойство</u>* собственного кинетического момента: относительный и абсолютный кинетические моменты СМТ относительно центра масс равны друг другу.

Мы уже отмечали, что относительный кинетический момент можно трактовать как кинетический момент в невращающейся системе отсчета, движущейся вместе с полюсом. Сейчас полюс совпадает с центром масс, так что речь идет о кениговой системе отсчета.

Собственный кинетический момент – это кинетический момент для относительного движения СМТ в кениговой СО E_C.

Такое движение иначе называют движением системы материальных точек около центра масс.

Впрочем, мы только что установили, получив формулу $\overline{\mathbf{K}}_C^{\text{отн}} = \overline{\mathbf{K}}_C$, что можно не делать уточнения, абсолютное или относительное движение подразумевается.

В данной формуле существенно, что вектор $\overline{\mathbf{K}}_C$ вычисляется относительно полюса C. Между прочим, для вектора $\overline{\mathbf{K}}_C^{\text{отн}}$ такой выбор полюса отнюдь не существен.

<u>Второе свойство</u> собственного кинетического момента: относительный кинетический момент СМТ относительно *<u>любой</u>* точки кениговой СО равен относительному кинетическому моменту СМТ относительно центра масс.

Действительно, если A – точка, движущаяся вместе с кениговой СО, то $\overline{\mathbf{v}}_A = \overline{\mathbf{v}}_C$, а $\overline{\mathbf{K}}_A^{\text{отн}}$ и $\overline{\mathbf{K}}_C^{\text{отн}}$ – главные моменты одной и той же системы векторов

$$\overline{\mathbf{Q}}_\nu^{\text{отн}} \equiv m_\nu \overline{\mathbf{v}}_\nu^{\text{отн}} = m_\nu (\, \overline{\mathbf{v}}_\nu - \overline{\mathbf{v}}_C \,) \,.$$

Поэтому при смене полюса имеем

$$\overline{\mathbf{K}}_A^{\text{отн}} = [\,\overline{\mathbf{r}}_{AC}, \overline{\mathbf{Q}}^{\text{отн}}\,] + \overline{\mathbf{K}}_C^{\text{отн}};$$

но по основному свойству кениговой СО $\overline{\mathbf{Q}}^{\text{отн}} = 0$.

Итак,

(**)
$$\boxed{\overline{\mathbf{K}}_A^{\text{отн}} = \overline{\mathbf{K}}_C^{\text{отн}}}\,.$$

Вывод: собственный кинетический момент СМТ – это *свободный* вектор.

Данное утверждение подразумевает, что собственный кинетический момент трактуется как главный момент количеств *относительного* движения. Поэтому верхний индекс “отн” в его обозначении мы будем сохранять.

Разумно сохранять и нижний индекс “C”: он указывает не столько на полюс, сколько на движение относительно кениговой системы отсчета.

Пользуясь первым свойством собственного кинетического момента, нетрудно установить связь между кинетическим моментом относительно неподвижной точки и собственным кинетическим моментом.

$$\overline{\mathbf{K}}_O = [\,\overline{\mathbf{r}}_{OC}, \overline{\mathbf{Q}}\,] + \overline{\mathbf{K}}_C\,,$$

т.е.

$$\boxed{\overline{\mathbf{K}}_O = [\,\overline{\mathbf{r}}_C, \overline{\mathbf{Q}}\,] + \overline{\mathbf{K}}_C^{\text{отн}}}\,.$$

Итак: кинетический момент СМТ относительно неподвижного полюса равен сумме собственного кинетического момента и момента вектора количества движения СМТ, приложенного к центру масс.

Завершая данный пункт, сделаем одно замечание.

Замечание. Собственный кинетический момент одной материальной точки равен *нулю*, так как центр масс совпадает с ней самой и $\overline{\mathbf{v}}^{\text{отн}} = 0$, а $\overline{\mathbf{K}}_C^{\text{отн}} = [\,\overline{\boldsymbol{\rho}}, m\overline{\mathbf{v}}^{\text{отн}}\,]$.

Кстати, здесь и первый сомножитель обратился в нуль.

Значит, понятие собственного кинетического момента (в отличие от понятия кинетического момента относительно неподвижной точки) специфично именно для системы материальных точек.

Интересно, что в этом состоит одно из важнейших расхождений между классической и квантовой механикой.

Отметим, что в квантовой механике даже точечные материальные частицы (электроны, кварки) могут обладать ненулевым собственным кинетическим моментом – *спином*.

Перечисленные частицы – электроны и кварки – как раз ненулевым спином и обладают. В рамках современной квантовой теории поля – это действительно точечные объекты, не имеющие пространственной протяженности.

Вот протоны или нейтроны – это частицы конечных размеров (они состоят из кварков). Им ничто не запрещает иметь и классический собственный кинетический момент, вызванный относительным движением кварков.

На самом деле собственный кинетический момент протона или нейтрона равен сумме спинов кварков. Если же добавляется еще и классический собственный кинетический момент, то получаются короткоживущие элементарные частицы – нуклонные резонансы.

Итак, мы познакомились с основными разновидностями понятия "кинетический момент" – с абсолютным, относительным, собственным кинетическим моментом. Докажем теперь простейшую из теорем об изменении кинетического момента.

3. Теорема об изменении кинетического момента относительно неподвижной точки

Теорема. Производная по времени от кинетического момента СМТ относительно неподвижной точки O равна главному моменту внешних сил относительно этой точки.

$$\boxed{\frac{d\overline{\mathbf{K}}_O}{dt} = \overline{\mathbf{L}}_O^{(e)}} \ .$$

Эта формула выражает собой теорему об изменении кинетического момента относительно неподвижной точки. Приступим к доказательству этой теоремы.

■ В левой части формулы записана производная по времени от абсолютного кинетического момента. Вычислим эту производную.

Вычисляем:

$$\frac{d\overline{\mathbf{K}}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{\nu}[\,\overline{\mathbf{r}}_\nu,\, m_\nu\overline{\mathbf{v}}_\nu\,] =$$

$$= \sum_{\nu}[\,\frac{d\overline{\mathbf{r}}_\nu}{dt},\, m_\nu\overline{\mathbf{v}}_\nu\,] + \sum_{\nu}[\,\overline{\mathbf{r}}_\nu,\, m_\nu\frac{d\overline{\mathbf{v}}_\nu}{dt}\,] =$$

$$= \sum_{\nu}\underbrace{[\,\overline{\mathbf{v}}_\nu,\, m_\nu\overline{\mathbf{v}}_\nu\,]}_{0} + \sum_{\nu}[\,\overline{\mathbf{r}}_\nu,\, m_\nu\overline{\mathbf{w}}_\nu\,] \ .$$

Итак, искомая производная равна последней сумме.

Уравнения движения точек СМТ:

$$m_\nu \overline{\mathbf{w}}_\nu = \overline{\mathbf{F}}_\nu^{(e)} + \overline{\mathbf{F}}_\nu^{(i)} \; ; \qquad \nu = 1, \ldots, n \, .$$

Умножим каждое уравнение векторно на $\overline{\mathbf{r}}_\nu$ и сложим их почленно:

$$\underbrace{\sum_\nu \left[\, \overline{\mathbf{r}}_\nu , \, m_\nu \overline{\mathbf{w}}_\nu \, \right]}_{\dfrac{\mathrm{d}\overline{\mathbf{K}}_O}{\mathrm{d}t}} = \overline{\mathbf{L}}_A^{(e)} + \underbrace{\overline{\mathbf{L}}_A^{(i)}}_{0} \, .$$

Фактически теорема доказана. Отметим:

Была использована теорема о свойствах внутренних сил. ■

Заметьте: в данной теореме фигурирует *<u>производная</u>* от кинетического момента, так что теорему называют также “теоремой об изменении кинетического момента относительно неподвижной точки в *<u>дифференциальной</u>* форме”.

Есть и другая – интегральная – форма данной теоремы. Действительно, доказанная нами теорема выполняется в любой момент времени; поэтому можно проинтегрировать полученную формулу на интервале времени от t_1 до t_2.

Интегрируем:

$$\overline{\mathbf{K}}_O(t_2) - \overline{\mathbf{K}}_O(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \overline{\mathbf{L}}_O^{(e)} \, \mathrm{d}t \, .$$

Итак:

Изменение кинетического момента СМТ относительно неподвижной точки за конечное время равно импульсу главного момента внешних сил относительно этой же точки за это время (теорема об изменении кинетического момента СМТ относительно неподвижной точки в *<u>интегральной</u>* форме).

Как видно из этой формулировки, интеграл в правой части как раз и называется импульсом главного момента внешних сил. Рассмотрим следствия из доказанной теоремы.

<u>Следствие 1.</u> Если на данном отрезке времени $\overline{\mathbf{L}}_O^{(e)} \equiv 0$, то $\overline{\mathbf{K}}_O = \mathrm{const}$.

Иными словами, если главный момент внешних сил тождественно равен нулю, то вектор кинетического момента остается постоянным по величине и направлению.

Действительно, $\overline{\mathbf{L}}_O^{(e)} = 0 \quad \square \quad \dfrac{\mathrm{d}\overline{\mathbf{K}}_O}{\mathrm{d}t} = 0 \, .$

Если последнее равенство на данном отрезке времени выполняется тождественно, то тогда сам вектор $\overline{\mathbf{K}}_O$ остается постоянным.

Когда такая ситуация имеет место? Например, в случае, когда все внешние силы равны нулю; но отнюдь не только в этом случае.

В частности, если все внешние силы обладают *центральной симметрией* (их линии действия проходят через точку O), то $\overline{\mathbf{L}}_O^{(e)} \equiv 0$ и $\overline{\mathbf{K}}_O = \text{const}$.

Приведем пример на сформулированное следствие 1. В нем как раз все внешние силы отсутствуют.

Пример. В качестве СМТ рассмотрим Солнечную систему, а за неподвижную точку O примем ее центр масс.

Насколько реально такое предположение?

Из астрономии известны конкретные данные о движении центра масс Солнечной системы.

$$\left| \overline{\mathbf{v}}_O \right| = \begin{cases} 15 - 20 \ \text{км}/\text{с} & \text{относительно соседних звёзд} \\ 270 \ \text{км}/\text{с} & \text{относительно центра Галактики} \\ & (\text{до него } - \ 300 \cdot 10^{15} \ \text{км}) \, . \end{cases}$$

Первое из этих значений дано с таким разбросом не потому, что астрономы не умеют измерять его точнее, а потому, что за “соседние” звезды можно брать либо наиболее близкие звезды, либо наиболее яркие звезды (среди которых немало и достаточно далеких звезд-гигантов).

Эти значения скорости точки O – не малы. Но в первом из случаев движение оказывается равномерным и прямолинейным, что позволяет считать систему отсчета, связанную с точкой O, инерциальной.

Второй же случай соответствует обращению Солнечной системы относительно центра Галактики, и тут движение – не прямолинейное. Однако центр Галактики удален от нас на $300 \cdot 10^{15}$ км, так что:

Точка O совершает один оборот вокруг центра Галактики за 230 миллионов лет. Таким образом невращающуюся СО, движущуюся вместе с точкой O, можно считать инерциальной с чрезвычайно высокой точностью.

Теперь мы можем считать точку O неподвижной и применить следствие 1.

$$\overline{\mathbf{F}}_v^{(e)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{L}}_O^{(e)} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{K}}_O = \text{const} \, .$$

Приведем для справки, чему равен модуль кинетического момента Солнечной системы.

$$\left| \overline{\mathbf{K}}_O \right| \approx 32 \cdot 10^{42} \ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} .$$

Интересно, из чего это значение складывается.

60 % здесь – вклад Юпитера, еще 37 % – других планет-гигантов; Солнце дает 2 %, а Земля – менее 0,1 %. Итак, кинетический момент Солнечной системы сохраняется – и по величине, и по направлению – в инерциальной системе отсчета, связанной с неподвижными звездами. Поэтому сохраняет неизменное положение и плоскость, перпендикулярная вектору $\overline{\mathbf{K}}_O$ (**плоскость Лапласа**[5]). Этот факт имеет важное значение в астрономии, ведь орбиты всех планет ориентируют относительно неизменяемой плоскости Лапласа. Обычно орбита планеты образует с этой плоскостью небольшой угол (для земной орбиты – примерно полтора градуса).

Теперь рассмотрим еще одно следствие из теоремы об изменении кинетического момента относительно неподвижной точки.

Допустим, что главный момент внешних сил может отличаться от нуля, но его проекция на какую-либо ось тождественно равняется нулю. Для определенности, пусть это будет ось Oz.

Следствие 2. Если на данном отрезке времени $L_{Oz}^{(e)} \equiv 0$, то $K_{Oz} = \mathrm{const}$.

Другие компоненты вектора кинетического момента при этом могут изменяться. Действительно, $\dfrac{\mathrm{d}K_{Oz}}{\mathrm{d}t} = L_{Oz}^{(e)}$ и $L_{Oz}^{(e)} = 0$ □ $\dfrac{\mathrm{d}K_{Oz}}{\mathrm{d}t} = 0$. Вот достаточно общий пример ситуации, когда работает следствие 2. В частности, если все внешние силы обладают *осевой симметрией* (их линии действия пересекают Oz или параллельны ей), то $L_{Oz}^{(e)} \equiv 0$ и $K_{Oz} = \mathrm{const}$. Следствия 1,2 иногда называют *законами сохранения* кинетического момента СМТ относительно неподвижной точки.

Рассмотрим теперь интересный и поучительный пример, где применяется теорема об изменении кинетического момента относительно неподвижной точки.

4. Задача о скамейке Жуковского

Вы, должно быть, уже обратили внимание, что следствия 1 и 2 из рассмотренной нами в предыдущем пункте теоремы вполне аналогичны следствиям 1 и 2 из теоремы об изменении количества движения системы материальных точек. А у этой теоремы есть, так сказать, “родственник”: теорема о движении центра масс (из нее мы тоже получали следствия 1 и 2). В результате для центра масс системы выполняется, например, такое свойство: если внешних сил нет и в начальный момент времени центр масс покоится, то никакими внутренними силами изменить положение центра масс нельзя. Важное отличие

[5] Лаплас, Пьер Симон (1749 – 1827) – французский механик, физик, математик и астроном. Завершил разработку небесной механики на основе законов Ньютона и впервые вычислил положение неизменяемой плоскости, ныне называемой его именем.

теоремы об изменении кинетического момента: никакого аналогичного “родственника” у нее нет! Запишем, что из этого следует.

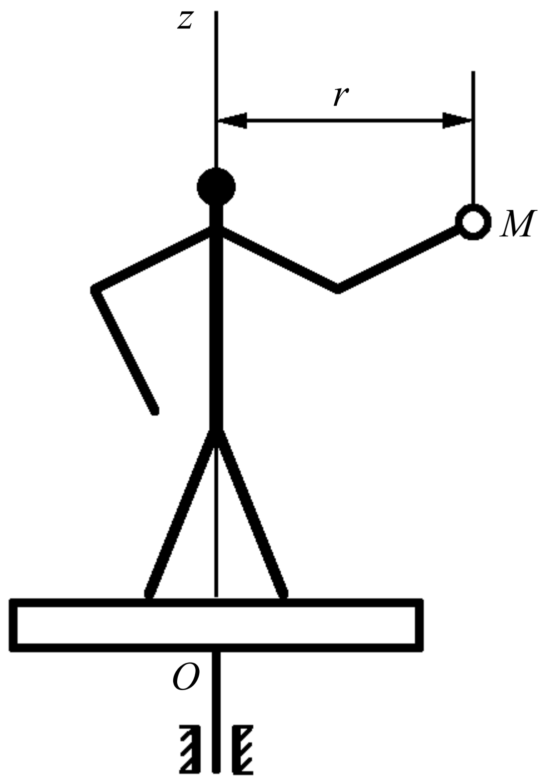
Замечание. Внутренние силы непосредственно не влияют на изменение кинетического момента СМТ. Однако если система – *изменяемая* (могут изменяться расстояния между ее точками), то она способна за счет внутренних сил изменить свое положение в пространстве.

Происходит это не вопреки, а в точном соответствии с теоремой об изменении кинетического момента. Покажем это на примере, в котором речь пойдет как раз о скамейке Жуковского.

Скамейка Жуковского – горизонтальная площадка, способная вращаться вокруг вертикальной оси с пренебрежимо малым трением.

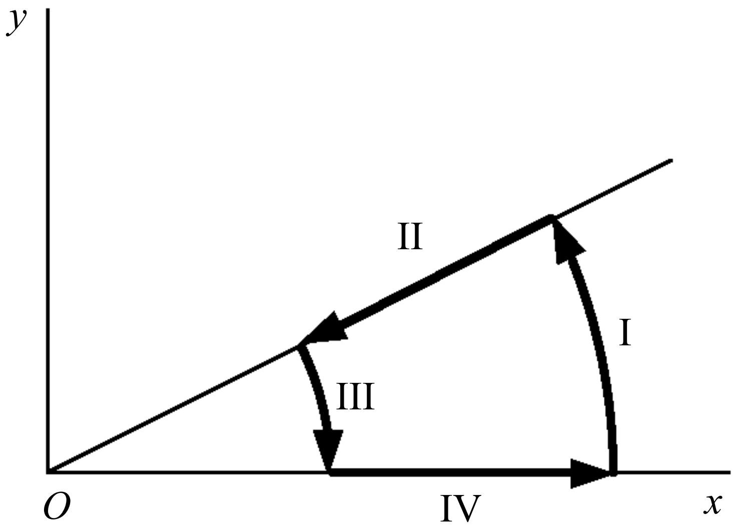
Фактически это – прибор для демонстрации теоремы об изменении кинетического момента системы и следствий из нее. Такой прибор построил и использовал выдающийся русский механик Н.Е.Жуковский[6]. Задача, которую мы рассмотрим – это один из опытов, которые выполняются со скамейкой Жуковского.

Пример. В центре скамейки Жуковского стоит человек и держит в руке гирю M массы m.



[6] Жуковский, Николай Егорович $(1847-1921)$ – русский механик. Занимался многими разделами механики, но прежде всего известен как основоположник современной аэродинамики. В частности, он вывел формулу для подъемной силы крыла, которая лежит в основе аэродинамических расчетов самолетов.

Покажем, что он способен развернуться вместе со скамейкой, выполнив гирей следующее движение:



Гиря здесь нужна, в общем-то, для усиления эффекта (достаточно и одного движения рукой, только угол поворота будет меньше). Но раз уж мы ввели гирю, то будем – для простоты – пренебрегать массой руки, а саму гирю считать материальной точкой.

Система координат $Oxyz$ связана с площадкой.

То есть оси ее – движущиеся. Но нам нужны будут только проекции на ось Oz, а эта ось – неподвижная.

Рассмотрим кинетические моменты всей системы, человека (с площадкой) и гири:

$$\overline{\mathbf{K}}_O = \overline{\mathbf{K}}_O^{(1)} + \overline{\mathbf{K}}_O^{(2)} .$$

Так как линии действия внешних сил либо параллельны оси Oz (у сил тяжести), либо пересекают ее (у реакции в подшипнике), то:

$L_{Oz}^{(e)} \equiv 0$ □ $K_{Oz} = \text{const} \equiv 0$ (при $t = 0$ система находилась в покое).

Заметим, что:

$$\overline{\mathbf{K}}_O^{(2)} = [\, \overline{\mathbf{r}}_M ,\, m\, \overline{\mathbf{v}}_M \,] .$$

Рассмотрим отдельные этапы движения.

На этапах II, IV (опускание и подъем гири) $\overline{\mathbf{r}}_M$ и $\overline{\mathbf{v}}_M$ лежат в вертикальной плоскости (содержащей ось Oz), так что вектор $\overline{\mathbf{K}}_O^{(2)}$ ей перпендикулярен и

$$K_{Oz}^{(2)} = 0 \quad □ \quad K_{Oz}^{(1)} = -K_{Oz}^{(2)} = 0 .$$

Прежде чем рассматривать этапы I и III, введем в рассмотрение два угла.

Пусть φ – текущий угол поворота площадки, а θ – текущий угол, образуемый проекцией вектора $\overline{\mathbf{r}}_M$ на площадку с осью Ox; с начальным положением оси Ox эта проекция образует угол $\varphi+\theta$.

Нам надо показать, что угол φ в конце движения будет отличаться от начального его значения. На этапах I и III и человек, и гиря совершают жесткое движения: вращение относительно оси Oz. Насколько это верно? Строго говоря, рука человека движется вместе с гирей, а не с туловищем человека. Но мы уже договорились массой руки пренебрегать. Таким образом, мы можем применить и к человеку, и к гире формулу для проекции кинетического момента на ось вращения.

$$K_{Oz}^{(1)} = I\Omega_{1z} \equiv I\dot{\varphi} ,$$

$$K_{Oz}^{(2)} = mr^2\Omega_{2z} \equiv mr^2(\dot{\varphi}+\dot{\theta}) ;$$

здесь $I \equiv I_{zz}$ – суммарный момент инерции человека и площадки относительно оси Oz.

Индекс "*zz*" мы не пишем для краткости обозначений.

Момент инерции гири мы нашли как момент инерции материальной точки, находящейся на расстоянии r от оси вращения. Заметим, что на этапах I и III это расстояние – разное, и позже в обозначениях мы это учтем.

Еще мы использовали, что проекция угловой скорости на ось Oz равна производной от угла поворота, а полный угол поворота для гири равен, как мы уже отмечали, сумме $\varphi+\theta$.

Так как

$$K_{Oz}^{(1)} + K_{Oz}^{(2)} = K_{Oz} \equiv 0 ,$$

то

$$I\dot{\varphi} + mr^2\dot{\varphi} + mr^2\dot{\theta} = 0 .$$

Отсюда

$$(*) \qquad \dot{\varphi} = -\frac{mr^2}{I+mr^2}\,\dot{\theta} .$$

С этим уравнением мы и будем сейчас работать.

На этапе I $r = r_1$, на этапе III $r = r_2$.

Интегрируем $(*)$ на этапе I при начальных условиях $\varphi_0 = \theta_0 = 0$:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = -\frac{mr_1^2}{I+mr_1^2}\,(\theta_1-\theta_0) ,$$

т.е.

$$\varphi_1 = -\frac{mr_1^2}{I+mr_1^2}\,\theta_1 .$$

Интегрируем $(*)$ на этапе III:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{m r_2^2}{I + m r_2^2}(\theta_2 - \theta_1) .$$

Так как $\theta_2 = 0$ (гиря вернулась в первоначальное положение), то

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{m r_2^2}{I + m r_2^2}\theta_1 = m\left(\frac{r_2^2}{I + m r_2^2} - \frac{r_1^2}{I + m r_1^2}\right)\theta_1 =$$

$$= m\frac{I r_2^2 + m r_1^2 r_2^2 - I r_1^2 - m r_2^2 r_1^2}{(I + m r_1^2)(I + m r_2^2)}\theta_1 .$$

Заметим, что второе и четвертое слагаемые в числителе сокращаются.

Окончательно:

$$\boxed{\varphi_2 = \frac{m I (r_2^2 - r_1^2)}{(I + m r_1^2)(I + m r_2^2)}\theta_1} .$$

Видно, что это значение не равно нулю. Обратите внимание, что $r_2 < r_1$, так что значение φ_2 (угол поворота площадки в конце движения) противоположно по знаку максимальному значению поворота гири на этапе I. Таким образом, человек без помощи внешних сил сумел повернуться на конечный угол. Коротко упомянем еще об одном эксперименте со скамейкой Жуковского. Пусть на скамейку встал человек, а затем скамейку раскрутили, и она стала вращаться с постоянной угловой скоростью. Соответственно, будет оставаться постоянным и кинетический момент системы “человек + площадка”. Если теперь человек разведет руки в стороны, то он увеличит момент инерции и тем самым замедлит вращение. Если он прижмет руки – угловая скорость вновь увеличится.

Точно так же управляет скоростью своего вращения и фигурист, катающийся по льду. Но здесь уже будет работать другая теорема – теорема об изменении кинетического момента системы относительно центра масс, которую мы скоро докажем.

5. Дифференциальные уравнения вращения неизменяемой СМТ относительно неподвижной оси

Сначала – о терминологии. Мы уже говорили вскользь об изменяемых и неизменяемых системах. Запишем определение.

Система материальных точек – **неизменяемая**, если из-за наложенных на эти точки связей расстояния между любыми двумя точками остаются постоянными – как бы ни двигалась система.

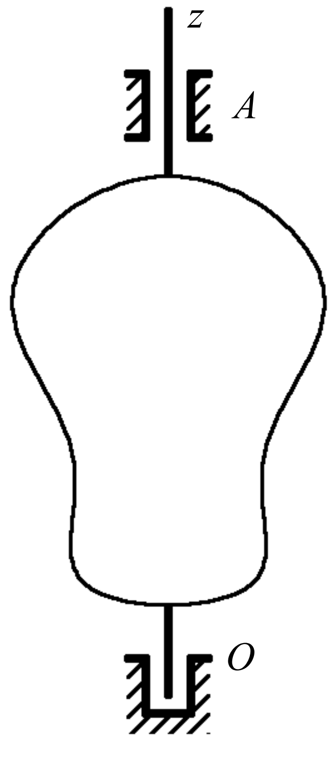
Подчеркнем, что речь идет о произвольных движениях, которые система способна совершать.

Замечание. Любое абсолютно твердое тело (АТТ) можно рассматривать как неизменяемую СМТ. С другой стороны, если изменяемая система совершает <u>*жесткое*</u> движение, то ее (пока движение остается жестким) можно рассматривать как неизменяемую.

Действительно, термин “жесткое движение” как раз и означает, что расстояния между любыми двумя точками системы остаются неизменными. Поэтому, если мы мысленно наложим на точки системы дополнительные связи, запрещающие им двигаться друг относительно друга, то движение системы останется тем же. С частным случаем этого принципа – принципа наложения новых связей – Вы уже встречались в статике. Тогда постулировалось, что равновесие деформируемого тела не изменится, если считать тело абсолютно твердым (аксиома отвердевания).

Пусть неизменяемая СМТ совершает вращение относительно неподвижной оси Oz.

Рисунок приведем для частного случая.



Например, пусть АТТ вращается вокруг оси Oz под действием каких-то внешних (заданных) сил, причем закрепление оси вращения реализуется с помощью подпятника O и подшипника A.

Такое движение твердого тела встречается во многих технических устройствах, где используются вращающиеся роторы, валы и тому подобное. В частности, именно о таком движении речь идет в типовом расчете Д-6.

Приступаем к решению этой задачи.

На основании теоремы об изменении кинетического момента относительно неподвижной точки имеем:

$$\frac{\mathrm{d}K_{Oz}}{\mathrm{d}t} = L_{Oz}^{(e)} .$$

Но для кинетического момента системы материальных точек, совершающей жесткое движение – вращение относительно неподвижной оси – верна формула:

$$K_{Oz} = I_{zz}\,\Omega_z\,, \text{ где } I_{zz} = \sum_{\nu} m_\nu h_\nu^2 = \text{const}\,.$$

Поэтому

$$I_{zz}\frac{\mathrm{d}\Omega_z}{\mathrm{d}t} = L_{Oz}^{(e)}\,.$$

Постоянный множитель – осевой момент инерции – мы вынесли из-под оператора дифференцирования.

Поскольку $\Omega_z = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\varphi}$, где φ – угол поворота, то получаем дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно $\dot{\varphi}$:

$$(*) \qquad \boxed{I_{zz}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = L_{Oz}^{(e)}}\,.$$

Это уравнение и является дифференциальным уравнением вращения неизменяемой системы материальных точек относительно неподвижной оси.

В заголовке пункта говорилось: “дифференциальные уравнения”. Говорить можно и так, и так, потому что одно уравнение 2-го порядка всегда можно переписать в виде двух уравнений 1-го порядка.

Теперь обсудим, от чего может зависеть величина в правой части уравнения $(*)$.

Предполагается, что $L_{Oz}^{(e)} = L_{Oz}^{(e)}(\varphi, \dot{\varphi}, t)$.

Здесь вот что имеется в виду. Когда мы рассматривали дифференциальные уравнения движения системы материальных точек, то отмечали: обычно принимается допущение, что действующие на точки системы силы могут зависеть лишь от положений и скоростей точек, а также от времени. Но все положения и скорости в рассматриваемом случае можно выразить через φ и $\dot{\varphi}$.

В общем случае такое предположение представляется вполне естественным. Но давайте вспомним пример, который был приведен в начале данного пункта.

В этом примере рассматривалось абсолютно твердое тело с вертикальной осью вращения. Ось вращения была закреплена при помощи подпятника O и подшипника A.

Для данного примера отметим следующее.

В примере с твердым телом: на тело действуют, помимо прочих сил, реакции в подпятнике и подшипнике. Если связи идеальны (без трения), то эти реакции сводятся к векторам $\overline{\mathbf{R}}_O$ и $\overline{\mathbf{R}}_A$, линии действия которых пересекают ось Oz; следовательно, вклада в $L_{Oz}^{(e)}$ реакции не дают.

Поэтому в уравнения движения войдут только моменты остальных внешних сил, которые предполагаются заданными, и вновь величина $L_{Oz}^{(e)}$ будет зависеть только от φ, $\dot{\varphi}$ и t. Из уравнения $(*)$ можно найти закон вращательного движения СМТ: $\varphi = \varphi(t)$, если заданы начальные значения $\varphi(0)$ и $\dot{\varphi}(0) \equiv\equiv \Omega_z(0)$. Отметим аналогию между вращательным движением системы и поступательным ее движением вдоль какой-нибудь оси.

Аналогия: для поступательного движения центра масс СМТ вдоль оси Ox имеем:

$$m w_{Cx} = R_x^{(e)},$$

т.е.

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x_C}{\mathrm{d} t^2} = R_x^{(e)},$$

где $R_x^{(e)} = R_x^{(e)}(x_C, \dot{x}_C, t)$.

Видно, что линейная координата x_C будет аналогом для угла φ, а проекция главного вектора внешних сил $R_x^{(e)}$ – аналогом для проекции главного момента внешних сил $L_{Oz}^{(e)}$. А вот роль массы m будет играть момент инерции I_{zz}.

Вывод: момент инерции есть мера инертности системы в ее вращательном движении.

Рассмотрим теперь пример, в котором используются дифференциальные уравнения вращения твердого тела относительно неподвижной оси.

6. Задача о магнитном компасе

Составим уравнения движения стрелки компаса, пренебрегая трением в оси ее вращения Oz (ось предполагается вертикальной, а корпус компаса – неподвижным).

Иными словами, плоскость компаса у нас совпадает с плоскостью горизонта. Нам нужно, прежде всего, ввести удобную систему координат. Направим ось Oy вдоль магнитного меридиана.

Направление магнитного меридиана в данной точке земной поверхности указывает на Северный магнитный полюс. Поэтому, как мы знаем из повседневного опыта, если стрелка в начальный момент времени будет направлена в точности по оси Oy, то она будет сохранять это свое направление, если только не двигать корпус компаса. Но нас интересует более общий случай.

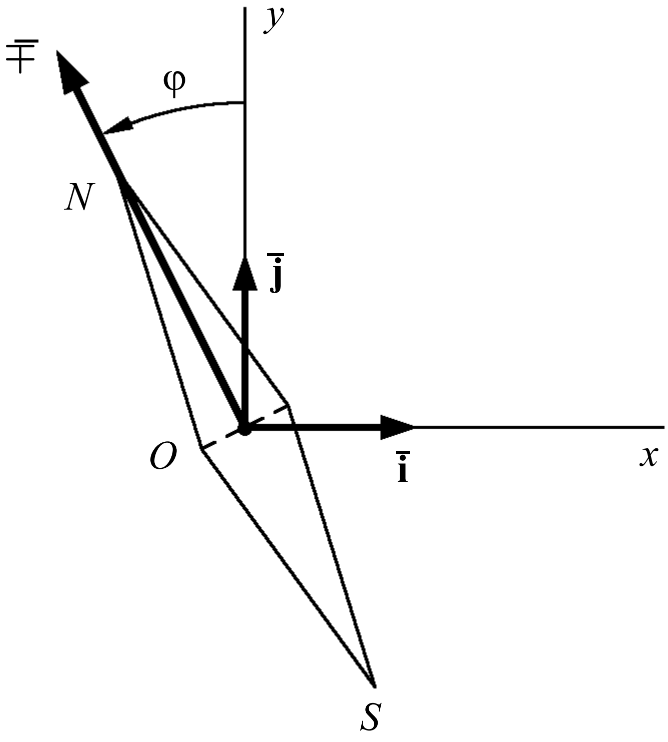
Пусть при $t = 0$ угол φ стрелки с осью Oy равнялся φ_0.

Заметьте, что мы говорим о магнитном меридиане, а не о географическом. Дело в том, что Северный магнитный полюс не совпадает с географическим полюсом, а находится в Канадском Арктическом архипелаге. Из-за того, что магнитные и географические полюса Земли не совпадают, направление магнитного меридиана отличается от направления меридиана географического. Например, в районе Москвы направление на Северный магнитный полюс отклоняется от направления на Северный географический полюс на 7° к востоку. Итак, приступим к составлению уравнений движения стрелки. Какие силы на нее действуют? Силы тяжести – не в счет, так как движение происходит в горизонтальной плоскости. Реакция связей в точке O вклада в уравнения движения точки не внесет, так как трением в оси подвеса мы пренебрегаем. Остаются только силы, действующие на стрелку со стороны магнитного поля Земли. Нам потребуется всего одна формула из курса физики.

Главный момент $\overline{\mathbf{L}}$ сил, действующих на элементарный магнит со стороны магнитного поля с вектором индукции $\overline{\mathbf{B}}$, определяется *магнитным моментом* $\mp$ данного магнита и равен:

$$\overline{\mathbf{L}} \;=\; [\, \mp, \overline{\mathbf{B}}\,]\,.$$

Магнитный момент для элементарного магнита есть постоянный вектор, характеризующий магнитные свойства данного магнита. Его обычно определяют экспериментально, внося магнит в поле с известным значением вектора магнитной индукции. Для стрелки компаса он направлен от южного конца к северному. Заметим, что индекс, указывающий полюс, при векторе $\overline{\mathbf{L}}$ не стоит. Дело в том, что главный момент сил, действующих на элементарный магнит со стороны однородного магнитного поля, есть *свободный* вектор. Итак, сделаем рисунок.



Запишем дифференциальные уравнения вращения:

$$I_{zz}\,\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \;=\; L_{Oz}^{(e)} \;\equiv\; L_z\,,$$

т.е.

$$I_{zz}\,\ddot{\varphi} \;=\; \mu_x B_y \;-\; \mu_y B_x\,.$$

Здесь I_{zz} – момент инерции стрелки относительно оси Oz.

Вычислим проекции векторов $\mp$ и $\overline{\mathbf{B}}$ на оси системы координат $Oxyz$.

$$\mp \;=\; -\mu\sin\varphi\cdot\bar{\mathbf{i}} \;+\; \mu\cos\varphi\cdot\bar{\mathbf{j}} \;+\; 0\cdot\bar{\mathbf{k}}\;.$$

А с вектором $\overline{\mathbf{B}}$ индукции магнитного поля Земли дело обстоит так. Он лежит в плоскости магнитного меридиана и направлен с юга на север, образуя определенный угол с плоскостью горизонта. Этот угол называется <u>*магнитным наклонением*</u>; оно близко к нулю в районе экватора, а в районе Москвы составляет по модулю примерно 70°.

Поэтому:

$$\overline{\mathbf{B}} \;=\; 0\cdot\bar{\mathbf{i}} \;+\; B\cos i\cdot\bar{\mathbf{j}} \;+\; B\sin i\cdot\bar{\mathbf{k}}\;,$$

где i – магнитное наклонение в данной местности.

Все ли здесь правильно? Вектор $\overline{\mathbf{B}}$ направлен вдоль силовой линии магнитного поля, а они идут от северного полюса к южному. Но знака “минус” при втором слагаемом нет, так как на самом деле Северный магнитный полюс Земли – это южный полюс “большого земного магнита”.

Именно из-за этого к нему и “притягивается” северный конец стрелки компаса.

Чтобы не было недоразумений, отметим еще, что в Северном полушарии значение наклонения i отрицательно, так что проекция вектора $\overline{\mathbf{B}}$ на ось Oz в данном случае отрицательна – за счет сомножителя $\sin i$.

Итак,

$$(*) \qquad \boxed{\;I_{zz}\,\ddot{\varphi} \;=\; -\mu B\cos i\,\sin\varphi\;}\;.$$

Это и есть искомые уравнения движения стрелки компаса.

Обозначим

$$\blacklozenge^2 \;=\; \frac{\mu B\cos i}{I_{zz}}\;;$$

тогда уравнения $(*)$ имеют тот же вид, что и уравнения колебаний математического маятника:

$$\ddot{\varphi} \;+\; \blacklozenge^2\sin\varphi \;=\; 0\;.$$

В случае малых колебаний имеем:

$$\ddot{\varphi} \;+\; \blacklozenge^2\varphi \;=\; 0\;,$$

так что решение при $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ имеет вид:

$$\varphi \;=\; \varphi_0\cos\blacklozenge t\;.$$

Таким образом, при малом начальном отклонении φ_0 стрелка компаса будет колебаться относительно положения равновесия (в котором она направлена вдоль оси Oy), а амплитуда колебаний будет равна φ_0.

В действительности трение в оси вращения стрелки, которым мы пренебрегали, все-таки имеется. Тогда колебания станут затухающими, и по прошествии некоторого времени стрелка остановится, указывая строго на север (а точнее, как мы знаем, – на Северный магнитный полюс).

Главное в наших выкладках, впрочем, – это не амплитуда, а частота колебаний. А ее мы выразили через параметры задачи.

Например, из формулы для $\blacklozenge^2$ видно, что в высоких широтах компас работает ненадежно: там магнитное наклонение велико, а $\cos i$ мал. А поэтому мала и частота колебаний, и колебаться стрелка компаса будет долго.

В рассмотрениях этого и двух предыдущих пунктов мы опирались на теорему об изменении абсолютного кинетического момента. Но в механике не менее важное значение имеет и понятие относительного кинетического момента.

Общую теорему об изменении относительного кинетического момента мы доказывать не будем. Ограничимся ее частным случаем.

7. Теорема об изменении кинетического момента относительно центра масс

Мы знаем для кинетического момента системы материальных точек относительно ее центра масс более короткое название: “собственный кинетический момент”. Поэтому основную теорему данного пункта сформулируем следующим образом.

<u>Теорема.</u> Производная по времени от собственного кинетического момента СМТ равна главному моменту внешних сил относительно центра масс.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\,\overline{\mathbf{K}}_C^{\,\text{отн}}}{\mathrm{d}t} = \overline{\mathbf{L}}_C^{(e)}}\ .$$

■ Займемся сначала производной, фигурирующей в левой части формулы. Заметим, что при вычислении собственного кинетического момента можно пользоваться как относительными, так и абсолютными скоростями; последнее для нас сейчас будет более удобным.

Воспользуемся равенством $\overline{\mathbf{K}}_C^{\,\text{отн}} = \overline{\mathbf{K}}_C$ (первое свойство собственного кинетического момента) и преобразуем левую часть:

$$\frac{\mathrm{d}\,\overline{\mathbf{K}}_C^{\,\text{отн}}}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}\,\overline{\mathbf{K}}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\nu}[\,\overline{\boldsymbol{\rho}}_\nu,\, m_\nu\overline{\mathbf{v}}_\nu\,] =$$

$$= \sum_{\nu}\Big[\frac{\mathrm{d}\,\overline{\boldsymbol{\rho}}_\nu}{\mathrm{d}t},\, m_\nu\overline{\mathbf{v}}_\nu\Big] + \sum_{\nu}\Big[\,\overline{\boldsymbol{\rho}}_\nu,\, m_\nu\frac{\mathrm{d}\,\overline{\mathbf{v}}_\nu}{\mathrm{d}t}\Big]\,.$$

Но

$$\frac{\mathrm{d}\,\overline{\boldsymbol{\rho}}_\nu}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\,\overline{\mathbf{r}}_\nu - \overline{\mathbf{r}}_C\,) = \overline{\mathbf{v}}_\nu - \overline{\mathbf{v}}_C\,,$$

так что первое слагаемое равно

$$\sum_\nu \underbrace{[\,\overline{\mathbf{v}}_\nu,\, m_\nu\overline{\mathbf{v}}_\nu\,]}_{0} - \sum_\nu [\,\overline{\mathbf{v}}_C,\, m_\nu\overline{\mathbf{v}}_\nu\,] = -\,[\,\overline{\mathbf{v}}_C,\, \underbrace{\sum_\nu m_\nu\overline{\mathbf{v}}_\nu}_{m\overline{\mathbf{v}}_C}\,] = 0\,.$$

В этих выкладках мы учли, что второй сомножитель последнего векторного произведения есть количество движения системы материальных точек, и, следовательно, совпадает с произведением массы на скорость центра масс.

Итак,

$$\frac{\mathrm{d}\,\overline{\mathbf{K}}_C^{\,\text{отн}}}{\mathrm{d}t} = \sum_\nu [\,\overline{\boldsymbol{\rho}}_\nu,\, m_\nu\overline{\mathbf{w}}_\nu\,]\,.$$

А далее выкладки практически дословно повторяют те, которые мы проделывали при доказательстве теоремы об изменении кинетического момента относительно неподвижной точки.

Уравнения движения точек СМТ:

$$m_\nu\overline{\mathbf{w}}_\nu = \overline{\mathbf{F}}_\nu^{(e)} + \overline{\mathbf{F}}_\nu^{(i)}\,; \qquad \nu = 1, \ldots, n\,.$$

Умножим каждое уравнение векторно на $\overline{\boldsymbol{\rho}}_\nu$ и сложим их почленно:

$$\underbrace{\sum_\nu [\,\overline{\boldsymbol{\rho}}_\nu,\, m_\nu\overline{\mathbf{w}}_\nu\,]}_{\frac{\mathrm{d}\overline{\mathbf{K}}_C^{\,\text{отн}}}{\mathrm{d}t}} = \overline{\mathbf{L}}_C^{(e)} + \underbrace{\overline{\mathbf{L}}_C^{(i)}}_{0}\,.$$

■

Запишем следствия из данной теоремы. Они вполне аналогичны следствиям из теоремы об изменении кинетического момента относительно неподвижной точки.

<u>Следствие 1.</u> Если на данном отрезке времени $\overline{\mathbf{L}}_C^{(e)} \equiv 0$, то $\overline{\mathbf{K}}_C^{\,\text{отн}} = \text{const}$.

Иными словами, если главный момент внешних сил тождественно равен нулю, то вектор кинетического момента остается постоянным по величине и направлению.

Действительно, $\overline{\mathbf{L}}_C^{(e)} = 0$ □ $\dfrac{\mathrm{d}\,\overline{\mathbf{K}}_C^{\,\text{отн}}}{\mathrm{d}t} = 0\,.$

Если последнее равенство на данном отрезке времени выполняется тождественно, то тогда сам вектор $\overline{\mathbf{K}}_C^{\,\text{отн}}$ остается постоянным.

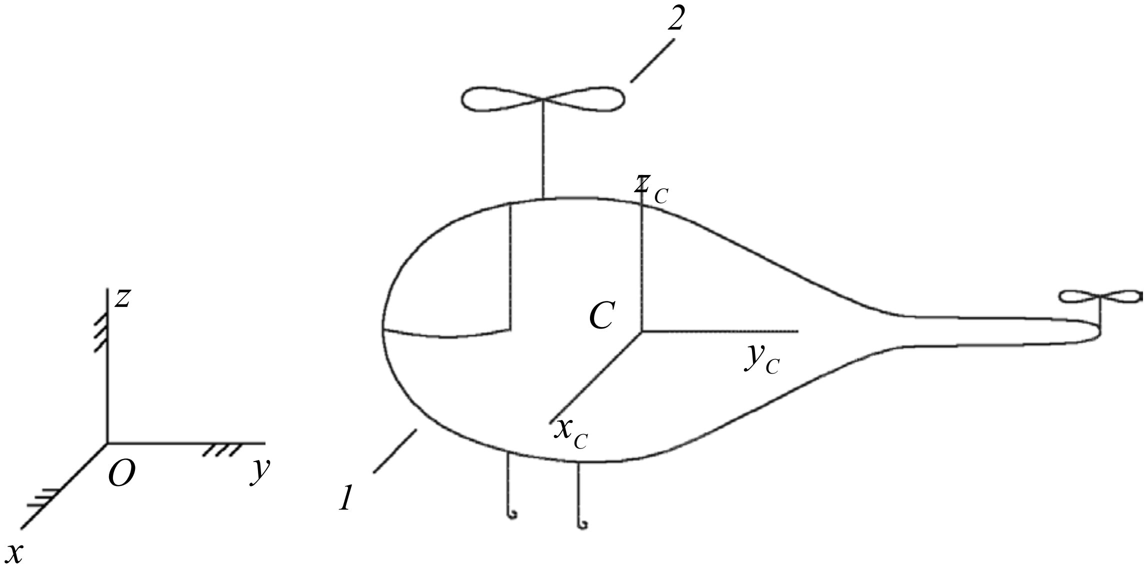
<u>Следствие 2.</u> Если на данном отрезке времени $L_{Cz}^{(e)} \equiv 0$, то $K_{Cz}^{\text{отн}} = \text{const}$.

Действительно, $\dfrac{\mathrm{d}K_{Cz}^{\text{отн}}}{\mathrm{d}t} = L_{Cz}^{(e)}$ и $L_{Cz}^{(e)} = 0 \quad \square \quad \dfrac{\mathrm{d}K_{Cz}^{\text{отн}}}{\mathrm{d}t} = 0$.

Эти два следствия представляют собой законы сохранения кинетического момента системы материальных точек относительно центра масс.

Перейдем к примерам.

<u>Пример 1.</u> Вертолет.



Пусть $I_{zz}^{(1)}$ – момент инерции корпуса вертолета относительно кениговой оси z_C; $I_{zz}^{(2)}$ – момент инерции винта относительно той же оси; $\overline{\square}$ – угловая скорость корпуса; $\overline{\_}$ – угловая скорость винта *<u>относительно</u>* корпуса.

Мы предполагаем сейчас, что оба эти вектора направлены вдоль оси Oz, т.е. вдоль оси Cz_C.

Собственный кинетический момент всей системы в проекции на ось z:

$$K_{Cz}^{\text{отн}} = K_{Cz}^{\text{отн (1)}} + K_{Cz}^{\text{отн (2)}} = I_{zz}^{(1)}\,\Omega_z + I_{zz}^{(2)}\underbrace{(\Omega_z + \blacklozenge_z)}_{\substack{\text{абсолютная угловая} \\ \text{скорость винта}}}$$

Мы предполагаем, что на вертолет не действуют внешние силы, кроме сил тяжести и – когда вертолет взлетает – подъемной силы, т.е. главного вектора аэродинамических сил.

Они приложены к центру масс и вклада в главный момент внешних сил не дают.

Так как $L_{Cz}^{(e)} \equiv 0$, то в силу теоремы об изменении кинетического момента относительно центра масс

$$\frac{\mathrm{d}K_{Cz}^{\text{отн}}}{\mathrm{d}t} = L_{Cz}^{(e)} \equiv 0 \quad \square \quad K_{Cz}^{\text{отн}} = \text{const} .$$

В момент старта $\Omega_z = \blacklozenge_z = 0 \quad \square \quad K_{Cz}^{\text{отн}} \equiv 0 \ \ \forall t .$

Отсюда

$$I_{zz}^{(1)}\,\Omega_z + I_{zz}^{(2)}\,(\Omega_z + \blacklozenge_z) = 0 ,$$

так что

(∗)
$$\boxed{\Omega_z = -\frac{I_{zz}^{(2)}}{I_{zz}^{(1)} + I_{zz}^{(2)}}\,\blacklozenge_z} \;.$$

Отсюда видно, что ненулевой угловой скорости винта соответствует и ненулевая угловая скорость корпуса. Правда, она намного меньше угловой скорости винта: ведь момент инерции у корпуса намного больше. Но зато угловая скорость винта велика, а потому и угловая скорость корпуса может оказаться значительной.

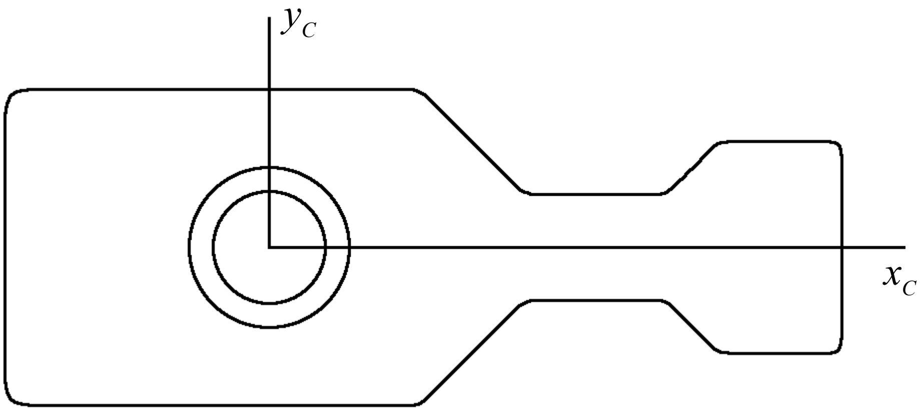
Хорошо это или плохо? Плохо, разумеется. Корпус все время разворачивается в сторону, противоположную вращению винта.

Мера противодействия этому – добавить небольшой винт на хвосте.

Или: сделать два одинаковых соосных винта, вращающихся в противоположные стороны.

А вот – другой пример, в котором формула (∗) уже работает на благо, а не во вред.

<u>Пример 2.</u> Для управления ориентацией станций “Салют - 6, 7” использовались маховики диаметром 70 см. В силу (∗) для изменения угловой скорости корпуса станции достаточно было изменить угловую скорость маховика.



Все это работало вполне удовлетворительно. Выявился лишь один недостаток: маховики при вращении создавали шум, мешавший спать космонавтам. Поэтому управление ориентацией комплекса "Мир" или – сейчас – Международной космической станции обеспечивалось уже другой системой: с помощью силовых гироскопических стабилизаторов. До сих пор мы занимались вопросами динамики системы материальных точек. Теперь мы переходим непосредственно к вопросам динамики абсолютно твердого тела.

§ 4. Геометрия масс

1. Модель абсолютно твердого тела в динамике

С понятием абсолютно твердого тела Вы знакомы из кинематики. Мы же сейчас будем рассматривать динамические свойства абсолютно твердого тела.

Мы уже не раз на полуформальной основе применяли результаты, полученные в динамике системы материальных точек, к абсолютно твердому телу. Сейчас мы разберем аккуратно, почему так можно делать.

Материальное тело – множество B точек, которое *непрерывным* образом заполняет некоторую ограниченную область в пространстве и на котором задана скалярная функция γ – **плотность**.

Данная функция обычно предполагается непрерывной (или, по крайней мере, кусочно непрерывной).

Через плотность определяется масса. Делается это так.

Выделим в теле B **элементарный материальный объем** – множество точек, занимающих достаточно малый объем $\mathrm{d}V$ в пространстве. Тогда произведение $\mathrm{d}m = \gamma\,\mathrm{d}V$ есть **масса** элементарного материального объема.

Оговорка "достаточно малый" применительно к объему $\mathrm{d}V$ в пространстве делается для того, чтобы можно было пренебрегать различием в значениях плотности γ для разных точек элементарного материального объема.

Фактически – что и отражено в обозначениях – мы работаем с дифференциалами массы и объема. В этом случае, как это и принято в математическим анализе, можно пренебрегать бесконечно малыми величинами более высокого порядка малости.

Очень часть плотность обозначают буквой ϱ. Мы этого делать не будем, чтобы не было путаницы с радиусом инерции ϱ.

Замечание. В механике встречаются и *предельные случаи*, когда точки тела заполняют не область пространства, а поверхность или линию (тонкие диски, кольца, стержни). Сейчас эти случаи не рассматриваются.

Строго говоря, речь идет о бесконечно тонких дисках, кольцах, стержнях. Здесь уже надо рассматривать не объемную, а поверхностную или линейную плотность. Динамические свойства таких материальных тел могут быть определены предельным переходом, когда толщина обычного материального тела стремится к нулю.

В связи с записанным определением материального тела используют следующую терминологию.

Терминология:

1) **телесные точки** – точки, образующие данное материальное тело;

2) **место тела** – область пространства, занимаемая данным телом (с течением времени может изменяться);

3) **положение** телесной точки – точка M пространства, с которой в данный момент совпадает телесная точка M^*;

4) **конфигурация** тела – взаимно однозначное соответствие между телесными точками и их положениями.

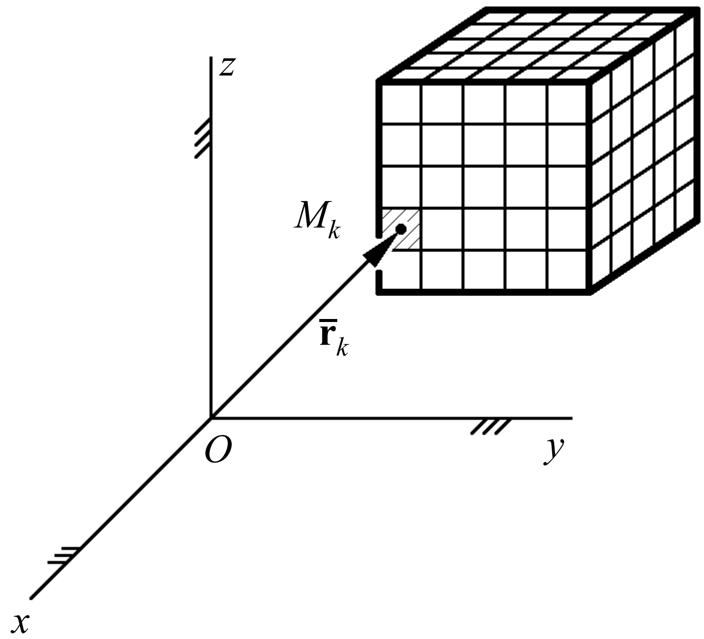
Телесные точки нужно отличать от их положений в пространстве. Это различие отражено в обозначениях: точки пространства и телесные точки мы будем обозначать одинаковыми буквами, но в случае, когда речь идет о телесной точке, мы при данной букве будем ставить звездочку.

С течением времени положение телесной точки, вообще говоря, меняется (в этом и заключается движение точки). Поэтому могут изменяться и конфигурация материального тела, и место этого тела в пространстве. Строго говоря, лучше говорить о положениях точки и местах тел не в пространстве, а в той или иной системе отсчета. Но мы сейчас предполагаем, что какая-то система отсчета фиксирована и принимается за условно неподвижную. Обратите внимание: телесная точка – это отнюдь не материальная точка. Ведь материальная точка по определению обладает конечной массой, а даже в сколь угодно малом элементарном материальном объеме число телесных точек бесконечно велико. Ясно поэтому, что динамика материального тела не может быть непосредственно выведена из динамики системы материальных точек. Нужны новые идеи, новые независимые принципы.

Принцип материальных частиц (Эйлер, 1750 г.): Всякое материальное тело можно с любой степенью точности рассматривать как систему материальных точек, если мысленно разбить его на достаточно малые частицы (элементарные материальные объемы) и считать каждую из них материальной точкой.

Это – не дословная цитата из Эйлера, но достаточно точное выражение его подхода. Эйлер отчетливо понимал, что это – новая аксиома, новый принцип механики. Ни из каких других известных аксиом он не вытекает. Это отражено даже в самом названии работы, где этот принцип был сформулирован. 1750 г.: “Открытие нового принципа механики”. Что это значит: мы считаем материальную частицу материальной точкой? Запишем:

Для элементарных материальных объемов выполняются аксиомы динамики: аксиома массы, три закона Ньютона, закон независимости действия сил, принцип освобождаемости от связей.



Так,

$$\mathrm{d}m \cdot \overline{\mathbf{w}} \ = \ \mathrm{d}\overline{\mathbf{F}} \ ,$$

где $\overline{\mathbf{w}}$ – ускорение материальной частицы, $\mathrm{d}\overline{\mathbf{F}}$ – главный вектор действующих на нее сил.

Это мы записали для элементарного материального объема II закон Ньютона.

Применим к нему теперь аксиому массы.

Из аксиомы массы следует, что $\mathrm{d}m \equiv \gamma\,\mathrm{d}V = \mathrm{const}$ и $\mathrm{d}m > 0$.

Это – важный для механики факт, ведь в общем случае деформируемого материального тела и плотность, и объем $\mathrm{d}V$ могут меняться с течением времени.

Видно также, что плотность γ почти всюду положительна.

Все, что мы говорили о материальных телах до сих пор, относится к любым материальным телам – и к абсолютно твердым, и к деформируемым.

Но в заголовке данного пункта стояло: “Модель абсолютно твердого тела в динамике”. Запишем:

Абсолютно твердое тело (АТТ) – *материальное* тело, расстояния между любыми двумя точками которого остаются постоянными, каким бы воздействиям это тело не подвергалось.

По существу, это определение – такое же, как в кинематике. Отличие – в том, что в динамике рассматриваются именно материальные абсолютно твердые тела, каждый элементарный материальный объем которых подчиняется аксиомам динамики точки.

Принцип материальных частиц утверждает, что *неизменяемая* система материальных точек может служить моделью АТТ. В свою очередь, АТТ служит моделью материальных тел, деформацией которых можно пренебречь.

Впрочем, в этом и следующем пунктах все результаты применимы к произвольным материальным телам.

Запишем теперь очевидные следствия из сформулированного в данном пункте принципа.

2. Следствия из принципа материальных частиц Эйлера

Следствие 1. Если какое-либо равенство выполняется для моделирующей системы материальных частиц независимо от разбиения, то оно справедливо и для материального тела.

Следствие 2. Если какое-либо равенство *приближенно* выполняется для моделирующей системы материальных частиц и погрешность при измельчении разбиения стремится к нулю, то это равенство для материального тела выполняется точно.

Например, для массы тела B имеем:

$$m \;=\; \sum_k m_k \;\approx\; \sum_k \gamma_k \, \mathrm{d}V_k \;\approx\; \int_V \gamma \, \mathrm{d}V\,.$$

Здесь мы воспользовались тем, что последняя сумма есть интегральная сумма для записанного интеграла. Интеграл здесь фактически – тройной, но в математике все чаще используют один символ интеграла, а записанная под ним область интегрирования как раз и определяет, в каком смысле понимается этот интеграл.

Но интегральные суммы при измельчении разбиения в пределе стремятся к значению соответствующего интеграла. А погрешность в значении массы материальной частицы, связанная с выбором телесной точки, в которой берется плотность, есть величина более высокого порядка малости по сравнению с массой частицы.

Отсюда:

$$m \;=\; \int_V \gamma \, \mathrm{d}V\,.$$

Равенство здесь в силу 2-го следствия из принципа материальных частиц Эйлера выполняется точно.

В связи с приведенной формулой запишем одно определение.

Материальное тело называется **однородным** (в данной конфигурации), если во всех точках занимаемой телом области пространства плотность одинакова. Для АТТ о конфигурации можно не упоминать: если оно однородно в какой-либо конфигурации, то оно однородно и в любой другой.

В рассматриваемом случае γ можно вынести из-под знака интеграла. Поэтому формула упрощается.

Для однородного тела:

$$m = \gamma V .$$

Поэтому и плотность однородного тела можно определять как отношение массы тела к его объему.

По аналогии с общей формулой для массы и другие величины, определяемые в динамике системы материальных точек как суммы величин, вычисленных для отдельных точек, записываются в динамике материальных тел как интегралы.

Выпишем еще несколько получаемых таким образом равенств (уже не упоминая о соответствующих интегральных суммах).

Количество движения тела B:

$$\overline{\mathbf{Q}} = \int_V \overline{\mathbf{v}}\, \gamma \, \mathrm{d}V .$$

Под интегралом здесь стоит вектор скорости телесной точки; в каждой точке он – свой. Этот вектор умножается на массу $\gamma\, \mathrm{d}V$ элементарного материального объема, так что в результате как раз и получается количество движения данного материального объема.

Радиус-вектор центра масс тела B:

$$\overline{\mathbf{r}}_C = \frac{1}{m} \int_V \overline{\mathbf{r}}\, \gamma \, \mathrm{d}V .$$

Вектор $\overline{\mathbf{r}}_C$ здесь – радиус-вектор положения телесной точки.

Момент инерции тела B относительно оси Oz:

$$I_{zz} = \int_V (x^2 + y^2)\, \gamma \, \mathrm{d}V ;$$

здесь x и y – координаты текущего положения телесной точки.

Для сравнения запишем формулу для момента инерции системы материальных точек относительно той же оси:

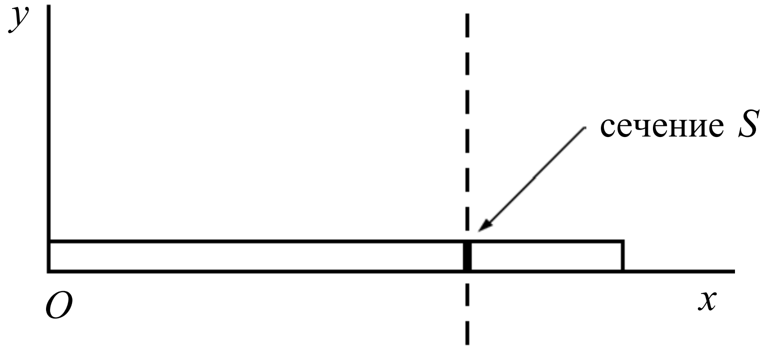
Для СМТ:

$$I_{zz} = \sum_{\nu} m_{\nu} \, (x_{\nu}^2 + y_{\nu}^2) .$$

Надеюсь, что приведенных примеров достаточно для того, чтобы Вы в будущем могли легко переходить от представления величины в виде суммы к ее интегральному представлению, и обратно.

Рассмотрим пример использования полученной нами формулы для момента инерции тела.

Пример. Вычислим момент инерции однородного тонкого стержня длины l относительно оси Oz, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец.



На рисунке изображены оси Ox и Oy, перпендикулярные оси Oz.

Заметьте, что речь фактически идет о бесконечно тонком стержне. Это – один из тех предельных случаев, о которых мы упоминали в предыдущем пункте, когда обсуждали определение материального тела.

Нарисован же стержень конечной толщины. Мы проводим рассуждения для него, но попутно делаем те упрощения, которые связаны с возможностью пренебречь толщиной стержня.

$$I_{zz} = \int_V x^2\,\gamma\,\mathrm{d}V + \underbrace{\int_V y^2\,\gamma\,\mathrm{d}V}_{\substack{0 \text{ для бесконечно} \\ \text{тонкого стержня}}} = \int_0^l \left(\int_S x^2\,\gamma\,\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}x =$$

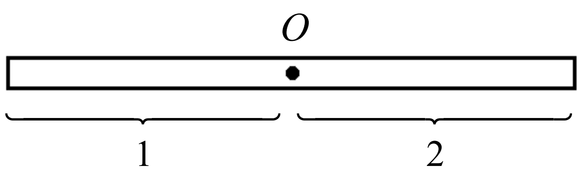
$$= \int_0^l x^2\,\underbrace{\gamma\,S}_{\frac{m}{V}\frac{V}{l}}\,\mathrm{d}x = \int_0^l x^2\,\frac{m}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{m}{l}\cdot\frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}\,.$$

Итак,

$$\boxed{I_{zz} = \frac{ml^2}{3}}\,.$$

Рассмотрим сразу же и другой случай, когда ось проходит через середину стержня.

Если ось Oz проходит через середину стержня, то момент инерции можно найти как сумму моментов инерции стержней половинной длины:



$$I_{zz} = I_{zz}^{(1)} + I_{zz}^{(2)} = 2\cdot\frac{(m/2)\ (l/2)^2}{3} = 2\cdot\frac{ml^2}{24}\,,$$

т.е.

$$\boxed{I_{zz} = \frac{ml^2}{12}}\ .$$

Обе эти формулы очень часто используются при решении задач динамики.

Сейчас наша очередная цель – получить выражение для рператора инерции абсолютно твердого тела и исследовать его свойства. Для этого нам понадобятся некоторые сведения из математики.

3. Линейные операторы

Пусть X – векторное пространство. Оператор $\bar{\mathbf{A}} : X \to X$ называется **линейным оператором** на пространстве X, если:

1) $\bar{\mathbf{A}}\,(\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}) = \bar{\mathbf{A}}\,\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{A}}\,\bar{\mathbf{v}} \qquad \forall\ \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}} \in X$;

2) $\bar{\mathbf{A}}\,(\alpha\,\bar{\mathbf{u}}) = \alpha\,\bar{\mathbf{A}}\,\bar{\mathbf{u}} \qquad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

Заметьте, что $\bar{\mathbf{A}}$ – это отображение или, говоря иными словами, функция. Аргументом ее является вектор, при этом аргумент в скобки обычно не берется, и называется тот новый вектор, который линейный оператор сопоставляет вектору $\bar{\mathbf{u}}$, просто: произведением оператора $\bar{\mathbf{A}}$ на вектор $\bar{\mathbf{u}}$.

Над обозначением линейного оператора ставится черта – как и над обозначением вектора. Это – вполне естественно: ведь оператор – это функция, значениями которой являются векторы.

Определение линейного оператора было впервые дано Дж.Пеáно в 1888 г.

Джузеппе Пеáно (1858 – 1932) – итальянский математик.

Он, кстати, много занимался математической логикой и основаниями математики. Именно он ввел в математику такие знаки, как $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$.

Если в пространстве X введен базис, то оператор может быть задан при помощи набора чисел.

Если $\{\,\bar{\mathbf{e}}_j\,\}$ – базис в пространстве X, то коэффициенты a_{ij} в разложении

$$\boxed{\bar{\mathbf{A}}\,\bar{\mathbf{e}}_j = \sum_i a_{ij}\,\bar{\mathbf{e}}_i}$$

называются **компонентами** оператора $\bar{\mathbf{A}}$, а матрица A из этих компонент – **матрицей** оператора $\bar{\mathbf{A}}$.

Что мы здесь записали? Вектор $\bar{\mathbf{e}}_j$ базиса мы умножили на оператор $\bar{\mathbf{A}}$, а результат снова разложили по базисным векторам.

Тогда для вектора $\bar{\mathbf{u}} = \sum_j u_j \bar{\mathbf{e}}_j$ имеем:

$$\bar{\mathbf{A}}\,\bar{\mathbf{u}} = \sum_j u_j \bar{\mathbf{A}}\,\bar{\mathbf{e}}_j = \sum_j u_j \left(\sum_i a_{ij} \bar{\mathbf{e}}_i\right) = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} u_j\right) \bar{\mathbf{e}}_i \,.$$

Линейный оператор, будучи функцией вектора, определен полностью, если известно значение этой функции для любого значения векторного аргумента. Но только что мы установили, что значение данной функции однозначно определяется, если только даны элементы матрицы оператора.

Таким образом, не только оператор задает матрицу, но и матрица позволяет задать оператор.

Вывод: каждому линейному оператору соответствует вполне определенная матрица и наоборот, но эта матрица зависит от выбора базисов.

Рассмотрим пример.

Пусть $\bar{\mathbf{i}}$, $\bar{\mathbf{j}}$, $\bar{\mathbf{k}}$ – единичные векторы системы $Oxyz$ в “обычном” трехмерном пространстве, а $\bar{\mathbf{A}}$ – линейный оператор на нем.

Тогда компоненты вектора

$$\bar{\mathbf{A}}\,\bar{\mathbf{i}} = a_{11}\bar{\mathbf{i}} + a_{21}\bar{\mathbf{j}} + a_{31}\bar{\mathbf{k}}$$

образуют первый столбец матрицы оператора $\bar{\mathbf{A}}$, и т.д.

$$A^{Oxyz} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} .$$

Здесь в обозначении матрицы мы явно указали, относительно какой системы координат вычисляются компоненты линейного оператора.

Итак, в выбранной системе координат операторам соответствуют матрицы.

Аналогия: векторам соответствуют <u>*столбцы*</u>.

Отметим еще такой факт (который нетрудно проверить):

Действия над операторами переходят в действия над матрицами: $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{A}}\,\bar{\mathbf{B}}$ □ $C = AB$, и т.п.

Значит, если какой-нибудь факт не зависит от выбора базиса, то лучше работать с операторами и векторами (это проще, меньше частностей приходится принимать во внимание). Иначе – работаем с матрицами и столбцами.

Теперь заметим, что в “обычном” трехмерном векторном пространстве задана, как говорят математики, *евклидова структура*: определена операция скалярного умножения векторов. Такое предположение мы сделаем и в общем случае.

Пусть пространство X – *евклидово* (определена операция скалярного умножения), а базис $\{ \bar{\mathbf{e}}_j \}$ – *ортонормированный*.

Помните, что означает данный термин? Векторы базиса попарно ортогональны, и каждый из них имеет единичную длину.

Тогда справедлива весьма удобная формула для компонент линейного оператора. Запишем:

В этом случае верна формула

$$(*) \qquad \boxed{a_{ij} = (\bar{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{e}}_j)} \; .$$

Доказать ее, опираясь на ортонормированность базиса, совсем несложно. Но задерживаться на этом мы не будем.

Теперь нам потребуется одна важная операция, применяемая к линейным операторам на евклидовом пространстве.

Рассмотрим более общее выражение:

$$\Phi (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{v}}) \; .$$

Здесь записана функция двух аргументов: $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$ – это произвольные векторы, а не обязательно базисные. Значения этой функции Φ – действительные числа.

Функция Φ такого вида – <u>билинейный функционал</u>, определяемый линейным оператором $\bar{\mathbf{A}}$.

Можно просто запомнить данный термин. А смысл этих слов – такой. Билинейность – это линейность по каждому из двух аргументов.

Билинейность:

$$\Phi (\bar{\mathbf{u}}_1 + \bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{v}}) = \Phi (\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{v}}) + \Phi (\bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{v}}) ,$$

$$\Phi (\alpha \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = \alpha \Phi (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) ;$$

$$\Phi (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}_1 + \bar{\mathbf{v}}_2) = \Phi (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}_1) + \Phi (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}_2) ,$$

$$\Phi (\bar{\mathbf{u}}, \alpha \bar{\mathbf{v}}) = \alpha \Phi (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) .$$

Словом же “функционал” обозначаются функции, у которых аргументы – векторы, а значения – скаляры.

Итак, билинейный функционал однозначно определяется линейным оператором $\bar{\mathbf{A}}$. Но верно и обратное.

В силу (*) компоненты оператора $\bar{\mathbf{A}}$ – это значения соответствующего ему билинейного функционала на базисных векторах:

$$a_{ij} = \Phi (\bar{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{e}}_j) .$$

Таким образом, линейный оператор и соответствующий ему билинейный функционал однозначно определяют друг друга.

Сейчас у нас все готово, чтобы дать определение одной важной операции, которая применима к линейным операторам, заданным на евклидовом векторном пространстве.

4. Транспонирование линейных операторов

Рассмотрим линейный оператор $\overline{\mathbf{C}} : X \to X$ и соответствующий ему билинейный функционал:

$$\Phi\,(\,\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}\,) \;=\; (\,\bar{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{C}}\,\bar{\mathbf{v}}\,)\;.$$

Что будет, если оператор поставить не при втором, а при первом сомножителе? Мы получим, вообще говоря, другой билинейный функционал, и по принятым правилам он будет соответствовать уже другому линейному оператору.

Оператор $\overline{\mathbf{C}}^{\,\mathrm{T}} : X \to X$ – <u>транспонированный оператор</u> для оператора $\overline{\mathbf{C}}$, если

$$(\,\bar{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{C}}^{\,\mathrm{T}}\bar{\mathbf{v}}\,) \;=\; (\,\overline{\mathbf{C}}\,\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}\,) \qquad \forall\; \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}} \;\Box\; X\,.$$

Для билинейных функционалов:

$$\Psi\,(\,\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}\,) \;\equiv\; (\,\bar{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{C}}^{\,\mathrm{T}}\bar{\mathbf{v}}\,) \;=\; (\,\bar{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{C}}\,\bar{\mathbf{u}}\,) \;=\; \Phi\,(\,\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{u}}\,)\,.$$

Иначе говоря, транспонированному оператору отвечает билинейный функционал, получающийся из исходного при перестановке аргументов.

Данное определение, возможно, кажется достаточно “хитрым”. Но в компонентах все просто:

$$c^{\mathrm{T}}_{ij} \;=\; (\,\bar{\mathbf{e}}_i, \overline{\mathbf{C}}^{\,\mathrm{T}}\bar{\mathbf{e}}_j\,) \;=\; (\,\overline{\mathbf{C}}\,\bar{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{e}}_j\,) \;=\; (\,\bar{\mathbf{e}}_j, \overline{\mathbf{C}}\,\bar{\mathbf{e}}_i\,) \;=\; c_{ji}\;.$$

Значит:

$$(*) \qquad \boxed{\;c^{\mathrm{T}}_{ij} \;=\; c_{ji}\;}\;.$$

Слева стоят компоненты оператора $\overline{\mathbf{C}}^{\,\mathrm{T}}$, т.е. элементы его матрицы C^{T}, а справа – компоненты исходного оператора $\overline{\mathbf{C}}$, т.е. элементы его матрицы C. Но индексы стоят в различном порядке.

Словами это выразить можно так.

Транспонировать матрицу – поменять строки и столбцы местами.

Еще раз поменяем $\;\Box\;\; (\,C^{\mathrm{T}}\,)^{\mathrm{T}} \;=\; C$; значит, и $(\,\overline{\mathbf{C}}^{\,\mathrm{T}}\,)^{\mathrm{T}} \;=\; \overline{\mathbf{C}}$.

Последнее вытекает из наличия взаимно однозначного соответствия между операторами и матрицами.

Только что мы обосновали важное свойство операции транспонирования: ее повторное применение возвращает нас к исходному оператору.

Далее:

Из формулы (∗) для компонент транспонированного оператора следует, что для любого линейного оператора транспонированный оператор существует и единственен.

В самом деле, по матрице данного оператора мы без труда строим транспонированную матрицу; соответствующий ей оператор и будет искомым.

А из нашего первоначального определения существование и единственность непосредственно увидеть трудно. Однако работать с этим определением просто.

Чтобы попрактиковаться в работе с данным определением, посмотрим, как можно протранспонировать произведение операторов.

$$\overline{\mathbf{C}} = \overline{\mathbf{C}}_1 \overline{\mathbf{C}}_2 \quad \Rightarrow \quad (\overline{\mathbf{C}}\,\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = (\overline{\mathbf{C}}_1 \overline{\mathbf{C}}_2 \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) =$$

$$= (\overline{\mathbf{C}}_2 \bar{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{C}}_1^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{v}}) = (\bar{\mathbf{u}}, \underbrace{\overline{\mathbf{C}}_2^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{C}}_1^{\mathrm{T}}}_{\overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{T}}} \bar{\mathbf{v}}) .$$

Итак,

$$\boxed{(\overline{\mathbf{C}}_1 \overline{\mathbf{C}}_2)^{\mathrm{T}} = \overline{\mathbf{C}}_2^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{C}}_1^{\mathrm{T}}} \; .$$

Разумеется, по тому же правилу транспонируется и произведение матриц.

Опираясь на определение транспонированного оператора, рассмотрим важные классы линейных операторов.

Оператор $\overline{\mathbf{S}} : X \rightarrow X$ – **<u>симметричный</u>**, если

$$\boxed{(\bar{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{S}}\,\bar{\mathbf{v}}) = (\overline{\mathbf{S}}\,\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})} \qquad \forall\, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}} \in X .$$

Итак, симметричный оператор можно перебросить с одного сомножителя скалярного произведения на другой без транспонирования.

В общем же случае

$$(\overline{\mathbf{S}}\,\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = (\bar{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{v}}) .$$

С учетом этого определение симметричного оператора можно записать иначе.

Иная форма определения:

$$\overline{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}} = \overline{\mathbf{S}} .$$

В компонентах:

$$s^{\mathrm{T}}_{ij} \equiv s_{ji} = s_{ij} .$$

Таким образом, применительно к матрицам свойство симметричности можно выразить так: симметричная матрица не меняется, если поменять ее строки и столбцы местами.

А теперь рассмотрим другой важный класс линейных операторов.

Оператор $\bar{\mathbf{A}} : X \to X$ – **<u>антисимметричный</u>**, если

$$\boxed{(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{v}}) = -(\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})} \qquad \forall\, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}} \in X .$$

Итак, при перебрасывании антисимметричного оператора с одного сомножителя скалярного произведения на другой появляется знак “минус”.

Стало быть, в этом случае роль транспонированного оператора будет играть исходный оператор, но с измененным знаком.

Иная форма определения:

$$\bar{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} = -\bar{\mathbf{A}} .$$

В компонентах:

$$a_{ij} = -a_{ji} .$$

Обратимся теперь к механике и посмотрим, где именно в механике мы фактически сталкиваемся с антисимметричными линейными операторами.

5. Оператор момента

Прежде чем дать определение оператора момента, рассмотрим важное свойство, специфичное для антисимметричных операторов в трехмерном пространстве.

<u>Теорема.</u> В *<u>трехмерном</u>* евклидовом векторном пространстве существует взаимно однозначное соответствие между векторами и антисимметричными операторами: $\bar{\mathbf{a}} \leftrightarrow \bar{\mathbf{A}} \equiv \bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} = -\bar{\mathbf{A}}$. При этом:

галочка

$$\forall\, \bar{\mathbf{u}} \quad \boxed{\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{u}} = [\,\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{u}}\,]} \; .$$

■ Оператор $\bar{\mathbf{A}}$ по вектору $\bar{\mathbf{a}}$ находится однозначно. Проверим, что он – линейный и антисимметричный.

Линейность:

$$\bar{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}) = [\,\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}\,] =$$

$$= [\,\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{u}}\,] + [\,\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{v}}\,] = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{v}} ,$$

$$\bar{\mathbf{A}}(\alpha\bar{\mathbf{u}}) = [\,\bar{\mathbf{a}}, \alpha\bar{\mathbf{u}}\,] = \alpha[\,\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{u}}\,] = \alpha\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{u}} .$$

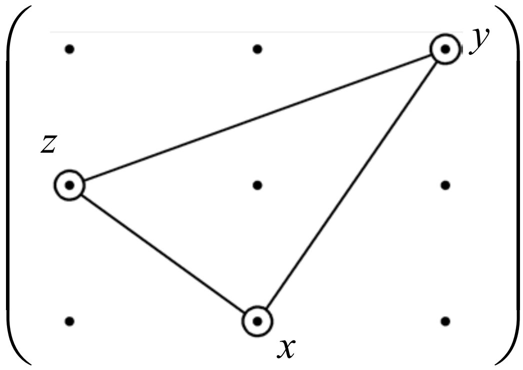
Антисимметричность: если $\bar{\mathbf{i}}$, $\bar{\mathbf{j}}$, $\bar{\mathbf{k}}$ – векторы <u>*правого*</u> ортонормированного базиса, то

$$\bar{\mathbf{v}} = \underbrace{[\,\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{u}}\,]}_{\bar{\mathbf{A}}\,\bar{\mathbf{u}}} \quad □ \quad \bar{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} \quad □$$

$$□ \quad \begin{cases} v_x = a_y u_z - a_z u_y \\ v_y = a_z u_x - a_x u_z \\ v_z = a_x u_y - a_y u_x \end{cases} \quad □ \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^{\mathrm{T}} = -A\,.$$

Только что мы получили выражение для матрицы антисимметричного оператора, который ставится в соответствие вектору $\bar{\mathbf{a}}$. Вот – схема, по которой удобно строить эту матрицу:

Треугольник: 

.

Теперь мы доказали все утверждения теоремы, кроме того, что данное соответствие является взаимно однозначным. Но это – совсем просто.

Взаимная однозначность: всякий оператор $\bar{\mathbf{A}} = -\bar{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}$ имеет матрицу A указанного вида. Поэтому вектор $\bar{\mathbf{a}}$ по $\bar{\mathbf{A}}$ находится однозначно. ■

<u>**Следствие 1.**</u> $\bar{\mathbf{a}}\,\bar{\mathbf{u}}$ □ $\bar{\mathbf{u}}$, так как $[\,\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{u}}\,]$ □ $\bar{\mathbf{u}}$.

Действительно, векторное произведение перпендикулярно каждому из сомножителей.

<u>**Следствие 2.**</u> $\bar{\mathbf{a}}\,\bar{\mathbf{u}} = 0$ □ $\bar{\mathbf{u}}$ □ $\bar{\mathbf{a}}$, так как $[\,\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{u}}\,] = 0$ □ □ $\bar{\mathbf{u}}$ □ $\bar{\mathbf{a}}$.

Действительно, векторное произведение обращается в нуль тогда и только тогда, когда векторы параллельны.

Заметим, что установленное соответствие между векторами и антисимметричными операторами дает нам еще один способ вычислять векторное произведение. Достаточно умножить столбец компонент второго вектора на матрицу A, построенную из компонент первого вектора по “правилу треугольника”.

При числовых выкладках, производимых “на руках”, этот способ не лучше обычного способа вычисления векторного произведения. Но при буквенных выкладках или применительно к автоматизации вычислений на компьютере техника перехода от векторов к антисимметричным операторам и обратно удобна.

Итак, умножение векторов на антисимметричные операторы – эквивалент операции векторного произведения.

А в механике векторные произведения используются весьма часто. Например, векторное умножение на радиус-вектор точки приложения связанного вектора дает нам момент этого вектора относительно полюса.

Пусть точка O – полюс, $\overline{\mathbf{u}}$ – вектор, приложенный в точке A. Тогда

$$\boxed{\overline{\mathbf{M}}_O(\overline{\mathbf{u}}) \;=\; [\,\overline{\mathbf{r}}_{OA}, \overline{\mathbf{u}}\,] \;\equiv\; \overline{\mathbf{r}}_{OA}\,\overline{\mathbf{u}}}\;.$$

Вот мы и пришли к понятию, которое фигурировало в заголовке данного пункта.

Оператор момента – антисимметричный оператор $\overline{\mathbf{r}}_{OA}$ (O – полюс, A – точка приложения).

Указанные две точки однозначно определяют данный антисимметричный оператор.

Заметим, что мы как для радиус-вектора, так и для оператора момента использовали полные обозначения, когда указаны обе упомянутые точки. Часто пользуются сокращенными обозначениями, в которых полюс не указывают, а подразумевают.

Например, для момента силы, приложенной к материальной точке M_ν, и для момента количества движения этой точки имеем:

$$\overline{\mathbf{L}}_{O\nu} \;\equiv\; \overline{\mathbf{M}}_O(\overline{\mathbf{F}}_\nu) \;=\; [\,\overline{\mathbf{r}}_\nu, \overline{\mathbf{F}}_\nu\,] \;=\; \overline{\mathbf{r}}_\nu\,\overline{\mathbf{F}}_\nu$$

и

$$\overline{\mathbf{K}}_{O\nu} \;\equiv\; \overline{\mathbf{M}}_O(\overline{\mathbf{Q}}_\nu) \;=\; [\,\overline{\mathbf{r}}_\nu, \overline{\mathbf{Q}}_\nu\,] \;=\; \overline{\mathbf{r}}_\nu\,\overline{\mathbf{Q}}_\nu\;;$$

здесь $\overline{\mathbf{r}}_\nu = \overline{\mathbf{r}}_{OM_\nu}$ и $\overline{\mathbf{Q}}_\nu = m_\nu \overline{\mathbf{v}}_\nu$.

В этих примерах оператор момента обеспечивает альтернативную форму записи для векторных произведений. А в следующем пункте мы с его помощью определим новый линейный оператор.

6. Оператор инерции материальной точки и его компоненты

Пусть Е – условно неподвижная СО. Рассмотрим материальную точку P с массой m, движущуюся вместе с какой-либо подвижной системой отсчета Е^*.

Таким образом, данная материальная точка неподвижна в системе отсчета Е^*; а по отношению к условно неподвижной системе отсчета точка P движется.

Пусть A – произвольная точка системы отсчета Е^*; рассмотрим движение точки P относительно полюса A.

Когда мы определяли понятие относительного кинетического момента, мы уже говорили о том, что такое “движение относительно точки”. Давайте вспомним это.

<u>Замечание.</u> Речь идет о движении точки P относительно невращающейся СО $\text{Е}'$, движущейся вместе с полюсом A.

Это – важное замечание. У нас есть уже две системы отсчета: условно неподвижная Е и подвижная Е^*. Движение точки относительно первой из них – это абсолютное движение; относительно второй точка покоится. Так что без введения третьей системы отсчета не обойтись.

После такого уточнения двинемся дальше. Запишем, что мы собираемся сейчас сделать.

Выразим момент количества относительного движения точки P через угловую скорость $\overline{\square}$ подвижной СО Е^*.

$$\overline{\mathbf{K}}_{AP}^{\text{отн}} = [\, \overline{\mathbf{r}}_{AP},\, m \underbrace{\overline{\mathbf{v}}_P^{\text{отн}}}_{\overline{\mathbf{v}}_P - \overline{\mathbf{v}}_A} \,] = m\, \overline{\mathbf{r}}_{AP}\, (\overline{\mathbf{v}}_P - \overline{\mathbf{v}}_A)\,;$$

здесь $\overline{\mathbf{v}}_P$ и $\overline{\mathbf{v}}_A$ – абсолютные скорости точек P и A.

Обе эти точки принадлежат одной и той же подвижной системе отсчета Е^*. Как известно из кинематики, абсолютные скорости таких двух точек должны удовлетворять формуле Эйлера.

По формуле Эйлера:

$$\overline{\mathbf{v}}_P = \overline{\mathbf{v}}_A + [\, \overline{\square}, \overline{\mathbf{r}}_{AP} \,] = \overline{\mathbf{v}}_A - [\, \overline{\mathbf{r}}_{AP}, \overline{\square} \,] =$$

$$= \overline{\mathbf{v}}_A - \overline{\mathbf{r}}_{AP}\, \overline{\square} = \overline{\mathbf{v}}_A + \overline{\mathbf{r}}_{AP}^{\,\text{т}}\, \overline{\square}$$

(в силу антисимметричности оператора момента $\overline{\mathbf{r}}_{AP}^{\,\text{т}} = -\,\overline{\mathbf{r}}_{AP}$).

Итак,

$$\overline{\mathbf{K}}_{AP}^{\text{отн}} = m\, \overline{\mathbf{r}}_{AP}\, \overline{\mathbf{r}}_{AP}^{\,\text{т}}\, \overline{\square}\,.$$

Искомое выражение получено. Мы видим, что момент количества относительного движения точки P равен произведению вектора угловой скорости подвижной системы отсчета на некоторый линейный оператор.

Отсюда – такое определение:

Линейный оператор

$$\boxed{\overline{\mathbf{J}}_A^{(P)} = m\,\overline{\mathbf{r}}_{AP}\,\overline{\mathbf{r}}_{AP}^{\,\mathrm{T}}}$$

называется **<u>оператором инерции</u>** (или **<u>тензором инерции</u>**) материальной точки P относительно полюса A.

Верхний индекс здесь взят в скобки, чтобы избежать путаницы с показателем степени.

Термины “оператор инерции” и “тензор инерции” являются синонимами. В большинстве учебников теоретической механики до недавнего времени предпочитали писать: “тензор инерции”. Теперь название “оператор инерции” употребляется все чаще.

Предпочтительно говорить “оператор инерции”: мы ведь знаем, что такое линейный оператор. А что такое тензор?

Это понятие вводится в *<u>тензорном исчислении</u>*. Обсуждение того, что это такое, увело бы нас слишком далеко в сторону. Отмечу лишь, что понятие тензора охватывает многие понятия линейной алгебры.

Тензоры: – скаляры;

– векторы;

– линейные операторы;

– билинейные функционалы;

– ...

Под многоточием здесь скрывается множество алгебраических объектов. Некоторые из них имеют специальные названия, другие – нет.

Получим покомпонентное представление оператора инерции материальной точки.

Пусть $Axyz$ – произвольная система координат с началом в точке A.

Слово “произвольная” относится к выбору осей, которые могут двигаться произвольным образом.

Матрица оператора $\overline{\mathbf{J}}_A^{(P)} = m\,\overline{\mathbf{r}}_{AP}\,\overline{\mathbf{r}}_{AP}^{\,\mathrm{T}}$ в данной системе координат имеет вид:

$$I_P^{Axyz} = m \begin{pmatrix} 0 & -z_P & y_P \\ z_P & 0 & -x_P \\ -y_P & x_P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & z_P & -y_P \\ -z_P & 0 & x_P \\ y_P & -x_P & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= m \begin{pmatrix} y_P^2 + z_P^2 & -x_P\,y_P & -x_P\,z_P \\ -y_P\,x_P & z_P^2 + x_P^2 & -y_P\,z_P \\ -z_P\,x_P & -z_P\,y_P & z_P^2 + x_P^2 \end{pmatrix} .$$

В определении оператора инерции материальной точки – подчеркнем это – речь идет о произвольном полюсе. Но подлинное механическое содержание понятие оператора инерции материальной точки обретает при сделанных нами в начале пункта предположениях.

Вывод: если материальная точка P движется вместе с какой-либо системой отсчета Е * и полюсом A служит одна из точек этой СО, то момент количества относительного движения точки P равен произведению ее оператора инерции на вектор угловой скорости СО Е *:

$$\boxed{\overline{\mathbf{K}}_{AP}^{\text{отн}} = \overline{\mathbf{J}}_{A}^{(P)} \overline{\square}} \; .$$

<u>Частный случай</u>: если принадлежащая системе отсчета Е * точка A во все время движения совпадает с некоторой точкой O у.н.СО Е (*<u>сферическое</u>* движение СО Е *), то

$$\overline{\mathbf{K}}_{OP} = \overline{\mathbf{J}}_{O}^{(P)} \overline{\square} .$$

Здесь уже речь идет о моменте количества *<u>абсолютного</u>* движения материальной точки. Термин “сферическое движение” объясняется очень просто: траектории любых точек подвижной системы отсчета (а значит, и точки P) лежат на концентрических сферах с центром в точке O.

7. Оператор инерции абсолютно твердого тела

В силу принципа материальных частиц Эйлера мы знаем, что абсолютно твердое тело можно моделировать неизменяемой системой материальных точек. С нее и начнем.

Рассмотрим неизменяемую СМТ $\{ M_1, M_2, \dots, M_n \}$. Будем считать, что расстояние между любыми двумя ее точками не равно нулю (иначе их можно было бы объединить в одну).

Напомним, что система материальных точек называется неизменяемой, если из-за наложенных на эти точки связей расстояния между любыми двумя точками системы остаются постоянными.

Чуть позже мы наложим дополнительные ограничения на относительное расположение точек системы – с целью исключить некоторые особые (вырожденные) случаи. Поговорим сейчас как раз об этих особых случаях. Во-первых, особым случаем для нас является система, состоящая из одной-единственной материальной точки. Особым случаем будем считать и такой случай:

Если $n > 1$ и все точки неизменяемой СМТ лежат на одной прямой, то такая СМТ называется **<u>ротатором</u>**.

Понятие ротатора вводится и применительно к абсолютно твердым телам.

В непрерывном случае ротатор – это АТТ, представляющее собой бесконечно тонкий прямой стержень.

Слово “прямой” означает: не изогнутый. Фактически речь идет об отрезке, вдоль которого масса распределена непрерывно.

Мы, кстати, уже занимались такого вида телами и вычислили значение момента инерции однородного тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец или через его середину. Но в общем случае мы относили такие твердые тела к предельным случаям, которые если и рассматриваются, то – особо.

Такое же ограничение мы наложим сейчас и на неизменяемую систему материальных точек.

Далее предполагаем, что неизменяемая СМТ *__не сводится__* к одной точке или к ротатору (т.е. в ней имеются три точки, не лежащие на одной прямой).

Для чего мы такое предположение сделали? А вот для чего:

С такой СМТ можно однозначно связать систему отсчета E^*, в которой материальные точки будут неподвижными.

Действительно, три точки, не лежащие на одной прямой, определяют некоторую плоскость. В этой плоскости можно выбрать какую-либо точку и две оси, проходящие через эту точку и взаимно ортогональные. Третью координатную ось проведем через выбранную точку перпендикулярно плоскости. Вот и получится система координат, определяющая систему отсчета E^*.

А вот с ротатором однозначно связать такую систему отсчета нельзя. Там имеется всего одна прямая; если ее взять за одну из координатных осей, то две другие оси могут с течением времени произвольным образом поворачиваться вокруг нее.

Но данный случай мы сейчас не рассматриваем.

Итак, для неизменяемой системы материальных точек, удовлетворяющей сделанному предположению, мы можем говорить о связанной системе отсчета – как мы это делали в кинематике применительно к абсолютно твердому телу. Понятие связанной системы отсчета очень важно, и вот почему:

В кинематическом плане изучение движения неизменяемой СМТ (или АТТ) сводится к изучению движения связанной СО E^*.

Движение одной системы отсчета относительно другой в кинематике было исследовано достаточно подробно.

В динамическом плане важную роль играет также распределение масс. Например, в случае абсолютно твердого тела оно полностью определяется значениями плотности γ – скалярной функции, входящей в определение материального тела и определенной для любой точки этого тела.

Применительно к материальным телам мы для точек тела использовали синоним: “телесные точки”. Для абсолютно твердых тел принято иное словоупотребление, когда эти понятия различаются. Сформулируем видоизмененное определение телесной точки в виде замечания.

<u>Замечание.</u> Для абсолютно твердого тела (в отличие от случая деформируемого материального тела) **<u>телесными точками</u>** называют <u>*любые*</u> точки связанной с данным телом СО E^*.

На прошлой лекции мы с Вами выяснили, что такое оператор инерции материальной точки и как он применяется в задаче вычисления момента количества движения точки. После этого мы приступили к рассмотрению аналогичных вопросов для неизменяемой системы материальных точек и для абсолютно твердого тела.

Попутно была несколько изменена используемая терминология. Если раньше мы пользовались понятием "телесная точка" как синонимом для понятия "точка материального тела", то теперь было дано более общее определение.

Именно, мы условились, что в случае абсолютно твердого тела телесными точками называются <u>*любые*</u> точки связанной с данным телом системы отсчета.

В соответствии с этим уточненным определением, любая точка тела есть телесная точка, но обратное неверно.

Зачем такое обобщение понятия телесной точки делается? Например, представьте себе однородное твердое тело, имеющее форму баранки (т.е. тора). Центр масс этого материального тора находится в его геометрическом центре (там, где дырка); поэтому он не является точкой тела, но – с точки зрения данного определения – является телесной точкой.

Движется центр масс вместе с самим телом, и вектор скорости центра масс, если известны скорость полюса и угловая скорость, можно найти по той же формуле Эйлера, что и скорость тела. Таким образом, в динамике абсолютно твердого тела форма тела большого значения не имеет.

В связи с этим отметим еще одно обстоятельство.

Для телесных точек, не являющихся точками АТТ, значение плотности γ принимается по определению равным нулю.

Вернемся теперь к случаю неизменяемой системы материальных точек.

Пусть A – произвольная точка системы отсчета E^*, связанной с неизменяемой СМТ.

Выразим относительный кинетический момент СМТ относительно полюса A через угловую скорость $\overline{\square}$ связанной СО E^*.

По определению,

$$\overline{\mathbf{K}}_A^{\text{отн}} \equiv \sum_\nu \overline{\mathbf{K}}_{A\nu}^{\text{отн}} = \sum_\nu [\ \overline{\mathbf{r}}'_\nu,\ m_\nu \overline{\mathbf{v}}_\nu^{\text{отн}}\ ]\ ,$$

где $\overline{\mathbf{r}}'_\nu \equiv \overline{\mathbf{r}}_{A\nu}$ – радиус-вектор точки M_ν, а $\overline{\mathbf{v}}_\nu^{\text{отн}} = \overline{\mathbf{v}}_\nu - \overline{\mathbf{v}}_A$.

Но теперь мы для момента количества относительного движения материальной точки имеем и другое выражение, справедливое при сделанных нами предположениях.

Так как все точки M_ν и полюс A движутся вместе с СО E^*, то:

$$\overline{\mathbf{K}}_{A}^{\text{отн}} \equiv \sum_{\nu} \overline{\mathbf{K}}_{A\nu}^{\text{отн}} = \sum_{\nu} \overline{\mathbf{J}}_{A}^{(\nu)} \overline{\square},$$

где $\overline{\mathbf{J}}_{A}^{(\nu)} = m_{\nu}\, \overline{\mathbf{r}}_{A\nu}\, \overline{\mathbf{r}}_{A\nu}^{\,\text{т}}$.

Вектор $\overline{\square}$ можно считать находящимся вне суммы, в которую, таким образом, будут входить только операторы инерции материальных точек. Естественно ввести такое определение:

Линейный оператор

$$\boxed{\overline{\mathbf{J}}_{A} = \sum_{\nu} m_{\nu}\, \overline{\mathbf{r}}_{A\nu}\, \overline{\mathbf{r}}_{A\nu}^{\,\text{т}}}\ .$$

называется **<u>оператором инерции</u>** СМТ относительно полюса A; он равен сумме операторов инерции всех точек системы.

В приведенном определении мы не говорили о том, что система материальных точек неизменяемая, а полюс обязательно является точкой связанной системы отсчета. Но реальное механическое содержание понятие оператора инерции приобретает при сделанных нами выше предположениях.

Вывод: относительный кинетический момент неизменяемой СМТ относительно какой-либо точки связанной с ней СО, взятой за полюс, равен произведению оператора инерции относительно этого полюса на вектор угловой скорости данной СО:

$$\boxed{\overline{\mathbf{K}}_{A}^{\text{отн}} = \overline{\mathbf{J}}_{A} \overline{\square}}\ .$$

Как и всякий линейный оператор, оператор инерции преобразует векторы в векторы. А вектор угловой скорости он преобразует в вектор относительного кинетического момента.

Вновь подчеркнем смысл, какой имеют слова “относительный кинетический момент”.

Речь идет об относительном движении СМТ в невращающейся СО Е$'$, движущейся вместе с полюсом A.

Все, что мы говорили о неизменяемой системе материальных точек, может быть перенесено – по известным нам правилам – и на случай абсолютно твердого тела.

<u>Следствие.</u> Относительный кинетический момент АТТ относительно произвольной *<u>телесной</u>* точки A, взятой за полюс, равен произведению оператора инерции относительно этого полюса на вектор $\overline{\square}$ угловой скорости тела:

$$\overline{\mathbf{K}}_{A}^{\text{отн}} = \overline{\mathbf{J}}_{A} \overline{\square}.$$

Формула эта имеет тот же самый вид, что и для неизменяемой системы материальных точек. Но, строго говоря, фигурирующие в ней величины определяются несколько иначе.

Относительный кинетический момент АТТ:

$$\overline{\mathbf{K}}_A^{\text{отн}} = \int_V [\, \overline{\mathbf{r}}, \overline{\mathbf{v}}^{\text{отн}} \,]\, \gamma \,\mathrm{d}V \equiv \int_V \overline{\mathbf{r}}\ \overline{\mathbf{v}}^{\text{отн}}\, \gamma \,\mathrm{d}V\,;$$

оператор инерции АТТ:

$$\overline{\mathbf{J}}_A = \int_V \overline{\mathbf{r}}\ \overline{\mathbf{r}}^{\,\mathrm{T}} \gamma \,\mathrm{d}V\,.$$

Здесь $\overline{\mathbf{r}}$ – радиус-вектор точки тела относительно полюса A, $\overline{\mathbf{v}}^{\text{отн}} \equiv \overline{\mathbf{v}} - \overline{\mathbf{v}}_A$ – вектор ее относительной скорости.

Интеграл берется по объему, занимаемому твердым телом. Впрочем, если учесть, что в остальных точках связанной системы отсчета плотность γ теперь определена и тождественно равна нулю, интегрирование можно вести по всему пространству (иногда это бывает удобнее).

Рассмотрим еще частный случай полученной нами формулы для кинетического момента. Для определенности, приведем формулировку для случая абсолютно твердого тела.

Частный случай: если одна из телесных точек во все время движения совпадает с некоторой точкой O у.н.СО Е (*сферическое* движение СО Е *), то

$$\overline{\mathbf{K}}_O = \overline{\mathbf{J}}_O \overline{\square}\,.$$

Здесь уже движение является абсолютным, и речь идет просто о кинетическом моменте твердого тела относительно неподвижной точки.

Рассмотрим теперь компоненты оператора инерции абсолютно твердого тела. Для простоты обозначений будем моделировать его неизменяемой системой материальных точек.

8. Моменты инерции и их свойства

Введем следующие обозначения для элементов матрицы оператора инерции $\overline{\mathbf{J}}_A$ неизменяемой СМТ (или АТТ):

$$I^{Axyz} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}.$$

Так как $\overline{\mathbf{J}}_A = \sum_\nu \overline{\mathbf{J}}_A^{(\nu)}$ и

$$I_\nu^{Axyz} \;=\; m_\nu \begin{pmatrix} y_\nu^2 + z_\nu^2 & -x_\nu y_\nu & -x_\nu z_\nu \\ & \cdots & \\ & \cdots & \end{pmatrix} ,$$

то для диагональных элементов матрицы I^{Axyz} имеем:

$$I_{xx} \;=\; \sum_\nu m_\nu \; (y_\nu^2 + z_\nu^2) \; ,$$

$$I_{yy} \;=\; \sum_\nu m_\nu \; (z_\nu^2 + x_\nu^2) \; ,$$

$$I_{zz} \;=\; \sum_\nu m_\nu \; (x_\nu^2 + y_\nu^2) \; .$$

Это – **осевые моменты инерции** СМТ (или АТТ); впервые эти величины рассматривал Гюйгенс в 1673 г.

Гюйгенс, Христиан (1629 – 1695) – голландский механик, физик и астроном.

Роль этого ученого в развитии механики весьма велика. В частности, он изобрел механические часы с маятником. Разрабатывая их теорию, Гюйгенс впервые решил задачу о движении физического маятника – по существу, первую аккуратно решенную задачу динамики твердого тела.

Это было весьма непросто, поскольку в то время еще не было известно ни общих теорем динамики, ни даже самих законов Ньютона. Поэтому Гюйгенс рассуждал иначе, чем это делается сейчас: он исходил из сформулированного им принципа, который с современной точки зрения является частным случаем закона сохранения механической энергии.

Никакого названия для моментов инерции Гюйгенс не вводил; термин “момент инерции” предложил Эйлер семьдесят с лишним лет спустя (в 1749 г).

Для взятых со знаком “минус” внедиагональных элементов матрицы I^{Axyz} имеем:

$$I_{xy} \;=\; I_{yx} \;=\; \sum_\nu m_\nu \, x_\nu \, y_\nu \; ,$$

$$I_{yz} \;=\; I_{zy} \;=\; \sum_\nu m_\nu \, y_\nu \, z_\nu \; ,$$

$$I_{zx} \;=\; I_{zx} \;=\; \sum_\nu m_\nu \, z_\nu \, x_\nu \; .$$

Это – **центробежные моменты инерции** СМТ (или АТТ).

Понятие о центробежных моментах инерции появилось не во времена Гюйгенса, а значительно позже. Мы об этом будем говорить позднее.

А сейчас рассмотрим некоторые свойства моментов инерции.

Из выражений для моментов инерции мы видим, что матрица оператора инерции является симметричной. Однако не всякая симметричная матрица может служить матрицей оператора инерции твердого тела.

Именно, справедливо такое свойство осевых моментов инерции.

Свойство 1. Осевые моменты инерции неотрицательны, причем момент инерции относительно оси обращается в нуль □ все точки СМТ (или АТТ) лежат на данной оси (а это заведомо невозможно, если система не сводится к одной точке или к ротатору).

В самом деле:

$$I_{xx} \;\equiv\; \sum_{\nu} m_{\nu}\,(\,y_{\nu}^{2} + z_{\nu}^{2}\,) \;\geqslant\; 0\;;$$

$$I_{xx} = 0 \quad \square \quad \forall\,\nu\; y_{\nu} = z_{\nu} = 0\,.$$

Свойство 2. Для осевых моментов инерции выполняются *неравенства треугольника*:

$$I_{xx} \;\leqslant\; I_{yy} + I_{zz}\,,$$

$$I_{yy} \;\leqslant\; I_{zz} + I_{xx}\,,$$

$$I_{zz} \;\leqslant\; I_{xx} + I_{yy}\,;$$

неравенство обращается в равенство □ все точки лежат в данной координатной плоскости.

Надеюсь, понятно, что означает “в данной”? Речь идет о плоскости, которая определяется индексами, стоящими в правой части неравенства. Докажем – для определенности – последнее из неравенств.

Так,

$$I_{xx} + I_{yy} \;=\; \sum_{\nu} m_{\nu}\,(\,y_{\nu}^{2} + z_{\nu}^{2}\,) \;+\; \sum_{\nu} m_{\nu}\,(\,z_{\nu}^{2} + x_{\nu}^{2}\,) \;=$$

$$=\; \sum_{\nu} m_{\nu}\,(\,x_{\nu}^{2} + y_{\nu}^{2}\,) \;+\; 2\sum_{\nu} m_{\nu} z_{\nu}^{2} \;=$$

$$=\; I_{zz} \;+\; 2\sum_{\nu} m_{\nu} z_{\nu}^{2} \;\geqslant\; I_{zz}\;;$$

равенство – лишь если $\forall\,\nu\; z_{\nu} = 0$.

Таким образом, в этом последнем случае тело сводится к бесконечно тонкой плоской фигуре, лежащей в плоскости Oxy.

Свойство 3. Если система точек или тело характеризуется *материальной симметрией* относительно координатной оси (или плоскости), то два центробежных момента инерции из трех равны нулю.

Слова “материальная симметрия” означают, что симметрия распространяется не только на расположение точек, но и на распределение масс. Какие именно моменты инерции обращаются в нуль, будет видно из примера.

Так, пусть ось симметрии – Oz (плоскость симметрии – Oxy). Тогда каждой точке M_ν отвечает симметричная точка M_μ с той же массой и такими координатами:

ось	плоскость
$x_\mu = -x_\nu$	$x_\mu = x_\nu$
$y_\mu = -y_\nu$	$y_\mu = y_\nu$
$z_\mu = z_\nu$	$z_\mu = -z_\nu$

В формулах $I_{xz} = \sum\limits_\nu m_\nu z_\nu x_\nu$ и $I_{yz} = \sum\limits_\nu m_\nu y_\nu z_\nu$ соответствующие слагаемые попарно сокращаются, так что $I_{xz} = 0$ и $I_{yz} = 0$.

Теперь используем эти свойства для вычисления моментов инерции конкретных тел.

9. Оператор инерции однородного тонкого диска

Речь пойдет фактически о бесконечно тонком диске. Он представляет собой плоскую фигуру (а именно – круг) с однородным распределением масс.

Вычисления будем проводить в специально выбранной системе координат. Оси ее – чтобы не путать с осями основной системы координат – будем обозначать буквами ξ, η, ζ (именно такие обозначения используются в расчете Д-6).

Сначала мы вычислим оператор инерции не диска, а кольца.

Свяжем с центром масс C <u>*однородного тонкого кольца*</u> радиуса R оси $C\xi$, $C\eta$, $C\zeta$, совместив плоскость $C\xi\eta$ с плоскостью кольца.

Сразу же заметим:

Оси являются осями материальной симметрии □ $I_{\xi\eta} = I_{\eta\zeta} = I_{\zeta\xi} = 0$.

Мы использовали свойство 3° моментов инерции.

Таким образом, с центробежными моментами инерции мы разобрались. Вычисление осевых моментов инерции начнем с момента инерции относительно оси $C\zeta$.

$$I_{\zeta\zeta} = \sum_\nu m_\nu \left(\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2 \right) = \sum_\nu m_\nu R^2 = mR^2 .$$

Прежде чем двигаться дальше, вспомним, что вместо момента инерции часто используется радиус инерции.

Заметим, что $I_{\zeta\zeta} = m\varrho^2$ □ $\varrho = R$, т.е. для тонкого кольца радиус инерции равен радиусу кольца.

Два других осевых момента инерции проще всего найти из неравенства треугольника, которое в данном случае обращается в равенство.

Все точки лежат в плоскости $C\xi\eta$ неравенство треугольника обращается в равенство:

$$I_{\zeta\zeta} = I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta} \;\; \;\; I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta} = \frac{I_{\zeta\zeta}}{2} = \frac{mR^2}{2} \; .$$

Мы воспользовались свойством 2° моментов инерции. В силу симметрии кольца равенство моментов инерции $I_{\xi\xi}$ и $I_{\eta\eta}$ друг другу является очевидным.

Итак, для кольца

$$\boxed{I^{C\xi\eta\zeta} = \frac{mR^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \; .$$

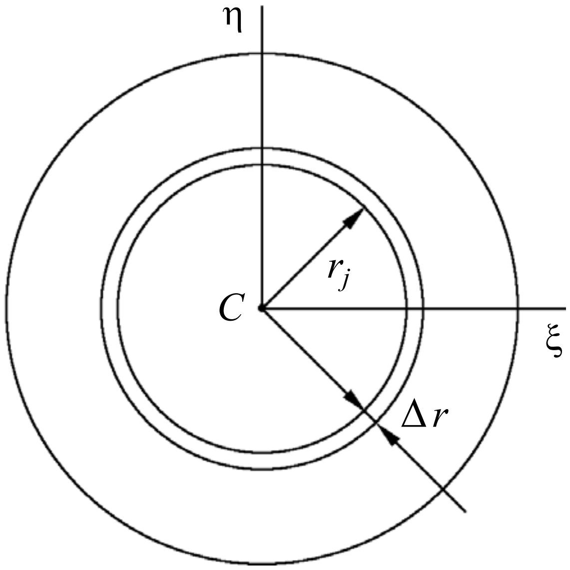
Матрица оператора инерции кольца вычислена полностью.

Переходим к случаю диска.

Теперь таким же образом свяжем координатные оси с центром масс <u>*однородного тонкого диска*</u>.

Вновь займемся вычислением осевого момента инерции $I_{\zeta\zeta}$.

Разобьем диск на n элементарных колец с радиусами r_j и шириной Δr:



Если $\gamma = \dfrac{m}{S} = \dfrac{m}{\pi R^2}$ – масса, отнесенная к единице площади диска, то масса кольца будет

$$\Delta m_j = \gamma \cdot \Delta S_j = \gamma \cdot 2\pi r_j \Delta r \; .$$

Здесь мы, имея в виду последующий переход к пределу, пренебрегаем слагаемыми, бесконечно малыми по сравнению с Δr.

В силу формулы $I^{C\xi\eta\zeta} = \sum\limits_j I_j^{C\xi\eta\zeta}$ имеем:

$$I_{\zeta\zeta} = \sum_j I_{\zeta\zeta}^{(j)} = \sum_j \Delta m_j\, r_j^2 = 2\pi\gamma \sum_j r_j^3\, \Delta r\ .$$

При $n \to \infty$ получаем:

$$I_{\zeta\zeta} = 2\pi\gamma \int\limits_0^R r^3\, \mathrm{d}r = 2\pi\gamma \frac{R^4}{4} = \pi \frac{m}{\pi R^2} \cdot \frac{R^4}{2} = \frac{mR^2}{2}\ .$$

Итак, момент инерции диска получается в два раза меньшим, чем у тонкого кольца с тем же радиусом.

Заметим, что $I_{\zeta\zeta} = m\varrho^2$, $\varrho = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$, т.е. для диска радиус инерции равен радиусу диска, деленному на $\sqrt{2}$.

Вычисление остальных моментов инерции происходит по той же схеме, что и для кольца.

Как и для кольца,

$$I_{\xi\eta} = I_{\eta\zeta} = I_{\zeta\xi} = 0\ , \quad I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta} = \frac{I_{\zeta\zeta}}{2}\ .$$

Итак, для диска

$$\boxed{I^{C\xi\eta\zeta} = \frac{mR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}\ .$$

По сравнению с формулой для кольца здесь есть единственное отличие: в знаменателе скалярного множителя вместо числа 2 стоит число 4.

Подчеркнем, что обе эти формулы справедливы только при специальном выборе координатных осей. В этих осях все центробежные моменты инерции получились равными нулю.

Для этого случая есть специальная терминология.

Главные оси инерции СМТ (или АТТ) – координатные оси, в которых центробежные моменты инерции равны нулю.

Итак, мы получили координатное представление оператора инерции однородного тонкого диска в главных осях инерции.

4. Эллипсоид инерции

Рассмотрим уравнение поверхности:

$$(*) \qquad \boxed{(\,\overline{\mathbf{r}},\ \overline{\mathbf{J}}_A\,\overline{\mathbf{r}}\,) \ = \ k^2} \ ,$$

где $\overline{\mathbf{J}}_A$ – оператор инерции АТТ (или СМТ) относительно полюса A, $\overline{\mathbf{r}}$ – радиус-вектор точки поверхности.

Это – действительно уравнение поверхности в трехмерном пространстве. Точка принадлежит этой поверхности тогда и только тогда, когда радиус-вектор данной точки удовлетворяет уравнению $(*)$.

В левой части уравнения записан билинейный функционал, определяемый оператором инерции. В качестве обоих аргументов функционала взят радиус-вектор текущей точки поверхности.

В предыдущих пунктах мы уже не раз рассматривали выражения такого вида и знаем, что если радиус-вектор – ненулевой, то для реального тела это выражение положительно.

А что стоит в правой части?

Параметр $k > 0$ определяет масштаб построения: в силу однородности левой части при изменении k получим поверхность, подобную исходной.

Во избежание недоразумений отметим, что параметр k есть размерная величина.

$[\,k\,] \ = \ \text{кг}^{1/2}\cdot\text{м}^2 .$

В некоторых учебниках вместо k^2 пишут 1; но такой выбор возможен только тогда, когда вместо механических величин в уравнение подставлены их численные значения (а иначе размерности обеих частей уравнения $(*)$ будут разными).

Выясним, что за поверхность мы получили.

Пусть l – ось, проходящая через полюс A и точку поверхности, а $\overline{\mathbf{e}} = \overline{\mathbf{r}}/|\overline{\mathbf{r}}|$ – единичный вектор оси. Заменяя в уравнении $(*)$ $\overline{\mathbf{r}}$ на $|\overline{\mathbf{r}}|\cdot\overline{\mathbf{e}}$, имеем:

$$|\,\overline{\mathbf{r}}\,|^2 \underbrace{(\,\overline{\mathbf{e}}\,,\ \overline{\mathbf{J}}_A\,\overline{\mathbf{e}}\,)}_{I_{ll}} \ = \ k^2 ,$$

т.е.

$$|\,\overline{\mathbf{r}}\,| \ = \ \frac{k}{\sqrt{I_{ll}}} \ .$$

Мы нашли модуль радиус-вектора текущей точки поверхности $(*)$, т.е. расстояние этой точки от полюса A. Под корнем – момент инерции тела относительно оси l.

При этом

$$\overline{\mathbf{r}} \ = \ \frac{k}{\sqrt{I_{ll}}}\ \overline{\mathbf{e}} \ .$$

При выводе этой формулы мы действовали так: брали точку на поверхности и ей сопоставляли единичный вектор $\bar{\mathbf{e}}$. Но можно на данную формулу посмотреть и с иных позиций.

Пусть теперь $\bar{\mathbf{e}}$ – произвольный единичный вектор, l – проходящая через A ось, направление которой задается вектором $\bar{\mathbf{e}}$, а I_{ll} – момент инерции АТТ относительно оси l.

Поскольку для *<u>реального</u>* тела $I_{ll} > 0$, то последняя формула однозначно сопоставляет вектору $\bar{\mathbf{e}}$ точку поверхности $(*)$.

Эта точка лежит на оси l, причем ее радиус-вектор сонаправлен вектору $\bar{\mathbf{e}}$. Мы получили взаимно однозначное соответствие между точками поверхности $(*)$ и всевозможными единичными векторами в трехмерном пространстве. Для тел, сводящихся к одной точке или к ротатору, оператор инерции не является положительно определенным, и для некоторых осей момент инерции I_{ll} обращается в нуль; следовательно, такие оси не имеют пересечений с поверхностью $(*)$.

В случае же реального тела поверхность $(*)$ – это поверхность *<u>ограниченная</u>*: в любом направлении ее точки отстоят от полюса на конечное расстояние.

Вывод: поверхность $(*)$ является ограниченной.

Теперь запишем уравнение нашей поверхности в координатном виде.

Пусть в системе координат $Axyz$

$$\bar{\mathbf{r}} \;=\; x\,\bar{\mathbf{i}} \;+\; y\,\bar{\mathbf{j}} \;+\; z\,\bar{\mathbf{k}}\ .$$

Можно было бы подставить это выражение в соотношение $(*)$ и произвести необходимые выкладки. Но мы поступим проще: воспользуемся формулой Коши для осевых моментов инерции.

Имеем:

$$\bar{\mathbf{r}} \;=\; |\bar{\mathbf{r}}|\cdot\bar{\mathbf{e}} \;\equiv\; |\bar{\mathbf{r}}|\cdot(\,\cos\alpha\cdot\bar{\mathbf{i}} \;+\; \cos\beta\cdot\bar{\mathbf{j}} \;+\; \cos\gamma\cdot\bar{\mathbf{k}}\,)\ .$$

Здесь α, β, γ – углы вектора $\bar{\mathbf{e}}$ с осями Ax, Ay, Az (мы уже пользовались этими углами при выводе формулы Коши). Значит, переход от компонент вектора $\bar{\mathbf{e}}$ к компонентам x, y, z вектора $\bar{\mathbf{r}}$ сводится к умножению косинусов данных углов на модуль вектора $\bar{\mathbf{r}}$.

Формула Коши дает выражение величины $I_{ll} \;\equiv\; (\,\bar{\mathbf{e}}\,,\,\bar{\mathbf{J}}_A\,\bar{\mathbf{e}}\,)$ через $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Если в данном выражении заменить эти косинусы на x, y, z, то получится выражение для $(\,\bar{\mathbf{r}},\,\bar{\mathbf{J}}_A\,\bar{\mathbf{r}}\,)$, т.е. для левой части уравнения $(*)$.

Поэтому координатная запись уравнения $(*)$ выглядит так:

$$(**)\qquad \begin{aligned} &I_{xx}\,x^2 \;+\; I_{yy}\,y^2 \;+\; I_{zz}\,z^2 \;- \\ &-\;2\,I_{xy}\,xy \;-\; 2\,I_{yz}\,yz \;-\; 2\,I_{zx}\,zx \;=\; k^2\ . \end{aligned}$$

Мы получили уравнение с тремя неизвестными, которому в трехмерном пространстве отвечает поверхность. По внешнему виду этого уравнения уже нетрудно понять, что это за поверхность.

Это – уравнение поверхности 2-го порядка. Из аналитической геометрии известно: единственной ограниченной поверхностью 2-го порядка является эллипсоид.

Таким образом, наша поверхность для любого реального тела представляет собой эллипсоид.

Отсюда – определение:

Поверхность с уравнением $(\,\overline{\mathbf{r}},\, \overline{\mathbf{J}}_A\, \overline{\mathbf{r}}\,) \;=\; k^2$ называется **<u>эллипсоидом инерции</u>** АТТ (или СМТ) с центром в точке A; введена Пуансо в 1831 г.

Имя французского механика Луи Пуансо Вам известно из курса статики. Занимался он и динамикой абсолютно твердого тела (и весьма успешно).

Еще раз напомним, что наши рассуждения относятся к реальному телу: только для него во всех случаях осевой момент инерции положителен. В вырожденных же случаях такие рассуждения верны не всегда.

<u>Замечание.</u> Если АТТ является ротатором и полюс A лежит на его оси, то эллипсоид инерции вырождается в цилиндр.

Эта поверхность уже не является ограниченной. Уравнения этого цилиндра получить нетрудно, но на этом мы останавливаться не будем. Заметим, что оператор инерции можно рассматривать относительно любой точки пространства. Поэтому эллипсоиды инерции можно строить для разных точек. При сравнении таких эллипсоидов разумно пользоваться одним и тем же фиксированным значением параметра k. В частности, за полюс можно взять центр масс твердого тела.

Эллипсоид инерции с центром в центре масс тела называется **<u>центральным эллипсоидом инерции</u>**.

Посмотрим теперь, каким образом понятие эллипсоида инерции может быть использовано при изучении свойств оператора инерции.

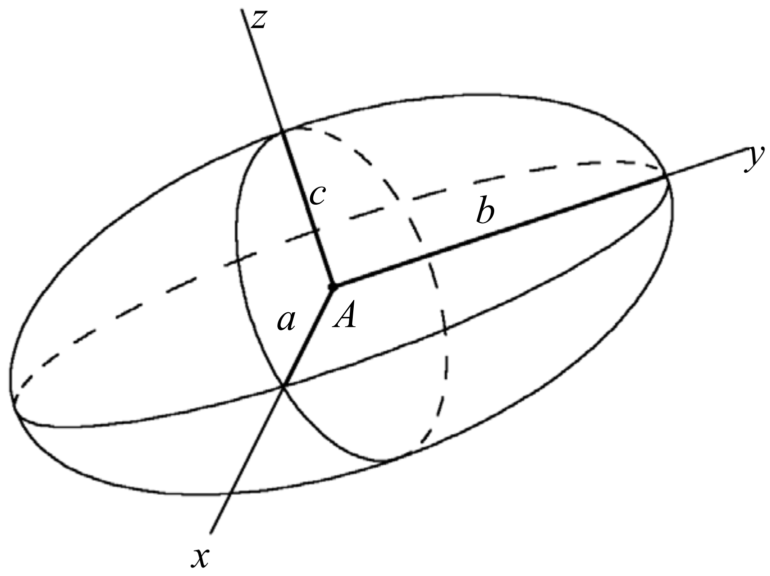
5. Главные моменты инерции

Воспользуемся некоторыми результатами аналитической геометрии.

Известно, что для любого эллипсоида координатные оси можно выбрать так, что его уравнение записывается в *<u>каноническом</u>* виде:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\;;$$

a, b, c – полуоси эллипсоида.



Оси $Axyz$ нарисованы наклонными – в отличие от осей первоначально выбранной системы координат. Но для упрощения дальнейших формул новые обозначения для осей не вводятся. Нарисованы также два сечения эллипсоида координатными плоскостями. Заметим, что выбранные указанным образом оси являются осями симметрии эллипсоида. Что означает с механической точки зрения данный выбор координатных осей? Обе части канонического уравнения можно домножить на k^2, и тогда его можно сравнить с уравнением $(**)$. Делаем вывод:

В таких осях уравнение эллипсоида инерции $(**)$ принимает вид:

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 = k^2 ;$$

поэтому $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$, и оси симметрии эллипсоида являются <u>*главными осями инерции*</u> АТТ.

Напомним, что некоторая ось называется главной осью инерции, если два центробежных момента инерции обращаются в нуль (для оси z – это моменты I_{yz} и I_{zx}, и т.д.).

Вывод: для любого АТТ главные оси инерции существуют.

Существование главных осей инерции доказал Сегнер[7] в 1755 г.

Независимо от Сегнера к понятию главных осей инерции пришел и Эйлер, но на три года позже – в 1758 г. Из сопоставления последнего уравнения с предыдущим замечаем:

$I_{xx} = k^2/a^2$ и т.д., так что

$$a = \frac{k}{\sqrt{I_{xx}}}, \quad b = \frac{k}{\sqrt{I_{yy}}}, \quad c = \frac{k}{\sqrt{I_{zz}}} .$$

[7] Сегнер, Янош Андраш (1704 – 1777) – венгерский математик и механик.

Мы выразили полуоси эллипсоида инерции через моменты инерции относительно главных осей. Такие моменты инерции носят специальное название.

Моменты инерции АТТ относительно главных осей инерции называются **<u>главными моментами инерции</u>**.

Ранее мы уже отмечали, что матрица оператора инерции в главных осях является диагональной. Следовательно:

Для произвольного вектора $\bar{\mathbf{u}}$

$$I^{Axyz}\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_{xx} & 0 & 0\\0 & I_{yy} & 0\\0 & 0 & I_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_{xx}\,u_x\\I_{yy}\,u_y\\I_{zz}\,u_z\end{pmatrix}.$$

Поэтому для вектора $\bar{\mathbf{u}}$, направленного вдоль одной из главных осей, вектор $\bar{\mathbf{J}}_A\,\bar{\mathbf{u}}$ будет также направлен вдоль нее. Например:

$$\bar{\mathbf{u}} \parallel Ax \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{J}}_A\,\bar{\mathbf{u}} \equiv I_{xx}\,\bar{\mathbf{u}} \parallel Ax\,,$$

т.е. умножение на $\bar{\mathbf{J}}_A$ сводится к растяжению вектора $\bar{\mathbf{u}}$ в I_{xx} раз.

Эта формулировка несколько условна. Момент инерции I_{xx} – размерная величина, и в зависимости от выбора единиц измерения речь может идти как о растяжении, так и о сжатии. Главное же – в том, что вектор $\bar{\mathbf{u}}$ не изменяет своего направления. В частности, такая ситуация имеет место для единичных векторов главных осей инерции:

$$\bar{\mathbf{J}}_A\,\bar{\mathbf{i}} = I_{xx}\,\bar{\mathbf{i}}\,, \quad \bar{\mathbf{J}}_A\,\bar{\mathbf{j}} = I_{yy}\,\bar{\mathbf{j}}\,, \quad \bar{\mathbf{J}}_A\,\bar{\mathbf{k}} = I_{zz}\,\bar{\mathbf{k}}\,.$$

В линейной алгебре используется следующая терминология.

Вектор $\bar{\mathbf{u}} \neq 0$ – **<u>собственный вектор</u>** линейного оператора $\bar{\mathbf{C}}$, если $\exists$ λ :

$$\bar{\mathbf{C}}\,\bar{\mathbf{u}} = \lambda\,\bar{\mathbf{u}}\,;$$

число λ – **<u>собственное значение</u>** оператора $\bar{\mathbf{C}}$.

Из этого определения непосредственно видно, что всякий ненулевой вектор, пропорциональный собственному вектору, также является собственным вектором (причем с тем же собственным значением).

Вывод: главные моменты инерции являются собственными значениями оператора инерции $\bar{\mathbf{J}}_A$, а единичные векторы главных осей инерции – его собственными векторами.

Отсюда вытекают важные для динамики абсолютно твердого тела результаты. Например, такой:

Следствие. Если полюс A – телесная точка, то вектор относительного кинетического момента $\overline{\mathbf{K}}_A^{\text{отн}} \equiv \overline{\mathbf{J}}_A \overline{\square}$ сонаправлен вектору угловой скорости $\overline{\square}$ □ вектор $\overline{\square}$ направлен вдоль одной из главных осей инерции.

Возникает вопрос: как найти главные оси инерции абсолютно твердого тела?

Если $Axyz$ – <u>*произвольные*</u> оси, то для единичного вектора $\overline{\mathbf{e}}$ главной оси l должно выполняться соотношение:

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} .$$

Если бы мы знали, чему равно значение λ, то это была бы система линейных уравнений относительно компонент e_x, e_y, e_z. Слагаемые из правой части можно перенести в левую; видно, что данная система является однородной. Запишем:

Относительно e_x, e_y, e_z эта система линейных уравнений – однородная. Для существования ненулевого решения необходимо, чтобы ее определитель равнялся нулю:

$$\begin{vmatrix} I_{xx}-\lambda & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy}-\lambda & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz}-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Если расписать данный определитель, получится кубическое уравнение относительно λ.

В силу положительной определенности оператора инерции это <u>*характеристическое уравнение*</u> всегда имеет три положительных корня, равных главным моментам инерции АТТ.

Положительность корней, разумеется, имеет место для реального твердого тела.

Таким образом, задача нахождения собственных значений оператора инерции сводится к решению кубического уравнения. После того, как собственные значения (т.е. главные моменты инерции) найдены, единичные векторы главных осей нетрудно вычислить, решая записанную нами систему линейных уравнений. Для произвольного линейного оператора можно использовать ту же процедуру: собственные значения находятся как корни характеристического уравнения. Существуют, правда, иные методы вычисления собственных значений, более эффективные для случаев высокой размерности. Иногда при нахождении главных моментов инерции удается обойтись без решения кубического уравнения. Эта ситуация нам уже известна: если тело обладает осью или плоскостью материальной симметрии, то одна из главных осей инерции находится сразу; нахождение же двух других осей тогда резко упрощается.

Пусть теперь $Axyz$ – главные оси инерции АТТ.

Могут ли у этого тела быть другие оси инерции? Рассмотрим возможные частные случаи.

Частные случаи

1°. Пусть все главные моменты инерции различны. Тогда главные оси инерции определены однозначно (эллипсоид инерции – трехосный).

Трехосный эллипсоид – это эллипсоид с полуосями различной длины. В данном случае это именно так, потому что главные моменты инерции неодинаковы. Однозначность означает, что никакие другие оси, кроме координатных, главными осями инерции не будут. В самом деле, если ось l не совпадает ни с одной из координатных осей, то компоненты ее единичного вектора при умножении этого вектора на оператор инерции растянутся в неодинаковое число раз. Так что этот вектор собственным не будет.

2°. Пусть $I_{xx} = I_{yy} \neq I_{zz}$ (случай осевой динамической симметрии). Тогда всякая ось l, лежащая в плоскости Axy, также будет главной осью инерции, и $I_{ll} = I_{xx}$, поскольку для ее единичного вектора $\bar{\mathbf{e}}$

$$\bar{\mathbf{J}}_A \bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{J}}_A (e_x \bar{\mathbf{i}} + e_y \bar{\mathbf{j}}) = e_x \underbrace{\bar{\mathbf{J}}_A \bar{\mathbf{i}}}_{I_{xx} \bar{\mathbf{i}}} + e_y \underbrace{\bar{\mathbf{J}}_A \bar{\mathbf{j}}}_{I_{yy} \bar{\mathbf{j}}} = I_{xx} \bar{\mathbf{e}} .$$

Эллипсоид инерции – эллипсоид вращения.

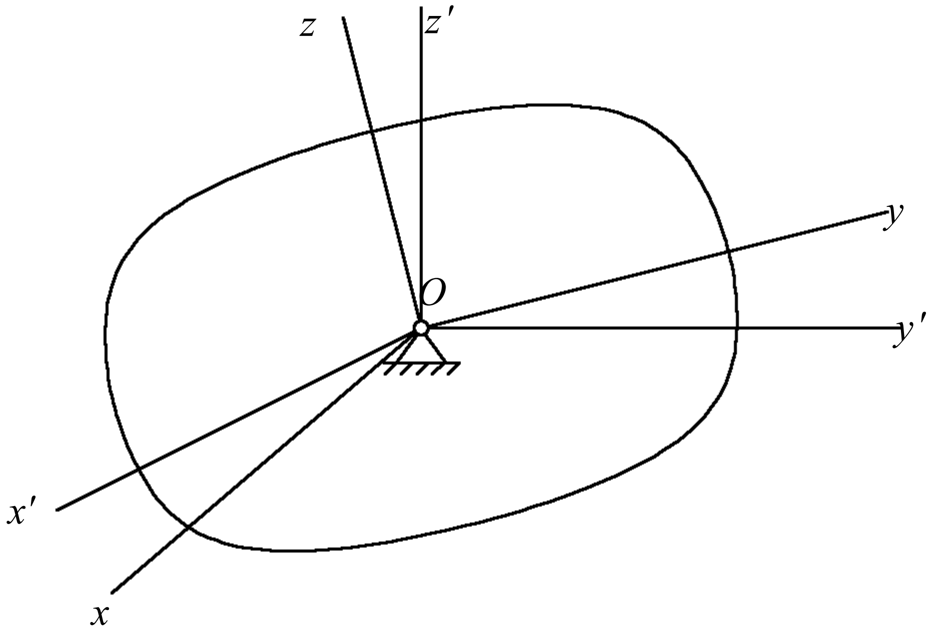
Примером может служить центральный эллипсоид инерции однородного тонкого диска. Мы вычисляли матрицу этого оператора инерции и видели, что два главных момента инерции совпадают, а третий – в два раза больше.

3°. Пусть $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ (случай шаровой динамической симметрии). Тогда главной осью инерции будет любая ось, и $I_{ll} = I_{xx}$ (эллипсоид инерции – сфера).

Примером может служить центральный эллипсоид инерции однородного шара (а также куба и любого правильного многогранника). Все три возможных случая мы разобрали.

6. Динамические уравнения Эйлера

Рассмотрим твердое тело В, совершающее сферическое движение относительно неподвижной точки O. Это означает, что точка O принадлежит условно неподвижной системе отсчета и одна из телесных точек во все время движения совпадает с точкой O. Например, в точке O может располагаться сферический шарнир. Введем две системы координат – неподвижную $O x'y'z'$ и подвижную $Oxyz$, жестко связанную с телом В.



Мы действуем сейчас точно так же, как мы действовали при выводе уравнений динамики абсолютно твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Именно подвижная система координат для нас будет основной, так как в ней компоненты оператора инерции тела B будут постоянными.

Поэтому для этих подвижных осей мы используем сейчас наиболее простые обозначения.

Пусть на тело B действуют активные внешние силы $\overline{\mathbf{F}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{F}}_N$ с главным моментом $\overline{\mathbf{L}}_O^{(e)}$.

Про главный вектор мы здесь не упомянули, потому что он нам не потребуется.

Как и в случае тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента в подвижных осях.

В подвижных осях теорема об изменении кинетического момента относительно неподвижной точки записывается так:

$$\frac{\widetilde{\mathrm{d}}\,\overline{\mathbf{K}}_O}{\mathrm{d}t} + [\,\overline{\square}, \overline{\mathbf{K}}_O\,] = \overline{\mathbf{L}}_O^{(e)}\,.$$

Здесь $\overline{\square}$ – угловая скорость тела B, а локальная производная вычисляется в связанной системе отсчета.

Все величины в записанной формуле относятся к абсолютному движению твердого тела.

Строго говоря, мы не все внешние силы учли. Помимо активных сил, есть еще реакция связей в точке O. Но с ней – все просто:

Вектор $\overline{\mathbf{R}}_O$ реакции связей в это уравнение не входит, так как $\overline{\mathbf{M}}_O(\overline{\mathbf{R}}_O) = 0$

Теперь воспользуемся постоянством оператора инерции в связанной системе координат.

Так как $\overline{\mathbf{K}}_O = \overline{\mathbf{J}}_O \overline{\square}$ и в связанной СО $\overline{\mathbf{J}}_O = \mathrm{const}$, то уравнение принимает вид:

$$\boxed{\overline{\mathbf{J}}_O \frac{\widetilde{\mathrm{d}} \overline{\square}}{\mathrm{d}t} + [\,\overline{\square}, \overline{\mathbf{J}}_O \overline{\square}\,] = \overline{\mathbf{L}}_O^{(e)}}\ ;$$

это – **уравнение Эйлера** динамики АТТ с неподвижной точкой (1750 г.).

Эйлер записал это уравнение отнюдь не в такой форме. В его времена векторов (и тем более линейных операторов) не знали. На самом деле он записал это уравнение в виде трех скалярных уравнений – в проекциях на оси связанной системы координат.

Замечание. По формуле Бура

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\square}}{\mathrm{d}t} = \frac{\widetilde{\mathrm{d}}\overline{\square}}{\mathrm{d}t} + [\,\overline{\square}, \overline{\square}\,] \equiv \frac{\widetilde{\mathrm{d}}\overline{\square}}{\mathrm{d}t}.$$

Поэтому символ локальной производной в уравнении Эйлера можно убрать, и оно останется верным. Мы, однако, не будем этого делать, так как чаще вычисления проводят именно в связанной системе координат. Получим теперь координатную форму уравнения Эйлера. Предположим, что оси $Oxyz$ – *главные оси инерции* тела B. Это предположение значительно упростит наши выкладки. Тогда

$$I^{Oxyz} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx}\,\Omega_x \\ I_{yy}\,\Omega_y \\ I_{zz}\,\Omega_z \end{pmatrix}.$$

$$[\,\overline{\square}, \overline{\mathbf{J}}_O \overline{\square}\,] = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ I_{xx}\,\Omega_x & I_{yy}\,\Omega_y & I_{zz}\,\Omega_z \end{vmatrix} =$$

$$= (I_{zz} - I_{yy})\,\Omega_y\,\Omega_z\,\bar{\mathbf{i}} + (I_{xx} - I_{zz})\,\Omega_z\,\Omega_x\,\bar{\mathbf{j}} +$$

$$+ (I_{yy} - I_{xx})\,\Omega_x\,\Omega_y\,\bar{\mathbf{k}}.$$

$$(*) \qquad \begin{cases} I_{xx}\dfrac{\mathrm{d}\Omega_x}{\mathrm{d}t} + (I_{zz} - I_{yy})\,\Omega_y\,\Omega_z = L_{Ox}^{(e)}, \\[2ex] I_{yy}\dfrac{\mathrm{d}\Omega_y}{\mathrm{d}t} + (I_{xx} - I_{zz})\,\Omega_z\,\Omega_x = L_{Oy}^{(e)}, \\[2ex] I_{zz}\dfrac{\mathrm{d}\Omega_z}{\mathrm{d}t} + (I_{yy} - I_{xx})\,\Omega_x\,\Omega_y = L_{Oz}^{(e)}. \end{cases}$$

Это – **динамические уравнения Эйлера** для АТТ с неподвижной точкой (1758 г.).

Эйлер, кстати, использовал несколько иные обозначения.

В обозначениях Эйлера:

$$A\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = (B-C)\,qr + L\,,$$

$$B\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = (C-A)\,rp + M\,,$$

$$C\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = (A-B)\,pq + N\,.$$

Заметьте, что обозначения Эйлера намного компактнее современных, и запомнить динамические уравнения Эйлера в таких обозначениях легче. Эйлер обозначает главные моменты инерции через A, B, C, проекции угловой скорости на подвижные оси – через p q, r, а проекции главного момента внешних сил на те же оси – через L, M, N.

Современные же обозначения более громоздки, зато они непосредственно выражают смысл каждой величины.

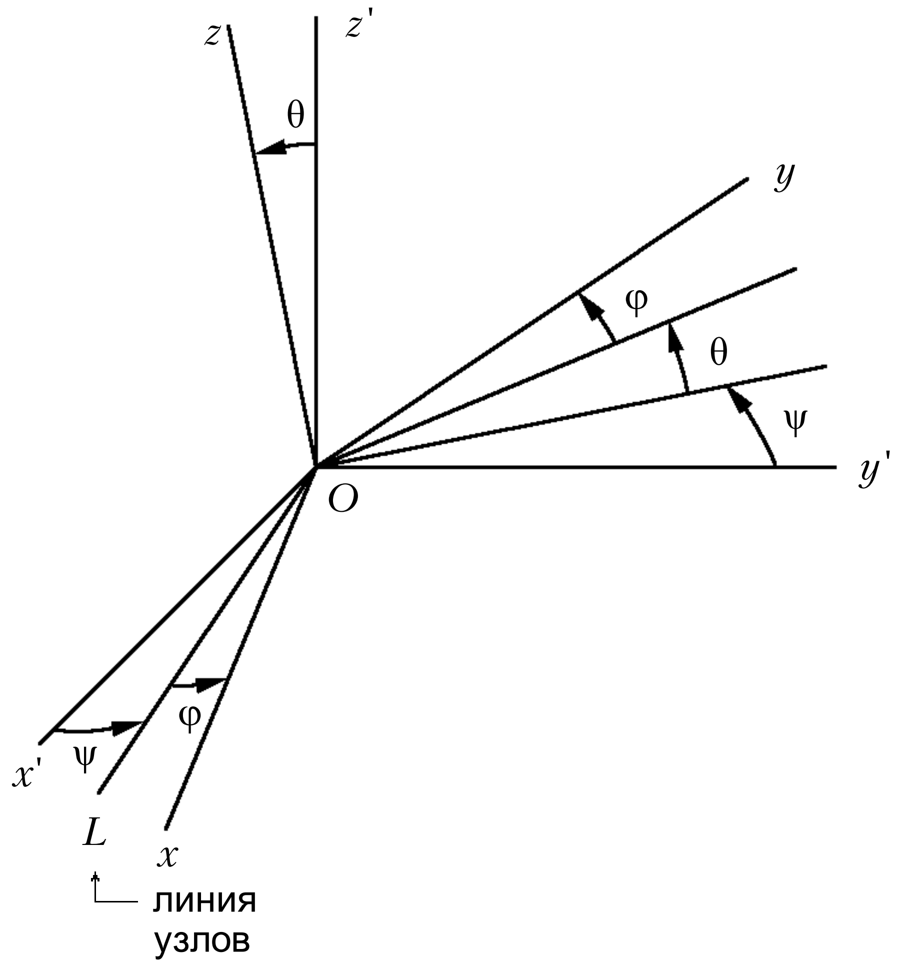
Нужно подчеркнуть, что динамические уравнения Эйлера записаны в главных осях инерции. Первоначально – восемью годами раньше – Эйлер получил уравнения динамики твердого тела в *произвольных* связанных осях. Но этим результатом он не был вполне удовлетворен: хотя уравнения и были правильными, но слишком уж громоздкими. А эти динамические уравнения оказались весьма удобными для практического использования. Вот и мы сейчас уделим немного внимания практическому использованию динамических уравнений Эйлера.

Для определения движения АТТ нужно дополнить эти уравнения кинематическими соотношениями – например, кинематическими уравнениями Эйлера:

$$(**)\qquad \begin{cases} \Omega_x = \dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi\,, \\ \Omega_y = \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi\,, \\ \Omega_z = \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi\,, \end{cases}$$

где ψ, θ, φ – углы прецессии, нутации и собственного вращения (углы Эйлера).

Эти уравнения были в курсе кинематики. Напомним, как вводятся углы Эйлера.



Здесь при переходе от неподвижных осей к подвижным выполняются три последовательных поворота.

Повороты: на ψ, θ, φ вокруг осей Oz', OL и Oz.

Запишем, что мы в результате имеем.

Если правые части уравнений (*) известны как явные функции ψ, θ, φ, $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ и времени t, то уравнения (*) $-$ (***) образуют систему шести дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Для ее интегрирования надо задать 6 начальных условий:

$$\psi(0) = \psi^\circ, \qquad \theta(0) = \theta^\circ, \qquad \varphi(0) = \varphi^\circ,$$

$$\Omega_x(0) = \Omega_x^\circ, \qquad \Omega_y(0) = \Omega_y^\circ, \qquad \Omega_z(0) = \Omega_z^\circ.$$

В результате будет найден закон сферического движения АТТ:

$$\psi = \psi(t), \qquad \theta = \theta(t), \qquad \varphi = \varphi(t).$$

По этим трем углам в любой момент времени можно будет найти матрицу направляющих косинусов для неподвижной и связанной систем координат, и тогда мы полностью будем знать текущую конфигурацию тела В.

До сих пор мы рассматривали частные случаи движения твердого тела: поступательное, вращательное, плоское, сферическое. Рассмотрим теперь общий случай движения свободного абсолютно твердого тела.

7. Уравнения динамики свободного абсолютно твердого тела

Пусть $Oxyz$ – неподвижная система координат. Свяжем с центром масс свободного тела B кенигову систему координат $Cx'y'z'$ и связанную систему координат $Cx^*y^*z^*$.

Напомним, что твердое тело – свободное, если на него не наложены никакие связи. Оно может совершать произвольное пространственное движение – все зависит от действующих на него активных сил.

Пусть $\overline{\mathbf{R}}^{(e)}$ и $\overline{\mathbf{L}}_C^{(e)}$ – главный вектор и главный момент действующих на тело B активных сил.

Запишем теорему об изменении кинетического момента относительно центра масс *в подвижных осях*:

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\,\overline{\mathbf{K}}_C^{\text{отн}}}{\mathrm{d}t} + [\,\overline{\square}, \overline{\mathbf{K}}_C^{\text{отн}}\,] = \overline{\mathbf{L}}_C^{(e)}\,.$$

Это новая формула, но справедливость ее очевидна: мы расписали по формуле Бура производную по времени от собственного кинетического момента тела. Полученное уравнение характеризует движение твердого тела относительно его центра масс, т.е. движение относительно кениговой системы отсчета. Преобразуем данное уравнение.

Так как $\overline{\mathbf{K}}_C^{\text{отн}} = \overline{\mathbf{J}}_C\,\overline{\square}$ и в связанной СО $\overline{\mathbf{J}}_C = \mathrm{const}$, то, используя также теорему о движении центра масс, имеем:

$$\boxed{\begin{aligned} & m\,\frac{\mathrm{d}\overline{\mathbf{v}}_C}{\mathrm{d}t} = \overline{\mathbf{R}}^{(e)}\,, \\ & \overline{\mathbf{J}}_C\,\frac{\tilde{\mathrm{d}}\,\overline{\square}}{\mathrm{d}t} + [\,\overline{\square}, \overline{\mathbf{J}}_C\,\overline{\square}\,] = \overline{\mathbf{L}}_C^{(e)} \end{aligned}}\quad .$$

Это – уравнения динамики свободного АТТ, или **уравнения Ньютона – Эйлера**.

В действительности оба этих уравнения – в координатном представлении – получил Эйлер. А имя Ньютона упоминается потому, что первое из них имеет тот же вид, что и уравнение второго закона Ньютона, справедливое для материальной точки. Напомним: основоположником динамики материальной точки был Ньютон, а динамики абсолютно твердого тела – Эйлер.

Заметим что первое из уравнений Ньютона – Эйлера записано без использования знака локальной производной: оно определяет абсолютное движение центра масс тела, и с ним удобнее работать в неподвижной системе координат.

После дополнения уравнений Ньютона – Эйлера кинематическими уравнениями получится система двенадцати дифференциальных уравнений 1-го порядка.

О каких кинематических уравнениях идет речь? Для движения центра масс надо записать, что производная от радиус-вектора центра масс равна его скорости; а для описания движения тела относительно центра масс можно применить, например, кинематические уравнения Эйлера.

Соответственно и число начальных условий для таких систем дифференциальных уравнений должно равняться двенадцати. Выписывать их сейчас не будем. Отметим такой факт:

Во многих простых задачах $\overline{\mathbf{R}}^{(e)}$ не зависит от углов Эйлера и угловых скоростей, а $\overline{\mathbf{L}}_C^{(e)}$ – от координат и скоростей центра масс. Тогда обе группы уравнений можно интегрировать независимо.

В противном случае приходится решать всю систему двенадцати уравнений одновременно.

Предметный и именной указатель