

<b>§ 6. Введение в аналитическую механику</b> .....	<b>2</b>
1. Аналитическое задание связей .....	2
2. Пример неголономной системы .....	7
3. Обобщенные координаты .....	8
4. Возможные перемещения .....	13
5. Критерий независимости условий связей .....	18
6. Работа и мощность системы сил .....	21
7. Обобщенные силы .....	24
8. Идеальные связи .....	27
<b>§ 7. Общее уравнение динамики</b> .....	<b>32</b>
1. Принцип Даламбера для СМТ .....	32
2. Принцип Даламбера для АТТ .....	36
3. Уравнения Лагранжа 1-го рода .....	39
4. Исследование уравнений Лагранжа 1-го рода .....	42
5. Принцип Даламбера – Лагранжа .....	45
6. Задача о качении диска по наклонной плоскости .....	49
7. Основная теорема о равновесии СМТ .....	50
8. Принцип возможных перемещений .....	54
9. Решение задач статики на основе принципа возможных перемещений .....	57
<b>§ 8. Уравнения Лагранжа 2-го рода</b> .....	<b>60</b>
1. Условия равновесия в обобщенных координатах .....	60
2. Тождества Лагранжа .....	62
3. Вывод уравнений Лагранжа 2-го рода .....	64
4. Теорема об изменении кинетической энергии СМТ .....	66
<b>§ 9. Механические системы с потенциальными силами</b> .....	<b>68</b>
1. Потенциальная энергия материальной точки .....	68
2. Потенциальная энергия точки в центральном силовом поле .....	72
3. Потенциальная энергия механической системы .....	74
4. Закон сохранения механической энергии .....	77
5. Уравнения Лагранжа для систем с потенциальными силами .....	81

## § 6. Введение в аналитическую механику

В предыдущих разделах нашего курса мы подробно рассмотрели получение уравнений движения механических систем. В частности, мы с Вами знаем дифференциальные уравнения движения системы материальных точек, вытекающие из 2-го закона Ньютона. Для твердого тела мы можем написать уравнения Ньютона – Эйлера.

Все эти уравнения, однако, не всегда удобны при исследовании движения систем со связями. Действительно, при наличии связей в этих уравнениях фигурируют реакции связей. Если в конкретной задаче они не представляют интереса, то их можно исключить; но процедура подобного исключения не всегда является простой.

Мы переходим к рассмотрению методов составления таких уравнений движения, в которых реакции связей вообще не фигурируют. Общие методы составления и исследования таких уравнений движения изучаются в аналитической механике.

### 1. Аналитическое задание связей

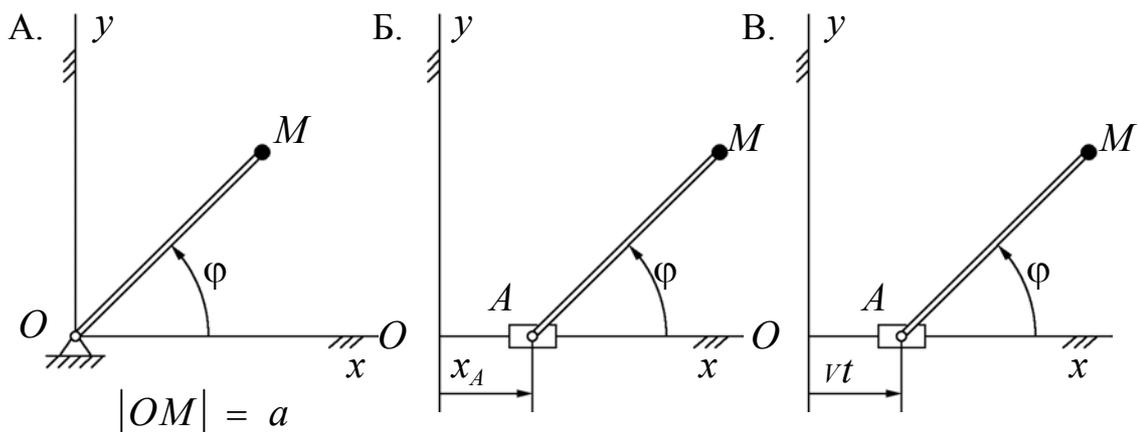
Со связями Вы познакомились еще в статике. Сейчас мы рассмотрим это понятие более систематически. Вспомним, как определяются связи в механике.

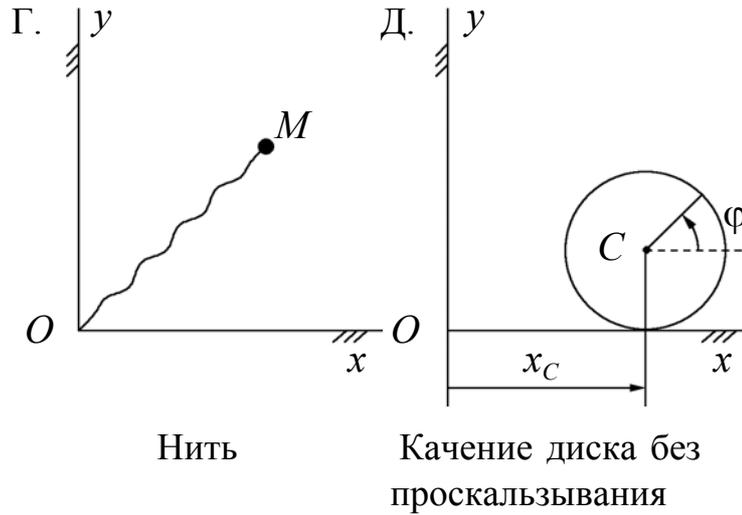
**Связи** – наперед заданные ограничения на координаты и скорости точек механической системы.

Обратите внимание на слова “наперед заданные”. Запишем, что эти слова означают.

Предполагается, что эти ограничения выполняются при любых действующих на систему силах.

Рассмотрим ряд примеров.





Выясним, как можно аналитически описать связи в данных примерах.

Для каждого из примеров мы выпишем сначала набор параметров, которыми можно описать положения всех точек и тел механической системы при отсутствии связей, а потом – условие, которому эти параметры должны удовлетворять.

- А.  $x_M, y_M$ .  $x_M^2 + y_M^2 - a^2 = 0$ .
- Б.  $x_M, y_M, x_A$ .  $(x_M - x_A)^2 + y_M^2 - a^2 = 0$ .
- В.  $x_M, y_M$ .  $(x_M - vt)^2 + y_M^2 - a^2 = 0$ .
- Г.  $x_M, y_M$ .  $x_M^2 + y_M^2 - a^2 \leq 0$ .
- Д.  $x_C, \varphi$ .  $v_{Cx} = -\dot{\varphi}R \quad \square \quad \dot{x}_C + \dot{\varphi}R = 0$ .

Из приведенных примеров видно, что связи могут задаваться в виде равенств или неравенств. Сформулируем общие утверждения, касающиеся произвольной системы материальных точек.

Если СМТ – свободная, то положения ее точек  $M_1, \dots, M_n$  и их скорости могут быть произвольными.

Если СМТ – несвободная, то имеются ограничения на координаты и скорости точек, которые могут быть заданы уравнениями или неравенствами вида

$$f_\alpha(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) \leq 0, \\ \alpha = 1, \dots, p.$$

Здесь  $p$  – число наложенных на систему условий связи. Для каждого условия может быть выбран знак “ $\leq$ ” или “ $=$ ”.

Примем важное для последующего анализа допущение.

Эти условия предполагаются непротиворечивыми и независимыми.

Данное допущение опять-таки проиллюстрируем на примерах; в отличие от примеров А – Д, эти примеры будем нумеровать.

**Пример 1.** Пусть координаты  $x, y, z$  точки  $M$  удовлетворяют условиям связи:

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 ,$$

$$(2) \quad z = 0 .$$

Первое из них означает, что точка не может сойти со сферы радиуса  $R$ ; второе – что точка может двигаться лишь в плоскости  $Oxy$ .

Оба условия непротиворечивы (могут выполняться одновременно) и независимы (не вытекают друг из друга). В совокупности они означают, что точка может двигаться по окружности радиуса  $R$ , лежащей в плоскости  $Oxy$ . Запишем это:

В силу условий (1) и (2) точка  $M$  должна принадлежать окружности, по которой пересекаются сфера (1) и плоскость (2) .

**Пример 2.** Если условие (2) заменить условием

$$(2') \quad z - 2R = 0 ,$$

то условия (1) и (2) будут противоречивыми.

В самом деле, первое условие означает, что расстояние от точки  $M$  до начала координат равно  $R$ ; со вторым условием это несовместимо.

**Пример 3.** Если к условиям (1) , (2) добавить условие

$$(3) \quad x^2 + y^2 - R^2 = 0 ,$$

то условия (1) – (3) не будут независимыми.

Действительно, условие (2) означает, что точка может двигаться по поверхности цилиндра радиуса  $R$ ; но уравнение (3) может быть получено как следствие уравнений (1) – (2).

Вернемся к примерам А – Д. С их помощью проиллюстрируем классификацию связей, используемую в аналитической механике.

### Классификация связей.

1°. Связь – **удерживающая**, если она может быть задана при помощи уравнения (А, Б, В, Д).

Г: связь неудерживающая.

Это означает, что она задана неравенством.

Иногда говорят соответственно о двусторонних и односторонних связях.

2°. Связь – **стационарная**, если в условии связи время явно не входит (А, Б, Г, Д).

В: связь нестационарная.

3°. Связь – **геометрическая**, если в условии связи не входят скорости (А, Б, В, Г).

Д: связь кинематическая.

4°. Связь – **голономная**, если условие связи может быть преобразовано к виду, не содержащему производных от координат (А – Д).

Для случаев А, Б, В, Г это утверждение очевидно.

В случае Д:

$$\dot{x}_C + \dot{\varphi}R = 0$$

□

$$\frac{d}{dt} (x_C + \varphi R) = 0$$

□

$$x_C + \varphi R = C$$

□

$$x_C + \varphi R - C = 0 ;$$

здесь  $C$  – константа, зависящая от начальных условий.

Таким образом, в случае Д кинематическая связь оказалась голономной. Итак, во всех наших примерах связи – голономные; а пример неголономной связи мы рассмотрим чуть позже.

Заметим, что последнее уравнение можно рассматривать как уравнение геометрической связи. Но: в этом уравнении фигурирует константа интегрирования  $C$ , которая остается неопределенной, пока не заданы конкретные начальные условия. В уравнения же “настоящих” геометрических связей такие постоянные не входят.

Подобная ситуация имеет место и в общем случае. Поэтому:

Голономную кинематическую связь всегда можно свести к геометрической, но при этом в условие связи войдет постоянная интегрирования.

После этого обсуждения понятия голономной связи запишем такое резюме:

Все геометрические связи – голономные, а кинематические бывают и голономными, и неголономными.

Остальные термины из различных пунктов приведенной классификации могут сочетаться в любых комбинациях.

Сделаем еще ряд замечаний относительно неударяющих связей.

Условие каждой такой связи записывается в виде неравенства, а не уравнения. Знак операции в этом неравенстве – нестрогий (“меньше или равно”). Значит, реально – при конкретных значениях координат и скоростей точек – данное неравенство может реализовываться либо как равенство, либо как строгое неравенство.

Используют такую терминологию:

Если неравенство, характеризующее неударяющую связь, в данный момент времени обратилось в равенство, то говорят, что связь **напряжена**; если оно обратилось в строгое неравенство, то говорят, что связь **ослабла**.

Иногда еще говорят, что система соответственно находится на связи или сошла с нее. Такие выражения широко употребляют, хотя это и не совсем правильно: ведь само по себе условие связи должно выполняться всегда.

На рисунке к примеру Г, где точка  $M$  соединена нитью с точкой  $O$ , изображена как раз ситуация, когда связь ослабла.

Если выполнить для такой связи процедуру освобождения от связей, то мы введем в рассмотрение реакции связей.

Если неупругая связь ослабла, то ее реакция равна нулю. Если она напряжена, то реакция, вообще говоря, отлична от нуля.

В примере Д: если  $x_M^2 + y_M^2 - a^2 = 0$ , то реакция связи  $\bar{\mathbf{R}}$  (сила натяжения) будет направлена вдоль  $\bar{\mathbf{r}}_M$ , причем  $(\bar{\mathbf{r}}_M, \bar{\mathbf{R}}) \leq 0$ .

Иными словами, знак проекции силы натяжения на направление радиус-вектора не может быть положительным. Это и понятно: ведь нить препятствует дальнейшему увеличению расстояния точки  $M$  от точки  $O$ , но не может препятствовать уменьшению этого расстояния.

Все это справедливо и в общем случае. Поэтому обычно поступают следующим образом.

В задачах с неупругими связями часто поступают так: если связь ослабла, то ее не учитывают, а если напряжена – трактуют ее как упругую.

Иными словами, в последнем случае считают, что вместо знака неравенства в условии связей стоит знак равенства.

Это вполне разумно, но только в случае, когда связь напряжена, надо контролировать знак соответствующей проекции реакции. Если он обратился в нуль, то надо выяснить, действительно ли данная связь ослабевает, и если так – исключить связь из рассмотрения.

Если же связь ослабла, то надо, исследуя дальнейшее движение системы, следить, действительно ли неравенство остается строгим. Если оно обратилось в равенство – значит, система вернулась на связь; кстати, при таком возвращении обычно происходит удар, т.е. скачкообразное изменение скоростей.

Задачи о сходе системы с неупругой связью и о ее возврате на связь мы в нашем курсе рассматривать не будем. Запишем:

Далее неупругие связи не рассматриваются.

В задачах, которые мы будем решать, такие связи часто будут присутствовать; но мы, как уже отмечалось, либо будем заменять их упругими, либо игнорировать.

Однако полностью отмахнуться от неупругих связей мы не можем: они широко распространены. Поэтому в формулировках основных теорем мы предположим о том, что рассматриваются упругие связи, будем обычно оговаривать.

Итак, рассматриваем связи, задаваемые уравнениями

$$f_\alpha(x_1, \dots, z_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{z}_n, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, p.$$

Более компактная запись:

$$f_\alpha(\bar{\mathbf{r}}_1, \dots, \bar{\mathbf{r}}_n, \bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n, t) = 0.$$

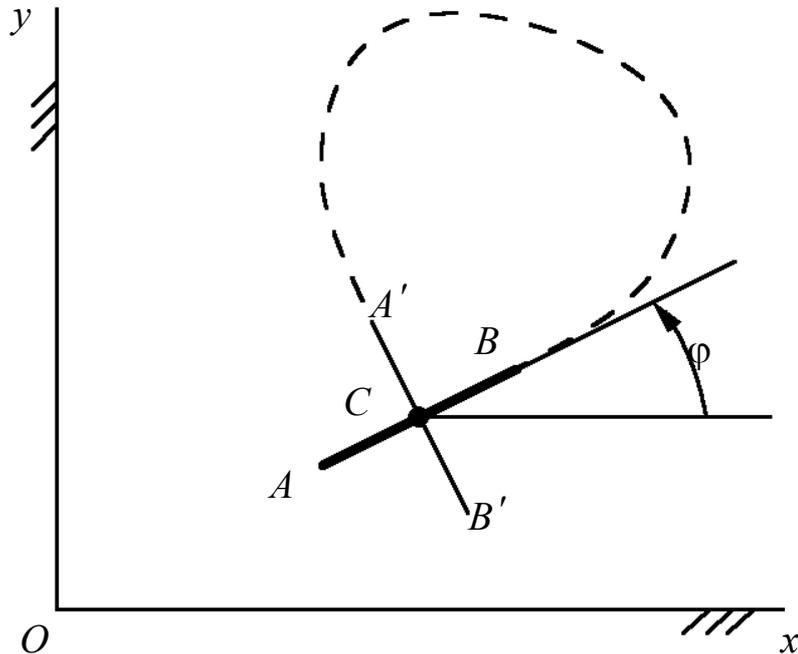
Для дальнейшего сделаем одно допущение о виде функций  $f_\alpha$ .

Будем считать, что в случае геометрических связей функции  $f_\alpha$  трижды непрерывно дифференцируемы, а в случае кинематических связей – дважды.

Потом мы этим допущением будем пользоваться. В наших примерах А – Д, кстати, все функции дифференцируемы бесконечное число раз. Так бывает часто, но не всегда.

## 2. Пример неголономной системы

Пусть конек  $AB$  с выпуклым лезвием движется по льду, касаясь его в одной точке  $C$ .



Зададим положение конька координатами  $x_C$ ,  $y_C$ ,  $\varphi$ ; тогда условие непроскальзывания конька в поперечном направлении имеет вид:

$$\bar{v}_C \perp \overline{AB}.$$

Иначе говоря, вектор скорости точки  $C$  должен быть направлен вдоль конька и не может быть направлен поперек.

Получим условие этой связи в явном виде. Заметим, что компоненты обоих векторов должны быть пропорциональны:

$$\frac{v_{Cx}}{v_{Cy}} = \frac{|AB| \cos \varphi}{|AB| \sin \varphi}$$

□

$$v_{Cx} \sin \varphi = v_{Cy} \cos \varphi$$

□

$$(*) \quad \dot{x}_C \sin \varphi - \dot{y}_C \cos \varphi = 0.$$

Вот мы и получили условие связи. Как видно из уравнения (\*), связь эта является кинематической. Для дальнейшего нам потребуется также иная запись этого условия – не через производные, а через дифференциалы.

Запись через дифференциалы:

$$\sin \varphi dx_C - \cos \varphi dy_C = 0.$$

Теперь заметим, что мы можем из заданного начального положения переместить конек в любое другое, какими бы значениями координат  $x_C, y_C, \varphi$  оно не характеризовалось.

Например, можно перевести точку  $C$  в начальное положение, но с другим значением  $\varphi$ . На рисунке показано, как будет двигаться при этом конек; в результате он займет положение  $A'B'$ .

Делаем вывод:

На координаты  $x_C, y_C, \varphi$  ограничений не налагается, так что условие связи (\*) не может быть сведено к уравнению

$$f(x_C, y_C, \varphi) = 0.$$

Поэтому связь – неголономная.

Это утверждение может быть обосновано и формально.

В самом деле, продифференцируем это уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial x_C} dx_C + \frac{\partial f}{\partial y_C} dy_C + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi = 0;$$

слагаемое с  $d\varphi$  отсутствует  $\square$   $f$  не зависит от  $\varphi$ .

А мы видели, что условие связи, записанное через дифференциалы, не содержит  $d\varphi$ , но от  $\varphi$  зависит.

Еще один важный пример неголономной системы мы только упомянем.

**Замечание.** Можно показать, что шар, катящийся без проскальзывания по шероховатой плоскости, тоже является неголономной механической системой.

### 3. Обобщенные координаты

Введем важное понятие конфигурации механической системы. Для простоты формулировок сделаем это применительно к системе материальных точек.

**Конфигурация** СМТ – совокупность положений точек системы в данный момент времени.

Теперь определим еще одно понятие, тесно связанное с предыдущим.

**Конфигурационное пространство** (КП) механической системы – совокупность всевозможных конфигураций системы, допускаемых связями.

Введение понятия конфигурационного пространства позволяет эффективно использовать язык многомерной геометрии. Именно:

Каждой конфигурации сопоставляется некоторая изображающая точка в конфигурационном пространстве.

Изучение движения системы при этом сводится к изучению движения этой изображающей точки.

Рассмотрим два частных случая.

Для свободной СМТ ее конфигурация задается набором радиус-векторов  $\bar{\mathbf{r}}_1, \dots, \bar{\mathbf{r}}_n$  и характеризуется набором  $3n$  декартовых координат  $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$ .

Эти координаты независимы (их можно задавать произвольно) и однозначно определяют конфигурацию.

Следовательно, в этом случае конфигурационное пространство можно трактовать как обычное координатное пространство размерности  $3n$ :

$$\dim \text{КП} = 3n.$$

Все перечисленные нами декартовы координаты – это координаты изображающей точки в данном пространстве. Таким образом, их можно считать компонентами одного вектора  $3n$ -мерного пространства.

Набор данных декартовых координат рассматривается как набор компонент  $3n$ -мерного вектора  $\bar{\mathbf{r}}$  – *радиус-вектора* изображающей точки.

Обычно терминология многомерной геометрии оказывается более удобной, позволяя упростить и формулировки, и обозначения. Многие формулы, получаемые для механической системы, выглядят так же, как и в случае одной материальной точки.

Итак, радиус-вектор изображающей точки однозначно задает конфигурацию механической системы.

Ситуация несколько меняется, если система материальных точек не является свободной.

Если же на СМТ наложены удерживающие геометрические связи

$$(*) \quad f_\alpha(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, p,$$

то только  $3n - p$  декартовых координат можно задать независимо; остальные  $p$  определяются из уравнений связей.

Сейчас мы для определенности не рассматриваем кинематические связи (которые налагают ограничения на скорости, а не на координаты).

Уравнения связей (\*) допускают простую геометрическую интерпретацию.

Каждое из уравнений (\*) задает гиперповерхность в КП свободной системы (возможно, изменяющуюся с течением времени).

Если конфигурация удовлетворяет данному условию связи, то изображающая точка лежит на этой гиперповерхности.

Обозначим  $s = 3n - p$ ; тогда для КП системы со связями

$$\dim \text{КП} = s.$$

Итак,  $s$  – это число координат, задаваемых независимо. Конфигурации теперь не могут быть вполне произвольными, а конфигурационное пространство – это уже не  $3n$ -мерное координатное пространство, а  $s$ -мерное многообразие в нем (кривая, поверхность и т.д.). Запишем:

КП системы со связями вложено в КП свободной системы; оно совпадает с пересечением гиперповерхностей, отвечающих отдельным связям.

Вспомните пример 1 из первого пункта, на котором мы иллюстрировали предположение о непротиворечивости и независимости условий связей.

В нем на одну точку были наложены две связи. Одной из них отвечала сфера в обычном трехмерном пространстве, другой – плоскость. Конфигурационное пространство, как мы видели, оказалось одномерным: это была окружность, по которой пересекаются эти две двумерные поверхности.

**Замечание.** Проведенные рассуждения опираются на предположение о непротиворечивости и независимости условий связей.

Действительно, в примере 3 из первого пункта было добавлено третье условие, по которому точка должна была принадлежать еще и цилиндрической поверхности; это условие не было независимым, так что конфигурационное пространство осталось одномерным (по-прежнему точка должна была лежать на окружности). В примере 2, когда условия связей были противоречивыми, пересечение поверхностей вообще свелось к пустому множеству.

Нередко бывает удобнее выбирать в качестве независимо задаваемых координат не сами декартовы координаты, а другие параметры (тоже  $s$  штук), через которые эти декартовы координаты можно однозначно выразить.

В связи с этим используют такую терминологию:

**Обобщенными координатами** называются *независимые* переменные  $q_1, \dots, q_s$ , однозначно определяющие конфигурацию механической системы.

Обратите внимание, что их число совпадает с размерностью конфигурационного пространства. Это и неудивительно:

Обобщенные координаты представляют собой координаты на конфигурационном пространстве механической системы.

В общем случае эти координаты являются криволинейными.

Из данного определения вытекает:

$$\bar{\mathbf{r}}_v = \bar{\mathbf{r}}_v(q_1, \dots, q_s, t),$$

т.е.

$$x_1 = x_1(q_1, \dots, q_s, t),$$

...

$$z_n = z_n(q_1, \dots, q_s, t).$$

Иными словами, и радиус-векторы точек системы, и все  $3n$  их декартовых координат однозначно выражаются через обобщенные координаты.

Такие зависимости получают, используя условия связей (\*) .

В записанные нами зависимости входит время  $t$  – как параметр. Если связи стационарные, то всегда можно выбрать такие обобщенные координаты, что данные зависимости не будут включать  $t$ .

По существу, не употребляя этого термина, мы уже неоднократно пользовались обобщенными координатами. Например, положение математического маятника определялось углом  $\varphi$  отклонения его от вертикали. А положение свободного абсолютно твердого тела мы задавали тремя декартовыми координатами его центра масс и тремя углами Эйлера. Все это – примеры обобщенных координат.

В общем случае обобщенные координаты могут иметь различный смысл и различную размерность. Ими могут быть линейные и угловые величины, а также параметры, имеющие размерность площади или объема.

Обратимся к примерам (а именно – к примерам А – Д из пункта 1).

В примерах из пункта 1:

А. КП – окружность радиуса  $a$ .

$$s = 1. \quad q_1 = \varphi. \quad \begin{cases} x_M = a \cos \varphi, \\ y_M = a \sin \varphi. \end{cases}$$

О координате  $z_M$  не говорится, так как мы уже заранее объявили, что все эти задачи – плоские.

$$Б. \quad s = 2. \quad q_1 = x_A, \quad q_2 = \varphi. \quad \begin{cases} x_M = x_A + a \cos \varphi, \\ y_M = a \sin \varphi. \end{cases}$$

А что собой представляет конфигурационное пространство? Ясно, что оно является двумерным.

КП – цилиндрическая поверхность.

Действительно, каждой конфигурации можно взаимно однозначно сопоставить точку некоторой цилиндрической поверхности;  $x_A$  будет отсчитываться вдоль образующей, а  $\varphi$  – поперек.

$$В. \quad s = 1. \quad q_1 = \varphi. \quad \begin{cases} x_M = vt + a \cos \varphi, \\ y_M = a \sin \varphi. \end{cases}$$

КП – окружность радиуса  $a$  (движущаяся).

Теперь обратите внимание: мы пока в этом пункте предполагали, что связи – удерживающие и геометрические. В оставшихся двух примерах связи этому предположению не удовлетворяют. Посмотрим, что из этого следует.

$$Г. \quad s = 2. \quad q_1 = x_M, \quad q_2 = y_M.$$

$$\text{КП – круг: } x_M^2 + y_M^2 \leq a^2.$$

При отсутствии нити конфигурационным пространством в нашем примере была бы вся плоскость, а теперь это пространство свелось к кругу.

Аналогична ситуация и в общем случае. Запишем:

Наложение неудерживающих связей не понижает размерности КП, а лишь выделяет область в нем; обращение неравенства в равенство отвечает выходу на ее границу.

Теперь – пример задачи с кинематической связью.

$$Д. \quad s = 2. \quad q_1 = x_C, \quad q_2 = \varphi.$$

Здесь имеется в виду, что диск, прежде чем его поставили на плоскость, можно повернуть на произвольный угол  $\varphi$ .

Лишь после задания начальных условий координаты  $x_C$  и  $\varphi$  оказываются зависимыми.

В этом случае мы можем ограничиться рассмотрением конфигурационного пространства размерности 1 и считать, что кинематическая связь заменена геометрической.

А в примере с коньком на льду даже после задания начальных условий никакой зависимости между координатами не возникает. Делаем вывод:

Наложение кинематических связей не понижает размерности КП.

Соглашение. Далее рассматриваются только голономные связи, причем кинематические связи заменяются геометрическими.

Дело в том, что в рамках аналитической механики изучению неголономных систем посвящен отдельный большой раздел со своим специфическим аппаратом. Обычно теорию неголономных систем излагают не в составе курса теоретической механики, а в специальных курсах.

Напомним, что раньше мы отказались от рассмотрения неударяющих связей.

Разумеется, время от времени мы будем вспоминать о том, что имеются также неударяющие и неголономные связи. Но соответствующие случаи всегда будут оговариваться особо.

Важное замечание: в формулировках основных теорем я не буду указывать специально, что они относятся именно к голономным системам: это будет подразумеваться. Ни на практических занятиях, ни на экзамене Вы с задачами неголономной механики не встретитесь.

Так что запомните и не забудьте во время экзамена: все теоремы аналитической механики мы формулируем и доказываем только для голономных связей. О том, что связи бывают голономные и неголономные, Вам придется говорить, лишь отвечая на вопрос “Классификация связей”.

Введем еще одно важное понятие.

**Обобщенные скорости**  $\dot{q}_i$  – производные по времени от обобщенных координат.

Если обобщенная координата является линейной координатой какой-либо точки, то и соответствующая обобщенная скорость будет иметь размерность линейной скорости. Если обобщенная координата есть угол поворота, то обобщенная скорость будет угловой скоростью.

Выразим скорость  $v$ -й точки системы материальных точек через обобщенную скорость.

Для скорости точки  $M_v$ :

$$\bar{\mathbf{v}}_v \equiv \frac{d\bar{\mathbf{r}}_v}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial t}.$$

Таким образом, скорость любой точки системы линейно зависит от обобщенных скоростей. Коэффициенты в этом выражении имеют свое название.

Коэффициент  $\bar{\mathbf{u}}_v^{(i)} \equiv \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i}$  называется **передаточной функцией**

линейной скорости точки  $M_v$  для  $i$ -й обобщенной скорости.

Эти коэффициенты в общем случае являются функциями обобщенных координат и времени.

Итак:

$$\bar{\mathbf{v}}_v = \sum_i \bar{\mathbf{u}}_v^{(i)} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial t} .$$

Полученное выражение линейной скорости через обобщенные скорости нам не раз еще потребуется.

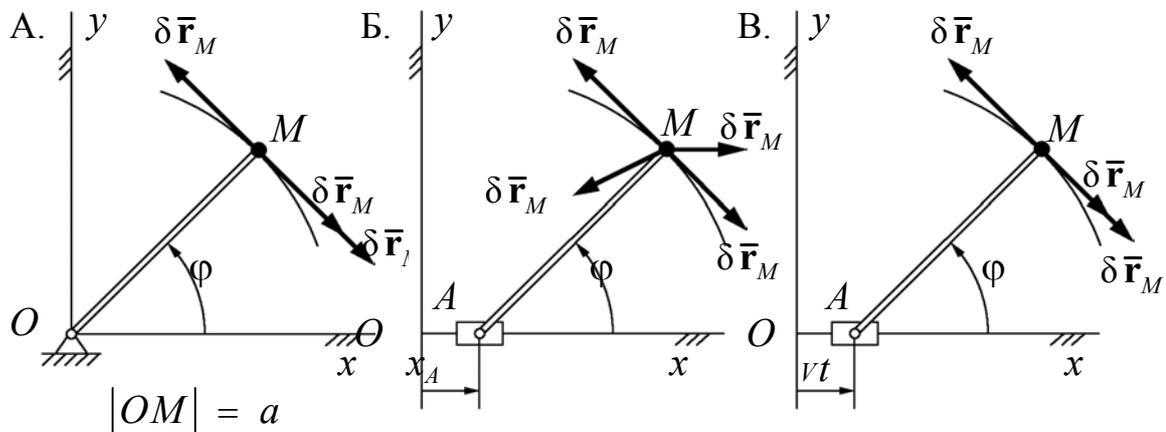
#### 4. Возможные перемещения

**Возможными перемещениями**  $\delta \bar{\mathbf{r}}_v$  точек механической системы называются любые бесконечно малые перемещения точек, которые допускаются связями в данный момент времени.

Обратите внимание: по определению, возможными перемещениями называются только бесконечно малые перемещения. Фактически речь идет о дифференциалах; только обозначаются они  $\delta \bar{\mathbf{r}}_v$ , а не  $d \bar{\mathbf{r}}_v$ . Почему это так, мы увидим чуть позже.

Далее, надо учитывать, что возможные перемещения не должны противоречить наложенным на систему связям. Например, в примере А из пункта 1, когда точка должна двигаться по окружности, вектор ее возможного перемещения должен быть направлен... как? Разумеется, по касательной к окружности.

Рассмотрим примеры А – В чуть более подробно.



В примере В возможные перемещения направлены по касательной к окружности с центром в точке А. Это следует из того, что рассматриваются лишь перемещения, дозволяемые связями в данный момент времени, т.е. время  $t$  предполагается фиксированным.

Полезно вывести ограничения на значения компонент вектора  $\delta \bar{\mathbf{r}}_M$  непосредственно из условий связей.

В примере А:

$$x_M^2 + y_M^2 - a^2 = 0$$

□

$$2x_M \delta x_M + 2y_M \delta y_M = 0 .$$

Сделаем то же и в примере В, учитывая, что время фиксировано.

В примере В:

$$(x_M - vt)^2 + y_M^2 - a^2 = 0$$

□

$$2x_M \delta x_M - 2vt \delta x_M + 2y_M \delta y_M = 0.$$

Действительно, компоненты всех нарисованных нами векторов  $\delta \bar{\mathbf{r}}_M$  удовлетворяют этим соотношениям.

В обоих примерах вектор  $\delta \bar{\mathbf{r}}_M$  направлен по касательной к окружности.

Только окружности в этих примерах – разные: у первой из них центр в точке  $O$ , а у второй – в точке  $A$  (ведь произведение  $vt$  как раз и равно координате  $x_A$ ).

Если бы конфигурационным пространством точки  $M$  была не окружность, а какая-либо другая кривая, то и тогда вектор возможного перемещения был бы направлен по касательной.

Этот вывод обобщается и на конфигурационные пространства другой размерности.

В общем случае удерживающих голономных связей:

$$(*) \quad f_\alpha(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0$$

□

$$\boxed{\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_n} \delta z_n = 0},$$

$$\alpha = 1, \dots, p.$$

Это – **условия на компоненты возможных перемещений**; они получаются дифференцированием уравнений связей при “замороженном” времени.

Оговорка относительно “замораживания” времени имеет значение в случае, когда связи являются нестационарными. В уравнения же стационарных связей время не входит по определению.

Выписанным нами условиям на компоненты возможных перемещений можно дать простую геометрическую трактовку. В самом деле, мы уже говорили, что каждое из уравнений связей (если они – удерживающие и голономные) задает гиперповерхность в конфигурационном пространстве свободной системы.

Для функции  $f_\alpha$   $3n$ -мерный вектор с компонентами  $\partial f_\alpha / \partial x_1, \dots, \partial f_\alpha / \partial z_n$  – это вектор ее градиента  $\bar{\mathbf{G}}^{(\alpha)} = \text{grad} f_\alpha$ ; он направлен по нормали к гиперповерхности (\*) в КП свободной системы.

Напомним, что время сейчас “заморожено”, т.е. это – не один из аргументов, а некоторый фиксированный параметр.

Каждое из записанных условий выражает ортогональность вектора градиента  $\bar{\mathbf{G}}^{(\alpha)}$  и  $3n$ -мерного вектора  $\delta \bar{\mathbf{r}}$  – вектора возможного перемещения изображающей точки с компонентами  $\delta x_1, \dots, \delta z_n$ .

Действительно, в левой части данного соотношения стоит записанное в координатах скалярное произведение двух  $3n$ -мерных векторов. Утверждается, что оно равно нулю, т.е. векторы – ортогональны.

В компактной записи:

$$(\bar{\mathbf{G}}^{(\alpha)}, \delta \bar{\mathbf{r}}) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, p.$$

Это – действительно компактная запись условий на компоненты возможных перемещений.

Таким образом, вектор градиента функции  $f_\alpha$  (а он направлен по нормали к гиперповерхности (\*)), ортогонален любому из векторов возможных перемещений. Но если вектор в точке поверхности ортогонален вектору ее нормали в данной точке – значит, он лежит в касательной плоскости. Это верно и в многомерном случае, только речь идет соответственно о гиперповерхности и о касательной гиперплоскости. Теперь учтем, что на систему материальных точек наложена не одна, а  $p$  связей. Конфигурационное пространство системы со связями является пересечением соответствующих гиперповерхностей.

Введем в связи с этим такое определение.

Всякий  $3n$ -мерный вектор  $\bar{\mathbf{v}}$ , лежащий в пересечении гиперплоскостей, касательных к гиперповерхностям (\*) в данной изображающей точке, называется **касательным вектором** к конфигурационному пространству в этой точке.

Перед этим мы видели, что вектор  $\delta \bar{\mathbf{r}}$  тоже должен принадлежать всем этим гиперплоскостям. Делаем вывод:

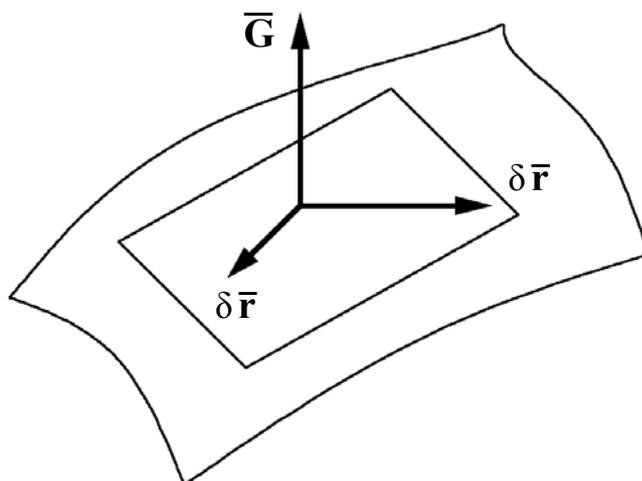
Вывод:  $3n$ -мерный вектор  $\delta \bar{\mathbf{r}}$  является касательным вектором к КП.

Наглядно проиллюстрировать все это мы можем только в случае малых размерностей.

**Пример.** Пусть система состоит из одной материальной точки, и на нее наложена одна геометрическая связь:

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

Данное уравнение определяет поверхность в трехмерном пространстве. Тогда мы можем нарисовать такой рисунок:



Эта поверхность является конфигурационным пространством для системы со связями (двумерным).

Если бы у нас на материальную точку были наложены две связи, то обе поверхности пересекались бы по кривой, которая и служила бы конфигурационным пространством системы со связями (оно было бы уже одномерным). Касательная к данной кривой совпадала бы с прямой, по которой пересекаются две касательные плоскости, а вектор возможного перемещения был бы направлен вдоль данной прямой.

Условия на компоненты возможных перемещений мы представили в двух эквивалентных формах: скалярной и многомерной. Иногда бывает полезной и третья форма записи условий, в которой оперируют с обычными трехмерными векторами.

Иная форма записи условий на компоненты возможных перемещений:

$$\sum_v (\bar{\mathbf{G}}_v^{(\alpha)}, \delta \bar{\mathbf{r}}_v) = 0,$$

где  $\bar{\mathbf{G}}_v^{(\alpha)} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_v} \mathbf{i} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_v} \mathbf{j} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_v} \mathbf{k}$  – вектор градиента связи с номером  $\alpha$  для  $v$ -й точки.

Действительно, если в условиях на компоненты, представленных в скалярной записи, сгруппировать произведения по три, получим в точности скалярные произведения, фигурирующие под знаком суммы.

В пункте 1 мы сделали предположение о том, что функции  $f_\alpha$  трижды непрерывно дифференцируемы. В этой связи отметим:

Векторы  $\bar{\mathbf{G}}_v^{(\alpha)}$  являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями координат  $x_1, \dots, z_n$  и времени  $t$ .

Все три формы записи условий на компоненты возможных перемещений эквивалентны. Иногда удобнее пользоваться одной из них, иногда – другой.

Сравним теперь положение дел для возможных перемещений с ситуацией для действительных бесконечно малых перемещений.

Для действительных бесконечно малых перемещений  $d\bar{\mathbf{r}}_v$  (элементарных перемещений), совершаемых точками системы в реальном движении под действием приложенных к ним сил за время  $dt$ :

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_n} dz_n + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0.$$

Обозначая  $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = g_\alpha$ , запишем это условие также в виде:

$$\sum_v (\bar{\mathbf{G}}_v^{(\alpha)}, d\bar{\mathbf{r}}_v) + g_\alpha dt = 0,$$

или

$$(\bar{\mathbf{G}}^{(\alpha)}, d\bar{\mathbf{r}}) + g_\alpha dt = 0.$$

Мы видим, что условия на компоненты действительных перемещений отличаются от условий на компоненты возможных перемещений наличием последнего слагаемого. В случае не-

стационарных связей оно может быть отличным от нуля. Если же связи стационарны, то оба соотношения имеют один и тот же вид.

Есть, правда, и еще одно отличие. В случае возможных перемещений их компоненты связаны только условиями, вытекающими из наложенных на систему связей, а в остальном – произвольны. Для действительного перемещения все дифференциалы координат являются дифференциалами зависимых переменных и могут быть выражены через  $dt$ .

Но на этом мы сейчас не останавливаемся. Запишем:

В случае стационарных связей действительное перемещение совпадает с одним из возможных; в случае нестационарных связей оно может не принадлежать к числу возможных перемещений.

Проиллюстрируем последнее утверждение.

В примере В: перемещение  $d\bar{\mathbf{r}}_M$  равно геометрической сумме перемещения точки  $A$  и перемещения, связанного с поворотом точки  $M$  относительно точки  $A$ . Поэтому  $d\bar{\mathbf{r}}_M$  заведомо принадлежит к числу возможных перемещений лишь при  $\varphi = \pm \pi/2$ .

Только в этих случаях вектор бесконечно малого перемещения точки  $A$  параллелен касательной к окружности в точке  $M$ ; а тогда и геометрическая сумма обоих перемещений будет направлена по касательной к окружности.

Итак, мы выяснили, какие условия на компоненты возможных перемещений должны выполняться, если на систему наложены связи.

Рассмотрим теперь, как векторы возможных перемещений выражаются через обобщенные координаты.

Бесконечно малые приращения  $\delta q_i$  обобщенных координат, соответствующие возможным перемещениям  $\delta \bar{\mathbf{r}}_v$ , называются **вариациями** обобщенных координат.  $\delta q_i$  можно брать произвольными, так как  $q_i$  независимы.

Так как

$$\bar{\mathbf{r}}_v = \bar{\mathbf{r}}_v(q_1, \dots, q_s, t),$$

то

$$\delta \bar{\mathbf{r}}_v = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_s} \delta q_s.$$

Для действительных перемещений:

$$d\bar{\mathbf{r}}_v = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_1} dq_1 + \dots + \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_s} dq_s + \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial t} dt.$$

Из этих выражений вновь видно, что в случае стационарных связей действительные перемещения принадлежат к числу возможных, а в случае нестационарных связей – не обязательно.

**Замечание.** При наличии неголономных связей вариации обобщенных координат не являются независимыми.

Действительно, при введении конфигурационного пространства мы учитывали только удерживающие голономные связи. Следовательно, только такие связи исключаются из рассмотрения при переходе от декартовых координат к обобщенным.

Например, в задаче о коньке на льду вариации обобщенных координат  $x_C, y_C$ ,  $\varphi$  связаны соотношением

$$\sin \varphi \delta x_C - \cos \varphi \delta y_C = 0 .$$

Мы такое соотношение выписывали для дифференциалов, т.е. для действительных бесконечно малых перемещений. Но связь эта – стационарная, и вариации удовлетворяют тем же ограничениям, что и дифференциалы.

В заключение данного пункта запишем одно определение.

**Число степеней свободы** механической системы – число независимых возможных перемещений.

Для голономных систем оно равно числу  $s$  обобщенных координат, для неголономных – меньше  $s$  на число неголономных связей.

Рассмотрим примеры, на которых мы одновременно обсудим предположение о независимости условий связей.

## 5. Критерий независимости условий связей

Вновь рассмотрим систему уравнений

$$(*) \quad f_\alpha (x_1, \dots, z_n, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, p ;$$

время  $t$  считаем параметром.

Именно так трактовалось время при формулировке определений конфигурационного пространства и возможных перемещений (оно считалось “замороженным”). Поэтому сейчас функции  $f_\alpha$  мы считаем функциями  $3n$  декартовых координат изображающей точки.

Как мы уже не раз отмечали, условия связей предполагаются непротиворечивыми и независимыми.

Непротиворечивость означает просто, что пересечение всех гиперповерхностей (\*) непусто, т.е. наша система уравнений является совместной.

А вот требование независимости мы сейчас обсудим более подробно, поскольку до сих пор мы ограничивались лишь словесными формулировками и примерами.

Фактически под независимостью условий связей понимается независимость функций  $f_\alpha$  – по крайней мере, в окрестностях тех точек, которые принадлежат конфигурационному пространству.

В курсах анализа понятие независимости системы непрерывно дифференцируемых функций  $f_1, \dots, f_p$  обычно формализуется так: ранг матрицы из их частных производных должен равняться  $p$ .

Итак:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial z_n} \end{pmatrix} = p.$$

В данной прямоугольной матрице –  $p$  строк и  $3n$  столбцов. Напомним, что ранг матрицы равен  $p$ , если в ней найдется хотя бы один минор порядка  $p$ , отличный от нуля.

Строго говоря, это условие является лишь достаточным условием независимости системы функций. Но обычно работают именно с ним, понимая независимость системы функций более ограничительно. Так же поступим и мы, принимая далее это условие фактически в качестве определения независимости условий связей (тогда оно будет необходимым и достаточным условием).

Таким образом, матрица из частных производных должна иметь максимально возможный ранг. В линейной алгебре это требование выражают и иным способом.

Эквивалентное требование: строки данной матрицы линейно независимы.

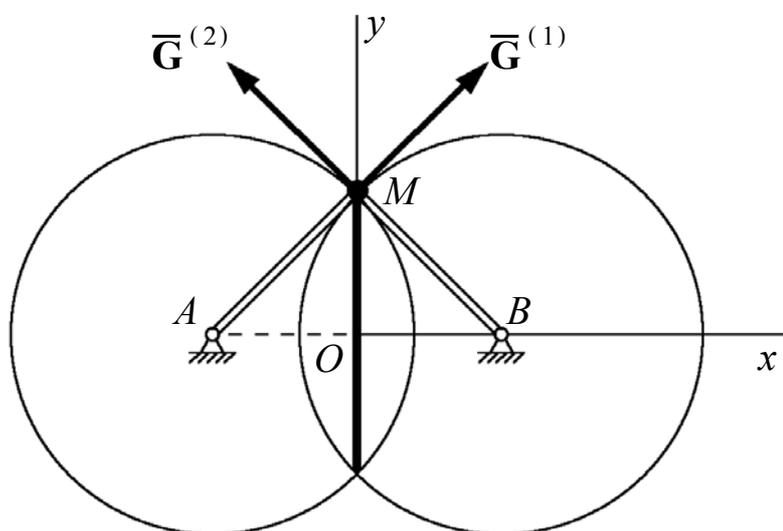
Но что собою представляют строки этой матрицы?

Строки матрицы состоят из компонент векторов  $\bar{\mathbf{G}}^{(\alpha)}$ , так что получаем критерий независимости условий связей: в любой точке конфигурационного пространства векторы градиентов  $\bar{\mathbf{G}}^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, \dots, p$ , являются линейно независимыми.

Приведем пример, в котором система материальных точек опять будет состоять из одной точки.

**Пример 1.** Пусть материальная точка  $M$  соединена двумя невесомыми стержнями длины  $l$  с неподвижными точками  $A$  и  $B$ , причем  $|AB| \equiv a < 2l$ .

В этом случае гиперповерхностями являются сферы радиуса  $l$ , а конфигурационное пространство системы – это окружность, по которой они пересекаются. Запишем это, так как из рисунка, который сейчас будет сделан, этого не будет видно. КП – окружность, центром которой является середина отрезка  $AB$ .



В принципе точка  $M$  может занимать любую точку этой окружности, которую мы изобразили жирным отрезком, так как смотрели на нее сбоку. Векторы градиентов направлены вдоль радиусов сфер, т.е. вдоль стержней, и заведомо являются линейно независимыми.

Действительно:

$$f_1(x, y, z) \equiv \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0,$$

$$f_2(x, y, z) \equiv \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0.$$

Вычисляем векторы градиентов:

$$\bar{\mathbf{G}}^{(1)} \equiv \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial q_1} \bar{\mathbf{i}} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \bar{\mathbf{j}} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \bar{\mathbf{k}} = (2x + a) \bar{\mathbf{i}} + 2y \bar{\mathbf{j}} + 2z \bar{\mathbf{k}},$$

$$\bar{\mathbf{G}}^{(2)} = (2x - a) \bar{\mathbf{i}} + 2y \bar{\mathbf{j}} + 2z \bar{\mathbf{k}}.$$

В самом деле, эти векторы направлены вдоль радиусов сфер.

Линейную независимость этих векторов надо проверять не во всем трехмерном пространстве, а лишь в точках конфигурационного пространства.

Для точки  $M$   $x = 0$ , так что

$$\bar{\mathbf{G}}^{(1)} = a \bar{\mathbf{i}} + 2y \bar{\mathbf{j}} + 2z \bar{\mathbf{k}}, \quad \bar{\mathbf{G}}^{(2)} = -a \bar{\mathbf{i}} + 2y \bar{\mathbf{j}} + 2z \bar{\mathbf{k}};$$

линейная независимость векторов  $\bar{\mathbf{G}}^{(\alpha)}$  очевидна.

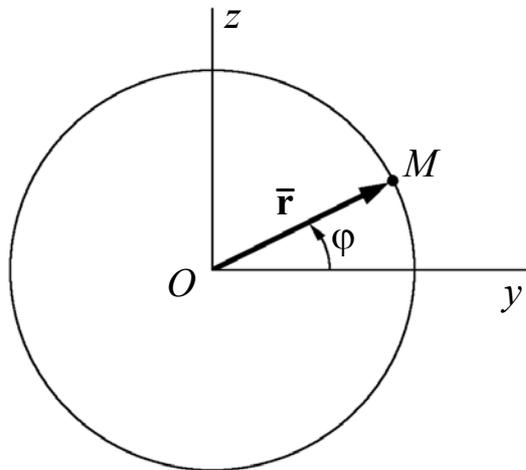
Координаты  $y$  и  $z$  – тоже не произвольные, но их взаимосвязь мы обсудим позднее.

С размерностью конфигурационного пространства у нас сейчас все в порядке:

$$\dim \text{КП} = s = 3n - p = 3 \cdot 1 - 2 = 1.$$

Действительно, окружность одномерна, и число степеней свободы равно единице. Значит, конфигурация системы задается всего одной обобщенной координатой.

За обобщенную координату  $q$  возьмем угол  $\varphi$ , образуемый радиус-вектором точки с осью  $Oy$ :



В конфигурации, изображенной на предыдущем рисунке, этот угол равнялся нулю.

Тогда:

$$\bar{\mathbf{r}} = r \cos \varphi \bar{\mathbf{j}} + r \sin \varphi \bar{\mathbf{k}},$$

где  $r = \sqrt{l^2 - a^2/4}$ .

$$\delta \bar{\mathbf{r}} \equiv \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \varphi} \delta \varphi = -r \sin \varphi \delta \varphi \bar{\mathbf{j}} + r \cos \varphi \delta \varphi \bar{\mathbf{k}}.$$

Проверим правильность наших выкладок. Условия на компоненты возможных перемещений означают, что векторы градиентов должны быть ортогональны вектору  $\delta \bar{\mathbf{r}}$ .

Проверка условий на  $\delta \bar{\mathbf{r}}$ :

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{G}}^{(\alpha)}, \delta \bar{\mathbf{r}}) &= \pm a \cdot 0 + 2r \cos \varphi \cdot (-r \sin \varphi \delta \varphi) + \\ &+ 2r \sin \varphi \cdot r \cos \varphi \delta \varphi = 0, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned}$$

Действительно, условия на компоненты возможных перемещений выполняются.

**Пример 2.** Пусть  $a = 2l$ . Тогда окружность вырождается в точку, а оба вектора  $\bar{\mathbf{G}}^{(\alpha)}$  будут направлены вдоль прямой  $AB$ ; предположение о независимости связей исключает этот случай.

В реальных задачах такой случай, конечно, может встретиться. Но будьте готовы к тому, что нарушение предположения о независимости условий связей приводит к всяческим осложнениям.

Они имеются и в нашем случае: положение свободной материальной точки определяется тремя координатами, мы наложили всего два условия связи, а движение точки стало невозможным. Если мы попытаемся, задав активные силы, найти реакции связей, то мы столкнемся со статической неопределимостью.

Вообще, задачи такого рода нуждаются в специальном анализе, и мы ими заниматься не будем.

Линейная независимость векторов градиентов гарантирует нас от таких осложнений.

## 6. Работа и мощность системы сил

Понятие работы Вам известно еще из школьного курса физики. Там она определялась как скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения точки ее приложения.

Такое определение носит весьма частный характер. Оно применимо, только если сила постоянна, а точка перемещается прямолинейно.

В общем случае переменностью силы и кривизной траектории точки можно пренебречь лишь в случае бесконечно малого перемещения.

**Элементарная работа** силы  $\bar{\mathbf{F}}$  – ее скалярное произведение на вектор элементарного перемещения точки ее приложения:

$$dA = (\bar{\mathbf{F}}, d\bar{\mathbf{r}}).$$

Напомним, что элементарное перемещение – это бесконечно малое перемещение точки в ее действительном перемещении. Поэтому выражению для элементарной работы можно придать иной вид.

Так как  $d\bar{r} = \bar{v} dt$ , то

$$dA = (\bar{F}, \bar{v}) dt \equiv N dt ;$$

скалярное произведение  $N = (\bar{F}, \bar{v})$  силы на скорость точки ее приложения называется **мощностью** силы.

Работа силы на конечном перемещении может быть получена интегрированием мощности по соответствующему промежутку времени.

Величина

$$A = \int_{t_0}^t dA \equiv \int_{t_0}^t N dt$$

называется **работой** силы  $\bar{F}$  за промежуток времени  $[t_0, t]$ .

Иногда, чтобы не было путаницы с элементарной работой, уточняют: “полная работа силы”. Верхний предел в интеграле может быть постоянным, а может быть и переменным; в последнем случае работа оказывается функцией времени. В общем случае для вычисления работы силы надо знать, как мощность зависит от времени. А для этого, в свою очередь, надо знать закон движения точки приложения и зависимость от времени вектора силы. Позднее мы, однако, познакомимся с другим важным классом сил, для которых надо знать намного меньше.

Понятие работы введено Понселé<sup>1</sup> и Кориолисом в 1826 г.

Понятие мощности тесно связано с понятием работы. В соответствии с уже приведенными формулами мы можем записать:

$$N = \frac{dA}{dt} .$$

Таким образом:

Мощность – скорость совершения работы.

Единицы измерения данных величин имеют специальные названия.

Единицы в СИ:

- для  $A$ : джоуль ( $Дж = Н \cdot м$ );
- для  $N$ : ватт ( $Вт = \frac{Дж}{с}$ ).

Понятия мощности и работы вводят не только для одной силы, но и для системы сил.

Для системы сил  $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_m$  элементарная работа и мощность определяются так:

$$dA = \sum_k (\bar{F}_k, d\bar{r}_k) ;$$

---

<sup>1</sup> Понселé, Жан Виктор (1788 – 1867) – французский математик и механик. В молодости он был лейтенантом инженерных войск наполеоновской армии. Участвовал в войне 1812 года с Россией и был ранен, после чего провел два года в плену в Саратове. Там он написал свой первый математический трактат. В 20-е годы XIX века Понселе и Кориолис создали новое направление в механике – “индустриальную механику”, нацеленную на решение прикладных задач. Интересно, что Понселе и Кориолис отмечали также экономический аспект понятия работы: “Работа есть то, что оплачивают”.

$$N = \sum_k^{23} (\bar{\mathbf{F}}_k, \bar{\mathbf{v}}_k).$$

Здесь индекс  $k$  нумерует как силы, так и точки их приложения. Это – не обязательно материальные точки. Например, речь может идти о системе сил, действующих на абсолютно твердое тело; тогда  $d\bar{\mathbf{r}}_k$  и  $\bar{\mathbf{v}}_k$  – это элементарные перемещения и скорости телесных точек, к которым приложены силы.

Получим важную формулу для мощности системы сил, приложенных к твердому телу.

**Теорема.** Если за центр приведения системы сил  $\bar{\mathbf{F}}_1, \dots, \bar{\mathbf{F}}_m$ , приложенных к АТТ, взята телесная точка  $A$ , то мощность этой системы сил равна сумме

$$N = (\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{v}}_A) + (\bar{\mathbf{L}}_A, \bar{\boldsymbol{\omega}}),$$

где  $\bar{\mathbf{R}}$  и  $\bar{\mathbf{L}}_A$  – главный вектор и главный момент системы сил.

■

По формуле Эйлера:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_k &= \bar{\mathbf{v}}_A + [\bar{\boldsymbol{\omega}}, \bar{\mathbf{r}}_k] = \bar{\mathbf{v}}_A - [\bar{\mathbf{r}}_k, \bar{\boldsymbol{\omega}}] = \\ &= \bar{\mathbf{v}}_A - \bar{\mathbf{r}}_k \bar{\boldsymbol{\omega}} = \bar{\mathbf{v}}_A + \bar{\mathbf{r}}_k^T \bar{\boldsymbol{\omega}}, \end{aligned}$$

где  $\bar{\mathbf{r}}_k$  – радиус-вектор точки приложения силы  $\bar{\mathbf{F}}_k$  относительно полюса  $A$ ,  $\bar{\mathbf{r}}_k$  – оператор момента.

Оператор момента является антисимметричным линейным оператором, и мы только что этим воспользовались.

Заметьте, что наши действия по преобразованию второго слагаемого в формуле Эйлера носили вполне осмысленный характер: мы представили его в виде произведения вектора  $\bar{\boldsymbol{\omega}}$  на некоторый линейный оператор.

Теперь вычисляем мощность.

$$\begin{aligned} N &= \sum_k (\bar{\mathbf{F}}_k, \bar{\mathbf{v}}_k) = \sum_k (\bar{\mathbf{F}}_k, \bar{\mathbf{v}}_A) + \sum_k (\bar{\mathbf{F}}_k, \bar{\mathbf{r}}_k^T \bar{\boldsymbol{\omega}}) = \\ &= \left( \sum_k \bar{\mathbf{F}}_k, \bar{\mathbf{v}}_A \right) + \sum_k (\bar{\mathbf{r}}_k \bar{\mathbf{F}}_k, \bar{\boldsymbol{\omega}}) = \\ &= (\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{v}}_A) + \left( \sum_k [\bar{\mathbf{r}}_k, \bar{\mathbf{F}}_k], \bar{\boldsymbol{\omega}} \right) = \\ &= (\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{v}}_A) + (\bar{\mathbf{L}}_A, \bar{\boldsymbol{\omega}}). \end{aligned}$$

■

Полученная формула для мощности системы сил, приложенных к твердому телу, вполне согласуется с известным из статики результатом о том, что главный вектор и главный момент однозначно характеризуют систему сил.

Рассмотрим простой частный случай этой теоремы.

**Следствие.** Мощность пары сил  $\{\bar{\mathbf{F}}_1, \bar{\mathbf{F}}_2\}$ , приложенных к АТТ, равна скалярному произведению момента пары на угловую скорость тела:

$$N = (\bar{\mathbf{M}}, \bar{\boldsymbol{\omega}}),$$

где  $\bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{M}}(\bar{\mathbf{F}}_1, \bar{\mathbf{F}}_2)$  – момент пары.

Действительно, пара сил – это частный случай системы сил; у нее главный вектор равен нулю, а главный момент, называемый моментом пары сил, не зависит от выбора центра приве-

дения. Таким образом, мы рассмотрели понятия элементарной работы и мощности системы сил. Эти понятия определялись для действительного движения механической системы. Как мы увидим, их целесообразно рассматривать и в более общем случае.

## 7. Обобщенные силы

Рассмотрим механическую систему с удерживающими голономными связями, на которую действуют силы  $\bar{\mathbf{F}}_1, \dots, \bar{\mathbf{F}}_m$ , приложенные в точках с радиус-векторами  $\bar{\mathbf{r}}_1, \dots, \bar{\mathbf{r}}_m$ .

В предыдущем пункте мы встретились с понятием элементарной работы системы сил. При этом мы пользовались элементарными перемещениями, т.е. бесконечно малыми перемещениями в действительном движении. Но при изучении систем со связями важную роль, наряду с элементарными перемещениями, играют также возможные перемещения. Понятие работы можно ввести и для них.

Пусть  $\delta \bar{\mathbf{r}}_1, \dots, \delta \bar{\mathbf{r}}_m$  – возможные перемещения точек приложения сил. Величина

$$\delta A = \sum_k (\bar{\mathbf{F}}_k, \delta \bar{\mathbf{r}}_k)$$

называется **возможной работой** системы сил  $\bar{\mathbf{F}}_1, \dots, \bar{\mathbf{F}}_m$ .

Напомним, что возможные перемещения – это любые бесконечно малые перемещения, которые допускаются связями в данный момент времени.

Записанное нами соотношение имеет тот же вид, что и выражение для элементарной работы, только символ  $d$  заменен на символ  $\delta$ .

Наряду с понятием элементарной работы мы вводили также тесно связанное с ним понятие мощности. Аналогичное понятие можно ввести и в случае, когда рассматривают возможные перемещения, только надо быть аккуратными: ведь возможное перемещение рассматривается при “замороженном” времени  $t$ . А поскольку время не меняется, то и дифференцировать по нему нельзя. Выход из этого затруднения – достаточно простой, хотя он может показаться формальным.

Пусть  $dt'$  – произвольная бесконечно малая величина размерности времени. **Возможной скоростью** точки называется скорость, которую имела бы точка, если бы она совершала возможное перемещение  $\delta \bar{\mathbf{r}}_k$  за “время”  $dt'$

$$\bar{\mathbf{v}}_k^B = \frac{\delta \bar{\mathbf{r}}_k}{dt'}$$

Иначе говоря, возможной скоростью мы назвали частное от формального деления возможного перемещения на бесконечно малый воображаемый интервал времени.

**Возможной мощностью** системы сил  $\bar{\mathbf{F}}_1, \dots, \bar{\mathbf{F}}_m$  называется величина

$$N^B \equiv \frac{\delta A}{dt'} = \sum_k (\bar{\mathbf{F}}_k, \frac{\delta \bar{\mathbf{r}}_k}{dt'}) = \sum_k (\bar{\mathbf{F}}_k, \bar{\mathbf{v}}_k^B).$$

Мы добились того, чего хотели. Связь между возможной работой и возможной мощностью – такая же, как между элементарной работой и мощностью.

Теперь перейдем к обобщенным координатам.

Выразим радиус-векторы точек приложения сил через обобщенные координаты  $q_1, \dots, q_s$ :

$$\bar{\mathbf{r}}_k = \bar{\mathbf{r}}_k(q_1, \dots, q_s, t);$$

тогда

$$\delta \bar{\mathbf{r}}_k = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_k}{\partial q_s} \delta q_s, \quad k = 1, \dots, m,$$

где  $\delta q_i$  – вариации обобщенных координат.

Эти формулы мы, по существу, уже получали. Только раньше у нас через обобщенные координаты выражались радиус-векторы материальных точек, а теперь – радиус-векторы точек приложения сил. Поэтому и индекс – другой: не  $v$ , а  $k$ .

Аналогичные выражения можно получить и для возможных скоростей.

Поделив эти равенства почленно на  $dt'$ , получаем:

$$\bar{\mathbf{v}}_k^B = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1^B + \dots + \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_k}{\partial q_s} \dot{q}_s^B,$$

где  $\dot{q}_i^B \equiv \frac{\delta q_i}{dt'}$  – возможные обобщенные скорости.

**Замечание.** Аналогично, из соотношений

$$d\bar{\mathbf{r}}_k = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_k}{\partial q_1} dq_1 + \dots + \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_k}{\partial q_s} dq_s + \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_k}{\partial t} dt$$

вытекают формулы

$$\bar{\mathbf{v}}_k = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_k}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_k}{\partial t}.$$

Коэффициенты во всех этих формулах – передаточные функции  $\bar{\mathbf{u}}_k^{(i)} \equiv \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_k}{\partial q_i}$  линейных скоростей точек приложения сил.

Мы видим, что возможные и действительные скорости выражаются через обобщенные скорости по одним и тем же формулам, только при наличии нестационарных связей в последнем случае добавляется еще одно слагаемое.

Теперь выразим через обобщенные скорости возможную работу и возможную мощность.

Имеем:

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_k (\bar{\mathbf{F}}_k, \delta \bar{\mathbf{r}}_k) = \sum_k (\bar{\mathbf{F}}_k, \sum_i \bar{\mathbf{u}}_k^{(i)} \delta q_i) = \\ &= \sum_i \sum_k (\bar{\mathbf{F}}_k, \bar{\mathbf{u}}_k^{(i)}) \delta q_i = \sum_i Q_i \delta q_i. \end{aligned}$$

Здесь

$$Q_i = \sum_k (\bar{\mathbf{F}}_k, \bar{\mathbf{u}}_k^{(i)}) \equiv \sum_k (\bar{\mathbf{F}}_k, \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_k}{\partial q_i}).$$

Величина  $Q_i$  называется **обобщенной силой**, соответствующей обобщенной координате  $q_i$ . Это – коэффициент в выражении для возможной работы системы сил, стоящий при вариации  $i$ -й обобщенной координаты.

Итак,

$$\delta A = \sum_i Q_i \delta q_i .$$

Мы выразили возможную работу системы сил через вариации обобщенных координат.

Получим аналогичное выражение для возможной мощности.

$$N^B \equiv \frac{\delta A}{dt'} = \sum_i Q_i \frac{\delta q_i}{dt'} ,$$

так что

$$N^B = \sum_i Q_i \dot{q}_i^B .$$

Обсудим кратко вопрос о размерностях обобщенных сил.

Размерность обобщенной силы:

$$[Q_i] = \frac{[\delta A]}{[\delta q_i]} \equiv \frac{[A]}{[q_i]} .$$

Следовательно, и размерности, и единицы измерения обобщенных сил могут быть различными – все зависит от выбора обобщенных координат. Ограничимся наиболее распространенными ситуациями.

Так как в СИ единицей для  $A$  служит Дж = Н·м, то:

- если  $q_i$  – угол, то  $[q_i] = 1$  и единицей для  $Q_i$  служит Н·м (как для момента силы);
- если  $q_i$  – линейная координата, то единицей для  $Q_i$  служит Н (как и для обычной силы).

Но даже в последнем случае обобщенные силы отличаются от обычных сил тем, что это – скаляры, а не векторы.

### Способы вычисления обобщенных сил.

1°. Можно вычислить в общем виде возможную работу  $\delta A$  (или возможную мощность  $N^B$ ); коэффициенты, стоящие при  $\delta q_i$  (при  $\dot{q}_i^B$ ), и будут обобщенными силами.

2°. Можно воспользоваться независимостью вариаций  $\delta q_i$  и рассмотреть такое возможное перемещение, при котором только одна вариация  $\delta q_i$  (одна возможная скорость  $\dot{q}_i^B$ ) отлична от нуля. Тогда вычисляем  $\delta A$  (или  $N^B$ ) и полагаем:

$$Q_i = \frac{\delta A}{\delta q_i} \text{ или } Q_i = \frac{N^B}{\dot{q}_i^B} .$$

3°. Можно действовать по определению – записать выражение

$$Q = \sum_k Q^{(k)} \equiv \sum_k (\bar{\mathbf{F}}_k, \bar{\mathbf{u}}_k);$$

подставляя сюда вместо символов  $\bar{\mathbf{u}}_k$  передаточные функции  $\bar{\mathbf{u}}_k^{(i)}$ , получаем:

$$Q_i = \sum_k (\bar{\mathbf{F}}_k, \bar{\mathbf{u}}_k^{(i)}).$$

**Замечание.** Если в состав механической системы входит твердое тело, на которое действует пара сил с моментом  $\bar{\mathbf{M}}$ , то вклад этой пары в выражение для возможной мощности равен  $(\bar{\mathbf{M}}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_j^B)$ , где  $j$  – номер тела.

Мы этот факт уже доказывали – как следствие из теоремы о мощности системы сил, приложенной к абсолютно твердому телу. Переход к возможным мощностям ситуации не меняет.

Представив  $\bar{\boldsymbol{\omega}}_j^B$  в виде  $\sum_i \bar{\boldsymbol{\omega}}_j^{(i)} \dot{q}_i^B$ , получаем, что вклад данной пары сил в выражение для  $Q_i$  равен  $(\bar{\mathbf{M}}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_j^{(i)})$ .

Здесь  $\bar{\boldsymbol{\omega}}_j^{(i)}$  – передаточная функция угловой скорости  $j$ -го тела, отвечающая обобщенной координате  $q_i$ .

На практике путаницы из-за того, что передаточные функции для линейных и угловых скоростей обозначаются одной и той же буквой  $u$ , не возникает, так как при решении конкретных задач тела нумеруются, а точки приложения сил обозначаются буквами. Поэтому буквенный нижний индекс соответствует линейной скорости, а цифровой – угловой скорости.

## 8. Идеальные связи

Понятия возможной работы и возможной мощности мы сформулировали для произвольной системы сил. Если речь идет о всех силах, действующих на механическую систему со связями, то надо учитывать как активные силы, так и реакции связей.

А здесь с вычислением возможной работы возникают проблемы – ведь реакции связей заранее неизвестны.

Однако есть широкий класс задач, где такой проблемы не возникает.

Мы с Вами уже познакомились с достаточно подробной классификацией связей. Эта классификация проводилась с учетом того, какими свойствами обладали соотношения, аналитически задающие связи.

Сейчас мы введем еще один признак, по которому различаются связи. В отличие от всех остальных, он характеризует реакции связей.

Связи называются **идеальными**, если сумма возможных работ всех реакций связей на любом возможном перемещении равна нулю:

$$\sum_k (\bar{\mathbf{R}}_k, \delta \bar{\mathbf{r}}_k) = 0.$$

Эквивалентная формулировка – сумма возможных мощностей всех реакций связей для любой системы возможных скоростей равна нулю:

$$\sum_k (\bar{\mathbf{R}}_k, \bar{\mathbf{v}}_k^B) = 0.$$

**Примечание.** При неударяющих связях в этих определениях следует ограничиться теми возможными перемещениями, при которых связи не ослабевают.

Важность введенного понятия идеальных связей становится очевидной, если вспомнить, как записывается возможная работа для произвольной системы сил. Если в такую сумму входят возможные работы как активных сил, так и реакций связей, то, разбивая всю сумму на две, видим, что вклад реакций идеальных связей равен нулю.

Вывод: если на механическую систему наложены только идеальные связи, то при вычислении возможной работы всех действующих на систему сил нужно учитывать только активные силы.

Но при помощи понятия возможной работы определяются обобщенные силы. Следовательно, данный вывод имеет прямое отношение к задаче вычисления обобщенных сил. Запишем:

Поэтому реакции идеальных связей не дают вклада в  $Q_i$ .

Условию идеальности связей можно дать геометрическую трактовку. Случай неударяющих или неголономных связей рассматривать не будем.

Пусть на СМТ, состоящую из  $n$  точек, наложены удерживающие геометрические связи.

Случай голономных кинематических связей мы при этом не исключаем, но предполагаем, как обычно, что уравнения соответствующих связей проинтегрированы.

Раз уж мы говорим о реакциях связей, то предполагается, что мы пользуемся принципом освобожденности от связей, и формально рассматриваем нашу систему материальных точек как свободную.

Рассмотрим в КП свободной системы гиперповерхность, соответствующую связи с номером  $\alpha$ :

$$(*) \quad f_\alpha(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0.$$

Введем обозначения для реакций, отвечающих данной связи.

Пусть  $\bar{\mathbf{R}}_v^{(\alpha)}$  – вектор реакции данной связи, действующей на  $v$ -ю точку СМТ.

А теперь вновь воспользуемся языком многомерной геометрии.

Компоненты  $R_{1x}^{(\alpha)}, R_{1y}^{(\alpha)}, R_{1z}^{(\alpha)}, \dots, R_{nz}^{(\alpha)}$  всех этих векторов можно рассматривать как компоненты  $3n$ -мерного вектора  $\bar{\mathbf{R}}^{(\alpha)}$  реакции данной связи.

Определение идеальности относится в действительности не только ко всем связям в целом, но и к каждой связи в отдельности. Поэтому реакции остальных связей мы сейчас можем игнорировать, и записать условие идеальности лишь для связи с номером  $\alpha$ .

Для связи с номером  $\alpha$  условие идеальности принимает вид:

$$R_{lx}^{(\alpha)} \delta x_1 + \dots + R_{nz}^{(\alpha)} \delta x_n = 0 .$$

Сравнивая это условие с соответствующим условием на компоненты возможных перемещений

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_n} \delta z_n = 0$$

и игнорируя условия, налагаемые остальными связями (в силу предположения о независимости связей), делаем заключение:

$3n$ -мерный вектор  $\bar{\mathbf{R}}^{(\alpha)}$  направлен по нормали к гиперповерхности (\*), т.е. он пропорционален вектору градиента  $\bar{\mathbf{G}}^{(\alpha)}$  функции  $f_\alpha$ .

Иными словами, в случае идеальной связи касательные компоненты  $3n$ -мерного вектора реакции связи равны нулю.

Заметим, что при многомерном способе записи условие идеальности выглядит совсем просто. Именно:

Условие идеальности можно записать и так:

$$(\bar{\mathbf{R}}^{(\alpha)}, \delta \bar{\mathbf{r}}) = 0 ,$$

где  $\delta \bar{\mathbf{r}}$  –  $3n$ -мерный вектор возможного перемещения, допускаемого связью с номером  $\alpha$ .

Иначе говоря, это – произвольный малый вектор, лежащий в касательной гиперплоскости. Это определение можно применять как ко всем идеальным связям в целом, так и к каждой идеальной связи в отдельности. Для реакции отдельной связи, имеющей номер  $\alpha$ , мы представили условие идеальности в следующем виде:

$$(\bar{\mathbf{R}}^{(\alpha)}, \delta \bar{\mathbf{r}}) = 0 ,$$

где  $\bar{\mathbf{R}}^{(\alpha)}$  –  $3n$ -мерный вектор реакции связи, а вектор  $\delta \bar{\mathbf{r}}$  – произвольный  $3n$ -мерный вектор возможного перемещения, допускаемого связью с номером  $\alpha$ .

Вернемся теперь к случаю, когда все связи рассматриваются совместно.

Если вектор  $\delta \bar{\mathbf{r}}$  удовлетворяет всем условиям связей, то уже для всех  $\alpha = 1, \dots, p$

$$(\bar{\mathbf{R}}^{(\alpha)}, \delta \bar{\mathbf{r}}) = 0 ,$$

а тогда и для вектора  $\bar{\mathbf{R}} = \sum_{\alpha} \bar{\mathbf{R}}^{(\alpha)}$  имеем:

$$(\bar{\mathbf{R}}, \delta \bar{\mathbf{r}}) = 0 .$$

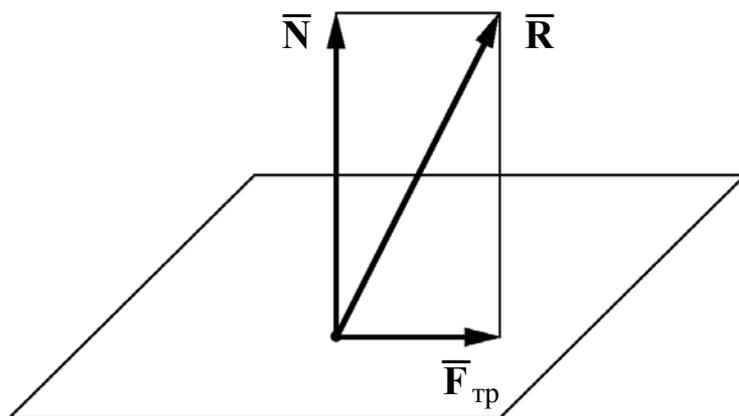
Разумеется, это – лишь иная форма записи определения идеальных связей.

Напомним, что в данном случае вектор  $\delta \bar{\mathbf{r}}$  лежит в пересечении всех гиперплоскостей, т.е. является касательным вектором к конфигурационному пространству системы со связями.

Итак, мы выяснили, что реакции идеальных связей направлены по нормали к соответствующим гиперповерхностям, а их касательные составляющие равны нулю.

С учетом этого наблюдения легко проанализировать конкретные примеры идеальных и неидеальных связей.

Пример неидеальной связи. Пусть материальная точка  $M$  движется по плоскости при наличии кулонова трения.



Сила реакции  $\bar{\mathbf{R}}$  есть сумма нормальной составляющей  $\bar{\mathbf{N}}$  и касательной составляющей  $\bar{\mathbf{F}}_{\text{тр}}$  – силы трения, причем при  $\bar{\mathbf{v}} \neq 0$

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{тр}} = -k |\bar{\mathbf{N}}| \cdot \frac{\bar{\mathbf{v}}}{|\bar{\mathbf{v}}|}.$$

Это мы записали закон Кулона для силы трения движения;  $k$  – коэффициент трения.

Рассмотрим условие идеальности в одной из известных нам форм – в форме равенства нулю возможной мощности реакций связей.

Возможная мощность:

$$(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{v}}^B) = \underbrace{(\bar{\mathbf{N}}, \bar{\mathbf{v}}^B)}_0 + (\bar{\mathbf{F}}_{\text{тр}}, \bar{\mathbf{v}}^B).$$

Выбирая  $\bar{\mathbf{v}}^B$  так, чтобы  $(\bar{\mathbf{v}}^B, \bar{\mathbf{v}}) \neq 0$ , видим, что  $(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{v}}^B) \neq 0$ , т.е. связь неидеальна.

В действительности этот пример иллюстрирует общую ситуацию. Касательные составляющие неидеальных связей как раз и принято интерпретировать как силы трения (только оно необязательно носит кулонов характер).

Теперь рассмотрим примеры идеальных связей.

### Примеры идеальных связей.

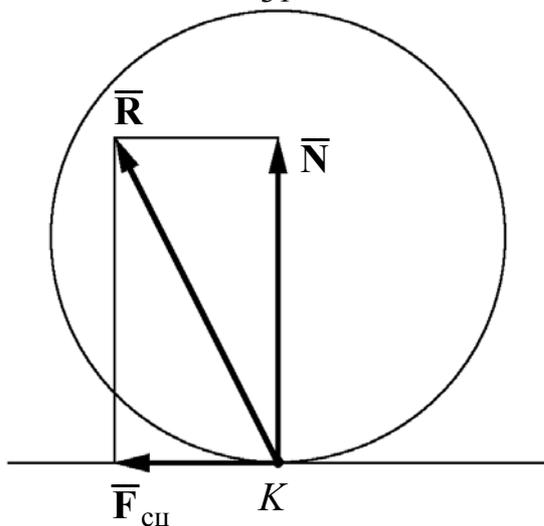
1°. Точка на гладкой поверхности.

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{тр}} = 0 \quad \square \quad \bar{\mathbf{R}} \equiv \bar{\mathbf{N}} \quad \square \quad (\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{v}}^B) = 0.$$

2°. Качение АТТ по абсолютно шероховатой поверхности.

Здесь существенны оба предположения – и что тело абсолютно твердое, и что поверхность абсолютно шероховатая.

Реакции связей сводятся к одной силе  $\bar{\mathbf{R}}$ , приложенной в точке контакта  $K$ ; она складывается из нормальной составляющей  $\bar{\mathbf{N}}$  и силы сцепления  $\bar{\mathbf{F}}_{\text{сц}}$ .



Сила трения по своей природе – это сила трения. Но в случае абсолютно шероховатой поверхности предпочтительно именно такое название. Действительно, эту силу нужно отличать от рассмотренной выше силы трения движения; та зависит от скорости, а скорость в точке контакта равна нулю.

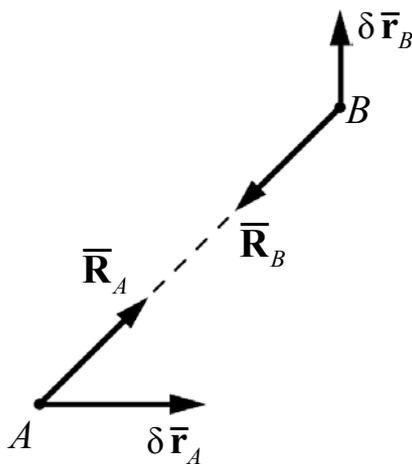
По сути, это – сила трения покоя, но и это название не слишком подходит, так как тело не покоится, а катится. Поэтому термин “сила сцепления” является наиболее подходящим.

Несмотря на то, что реакция связи имеет касательную составляющую, связь все равно является идеальной.

Так как проскальзывания нет, то  $\bar{v}_K = 0 \quad \square \quad (\bar{\mathbf{R}}, \bar{v}_K^B) = 0$ .

А вот если тело хоть немного, но деформируется, то реакции связей уже больше не сводятся к одной силе. Возникает еще пара сил с некоторым ненулевым моментом, и мы имеем дело с трением качения или трением верчения – в зависимости от того, как этот момент направлен.

3°. Связи в неизменяемой СМТ.



$$|\bar{\mathbf{r}}_B - \bar{\mathbf{r}}_A| = |AB| = \text{const}$$

□

$$(\bar{\mathbf{r}}_B - \bar{\mathbf{r}}_A, \bar{\mathbf{r}}_B - \bar{\mathbf{r}}_A) = |AB|^2$$



$$(\bar{\mathbf{r}}_B - \bar{\mathbf{r}}_A, \delta\bar{\mathbf{r}}_B - \delta\bar{\mathbf{r}}_A) = 0.$$

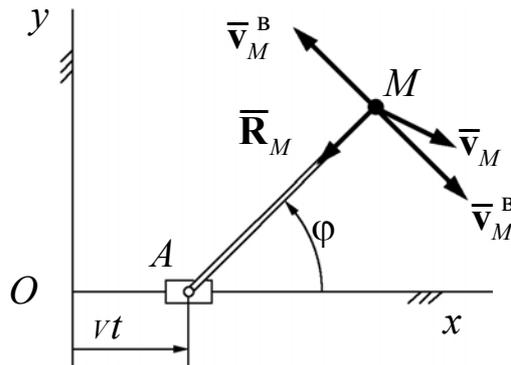
По 3-му закону Ньютона,  $\bar{\mathbf{R}}_A = -\bar{\mathbf{R}}_B$  и  $\bar{\mathbf{R}}_B \square \bar{\mathbf{r}}_{AB} \equiv \bar{\mathbf{r}}_B - \bar{\mathbf{r}}_A$ .

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{R}}_A, \delta\bar{\mathbf{r}}_A) + (\bar{\mathbf{R}}_B, \delta\bar{\mathbf{r}}_B) &= -(\bar{\mathbf{R}}_B, \delta\bar{\mathbf{r}}_A) + (\bar{\mathbf{R}}_B, \delta\bar{\mathbf{r}}_B) = \\ &= (\bar{\mathbf{R}}_B, \delta\bar{\mathbf{r}}_B - \delta\bar{\mathbf{r}}_A) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что в любой неизменяемой СМТ (и в АТТ) возможная мощность реакций внутренних связей равна нулю. В силу стационарности связей это верно и для мощности в действительном движении.

**Замечание.** Если идеальные связи нестационарны, то элементарная работа (и мощность) реакций таких связей в действительном движении может отличаться от нуля.

Вспомним, например, пример В, который мы разбирали, когда рассматривали классификацию связей.



$$(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{v}}_M^B) = 0, \quad (\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{v}}_M) \neq 0.$$

Для разнообразия я здесь выписал соответственно возможную мощность и мощность реакции связи в точке M.

В связи с данным примером еще раз подчеркну: в определении идеальных связей фигурируют именно возможные перемещения, а вовсе не элементарные.

## § 7. Общее уравнение динамики

### 1. Принцип Даламбера для СМТ

Рассмотрим сейчас какую-либо систему материальных точек.

Запишем дифференциальные уравнения движения СМТ в условно неподвижной СО:

$$m_\nu \frac{d^2 \bar{\mathbf{r}}_\nu}{dt^2} \equiv m_\nu \bar{\mathbf{w}}_\nu = \bar{\mathbf{F}}_\nu^{(e)} + \bar{\mathbf{F}}_\nu^{(i)}, \quad \nu = 1, \dots, n;$$

здесь  $\bar{\mathbf{r}}_\nu$  – радиус-вектор  $\nu$ -й точки относительно неподвижной точки  $O$ .

Напомним, что векторы  $\bar{\mathbf{F}}_\nu^{(e)}$  и  $\bar{\mathbf{F}}_\nu^{(i)}$  являются равнодействующими соответственно внешних и внутренних сил, приложенных к  $\nu$ -й точке.

Теперь рассуждаем так.

Если точки системы находятся в покое, то  $\bar{\mathbf{w}}_\nu \equiv 0$ , и уравнения движения переходят в **уравнения равновесия** СМТ:

$$\bar{\mathbf{F}}_\nu^{(e)} + \bar{\mathbf{F}}_\nu^{(i)} = 0,$$

т.е. совокупность всех ньютоновых сил оказывается уравновешенной.

Эти уравнения являются необходимыми условиями равновесия, но не достаточными: если точки системы движутся с постоянными скоростями, то данные уравнения по-прежнему выполняются.

Однако о достаточных условиях равновесия мы поговорим в другой раз, а сейчас вернемся к общему случаю.

В общем случае уравнения движения можно записать в виде

$$\bar{\mathbf{F}}_\nu^{(e)} + \bar{\mathbf{F}}_\nu^{(i)} + (-m_\nu \bar{\mathbf{w}}_\nu) = 0.$$

Заметим, что слагаемые, стоящие в скобках, также имеют размерность силы. С подобными слагаемыми в уравнениях движения мы уже сталкивались.

Именно, в динамике относительного движения произведения массы точки на вектор переносного или кориолисова ускорения, взятые со знаком “минус”, именуется соответственно переносной или кориолисовой силами инерции. Здесь – аналогичный случай; только ускорение является абсолютным.

Итак, данные векторы тоже относятся к силам инерции, но представляют собой новую их разновидность. Используется следующая терминология.

Вектор  $\bar{\Phi}_\nu \equiv -m_\nu \bar{\mathbf{w}}_\nu$  – **даламберова сила инерции** для  $\nu$ -й точки.

Происхождение этого названия станет понятным из наших последующих рассуждений. А рассуждения – очень простые.

В новых обозначениях:

$$(*) \quad \boxed{\bar{\mathbf{F}}_\nu^{(e)} + \bar{\mathbf{F}}_\nu^{(i)} + \bar{\Phi}_\nu = 0}, \quad \nu = 1, \dots, n;$$

это – **уравнения динамического равновесия** СМТ.

Они выражают **принцип Даламбера**: если к каждой точке СМТ условно приложить даламберову силу инерции, то совокупность ньютоновых сил и сил инерции в любой момент времени будет уравновешенной.

Заметим, что ньютоновы силы действительно приложены к данной точке; а вот даламберова сила инерции приложена к ней лишь условно. Было бы грубой ошибкой считать ее дейст-

вительно приложенной к данной материальной точке и учитывать в правых частях уравнений движения. Соответственно, и динамическое равновесие является лишь условным равновесием: реально точки движутся, и в общем случае – с ненулевыми ускорениями. Сформулируем в связи с этим отличия даламберовой силы инерции от других известных нам сил.

Даламберова сила инерции:

- в отличие от ньютоновых сил, не является мерой взаимодействия материальных тел;
- в отличие от переносных и кориолисовых сил инерции, может быть введена в любой СО. В неинерциальной СО она определяется как  $-m_v \overline{\mathbf{w}}_v^{\text{отн}}$ .

Мы не будем выписывать сейчас уравнения динамического равновесия в неинерциальной системе отсчета, но как это сделать – ясно: надо в уравнения (\*) включить еще переносную и кориолисову силы инерции.

С формальной точки зрения, уравнения динамического равновесия – это чуть измененная форма записи уравнений движения системы точек. Но в этой своей новой форме уравнения движения не отличаются от уравнений равновесия системы (это и были бы самые обычные уравнения равновесия, если бы силы  $\overline{\Phi}_v$  были обычными ньютоновыми силами).

Таким образом, принцип Даламбера позволяет формально сводить задачи динамики к задачам статики. На этом основан довольно-таки эффективный метод решения динамических задач.

**Метод кинестатики** – метод решения задач динамики, основанный на принципе Даламбера<sup>2</sup> (1743 г.). В уравнениях (\*) ньютоновы силы подразделяются на внешние и внутренние; но распространен и другой критерий классификации этих сил, когда выделяют активные силы и реакции связей.

Иная форма записи уравнений равновесия и динамического равновесия:

$$\boxed{\overline{\mathbf{F}}_v + \overline{\mathbf{R}}_v = 0} \quad \text{и} \quad \boxed{\overline{\mathbf{F}}_v + \overline{\mathbf{R}}_v + \overline{\Phi}_v = 0} .$$

Здесь  $\overline{\mathbf{F}}_v$  и  $\overline{\mathbf{R}}_v$  – соответственно равнодействующие приложенных к  $v$ -й точке активных сил и реакций связей.

---

<sup>2</sup> Даламбер, Жан Ле Рон (1717 – 1783) – французский математик, механик и философ. Необычно имя ученого – Жан Ле Рон (в буквальном переводе – “Иоанн Круглый”). Дело в том, что Даламбер был незаконнорожденным сыном французского аристократа по фамилии Де Туш и женщины из духовного сословия. Родители подкинули младенца у парижской церкви Иоанна Круглого; подкидыша взяла на воспитание бедная семья. Позднее отец признал ребенка и оплачивал его воспитание, а затем и обучение. Когда Даламбер достиг совершеннолетия, отец предложил ему принять свою дворянскую фамилию, но Даламбер ответил отказом, сохранив фамилию приемных родителей. Даламбер плодотворно работал во многих разделах математики, а в механике стал одним из основоположников гидродинамики.

Такая форма записи данных уравнений нам тоже потребуется, но в дальнейшем.

Мы представили уравнения движения системы материальных точек в форме уравнений динамического равновесия:

$$(*) \quad \bar{\mathbf{F}}_v + \bar{\mathbf{R}}_v + \bar{\Phi}_v = 0, \quad v = 1, \dots, n;$$

где  $\bar{\Phi}_v \equiv -m_v \bar{\mathbf{w}}_v$  – даламберовы силы инерции.

Эти уравнения выражают принцип Даламбера; он позволяет формально трактовать задачи динамики как задачи статики. Чем удобен принцип Даламбера? К даламберовым силам инерции можно применять весь аппарат преобразований систем сил, разработанный в статике. Например:

Складывая уравнения (\*) почленно и пользуясь теоремой о свойствах внутренних сил, получаем:

$$(1) \quad \bar{\mathbf{R}}^{(e)} + \bar{\Phi} = 0,$$

где  $\bar{\mathbf{R}}^{(e)} \equiv \sum_v \bar{\mathbf{F}}_v^{(e)}$  и  $\bar{\Phi} \equiv \sum_v \bar{\Phi}_v$  – главные векторы внешних сил и даламберовых сил инерции.

Равенство (1) также выполняется в любой момент времени.

А вот – другое преобразование.

Умножая каждое из уравнений (\*) векторно на  $\bar{\mathbf{r}}_v$  и складывая, получаем:

$$(2) \quad \bar{\mathbf{L}}_O^{(e)} + \bar{\mathbf{L}}_O^{\text{ин}} = 0,$$

где  $\bar{\mathbf{L}}_O^{(e)} \equiv \sum_v [\bar{\mathbf{r}}_v, \bar{\mathbf{F}}_v^{(e)}]$  и  $\bar{\mathbf{L}}_O^{\text{ин}} \equiv \sum_v [\bar{\mathbf{r}}_v, \bar{\Phi}_v]$  – главные моменты внешних сил и даламберовых сил инерции.

Моменты здесь вычисляются относительно неподвижной точки  $O$ .

Но ничто не мешает нам взять за полюс и произвольно движущуюся точку – например, центр масс системы.

Аналогично, для произвольного подвижного полюса  $A$  (в частности, центра масс) получим:

$$(3) \quad \bar{\mathbf{L}}_A^{(e)} + \bar{\mathbf{L}}_A^{\text{ин}} = 0.$$

Последняя формула получается из уравнений (\*) путем такого же преобразования, как и предыдущая, только умножать уравнения надо уже на радиус-векторы  $\bar{\mathbf{r}}_v'$  с началом в полюсе  $A$ .

Уравнения (1) – (3) являются простыми следствиями уравнений динамического равновесия. Можно это сформулировать так.

Уравнения (1) – (3) являются необходимыми условиями динамического равновесия СМТ.

О достаточности здесь речь, разумеется, не идет.

Вспомним теперь, что мы уже подвергали подобным преобразованиям уравнения движения системы точек; только эти уравнения были записаны в их исходной форме. Это мы делали при доказательстве теорем об изменении количества движения и кинетического момента системы материальных точек.

Теоремы об изменении количества движения и кинетического момента СМТ дают:

$$\frac{d\bar{\mathbf{Q}}}{dt} = \bar{\mathbf{R}}^{(e)}, \quad \frac{d\bar{\mathbf{K}}_O}{dt} = \bar{\mathbf{L}}_O^{(e)}, \quad \frac{d\bar{\mathbf{K}}_C^{\text{отн}}}{dt} = \bar{\mathbf{L}}_C^{(e)}.$$

Отсюда получаем выражения для главного вектора и главных моментов даламберовых сил инерции:

$$(**) \quad \begin{cases} \bar{\Phi} = -\frac{d\bar{\mathbf{Q}}}{dt} \equiv -m\bar{\mathbf{w}}_C, \\ \bar{\mathbf{L}}_O^{\text{ин}} = -\frac{d\bar{\mathbf{K}}_O}{dt}, \quad \bar{\mathbf{L}}_C^{\text{ин}} = -\frac{d\bar{\mathbf{K}}_C^{\text{отн}}}{dt}. \end{cases}$$

В последней формуле мы за подвижный полюс приняли именно точку  $C$ , а не  $A$ , поскольку теорему об изменении относительного кинетического момента мы формулировали и доказывали только для этого случая. На практике главные векторы и главные моменты даламберовых сил инерции чаще всего вычисляют не непосредственным суммированием, а по формулам (\*\*). В частности, для главного вектора этих сил мы получили простое явное выражение. Наконец, можно применить все эти результаты и к динамике абсолютно твердого тела.

## 2. Принцип Даламбера для АТТ

В статике абсолютно твердого тела развиты методы эквивалентного преобразования систем сил. Вам известны теорема о приведении системы сил к двум силам и теорема Пуансо о приведении системы сил к силе и паре сил.

Напомним содержание последней теоремы. Для удобства формулировок введем одно обозначение.

Пусть  $\bar{\mathbf{u}}$  – свободный вектор; обозначим через  $\bar{\mathbf{u}}.A$  связанный вектор, равный  $\bar{\mathbf{u}}$  и приложенный в точке  $A$ .

По теореме Пуансо, любую систему сил  $\{\bar{\mathbf{F}}_1, \dots, \bar{\mathbf{F}}_N\}$ , приложенных к АТТ, можно заменить эквивалентной системой из силы  $\bar{\mathbf{R}}.A$  и пары сил с моментом  $\bar{\mathbf{L}}_A$  ( $A$  – произвольный центр приведения).

$$\text{Здесь } \bar{\mathbf{R}} = \sum_k \bar{\mathbf{F}}_k, \quad \bar{\mathbf{L}}_A = \sum_k \bar{\mathbf{M}}_A(\bar{\mathbf{F}}_k).$$

Введенное выше обозначение успешно работает. Ведь главный вектор системы сил – это свободный вектор, а сила должна быть приложена в какой-либо точке. Не пользуясь этим обозначением, мы должны были бы писать: “силы, равной  $\bar{\mathbf{R}}$  и приложенной в точке  $A$ ”. Теорема Пуансо применима к любой системе сил. Мы применим ее к системе даламберовых сил инерции.

Пользуясь принципом материальных частиц Эйлера, будем моделировать твердое тело неизменяемой СМТ. Заменим систему даламберовых сил инерции

$\bar{\Phi}_v \equiv -m_v \bar{w}_v$  эквивалентной системой из силы  $\bar{\Phi}.A$  и пары сил с моментом  $\bar{L}_A^{\text{ин}}$ .

Но из динамики абсолютно твердого тела известно, что действие на него произвольной системы сил однозначно характеризуется главным вектором и главным моментом системы сил. Поэтому в данном случае принципу Даламбера можно придать следующую формулировку.

Принцип Даламбера для АТТ: если к внешним силам, приложенным к телу, условно добавить силу  $\bar{\Phi}.A$  и пару сил с моментом  $\bar{L}_A^{\text{ин}}$ , то полученная система сил в любой момент времени будет уравновешенной:

$$\boxed{\bar{R}^{(e)} + \bar{\Phi} = 0, \quad \bar{L}_A^{(e)} + \bar{L}_A^{\text{ин}} = 0}.$$

Фактически это – уравнения (1) и (3) из предыдущего пункта. Но в данном случае они называются иначе.

Это – уравнения динамического равновесия АТТ.

По внешнему виду они – такие же, как записанные в векторном виде уравнения равновесия твердого тела. Отличие – в том, что при вычислении главного вектора и главного момента учитываются также даламберовы силы инерции.

Для того, чтобы пользоваться уравнениями динамического равновесия твердого тела, надо уметь вычислять главный вектор и главный момент даламберовых сил инерции. С главным вектором – все просто:

Имеем:  $\bar{\Phi} = -m \bar{w}_C$ ; силу  $\bar{\Phi}.A$  называют **даламберовой силой инерции** для данного тела.

Обратите внимание: данная сила условно приложена в центре приведения  $A$ , но ускорение всегда вычисляется для точки  $C$ .

А вот главный момент сил инерции мы пока умеем вычислять не при всяком выборе полюса. Рассмотрим различные случаи движения твердого тела.

1°. Сферическое движение АТТ относительно неподвижной точки  $O$ .

Здесь за центр приведения  $A$  удобно взять именно эту неподвижную точку. Получаем такой рецепт.

Приводим даламберовы силы инерции к силе  $\bar{\Phi}.O$  и паре с моментом  $\bar{L}_O^{\text{ин}}$ :

$$\bar{\Phi} = -m \bar{w}_C, \quad \bar{L}_O^{\text{ин}} \equiv -\frac{d\bar{K}_O}{dt} = -\bar{J}_O \odot - [\bar{\omega}, \bar{J}_O \bar{\omega}].$$

Иными словами, главный момент сил инерции – это просто взятая с обратным знаком левая часть уравнения Эйлера динамики твердого тела с неподвижной точкой.

2°. Произвольное пространственное движение АТТ.

Здесь за центр приведения  $A$  удобно взять центр масс тела.

Приводим даламберовы силы инерции к силе  $\bar{\Phi}.C$  и паре с моментом  $\bar{L}_C^{\text{ин}}$ :

$$\bar{\Phi} = -m \bar{w}_C, \quad \bar{L}_C^{\text{ин}} \equiv -\frac{d\bar{K}_C^{\text{отн}}}{dt} = -\bar{J}_C \odot - [\bar{\omega}, \bar{J}_C \bar{\omega}].$$

В этих выражениях Вы, разумеется, узнаете взятые с обратным знаком левые части уравнений Ньютона – Эйлера.

### 3°. Общий случай плоского движения АТТ.

Здесь применима предыдущая формула; но, как и в задачах статики плоской системы сил, среди уравнений динамического равновесия обычно оставляют только уравнения для проекций главного вектора на оси  $x$  и  $y$  и главного момента на ось  $z$ .

В результате – рецепт такой:

Действуем, как в 2°; здесь

$$L_{Cz}^{\text{ин}} = - J_C \varepsilon_z .$$

### 4°. Поступательное движение АТТ.

Действуем, как в 2°; уравнения принимают вид

$$\bar{\Phi} = - m \bar{w}_C , \quad \bar{L}_C^{\text{ин}} = 0 .$$

### 5°. Вращательное движение АТТ относительно неподвижной оси $Oz$ .

Действуем, как в 1°; здесь

$$L_{Oz}^{\text{ин}} = - J_O \varepsilon_z .$$

Итак, мы полностью выяснили, как можно вычислять главный вектор и главный момент даламберовых сил инерции.

**Замечание.** При составлении уравнений динамического равновесия АТТ не обязательно брать за полюс центр приведения  $A$  даламберовых сил инерции.

Действительно, вычисление главного момента сил инерции удобнее делать, выбирая центр приведения специальным образом. Но после того, как мы нашли заменяющие силу и пару сил, ничто не мешает нам записать уравнения динамического равновесия относительно любого полюса.

Например, при плоском движении АТТ можно пользоваться уравнениями:

$$\sum_k F_{kx}^{(e)} + \Phi_x = 0 ,$$

$$\sum_k F_{ky}^{(e)} + \Phi_y = 0 ,$$

$$\sum_k M_{Bz}(\bar{F}_k^{(e)}) + M_{Bz}(\bar{\Phi}.C) + L_{Cz}^{\text{ин}} = 0 ;$$

полюс  $B$  – произвольный.

А центром приведения здесь служит центр масс тела. Разумеется, сумма двух последних слагаемых равна  $L_{Bz}^{\text{ин}}$ .

С учетом этого замечания понятно, что уравнения, полученные методом кинестатики, могут оказаться удобнее уравнений плоского движения твердого тела, при составлении которых мы можем брать за полюс только центр масс (или неподвижную точку, если такая имеется).

Переходим теперь к систематическому изучению динамики систем со связями. Рассмотрим один из подходов к составлению дифференциальных уравнений движения таких систем.

### 3. Уравнения Лагранжа 1-го рода

Рассмотрим СМТ  $\{M_1, \dots, M_n\}$  и запишем для нее уравнения движения в форме уравнений динамического равновесия:

$$(*) \quad \bar{\mathbf{F}}_v + \bar{\mathbf{R}}_v + \underbrace{\bar{\Phi}}_{-m_v \bar{\mathbf{w}}_v} = 0, \quad v = 1, \dots, n.$$

От чего зависят входящие в уравнения (\*) величины? В большинстве задач механики принимается, что активные силы являются известными функциями координат точек, их скоростей и времени. Такое основное допущение мы принимали и при обсуждении основных задач динамики материальной точки, и для системы материальных точек.

Данное допущение можно выразить и иными словами.

**Состоянием** СМТ называется набор значений радиус-векторов и скоростей ее точек в данный момент времени:  $\bar{\mathbf{r}}_1, \dots, \bar{\mathbf{r}}_n, \bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n$ .

Если пользоваться понятием изображающей точки, то можно обойтись всего двумя векторами. Это упрощает и формулировки, и обозначения.

Состояние СМТ можно задать двумя  $3n$ -мерными векторами: радиус-вектором  $\bar{\mathbf{r}}$  изображающей точки и ее скоростью  $\bar{\mathbf{v}}$ .

Компоненты этих двух векторов и являются переменными состояния в дифференциальных уравнениях движения. Напомним, что сам по себе вектор  $\bar{\mathbf{r}}$  задает конфигурацию механической системы.

Таким образом, в рамках нашего основного допущения активные силы являются функциями состояния и времени. Требуется также, чтобы выполнялись условия теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши.

Простейшее достаточное условие здесь – это условие непрерывной дифференцируемости правых частей.

Окончательно:

Предполагается, что активные силы заданы как непрерывно дифференцируемые функции состояния СМТ и времени:

$$\bar{\mathbf{F}}_v = \bar{\mathbf{F}}_v(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{v}}, t).$$

А из этого, в частности, вытекает следующий вывод.

При этом уравнения (\*) в каждый момент времени представляют собой систему из  $3n$  линейных алгебраических уравнений относительно  $6n$  неизвестных (компонент векторов  $\bar{\mathbf{w}}_v$  и  $\bar{\mathbf{R}}_v$ ).

Мы видим, что система уравнений движения не замкнута; налицо – только половина от требуемого числа уравнений.

Как ее замкнуть? Для такого замыкания нужно сделать конкретные предположения о наложенных на систему связях.

Мы ограничимся только более простым случаем; а вообще проблема замыкания уравнений движения в механике решена и в общем случае.

Предположим, что связи – идеальные, геометрические и удерживающие.

Вспомним условия, которые накладывают геометрические связи на компоненты возможных перемещений.

Так как  $\frac{d\bar{\mathbf{r}}_v}{dt} = \bar{\mathbf{v}}_v$ , то условия на компоненты действительных перемещений

$$\sum_v (\bar{\mathbf{G}}_v^{(\alpha)}, d\bar{\mathbf{r}}_v) + g_\alpha dt = 0$$

после деления на  $dt$  принимают вид

$$\boxed{\sum_v (\bar{\mathbf{G}}_v^{(\alpha)}, \bar{\mathbf{v}}_v) + g_\alpha = 0}, \quad \alpha = 1, \dots, p,$$

где  $\bar{\mathbf{G}}_v^{(\alpha)} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_v} \bar{\mathbf{i}} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_v} \bar{\mathbf{j}} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_v} \bar{\mathbf{k}}$ ,  $g_\alpha = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}$ .

Это – условия, налагаемые связями на действительные скорости.

Напомним, что вектор  $\bar{\mathbf{G}}_v^{(\alpha)}$  – это вектор градиента связи с номером  $\alpha$  для  $v$ -й точки. Компоненты этих векторов, как и скаляры  $g_\alpha$ , являются, как отмечалось ранее, дважды непрерывно дифференцируемыми функциями координат и времени.

Дифференцируем эти равенства:

$$\sum_v (\bar{\mathbf{G}}_v^{(\alpha)}, \bar{\mathbf{w}}_v) + \sum_v (\dot{\bar{\mathbf{G}}}_v^{(\alpha)}, \bar{\mathbf{w}}_v) + \dot{g}_\alpha = 0.$$

Это – условия, налагаемые связями на действительные ускорения.

Второе и третье слагаемые мы могли бы представить в явной форме, но этого делать мы не будем. Отметим лишь, что эти выражения являются непрерывно дифференцируемыми функциями координат, скоростей и времени.

Данные условия можно записать в виде

$$(**) \quad \boxed{\sum_v (\bar{\mathbf{G}}_v^{(\alpha)}, \bar{\mathbf{w}}_v) = b_\alpha(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{v}}, t)}, \quad \alpha = 1, \dots, p,$$

где  $b_\alpha$  – известные непрерывно дифференцируемые функции состояния СМТ и времени.

Уравнения (\*\*) – это  $p$  скалярных уравнений, линейных относительно компонент векторов  $\bar{\mathbf{w}}_v$ .

**Замечание.** Пусть среди связей есть кинематические (голономные или неголономные) с уравнениями

$$f_{\alpha} (x_1, \dots, z_n, \overset{41}{\dot{x}_1}, \dots, \dot{z}_n, t) = 0 .$$

Дифференцируя их, получаем такие условия на действительные ускорения:

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \dot{x}_1} \ddot{x}_1 + \dots + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \dot{z}_n} \ddot{z}_n = b_{\alpha} (\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{v}}, t) ,$$

где  $b_{\alpha} \equiv - \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_1} \dot{x}_1 - \dots - \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_n} \dot{z}_n - \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} .$

Введя векторы

$$\bar{\mathbf{G}}_v^{(\alpha)} = \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \dot{x}_v} \bar{\mathbf{i}} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \dot{y}_v} \bar{\mathbf{j}} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \dot{z}_v} \bar{\mathbf{k}} ,$$

можно вновь преобразовать эти условия к виду (\*\*) .

Таким образом, все наши рассуждения справедливы и для кинематических связей. Только векторы градиентов в этом случае определяются иначе: это градиенты не в пространстве координат, а в пространстве скоростей.

Итак, мы имеем  $3n$  уравнений (\*) и  $p$  уравнений (\*\*) . Все равно условий не хватает. Недостающие условия мы получим, учтя идеальность связей.

Поступим так.

Поскольку  $3n$ -мерные векторы реакций идеальных связей пропорциональны векторам градиентов, то можно представить их в виде

$$\bar{\mathbf{R}}^{(\alpha)} = \lambda_{\alpha} \bar{\mathbf{G}}^{(\alpha)} ,$$

где  $\lambda_{\alpha}$  – скалярные коэффициенты (**множители Лагранжа**).

Для геометрических связей мы пропорциональность векторов  $\bar{\mathbf{R}}^{(\alpha)}$  и  $\bar{\mathbf{G}}^{(\alpha)}$  обосновали аккуратно. Для кинематических связей факт такой пропорциональности тоже можно обосновать, но на этом мы не останавливаемся.

Тогда

$$\bar{\mathbf{R}} = \sum_{\alpha} \bar{\mathbf{R}}^{(\alpha)} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \bar{\mathbf{G}}^{(\alpha)} ,$$

т.е.

$$\boxed{\bar{\mathbf{R}}_v = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \bar{\mathbf{G}}_v^{(\alpha)}} .$$

Подставляя эти выражения в уравнения (\*) , получаем:

$$\boxed{m_v \bar{\mathbf{w}}_v = \bar{\mathbf{F}}_v + \sum_{\alpha=1}^p \lambda_{\alpha} \bar{\mathbf{G}}_v^{(\alpha)}} , \quad v = 1, \dots, n .$$

Это – уравнения Лагранжа<sup>3</sup> 1-го рода (1788 г.). Они справедливы для механических систем с идеальными удерживающими связями.

Итак, мы получили уравнения Лагранжа 1-го рода:

$$m_v \bar{\mathbf{w}}_v = \bar{\mathbf{F}}_v + \sum_{\alpha=1}^p \lambda_{\alpha} \bar{\mathbf{G}}_v^{(\alpha)}, \quad v = 1, \dots, n.$$

Были получены также условия, налагаемые связями на действительные ускорения:

$$(**) \quad \sum_v (\bar{\mathbf{G}}_v^{(\alpha)}, \bar{\mathbf{w}}_v) = b_{\alpha}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{v}}, t), \quad \alpha = 1, \dots, p.$$

Обсудим эти результаты.

Вместе с уравнениями (\*\*), уравнения Лагранжа 1-го рода образуют систему из  $3n + p$  линейных уравнений. Число неизвестных – тоже  $3n + p$  (это – компоненты ускорений  $\bar{\mathbf{w}}_v$  и  $p$  множителей Лагранжа  $\lambda_{\alpha}$ ).

Коэффициентами при неизвестных служат массы точек и компоненты векторов градиентов.

Вывод: проблема замыкания уравнений движения систем со связями решена.

Действительно, число уравнений совпадает с числом неизвестных.

Впрочем, такой чисто арифметический подсчет числа уравнений и числа неизвестных может вызвать справедливую критику. Ведь пока отнюдь не ясно, что данная система будет иметь решение, и притом единственное. А вдруг матрица системы окажется вырожденной?

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно дополнительное исследование.

#### 4. Исследование уравнений Лагранжа 1-го рода

**Теорема.** Если векторы градиентов  $\bar{\mathbf{G}}^{(\alpha)}$  линейно независимы, то решение системы из уравнений Лагранжа 1-го рода и условий, налагаемых связями на действительные ускорения, существует и единственно.

Напомним, что ранее мы уже приняли допущение, что условия связей непротиворечивы и независимы; а критерием независимости условий связей как раз и служит линейная независимость градиентов.

---

<sup>3</sup> Лагранж, Жозеф Луи (1736–1813) – французский математик и механик. Родился он, между прочим, в Италии, жил и учился там же; в 18 лет стал профессором. Если бы Лагранж продолжал работать в Италии, то мы говорили бы о нем как об итальянском ученом. Но он в 30-летнем возрасте перебрался в Германию, став президентом Берлинской академии наук, а в 1787 г. переселился во Францию. Лагранж внес значительный вклад во многие разделы математики; в механике стал основоположником аналитической механики, занимался также задачами гидромеханики и теории упругости. Труды Эйлера и Лагранжа – это наивысшие достижения математики и механики XVIII века. Интересно, что в годы Великой французской революции был издан декрет об удалении из Франции всех иностранцев. Только для Лагранжа (который был этническим французом, но уроженцем Италии и, что самое важное, подданным Сардинского королевства) было сделано исключение.

Используя уравнения Лагранжа 1-го рода, выразим векторы  $\bar{\mathbf{w}}_v$  через множители Лагранжа:

$$\bar{\mathbf{w}}_v = \frac{1}{m_v} \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \bar{\mathbf{G}}_v^{(\alpha)} + \frac{1}{m_v} \bar{\mathbf{F}}_v.$$

Подставим это в уравнения (\*\*):

$$\begin{aligned} \sum_v \left( \bar{\mathbf{G}}_v^{(\alpha)}, \frac{1}{m_v} \sum_{\beta} \lambda_{\beta} \bar{\mathbf{G}}_v^{(\beta)} \right) &= \\ &= b_{\alpha} - \sum_v \left( \bar{\mathbf{G}}_v^{(\alpha)}, \frac{1}{m_v} \bar{\mathbf{F}}_v \right) \equiv B_{\alpha}. \end{aligned}$$

Заметьте, что нам пришлось поменять индекс суммирования во внутренней сумме.

Через  $B_{\alpha}$  мы обозначили известные функции состояния и времени.

Изменим порядок суммирования:

$$\sum_{\beta} \underbrace{\left[ \sum_v \left( \bar{\mathbf{G}}_v^{(\alpha)}, \frac{1}{m_v} \bar{\mathbf{G}}_v^{(\beta)} \right) \right]}_{c_{\alpha\beta}} \lambda_{\beta} = B_{\alpha},$$

т.е.

$$(1) \quad \sum_{\beta} c_{\alpha\beta} \lambda_{\beta} = B_{\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, p.$$

Получена система из  $p$  линейных уравнений относительно множителей Лагранжа  $\lambda_{\alpha}$ . Достаточно убедиться, что решение этой новой системы существует и единственно; тогда и исходная система будет иметь единственное решение.

Присмотревшись к выражениям для коэффициентов  $c_{\alpha\beta}$ , заметим, что их можно записать в стандартной форме: вместо множителя  $1/m_v$  при втором сомножителе поставим при каждом сомножителе множитель  $1/\sqrt{m_v}$ .

Введем в связи с этим новые обозначения.

Рассмотрим  $3n$ -мерные векторы  $\bar{\mathbf{H}}^{(\alpha)}$  с компонентами  $G_{1x}^{(\alpha)}/\sqrt{m_1}$ ,  $G_{1y}^{(\alpha)}/\sqrt{m_2}$ , ...,  $G_{nz}^{(\alpha)}/\sqrt{m_n}$ . Тогда:

$$c_{\alpha\beta} = \left( \bar{\mathbf{H}}^{(\alpha)}, \bar{\mathbf{H}}^{(\beta)} \right).$$

Заметим очевидный факт:

Линейная независимость векторов  $\bar{\mathbf{G}}^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, \dots, p$ , означает, что матрица, строками которой служат их компоненты, имеет ранг  $p$ . Но столбцы аналогичной матрицы для векторов  $\bar{\mathbf{H}}^{(\alpha)}$  получаются из столбцов первой матрицы умножением на  $1/\sqrt{m_1}$ , ...,  $1/\sqrt{m_n}$ , так что она имеет тот же ранг.

Поэтому векторы  $\bar{\mathbf{H}}^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, \dots, p$ , линейно независимы.

А теперь воспользуемся некоторыми результатами, известными из линейной алгебры.

Матрица с коэффициентами, состоящими из попарных скалярных произведений векторов  $\bar{\mathbf{H}}^{(1)}, \dots, \bar{\mathbf{H}}^{(p)}$ , называется матрицей Грама этой системы векторов.

Из линейной алгебры известно, что для невырожденности матрицы Грама необходимо и достаточно, чтобы векторы системы были линейно независимыми.

Но это последнее условие у нас как раз выполнено.

Итак, матрица с коэффициентами  $c_{\alpha\beta}$  невырождена. Поэтому система (1), а вместе с ней и исходная система, имеет единственное решение. ■

Таким образом, задача нахождения векторов ускорений и множителей Лагранжа свелась к решению системы линейных уравнений порядка  $3n + p$ ; теперь мы знаем, что решение этой системы существует и единственно.

Если ее порядок велик, то выкладки могут быть весьма громоздкими, но принципиальных трудностей здесь не возникает.

Найденные в результате векторы  $\bar{\mathbf{w}}_v$  и скаляры  $\lambda_\alpha$ , а вместе с ними и реакции

$$\bar{\mathbf{R}}_v \equiv \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \bar{\mathbf{G}}_v^{(\alpha)},$$

оказываются непрерывно дифференцируемыми функциями состояния СМТ и времени:

$$\bar{\mathbf{w}}_v = \bar{\mathbf{w}}_v(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{v}}, t),$$

$$\lambda_{\alpha} = \lambda_{\alpha}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{v}}, t),$$

$$\bar{\mathbf{R}}_v = \bar{\mathbf{R}}_v(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{v}}, t).$$

То, что данные функции оказались именно непрерывно дифференцируемыми функциями своих аргументов, имеет немалое значение. В самом деле:

**Замечание.** Систему уравнений динамики СМТ можно теперь записать в форме:

$$\frac{d^2 \bar{\mathbf{r}}_v}{dt^2} = \frac{1}{m_v} \bar{\mathbf{F}}_v(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{v}}, t) + \frac{1}{m_v} \bar{\mathbf{R}}_v(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{v}}, t).$$

Если бы связей не было, мы бы имели систему

$$\frac{d^2 \bar{\mathbf{r}}_v}{dt^2} = \frac{1}{m_v} \bar{\mathbf{F}}_v(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{v}}, t).$$

Это – уравнения движения свободной системы материальных точек.

Наличие непрерывной дифференцируемости означает: если вторая система удовлетворяет требованиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши, то и первая система будет им удовлетворять.

А что делать дальше?

Последующим интегрированием уравнений динамики СМТ при заданных начальных условиях можно найти закон движения СМТ.

Итак, мы сформулировали конкретный алгоритм решения широкого класса задач механики. Согласитесь, однако, что это – довольно громоздкая процедура.

Оказывается, что если реакции связей нас не интересуют, то при сформулированных допущениях о характере связей можно вообще исключить из рассмотрения и реакции связей, и множители Лагранжа.

Но для этого нужны новые идеи, новые подходы. Разработка их также принадлежит Лагранжу.

## 5. Принцип Даламбера – Лагранжа

Сформулирован Лагранжем в 1788 г. в трактате “Аналитическая механика”.

Эта книга своим появлением обозначила начало нового этапа в развитии механики. Данный этап наступил после великого столетия, которое было отмечено работами Ньютона, Эйлера и других ученых. В трактате впервые появились также уравнения Лагранжа первого и второго рода. Но сейчас речь пойдет не о них. Формулируя свой принцип, Лагранж исходил из принципа Даламбера (отсюда – и двойное название). Переходим к изложению принципа Даламбера – Лагранжа. Сначала – некоторые наводящие соображения.

Пусть на СМТ  $\{ M_1, \dots, M_n \}$  наложены связи и заданы активные силы  $\bar{\mathbf{F}}_v$ .

Пока характер связей мы никак не конкретизируем.

Зададим для координат и скоростей точек СМТ начальные условия:

$$\bar{\mathbf{r}}_v(0) = \bar{\mathbf{r}}_v^{\circ}, \quad \bar{\mathbf{v}}_v(0) = \bar{\mathbf{v}}_v^{\circ}, \quad v = 1, \dots, n,$$

и рассмотрим ее произвольное движение с данными начальными условиями.

“Произвольность” понимается в следующем случае. Наложим на точки системы какие-либо связи, не обязательно совпадающие с действительно наложенными, и приложим к этим точкам какие-либо активные силы – не обязательно те, которые на нее реально действуют. Движение, которое система будет совершать при этих предположениях, сейчас и рассматривается.

Такое движение совпадает с действительным движением тогда и только тогда, когда в любой момент времени ускорения  $\bar{\mathbf{w}}_v$  удовлетворяют условиям динамического равновесия:

$$\bar{\mathbf{F}}_v + \bar{\mathbf{R}}_v + \bar{\Phi}_v = 0, \quad \bar{\Phi}_v \equiv -m_v \bar{\mathbf{w}}_v,$$

причем  $\bar{\mathbf{F}}_v$  и  $\bar{\mathbf{R}}_v$  соответствуют действительному движению.

Данное утверждение – тривиально: ведь условия динамического равновесия однозначно определяют ускорения, а по ним при заданных начальных условиях двукратным интегрированием находится закон движения. Если рассматриваемое движение не совпадает с действительным, то и ускорения будут другими, и уравнениям динамического равновесия они уже не будут удовлетворять. Но сформулированное нами утверждение позволяет взглянуть на уравнения динамического равновесия с новой точки зрения: они используются для отбора действительного движения среди всех прочих. Работает ли этот подход? Для свободной системы материальных точек – вполне. Для системы со связями основная проблема – в том, что реакции связей заранее неизвестны. В предыдущем пункте мы как раз и выяснили, как можно в этом случае поступать: надо использовать уравнения связей и условия их идеальности.

Лагранж предложил заменить уравнения динамического равновесия меньшим числом уравнений, в которые реакции связей уже не входят. Но если число скалярных уравнений будет меньше, чем  $3n$ , то все компоненты векторов ускорения из них не найдешь; значит, отличить действительное движение от всех прочих нам не удастся. Поэтому для рассматриваемых произвольных движений прежде всего сузим производ.

Назовем **кинематически осуществимым** движением СМТ любое ее движение, совместимое со связями.

Действительное движение системы, разумеется, относится к числу кинематически осуществимых; только с такими движениями мы его и будем в дальнейшем сравнивать.

**Теорема** (принцип Даламбера – Лагранжа). Для механической системы с идеальными удерживающими связями действительное движение выделяется из всех кинематически осуществимых тем, что для него и только для него в данный момент времени

$$(*) \quad \sum_v (\bar{\mathbf{F}}_v + \bar{\mathbf{\Phi}}_v, \delta \bar{\mathbf{r}}_v) = 0 .$$

т.е. сумма возможных работ активных сил и даламберовых сил инерции на любоых возможных перемещениях равна нулю.

Уравнение (\*) называется **общим уравнением динамики**.

Прежде чем мы приступим к доказательству принципа Даламбера – Лагранжа, отметим ряд обстоятельств.

Общее уравнение динамики служит математическим выражением принципа Даламбера – Лагранжа (подобно тому, как уравнение динамического равновесия служат математическим выражением принципа Даламбера).

На сам принцип Даламбера – Лагранжа не сводится к утверждению, что для системы материальных точек справедливо общее уравнение динамики. Он утверждает большее: это уравнение позволяет выделить действительное движение из всех кинематически осуществимых. Именно поэтому оно и называется “общим”.

Предостережем от возможности спутать (из-за сходства названий) принцип Даламбера – Лагранжа с принципом Даламбера. Принцип Даламбера для одной материальной точки дает одно векторное уравнение, т.е. три скалярных; для системы материальных точек он дает  $3n$  скалярных уравнений. Принцип же Даламбера – Лагранжа позволяет записать для любой системы одно скалярное уравнение. Тем не менее это скалярное уравнение полностью характеризует ди-

намику всей системы; это достигается за счет того, что в него входят параметры – компоненты векторов возможных перемещений.

Не все эти параметры, как Вы знаете, независимы; но число независимых параметров совпадает с числом степеней свободы механической системы.

Теперь приступим к доказательству.



### 1°. Необходимость.

Формулировка принципа Даламбера – Лагранжа включает слова “для него и только для него” применительно к действительному движению. Иначе говоря, он утверждает, что общее уравнение динамики – это необходимое и достаточное условие того, чтобы кинематически осуществимое движение было действительным.

Сейчас мы покажем, что если движение – действительное, то для него выполняется общее уравнение динамики.

Пусть  $\{ \delta \bar{\mathbf{r}}_1, \dots, \delta \bar{\mathbf{r}}_n \}$  – произвольная система возможных перемещений.

Запишем для действительного движения уравнения динамического равновесия

$$\bar{\mathbf{F}}_v + \bar{\mathbf{R}}_v + \bar{\mathbf{\Phi}}_v = 0 ,$$

почленно умножим каждое на  $\delta \bar{\mathbf{r}}_v$  и сложим:

$$\sum_v ( \bar{\mathbf{F}}_v + \bar{\mathbf{\Phi}}_v, \delta \bar{\mathbf{r}}_v ) + ( \bar{\mathbf{R}}_v, \delta \bar{\mathbf{r}}_v ) = 0 .$$

От общего уравнения динамики это равенство отличается последним слагаемым.

Но теперь мы воспользуемся тем предположением о связях, которое фигурировало в условии теоремы.

Для удерживающих связей условие идеальности требует, чтобы последняя сумма была равна нулю.

Для идеальных недерживающих связей, как мы в свое время отмечали, данная сумма равна нулю не для всех возможных перемещений, а для тех, при которых система не сходит со связей.

Итак, для действительного движения выполняются уравнения (\*) .

### 2°. Достаточность.

Пусть для кинематически осуществимого движения выполняется (\*) .

Освободим систему от связей и запишем для нее общее уравнение динамики:

$$\sum_v ( \bar{\mathbf{F}}_v + \bar{\mathbf{R}}_v + \bar{\mathbf{\Phi}}_v, \delta \bar{\mathbf{r}}_v^* ) = 0 ,$$

где  $\delta \bar{\mathbf{r}}_v^*$  – возможные перемещения свободной системы (т.е. произвольные векторы), а реакции связей трактуются как активные силы.

Здесь мы воспользовались принципом освобождения от связей. Из первой части теоремы (уже доказанной) следует, что для свободной системы общее уравнение динамики всегда применимо, так как неидеальных или неудерживающих связей нет (как и любых других).

Зафиксируем индекс  $v$  и возьмем такую систему возможных перемещений, для которой отличен от нуля только вектор  $\delta \bar{\mathbf{r}}_v^*$ .

Таким образом, векторы возможных перемещений остальных точек системы равны нулю.

Уравнение приняло вид:

$$(\bar{\mathbf{F}}_v + \bar{\mathbf{R}}_v + \bar{\mathbf{\Phi}}_v, \delta \bar{\mathbf{r}}_v^*) = 0.$$

Но вектор  $\delta \bar{\mathbf{r}}_v^*$  произволен, поэтому

$$\bar{\mathbf{F}}_v + \bar{\mathbf{R}}_v + \bar{\mathbf{\Phi}}_v = 0, \quad v = 1, \dots, n.$$

Таким образом, мы из общего уравнения динамики вывели уравнения динамического равновесия.

А теперь вывод становится очевидным.

Так как выполняются условия динамического равновесия, то движение – действительное. ■

**Замечание.** Если связи – неидеальные, то можно формально включить их касательные составляющие в число активных сил и применить общее уравнение динамики; но полученное уравнение может содержать неизвестные силы.

Например, так будет при наличии сил кулонова трения. Для того, чтобы довести решение задачи до конца, надо после этого выразить касательные составляющие через нормальные и из других соображений – например, с помощью уравнений Лагранжа 1-го рода – найти нормальные составляющие реакций связей. Принципу Даламбера – Лагранжа можно придать и другую форму. Иногда она может оказаться при решении конкретных задач более удобной. Запишем:

Отметим, что общее уравнение динамики может быть записано через возможные скорости:

$$\sum_v (\bar{\mathbf{F}}_v + \bar{\mathbf{\Phi}}_v, \bar{\mathbf{v}}_v^B) = 0.$$

Действительно, для этого достаточно поделить исходное уравнение почленно на произвольную бесконечно малую величину размерности времени:  $dt'$ .

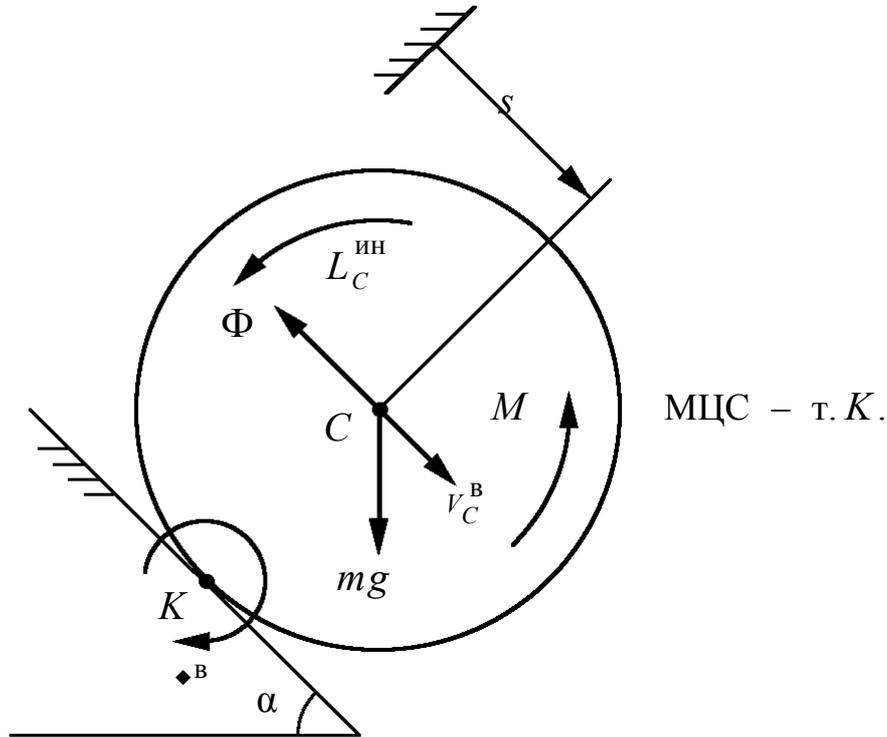
Прочсть записанное равенство можно так: сумма возможных мощностей активных сил и даламберовых сил инерции для любой совокупности возможных скоростей равна нулю.

Общее уравнение динамики будет для нас исходным пунктом дальнейших рассуждений при изучении аналитической механики. Но его можно и непосредственно применять для решения конкретных задач.

Рассмотрим пример.

### 6. Задача о качении диска по наклонной плоскости

Получим уравнения движения однородного диска, скатывающегося без проскальзывания по наклонной плоскости при наличии тормозящего момента  $M$ .



Связи в задаче – стационарные, поэтому в задаче с одной степенью свободы возможные скорости можно брать такими же, как и действительные. Скорости нарисованы на чертеже для случая, когда диск именно скатывается. Будем предполагать, что линейные и угловые ускорения направлены в ту же сторону. Тогда силу  $\Phi$ , равную главному вектору сил инерции, и главный момент сил инерции  $L_C^{\text{ин}}$  мы должны изобразить направленными в противоположную сторону. Все эти предположения мы делаем для того, чтобы задачу было удобно решать геометрическим методом. Полученное уравнение движения будет справедливо всегда. Мы считаем, что диск не отрывается от плоскости; поэтому неудерживающую связь в точке  $K$  трактуем как удерживающую. На заключительном этапе решения задачи мы перейдем к обобщенным координатам. За такую координату примем линейное перемещение  $s$  центра диска.

Введем силы инерции:

$$\bar{\Phi} = -m \bar{w}_C, \quad L_{Cz}^{\text{ин}} = -J_C \varepsilon_z.$$

Общее уравнение динамики:

$$(m \bar{g}, \bar{v}_C^B) + (\bar{M}, \bar{\omega}^B) + (\bar{\Phi}, \bar{v}_C^B) + \underbrace{(\bar{L}_C^{\text{ин}}, \bar{\omega}^B)}_{L_{Cz}^{\text{ин}} \diamond_z^B} = 0.$$

Вычисляем отдельные слагаемые:

$$\Phi = m w_C, \quad L_C^{\text{ин}} = \frac{m R^2}{2} \varepsilon;$$

$$\diamond = \frac{v_C}{R}, \quad \varepsilon = \frac{w_C}{R}, \quad \diamond^B = \frac{v_C^B}{R}.$$

Подставляем:

$$mg v_C^B \sin \alpha - M \frac{v_C^B}{R} - m w_C v_C^B - \frac{m R^2}{2} \frac{w_C}{R} \frac{v_C^B}{R} = 0.$$

Сократим на  $v_C^B$ :

$$mg \sin \alpha - \frac{M}{R} - \frac{3m}{2} w_C = 0.$$

Так как  $w_C = \ddot{s}$ , то:

$$\boxed{\frac{3m}{2} \ddot{s} = mg \sin \alpha - \frac{M}{R}}.$$

Это и есть искомым ответ: мы получили уравнения движения диска. Абсолютно то же уравнение можно получить с помощью техники уравнений Лагранжа 2-го рода. В данной задаче использование общего уравнения динамики привело нас к цели достаточно быстро. В более сложных задачах, как правило, уравнения Лагранжа более эффективны.

## 7. Основная теорема о равновесии СМТ

Прежде всего, начнем с определений.

Рассмотрим некоторую инерциальную СО  $E$ , которую примем за условно неподвижную; выберем в ней полюс  $O$ .

**Равновесием** СМТ называется ситуация, когда на каком-либо отрезке времени  $[0, \tau]$

$$\bar{\mathbf{r}}_v(t) \equiv \bar{\mathbf{r}}_v^o = \text{const}, \quad t \in [0, \tau], \quad v = 1, \dots, n.$$

Заметим, что о равновесии можно говорить только тогда, когда указано, какой системой отсчета мы пользуемся. Конкретный же выбор полюса никакой роли не играет; мы упомянули о нем только для того, чтобы можно было говорить о радиус-векторах точек.

Теперь вспомним, что совокупность значений радиус-векторов точек и их скоростей в данный момент времени называется *состоянием* механической системы.

Состояние СМТ называется **состоянием мгновенного покоя**, если  $\forall v \bar{\mathbf{v}}_v = 0$ .

Слово “мгновенного” подчеркивает, что речь идет именно о текущем моменте времени. Если хотя бы один из векторов ускорения точек отличен от нуля, то в следующий момент времени система выйдет из данного состояния.

В случае равновесия ситуация иная:

При равновесии СМТ пребывает в состоянии покоя на целом отрезке  $[0, \tau]$ .

В этом случае слово “мгновенного” уже имеет смысл опустить.

Обсуждая принцип Даламбера для системы материальных точек, мы уже отмечали, что необходимым условием равновесия является выполнение уравнений равновесия этой системы точек.

А будет ли это условие достаточным? Само по себе – нет: если уравнения равновесия выполняются, то это означает, что даламберовы силы инерции равны нулю, т.е. равны нулю ускорения точек. Но ничто не запрещает этим точкам двигаться равномерно и прямолинейно, т.е. с постоянными ненулевыми скоростями.

Потребуем дополнительно, чтобы в начальный момент времени все скорости равнялись нулю, т.е. начальное состояние было состоянием мгновенного покоя. Тогда случай движения с ненулевыми постоянными скоростями будет исключен. Получается, что система будет находиться в равновесии.

На самом деле возможны ситуации, когда все эти рассуждения оказываются логически несостоятельными.

Контрпример (А.П.Маркеев<sup>4</sup>). Пусть материальная точка движется вдоль оси  $Ox$  под действием направленной вдоль этой оси силы  $\bar{\mathbf{F}}$  и  $F_x = km|x|^{1/2}$  ( $k > 0$ ), причем  $\bar{\mathbf{r}}(0) = 0$ ,  $\bar{\mathbf{v}}(0) = 0$ .

В нашем примере сила пропорциональна массе, а  $k$  – некоторый размерный коэффициент.

Уравнение движения в проекции на ось  $Ox$  имеет вид:

$$\ddot{x} = k|x|^{1/2}.$$

На массу мы здесь сократили. В силу начальных условий и вида силы  $\bar{\mathbf{F}}$  система заведомо не будет двигаться в направлении осей  $y$  или  $z$ .

Теперь – рассуждаем:

Очевидно, функция  $x(t) \equiv 0$  является решением.

В самом деле, при подстановке этой функции в уравнение движения оно обращается в тождество. Удовлетворяются и начальные условия.

Оказывается, это еще не означает, что точка будет все время оставаться в начале координат. Данное уравнение имеет, однако, и другое решение:

$$x(t) = \frac{k^2 t^4}{144}.$$

Действительно,

$$k|x|^{1/2} = k \cdot \frac{kt^2}{12} = \frac{k^2 t^2}{12};$$

---

<sup>4</sup> Маркеев, Анатолий Павлович (р. 1931) – российский механик. Он работает профессором Московского авиационного института, а в 1990 г. опубликовал учебное пособие "Теоретическая механика". А. Маркеев обратил внимание, что во многих учебниках доказательство принципа возможных перемещений (которым мы займемся в следующем пункте) либо неполно, либо ошибочно. В действительности он в качестве контрпримера рассмотрел более общий случай, в котором показатель степени не обязательно равен  $1/2$ , а является произвольным числом из интервала  $(0, 1)$ . Но нам такое обобщение не потребуется. А. Маркеев получил интересные результаты в ряде разделов теоретической механики. В частности, он занимался проблемами небесной механики; в связи с его научными заслугами астероид номер 4302 носит название Маркеев.

НО

$$\dot{x} = \frac{k^2 t^3}{36}, \quad \ddot{x} = \frac{k^2 t^2}{12} \equiv k |x|^{1/2}.$$

Начальным данным это решение тоже удовлетворяет. Если точка следует такому закону движения, то она уйдет из начала координат, и пройденный ею путь будет расти пропорционально четвертой степени времени. Есть у нашего дифференциального уравнения при тех же начальных условиях и другие решения, при которых координата  $x$  будет некоторое время оставаться нулевой, а потом начнет увеличиваться. Таким образом, в действительности мы не знаем, по какому закону будет двигаться наша материальная точка.

Задумаемся, чем вызваны те неприятности, с которыми мы столкнулись в контрпримере Маркеева? А вот чем: в данном примере уравнение движения не удовлетворяет теореме о существовании и единственности решения задачи Коши.

Действительно, в этой теореме требуется, чтобы правые части уравнения были непрерывно дифференцируемы функциями переменных состояния (или хотя бы удовлетворяли условию Липшица). А у нас:

Функция  $F_x = k m |x|^{1/2}$  не является дифференцируемой по  $x$  в нуле. С этим и связано отсутствие единственности решения. Поэтому в данной задаче равенство  $F_x = 0$  в состоянии мгновенного покоя  $x = 0, \dot{x} = 0$  не гарантирует равновесия.

Заметьте, что существованию решений недифференцируемость не препятствует; мы видели, что такие решения являются гладкими функциями времени.

Может показаться, что такие примеры носят надуманный характер, а в природе все вполне определяется начальными условиями. Но все дело в том, что в механике мы всегда работаем не с явлениями реального мира, а с их моделями: пренебрегли массами каких-то тел, деформируемостью, отбросили какие-то малые силы и тому подобное. В результате вполне может оказаться, что полученная модель будет некорректной.

А реальных задач, в которых силы не обладают гладкой зависимостью от своих аргументов, в механике предостаточно, и просто отмахнуться от них нельзя. Очень часто отсутствие гладкости не приводит к каким-либо проблемам.

Вообще же, получая уравнения движения, следует анализировать: а что же мы в результате получили? Проблема адекватности модели, т.е. ее соответствия реальной ситуации, весьма важна.

Теперь перейдем к аккуратной формулировке утверждения о необходимых и достаточных условиях равновесия.

**Теорема** (основная теорема о равновесии СМТ). Пусть начальное состояние СМТ с идеальными удерживающими связями есть состояние мгновенного покоя:

$$\bar{\mathbf{r}}_v(0) = \bar{\mathbf{r}}_v^0, \quad \bar{\mathbf{v}}_v(0) = \mathbf{0}.$$

Необходимое условие равновесия: выполнение при  $t \in [0, \tau]$  в данном состоянии уравнений равновесия

$$(*) \quad \bar{\mathbf{F}}_v + \bar{\mathbf{R}}_v = \mathbf{0}, \quad v = 1, \dots, n.$$

Если же уравнения движения в некоторой окрестности данного состояния удовлетворяют при  $t \in [0, \tau]$  условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши, то это условие будет и достаточным.

Заметьте, что упомянутая теорема из курса дифференциальных уравнений всегда формулируется для некоторой области, в которой изменяются переменные состояния и время. Для нас достаточно взять лишь малую окрестность равновесного решения. Уравнения же равновесия должны выполняться только для данного состояния.

- Необходимость: при равновесии  $\bar{\mathbf{r}}_v \equiv \bar{\mathbf{r}}_v^\circ$ , так что  $\bar{\mathbf{w}}_v \equiv 0$  и  $\bar{\Phi}_v \equiv 0$ . Поэтому уравнения динамического равновесия

$$\bar{\mathbf{F}}_v + \bar{\mathbf{R}}_v + \bar{\Phi}_v = 0$$

переходят в (\*) .

Займемся доказательством достаточности.

Пусть теперь уравнения (\*) выполняются.

Запишем эти уравнения более подробно, явно выделив аргументы.

Так как  $\bar{\mathbf{F}}_v = \bar{\mathbf{F}}_v(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{v}}, t)$  и  $\bar{\mathbf{R}}_v = \bar{\mathbf{R}}_v(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{v}}, t)$ , то имеем:

$$(**) \quad \bar{\mathbf{F}}_v(\bar{\mathbf{r}}^\circ, 0, t) + \bar{\mathbf{R}}_v(\bar{\mathbf{r}}^\circ, 0, t) = 0 .$$

Для простоты записи мы представили состояние как совокупность  $3n$ -мерных векторов  $\bar{\mathbf{r}}$  и  $\bar{\mathbf{v}}$ , и учли, что начальная скорость – нулевая.

В свое время – при выводе уравнений Лагранжа 1-го рода – мы видели, что реакции связей также можно трактовать как заданные функции состояния и времени. Это было показано для идеальных удерживающих связей; для других видов связей мы просто предположим, что это выполняется (если же нет, то наши рассуждения применимы не будут).

Дифференциальные уравнения движения СМТ имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{r}}}_v &= \bar{\mathbf{v}}_v , \\ \dot{\bar{\mathbf{v}}}_v &= \frac{1}{m_v} \bar{\mathbf{F}}_v(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{v}}, t) + \frac{1}{m_v} \bar{\mathbf{R}}_v(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{v}}, t) . \end{aligned}$$

Мы записали эти уравнения в нормальной форме Коши, потому что именно для таких систем формулируется теорема о существовании и единственности.

Рассмотрим функции времени

$$\bar{\mathbf{r}}_v(t) = \bar{\mathbf{r}}_v^\circ , \quad \bar{\mathbf{v}}_v(t) = 0 .$$

$$\bar{\mathbf{r}}_v(t) \equiv \bar{\mathbf{r}}_v^\circ = \text{const} , \quad t \in [0, \tau] , \quad v = 1, \dots, n .$$

Подставляя их в уравнения движения и учитывая (\*\*), видим, что они служат решением. При сделанных допущениях оно – единственное; поэтому СМТ будет находиться в равновесии.



Таким образом, доказательство основной теоремы о равновесии системы материальных точек оказалось весьма простым. В то же время теорема весьма важна: она устанавливает условия, при которых можно пользоваться уравнениями равновесия.

Но при практическом использовании уравнений равновесия возникает одна проблема: приходится иметь дело с реакциями связей. Во многих же задачах статики ситуация иная: если нам нужно только найти положения равновесия или одну какую-либо из реакций связей, то с остальными реакциями не хочется иметь дело.

В таких ситуациях более выгоден иной подход, основанный на принципе возможных перемещений. Данный принцип, к рассмотрению которого мы переходим, во многом аналогичен принципу Даламбера – Лагранжа.

## 8. Принцип возможных перемещений

Начнем с формулировки данного принципа.

**Теорема.** Для равновесия механической системы с идеальными, удерживающими и стационарными связями необходимо, чтобы возможная работа активных сил на любых возможных перемещениях тождественно равнялась нулю и начальные скорости были нулевыми:

$$\sum_v (\bar{\mathbf{F}}_v, \delta \bar{\mathbf{r}}_v) = 0, \quad \bar{\mathbf{v}}_v(0) = 0.$$

Если же уравнения движения в окрестности данного состояния удовлетворяют теореме о существовании и единственности решения задачи Коши, то это условие будет и достаточным.

Формулировка принципа изложена. Прежде чем перейти к доказательству, коротко ее обсудим.

Первое из этих уравнений – общее уравнение статики – Лагранж положил в основу аналитической статики.

В аналитической статике обычно рассматриваются системы, которые в принципе способны двигаться. Общее уравнение статики позволяет находить положения равновесия таких систем, вообще не вводя реакций связей.

Впрочем, как мы увидим позже, с помощью этого уравнения можно также находить и реакции связей.

По сравнению с формулировкой принципа Даламбера – Лагранжа добавилось еще одно требование к связям: их стационарность. Это – вполне естественное требование, так как в случае нестационарных связей равновесие если и возможно, то лишь в исключительных ситуациях.

Например: лежит брусок на полу, а пол вибрирует; значит, и брусок вибрирует, и никакого равновесия нет.

Как и в основной теореме о равновесии системы материальных точек, достаточность имеет место лишь при дополнительном предположении.

1°. Необходимость.

Если система находится в равновесии, то  $\bar{\mathbf{v}}_v \equiv 0$ , и тогда  $\bar{\mathbf{w}}_v \equiv 0$ . Так как связи – идеальные и удерживающие, то применимо общее уравнение динамики

$$\sum_v (\bar{\mathbf{F}}_v + \bar{\mathbf{\Phi}}_v, \delta \bar{\mathbf{r}}_v) = 0;$$

но  $\bar{\mathbf{\Phi}}_v = -m_v \bar{\mathbf{w}}_v \equiv 0$ , и оно сводится к общему уравнению статики.

Стало быть, общее уравнение статики получается как частный случай общего уравнения динамики.

Но в целом принцип возможных перемещений не является частным случаем принципа Даламбера – Лагранжа. При доказательстве достаточности мы с его помощью получили бы, разумеется, уравнения динамического равновесия; но они обращаются в уравнения равновесия, только если положения точек системы не меняются, а это как раз и нуждается в доказательстве.

2°. Достаточность.

Пусть  $\bar{\mathbf{v}}_v(0) = 0$  и известно, что при  $\bar{\mathbf{r}}_v = \bar{\mathbf{r}}_v^0$  и  $\bar{\mathbf{v}}_v = 0$  для  $t \in [0, \tau]$  выполняется общее уравнение статики:

$$\sum_v (\bar{\mathbf{F}}_v, \delta \bar{\mathbf{r}}_v) = 0.$$

Мы должны доказать, что система материальных точек будет находиться в равновесии. Для этого сперва покажем, что ускорения всех точек в данном состоянии обращаются в нуль.

Условия, налагаемые связями на действительные ускорения, имеют вид:

$$\sum_v (\bar{\mathbf{G}}_v^{(\alpha)}, \bar{\mathbf{w}}_v) + \sum_v (\dot{\bar{\mathbf{G}}}_v^{(\alpha)}, \bar{\mathbf{w}}_v) + \dot{g}_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \dots, p.$$

Но в силу стационарности связей  $g_\alpha = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \equiv 0$ , а при  $\bar{\mathbf{v}}_v = 0$  в нуль обращается и второе слагаемое. Условия принимают вид

$$\sum_v (\bar{\mathbf{G}}_v^{(\alpha)}, \bar{\mathbf{w}}_v) = 0,$$

или

$$(*) \quad (\bar{\mathbf{G}}^{(\alpha)}, \bar{\mathbf{w}}) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, p,$$

где  $\bar{\mathbf{w}}$  –  $3n$ -мерный вектор ускорения.

Но мы знаем, что означает условие ортогональности  $3n$ -мерного вектора векторам градиентов всех связей. Он является касательным вектором к конфигурационному пространству механической системы.

Теперь воспользуемся общим уравнением динамики.

Так как связи – идеальные и удерживающие, то применимо общее уравнение динамики

$$\sum_v (\bar{\mathbf{F}}_v + \bar{\Phi}_v, \delta \bar{\mathbf{r}}_v) = 0,$$

которое с учетом общего уравнения статики сводится к равенству

$$\sum_v (\bar{\Phi}_v, \delta \bar{\mathbf{r}}_v) = 0,$$

или

$$(**) \quad (\bar{\Phi}, \delta \bar{\mathbf{r}}) = 0,$$

где  $\bar{\Phi}$  –  $3n$ -мерный вектор даламберовых сил инерции.

Значит, данный вектор ортогонален любому вектору возможных перемещений. Но что мы знаем о векторе возможных перемещений?

Вектор  $\delta \bar{\mathbf{r}}$  – произвольный вектор с компонентами  $\delta x_1, \dots, \delta z_n$ , удовлетворяющий условиям

$$(\bar{\mathbf{G}}^{(\alpha)}, \delta \bar{\mathbf{r}}) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, p.$$

Направление  $3n$ -мерного вектора возможного перемещения изображающей точки произвольно – лишь бы этим условиям он удовлетворял.

Но условиям такого вида, как показывает формула (\*\*), в нашем случае удовлетворяет и  $3n$ -мерный вектор ускорения изображающей точки.

Учитывая (\*), за  $\delta \bar{\mathbf{r}}$  можно принять вектор, пропорциональный  $\bar{\mathbf{w}}$ :  $\delta \bar{\mathbf{r}} = \lambda \bar{\mathbf{w}}, \lambda > 0$ .

Роль множителя  $\lambda$  невелика и сводится лишь к соблюдению равенства размерностей величин.

Тогда:

$$\begin{aligned} (\bar{\Phi}, \delta \bar{\mathbf{r}}) &= (\bar{\Phi}, \lambda \bar{\mathbf{w}}) = \sum_v (\bar{\Phi}_v, \lambda \bar{\mathbf{w}}_v) = \\ &= \sum_v (-m_v \bar{\mathbf{w}}_v, \lambda \bar{\mathbf{w}}_v) = -\sum_v m_v \lambda (\bar{\mathbf{w}}_v, \bar{\mathbf{w}}_v) \leq 0, \end{aligned}$$

причем равенство (\*\*) достигается  $\square \forall v \bar{\mathbf{w}}_v = 0$ , а тогда и  $\bar{\Phi}_v = 0$

Итак,  $\bar{\mathbf{w}} = 0$  и  $\bar{\Phi} = 0$ , а уравнения динамического равновесия

$$\bar{\mathbf{F}}_v + \bar{\mathbf{R}}_v + \bar{\Phi}_v = 0$$

сводятся к уравнениям равновесия

$$\bar{\mathbf{F}}_v + \bar{\mathbf{R}}_v = 0.$$

Применяя основную теорему о равновесии СМТ, получаем: система находится в равновесии при  $t \in [0, \tau]$ .



Если в принципе возможных перемещений перейти от  $\delta \bar{\mathbf{r}}_v$  к  $\bar{\mathbf{v}}_v^B$ , получаем **принцип возможных скоростей**:

$$N^B \equiv \sum_v (\bar{\mathbf{F}}_v, \bar{\mathbf{v}}_v^B) = 0, \quad \bar{\mathbf{v}}_v(0) = 0.$$

В этом варианте принципа вместо возможной работы фигурирует возможная мощность. При решении конкретных задач эта формулировка часто оказывается удобнее.

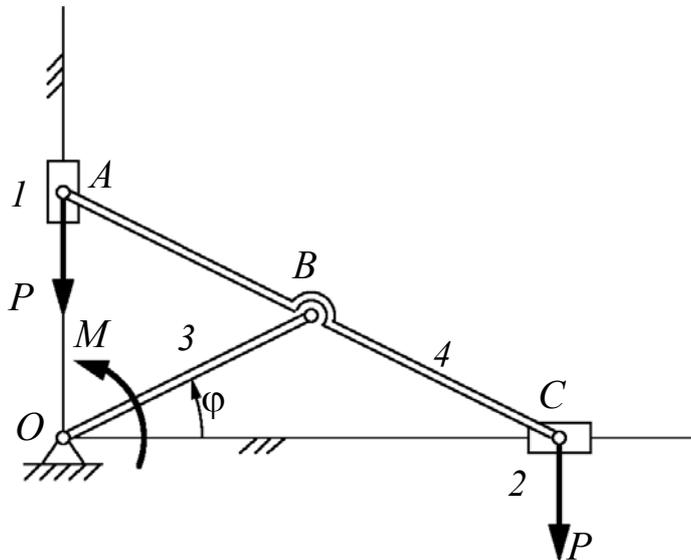
А в целом обе формулировки вполне эквивалентны.

Принцип возможных скоростей был сформулирован И.Бернулли<sup>5</sup> в 1717 г.

Принцип же возможных скоростей был сформулирован Иоганном Бернулли в письме к французскому механику Вариньону (возможно, Вы помните теорему его имени из курса статики). Вариньон опубликовал выдержки из этого письма в своем трактате “Новая механика, или статика”. Нужно подчеркнуть, что идеи принципа прослеживаются вплоть до времен античности, но до Иоганна Бернулли он применялся лишь к силам тяжести. Доказательства принципа Бернулли не дал; первые доказательства появились лишь в конце XVIII века. Теперь становится яснее и происхождение принципа Даламбера – Лагранжа. Лагранж соединил принцип Даламбера с принципом возможных перемещений, трактуя его как универсальный метод решения задач статики, и получил в результате общий метод составления уравнений динамики. Чтобы лучше понять этот принцип, посмотрим, как он используется при решении конкретных задач.

## 9. Решение задач статики на основе принципа возможных перемещений

**Пример 1.** Найти положение равновесия эллипсографа, если  $AC = 2OB = a$ , веса ползунов 1 и 2 равны  $P$ ,  $M = Pa$ , а кривошип 3 и линейка 4 невесомы.



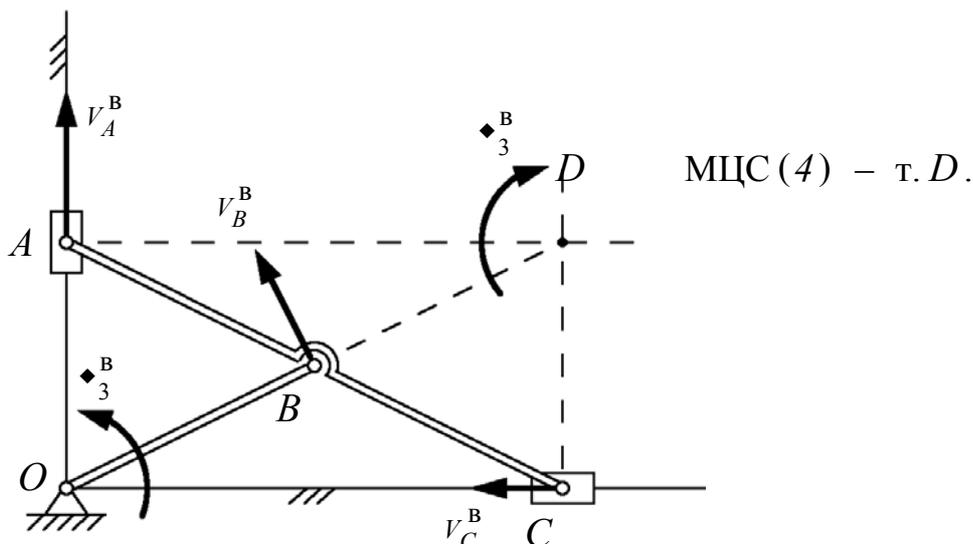
Возможно, Вы в кинематике уже решали задачи о движении эллипсоида. Напомним, что этот прибор так называется потому, что траекториями точек линейки 4 являются эллипсы.

Приступаем к решению. Воспользуемся принципом возможных скоростей, для чего вычислим возможную мощность активных сил и приравняем ее нулю.

$$N^B \equiv (\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{v}}_A^B) + (\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{v}}_C^B) + (\bar{\mathbf{M}}, \bar{\omega}_3^B) = 0.$$

<sup>5</sup> Бернулли, Иоганн (1667 – 1748) – швейцарский математик и механик. Инициалы при фамилии этого ученого лучше не опускать. У него были старший брат Якоб и сын Даниил, которые также принадлежали к числу крупнейших ученых своего времени. А всего след в науке оставили 12 представителей семейства Бернулли. Что касается именно Иоганна Бернулли, то, помимо работ по механике и математике, у него есть еще одна важная заслуга: он был учителем самого Эйлера.

Выясним, как связаны между собой возможные скорости.



Здесь МЦС линейки лежит в четвертой вершине получившегося прямоугольника; мгновенный центр скоростей кривошипа – в точке  $O$ , а мгновенные центры ползунов – на бесконечности.

$$\begin{aligned} v_A^B &= \omega_4^B \cdot AD = \frac{v_B^B}{BD} \cdot AD = \omega_3^B \cdot OB \cdot \frac{AD}{BD} = \\ &= \omega_3^B \cdot AD = \omega_3^B \cdot 2a \cos \varphi . \end{aligned}$$

Подставляем полученное выражение в формулу для  $N^B$ :

$$N^B \equiv -P \cdot \omega_3^B \cdot 2a \cos \varphi + M \omega_3^B = 0 .$$

В полученном равенстве возможная скорость сокращается, и можно найти из него  $\cos \varphi$ :

$$\cos \varphi = \frac{M}{P \cdot 2a} = \frac{Pa}{2Pa} = \frac{1}{2} .$$

Ответ:

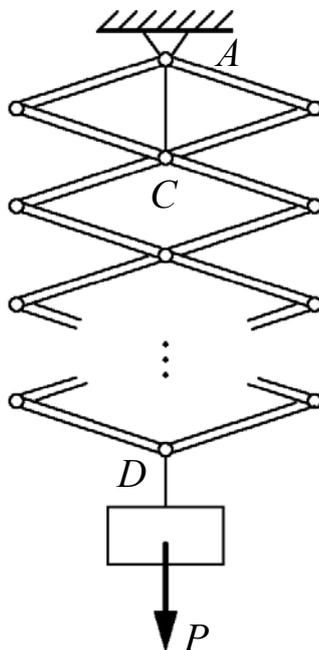
$$\boxed{\varphi = 60^\circ} .$$

Поскольку в данной задаче угол  $\varphi$  можно принять за обобщенную координату, то он однозначно задает конфигурацию механизма. Итак, мы нашли равновесную конфигурацию эллипсографа.

Итак, мы познакомились с принципом возможных перемещений и с его разновидностью – принципом возможных скоростей. Рассмотрен пример, в котором при помощи принципа возможных скоростей была найдена равновесная конфигурация эллипсографа. В данной задаче статики нам вообще не пришлось рассматривать реакции связей.

А что делать с теми задачами статики, в которых требуется искать именно реакции связей? В этих задачах принцип возможных скоростей тоже применим, только им надо пользоваться вместе с принципом освобожденности от связей.

**Пример 2.** Конструкция из соединенных шарнирами невесомых стержней удерживается в равновесии нитью  $AC$ . Найти ее натяжение, вызванное грузом веса  $P$ .



Обратите внимание, что стержни образуют систему ромбов. Если бы нити не было, конструкция стала бы растягиваться, пока груз  $P$  не достиг бы наинизшего положения.

Отбросим нить, заменив ее действие силой натяжения  $T$ , которую добавим к активным силам.



Раньше наша система была неизменяемой; теперь же она получила одну степень свободы.

Сообщим системе возможное перемещение, сместив груз вниз. Тогда вертикальные диагонали ромбов удлинятся на одну и ту же величину  $\delta s$ , так что:

$$\delta s_C = \delta s, \quad \delta s_D = n \cdot \delta s,$$

где  $n$  – число ромбов.

Составим теперь выражение для возможной работы и приравняем его нулю.

$$\delta A \equiv - T \cdot \underbrace{\delta s_C}_{\delta s} + P \cdot \underbrace{\delta s_D}_{n \cdot \delta s} = 0.$$

Ответ:  $T = nP$ .

Задача решена очень просто. А если бы мы освободились от всех связей, то получили бы весьма громоздкую систему уравнений. Теперь, познакомившись с общими уравнениями динамики и статики, перейдем к новой теме.

### § 8. Уравнения Лагранжа 2-го рода

Наша очередная задача – вывести уравнения Лагранжа 2-го рода. Начнем мы, однако, с того, чем закончили предыдущий параграф – с задач о равновесии механических систем.

#### 1. Условия равновесия в обобщенных координатах

Рассмотрим СМТ, на которую наложены удерживающие голономные связи, причем число степеней свободы системы равно  $s$ .

В этих условиях, как мы знаем, конфигурацию механической системы можно описать при помощи обобщенных координат, и число их будет тоже равно  $s$ .

Если бы в системе были неголономные связи, то число обобщенных координат было бы больше числа степеней свободы, а их вариации уже не были бы независимыми.

Как мы увидим, независимость вариаций обобщенных координат – это то, что для нас будет очень важно в этом и следующем пунктах.

Выразим радиус-векторы точек системы и их возможные перемещения через обобщенные координаты  $q_1, \dots, q_s$ :

$$\bar{\mathbf{r}}_v = \bar{\mathbf{r}}_v(q_1, \dots, q_s, t),$$

$$\delta \bar{\mathbf{r}}_v = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_s} \delta q_s, \quad v = 1, \dots, n.$$

Запишем выражение для возможной работы активных сил  $\bar{\mathbf{F}}_1, \dots, \bar{\mathbf{F}}_n$ , приложенных к точкам СМТ.

Заметьте: поскольку индексы у нас соответствуют номерам точек, то каждый вектор  $\bar{\mathbf{F}}_v$  – это равнодействующая активных сил, приложенных к точкам системы.

Выражение для возможной работы системы сил мы уже получали, только сейчас у нас суммирование будет вестись не по номерам сил, а по номерам точек.

$$\delta A = \sum_i Q_i \delta q_i.$$

$$\text{где } Q_i = \sum_v (\bar{\mathbf{F}}_v, \bar{\mathbf{u}}_v^{(i)}) \equiv \sum_v (\bar{\mathbf{F}}_v, \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i}).$$

Теперь вспомним принцип возможных перемещений. Его аналитическим выражением, как Вы знаете, служит общее уравнение статики, а заключается оно в том, что возможная работа активных сил равна нулю.

Вот только при каких условиях на связи мы его получали? Связи в принципе возможных перемещений предполагались идеальными, удерживающими и стационарными.

У нас пока связи – удерживающие и голономные. Значит, идеальность и стационарность надо потребовать дополнительно.

Если связи – также идеальные и стационарные, то равновесию системы отвечает выполнение общего уравнения статики:

$$\delta A \equiv \sum_v (\bar{\mathbf{F}}_v, \delta \bar{\mathbf{r}}_v) = 0 ;$$

в обобщенных координатах имеем:

$$\delta A \equiv \sum_i Q_i \delta q_i = 0 .$$

Таким образом, мы получили основное уравнение статики в обобщенных координатах.

Все ли это, что нам надо для равновесия? Нет, потому что в принципе возможных перемещений имеется еще дополнительное условие, по которому начальные скорости должны быть равны нулю. Запишем:

Дополнительное условие

$$\bar{\mathbf{v}}_v(0) = 0 , \quad v = 1, \dots, n ,$$

принимает вид:

$$(*) \quad \dot{q}_i(0) = 0 , \quad i = 1, \dots, s .$$

Действительно,

$$\bar{\mathbf{v}}_v = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial t} ,$$

а в случае стационарных связей  $\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial t} = 0$ .

С начальными условиями для скоростей у нас теперь все ясно. А вот требование равенства нулю возможной работы можно упростить. Именно, мы можем вообще исключить из наших рассмотрений возможные перемещения.

Так как для голономных связей вариации обобщенных координат независимы, то

$$\sum_i Q_i \delta q_i = 0 \quad \square \quad \forall i \quad Q_i = 0 .$$

В самом деле, если величины  $\delta q_i$  произвольны, то сумма может равняться нулю только тогда, когда равны нулю все коэффициенты.

Теперь мы можем записать вывод.

**Вывод:** для равновесия механической системы с идеальными, удерживающими, стационарными и голономными связями необходимо и достаточно, чтобы вместе с условиями (\*) выполнялись следующие уравнения равновесия в обобщенных координатах:

$$(**) \quad \boxed{Q_i = 0, \quad i = 1, \dots, s} .$$

Следовательно, в примерах на принцип возможных перемещений мы могли бы вместо использования возможных перемещений или скоростей с самого начала вычислять обобщенную силу (там были задачи с одной степенью свободы, и обобщенная сила была бы одна). Мы обошлись бы без деления на возможную скорость – или возможное перемещение.

Название данного пункта было таким: “Условия равновесия в обобщенных координатах”. Теперь мы можем записать:

Уравнения (\*), (\*\*) – условия равновесия механической системы в обобщенных координатах.

Мы уже отмечали, – что эти условия – необходимые и достаточные.

Теперь обратимся к принципу Даламбера – Лагранжа. С ним можно поступить точно так же, и мы запишем только результат. Напомним только, что стационарность связей в принципе Даламбера – Лагранжа не требуется; а вот к активным силам надо добавить даламберовы силы инерции.

Пишем:

Аналогично, для механической системы с идеальными, удерживающими и голономными связями общее уравнение динамики

$$\sum_v (\bar{\mathbf{F}}_v + \bar{\Phi}_v, \delta \bar{\mathbf{r}}_v) = 0$$

эквивалентно следующим **уравнениям динамического равновесия в обобщенных координатах**:

$$\boxed{Q_i + Q_i^{\text{ин}} = 0, \quad i = 1, \dots, s} ,$$

где  $Q_i^{\text{ин}} = \sum_v (\bar{\Phi}_v, \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i})$  – обобщенные даламберовы силы инерции.

С этими уравнениями вполне можно работать. Вот только вычисление даламберовых сил инерции  $\bar{\Phi}_v$  – не всегда простое дело, и мы сейчас выясним, как можно обойти необходимость вычислять эти силы.

В заключение этого пункта надо только обратить внимание вот на что. И уравнения равновесия в обобщенных координатах, и уравнения динамического равновесия в обобщенных координатах справедливы при тех же условиях, при которых справедливы соответственно общее уравнение статики и общее уравнение динамики. Добавилось только одно дополнительное условие, и это важно: предполагается, что связи голономны.

## 2. Тождества Лагранжа

Докажем два вспомогательных тождества, которые нам потребуются при выводе уравнений Лагранжа.

Рассмотрим передаточные функции скоростей точек механической системы, т.е. величины

$$\bar{\mathbf{u}}_v^{(i)} \equiv \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i}.$$

Речь идет опять-таки о системе материальных точек. Напомним, что в конкретных задачах нужны передаточные функции скоростей точек приложения сил, а если в систему входят твердые тела – то и передаточные функции угловых скоростей этих тел.

Но для тех передаточных функций все будет совершенно аналогично.

**Теорема.** Справедливы тождества:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_v}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_v}{\partial q_i}.$$

Запомнить эти тождества можно так:  $\bar{\mathbf{v}}_v$  – это  $\dot{\bar{\mathbf{r}}}_v$ . Поэтому если выражение для передаточной функции трактовать как дробь, то первое тождество утверждает: если под знаками  $\partial$  выполнить дифференцирование по времени величин  $\bar{\mathbf{r}}_v$  и  $q_i$ , то точки, обозначающие дифференцирование по времени, в числителе и знаменателе сокращаются.

Второе тождество утверждает, что для дифференцирования по времени передаточной функции достаточно продифференцировать стоящую в числителе величину  $\bar{\mathbf{r}}_v$ .



1°. Так как

$$(*) \quad \bar{\mathbf{r}}_v = \bar{\mathbf{r}}_v(q_1, \dots, q_s, t),$$

то и

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i} = \bar{\mathbf{u}}_v^{(i)}(q_1, \dots, q_s, t)$$

– функция тех же переменных.

С другой стороны,

$$\bar{\mathbf{v}}_v \equiv \frac{d\bar{\mathbf{r}}_v}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial t}$$

– функция вида

$$(**) \quad \bar{\mathbf{v}}_v = \bar{\mathbf{v}}_v(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, q_1, \dots, q_s, t).$$

Коэффициенты в выражении скорости  $\bar{\mathbf{v}}_v$  через обобщенные скорости, как мы только что видели, от обобщенных скоростей не зависят.

Поскольку функция  $\bar{\mathbf{v}}_v$  зависит от  $\dot{q}_i$  линейно, то производные  $\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_v}{\partial \dot{q}_i}$  равны коэффициентам при  $\dot{q}_i$ , т.е.  $\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i}$ .

Первое из тождеств Лагранжа мы доказали.

$$\begin{aligned}
2^\circ. \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{u}}_v^{(i)} = \\
&= \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_v^{(i)}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_v^{(i)}}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_v^{(i)}}{\partial t} = \\
&= \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_1 \partial q_i} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_s \partial q_i} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial t \partial q_i} .
\end{aligned}$$

С другой стороны, в силу (\*\*)

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_v}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i \partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i \partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i \partial t} .$$

Сопоставим два полученных выражения. Они очень похожи, только порядок дифференцирования в частных производных различен.

Далее предполагаем, что функции (\*) – дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов.

Это накладывает определенные условия на вид уравнений связей и на выбор обобщенных координат. Именно в этих предположениях и справедлива механика Лагранжа.

В этих условиях справедлива теорема о независимости частных производных от порядка дифференцирования, так что

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_v}{\partial q_i} .$$

Вот мы доказали и второе из тождеств Лагранжа.

Между прочим, упоминавшуюся теорему доказал Николай Бернулли – племянник Иоганна Бернулли. ■

Теперь перейдем к выводу уравнений Лагранжа 2-го рода.

### 3. Вывод уравнений Лагранжа 2-го рода

Начнем с того, что нам уже известно.

Запишем для механической системы с идеальными, удерживающими и голономными связями уравнения динамического равновесия в обобщенных координатах:

$$Q_i + Q_i^{\text{ин}} = 0, \quad i = 1, \dots, s,$$

и представим их в виде

$$(*) \quad -Q_i^{\text{ин}} = Q_i.$$

Сейчас мы убедимся, что это, в сущности, и есть уравнения Лагранжа, хорошо известные Вам по практическим занятиям.

Имеем:

$$-Q_i^{\text{ин}} = -\sum_v \left( \underbrace{\Phi_v}_{-m_v \bar{\mathbf{w}}_v}, \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i} \right) = \sum_v \left( m_v \bar{\mathbf{w}}_v, \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i} \right).$$

Рассмотрим аналогичную сумму, но не с ускорениями, а со скоростями, и продифференцируем ее по времени. Учитывая, что

$$\frac{d}{dt} \sum_v \left( m_v \bar{\mathbf{v}}_v, \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i} \right) = \sum_v \left( m_v \bar{\mathbf{w}}_v, \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i} \right) + \sum_v \left( m_v \bar{\mathbf{v}}_v, \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i} \right),$$

получаем:

$$\begin{aligned} -Q_i^{\text{ин}} &= \frac{d}{dt} \sum_v \left( m_v \bar{\mathbf{v}}_v, \underbrace{\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i}}_{\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_v}{\partial \dot{q}_i}} \right) - \sum_v \left( m_v \bar{\mathbf{v}}_v, \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i}}_{\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_v}{\partial q_i}} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \sum_v m_v \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{(\bar{\mathbf{v}}_v, \bar{\mathbf{v}}_v)}{2} - \sum_v m_v \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{(\bar{\mathbf{v}}_v, \bar{\mathbf{v}}_v)}{2} = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{1}{2} \sum_v m_v v_v^2 - \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{1}{2} \sum_v m_v v_v^2 = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Итак, уравнения динамического равновесия в форме (\*) можно иначе записать в виде **уравнений Лагранжа 2-го рода**:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i}, \quad i = 1, \dots, s.$$

Эти уравнения вместе с их выводом опубликованы Лагранжем в уже упоминавшемся трактате “Аналитическая механика” в 1788 году. Их число равно числу степеней свободы механической системы.

При выводе уравнений Лагранжа 2-го рода мы видели, что они в совокупности эквивалентны общему уравнению динамики, которое служит математическим выражением принципа Даламбера – Лагранжа.

Отсюда можно сделать такой вывод:

Действительное движение механической системы выделяется из всех кинематически осуществимых с теми же начальными условиями тем, что оно в любой момент времени удовлетворяет уравнениям Лагранжа.

Таким образом, уравнения Лагранжа действительно имеют право называться уравнениями движения механической системы.

В заключение я хотел бы напомнить, что общее уравнение динамики справедливо для любых систем с идеальными и удерживающими связями, а уравнения Лагранжа применимы, если все эти связи еще и голономны.

При составлении уравнений движения по методу Лагранжа важную роль играет кинетическая энергия. Получим для этой динамической величины формулу, характеризующую ее изменение с течением времени.

#### 4. Теорема об изменении кинетической энергии СМТ

Это – одна из общих теорем динамики, т.е. теорема из того же ряда, что и теоремы об изменении количества движения, кинетического момента и о движении центра масс.

**Теорема.** Производная по времени от кинетической энергии СМТ равна сумме мощностей *внешних* и *внутренних* сил:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{\nu} (\bar{\mathbf{F}}_{\nu}^{(e)}, \bar{\mathbf{v}}_{\nu}) + \sum_{\nu} (\bar{\mathbf{F}}_{\nu}^{(i)}, \bar{\mathbf{v}}_{\nu}) .$$

Обратите внимание: это – единственная из общих теорем динамики, в которой внутренние силы фигурируют наравне с внешними.



Запишем для каждой точки уравнение II закона Ньютона:

$$m_{\nu} \bar{\mathbf{w}}_{\nu} = \bar{\mathbf{F}}_{\nu}^{(e)} + \bar{\mathbf{F}}_{\nu}^{(i)} ,$$

где  $\bar{\mathbf{F}}_{\nu}^{(e)}$  и  $\bar{\mathbf{F}}_{\nu}^{(i)}$  – равнодействующие внешних и внутренних сил, приложенных к  $\nu$ -й точке.

Теперь вычислим производную от кинетической энергии.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} \underbrace{v_{\nu}^2}_{(\bar{\mathbf{v}}_{\nu}, \bar{\mathbf{v}}_{\nu})} \right) = \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} \cdot 2 (\bar{\mathbf{w}}_{\nu}, \bar{\mathbf{v}}_{\nu}) =$$

$$= \sum_v \left( \underbrace{m_v \bar{\mathbf{w}}_v, \bar{\mathbf{v}}_v}_{\bar{\mathbf{F}}_v^{(e)} + \bar{\mathbf{F}}_v^{(i)}} \right) = \sum_v^{67} \left( \bar{\mathbf{F}}_v^{(e)}, \bar{\mathbf{v}}_v \right) + \sum_v \left( \bar{\mathbf{F}}_v^{(i)}, \bar{\mathbf{v}}_v \right).$$

■

Теорема принадлежит И. и Д. Бернулли.

Точную дату привести затруднительно; в действительности Иоганн и Даниил Бернулли пришли к ней в серии работ, выполненных в 20-х – 30-х гг. XVIII века. Они начали с частных случаев, а потом постепенно подошли и к общей формулировке.

Имя Иоганна Бернулли у нас уже встречалось, а имя его сына – нет. Бернулли, Даниил (1700 – 1782) – швейцарский математик, физик и механик. В 1725 г. он приехал вместе с братом Николаем в Россию и проработал здесь восемь лет, а затем вернулся в Швейцарию. Именно братья Бернулли пригласили в Россию Эйлера, с которым подружились еще на родине, когда тот учился у их отца. Весьма важное значение имели работы Даниила Бернулли по гидродинамике; наряду с Эйлером, Даламбером и своим отцом он является основоположником этого раздела механики.

Сделаем важное замечание по поводу формулировки теоремы об изменении кинетической энергии.

**Замечание.** При наличии связей в состав  $\bar{\mathbf{F}}_v^{(e)}$  и  $\bar{\mathbf{F}}_v^{(i)}$  входят реакции связей. Если связи – идеальные и стационарные, то вклад в сумму мощностей реакции не дают.

В самом деле, идеальность означает, что для любой системы возможных скоростей мощность реакций связей равна нулю. А в случае стационарных связей действительные скорости принадлежат к числу возможных.

В частности, равна нулю мощность реакций внутренних связей в неизменяемой СМТ (и в АТТ).

А этот факт мы уже отмечали; именно, связи в неизменяемой системе материальных точек приводились как один из примеров идеальных стационарных связей.

Поэтому для АТТ теорема принимает вид:

$$\frac{dT}{dt} = N^{(e)} \equiv (\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{v}}_A) + (\bar{\mathbf{L}}_A, \bar{\boldsymbol{\omega}}),$$

где  $\bar{\mathbf{R}}$  и  $\bar{\mathbf{L}}_A$  – главный вектор и главный момент приложенных к телу сил,  $A$  – произвольная телесная точка.

Но вернемся от данного частного случая к общей ситуации. Нетрудно видеть, что теореме об изменении кинетической энергии можно придать и другую форму.

Запишем теорему об изменении кинетической энергии СМТ в виде

$$\frac{dT}{dt} = N^{(e)} + N^{(i)},$$

где  $N^{(e)}$  и  $N^{(i)}$  – мощности внешних и внутренних сил, и проинтегрируем:

$$T(t_2) - T(t_1) = A^{(e)} + A^{(i)}.$$

Итак:

Изменение кинетической энергии СМТ за конечное время равно сумме работ внешних и внутренних сил за это время (теорема об изменении кинетической энергии СМТ в интегральной форме).

Для неизменяемой СМТ (или АТТ):

$$T(t_2) - T(t_1) = A^{(e)}.$$

Получим простое следствие из теоремы об изменении кинетической энергии.

**Следствие.** Если на данном отрезке времени  $N^{(e)} \equiv 0$  и  $N^{(i)} \equiv 0$ , то  $T = \text{const}$ .

Иными словами, если мощности внешних и внутренних сил тождественно равны нулю, то кинетическая энергия системы остается неизменной.

Действительно,  $N^{(e)} = 0$  и  $N^{(i)} = 0 \quad \square \quad \frac{dT}{dt} = 0.$

Если последнее равенство на данном отрезке времени выполняется тождественно, то кинетическая энергия будет оставаться постоянной.

Это следствие иногда называют законом сохранения кинетической энергии СМТ.

В общем же случае кинетическая энергия не сохраняется; но часто сохраняется другая величина, также имеющая размерность энергии. Этот случай мы рассмотрим позднее.

## § 9. Механические системы с потенциальными силами

### 1. Потенциальная энергия материальной точки

Начнем с определения силового поля.

**Векторное поле** – функция, зависящая от точки пространства и, быть может, от времени, значениями которой являются векторы.

В качестве первого аргумента такой функции обычно записывают не саму точку, а ее радиус-вектор.

**Силовое поле** в трехмерном пространстве – векторное поле

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{r}}, t),$$

значение которого при данных  $\bar{\mathbf{r}}$  и  $t$  определяет силу, действующую в данный момент на материальную точку с радиус-вектором  $\bar{\mathbf{r}}$ .

Чем это отличается от общей ситуации?

В отличие от общего случая, такая сила не зависит от скорости точки.

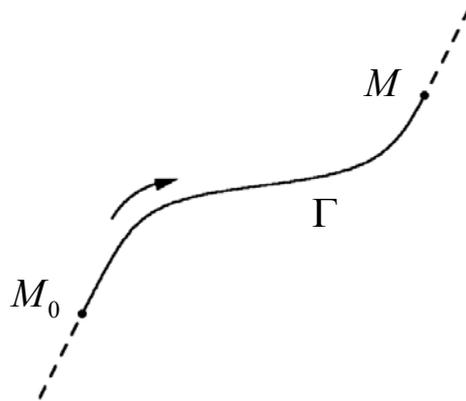
При изучении силовых полей выделяют два основных частных случая.

Силовое поле – **стационарное**, если  $\bar{\mathbf{F}}$  явно не зависит от времени  $t$ :  $\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{r}})$ .

В противном случае силовое поле называется нестационарным. Терминология здесь вполне аналогична той, которая применялась при классификации связей.

Стационарные силовые поля обладают рядом важных свойств. Одно из них мы сейчас рассмотрим.

Пусть точка за промежуток времени от  $t_0$  до  $t$  переместилась из положения  $M_0$  в положение  $M$ ; обозначим соответствующую дугу траектории (путь) через  $\Gamma$



Тогда работа силы  $\bar{\mathbf{F}}$  стационарного силового поля за промежуток времени  $[t_0, t]$  может быть представлена в виде:

$$A = \int_{t_0}^t dA = \int_{t_0}^t (\bar{\mathbf{F}}, \bar{\mathbf{v}}) dt = \int_{\Gamma} (\bar{\mathbf{F}}, d\bar{\mathbf{r}}).$$

Так как  $\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{r}})$ , то последнее выражение есть криволинейный интеграл 2-го рода; поэтому работа  $A$  зависит от начального  $M_0$  и конечного  $M$  положений и от формы пути, но не зависит от закона движения точки вдоль траектории.

Это – вполне естественное утверждение, поскольку криволинейный интеграл 2-го рода есть чисто геометрическое понятие. Итак, для стационарных силовых полей работа зависит от начальной и конечной точек пути и от его формы (и ни от чего больше). Часто встречаются такие поля, где работа и от формы пути не зависит. Этот случай мы сейчас рассмотрим.

Силовое поле называется **потенциальным**, если существует такая скалярная функция  $\Pi = \Pi(\bar{\mathbf{r}}, t)$ , что

$$(*) \quad \boxed{\bar{\mathbf{F}} = -\text{grad } \Pi},$$

т.е.

$$(**) \quad F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Эта функция называется **потенциальной энергией** точки в силовом поле, а сила  $\bar{\mathbf{F}}$ , удовлетворяющая формуле (\*) – **потенциальной силой**.

Если вспомнить, что в математическом анализе также рассматриваются потенциальные векторные поля, то данная терминология представляется вполне естественной. Некоторое недомыслие может вызвать лишь наличие знака “минус”.

В действительности часто вместо функции  $\Pi$  вводят функцию  $U$ , отличающуюся от нее знаком. Такая функция называется силовой функцией; с ее помощью формулы (\*) и (\*\*) записываются без знака “минус”.

Но во многих теоремах и формулах фигурирует именно потенциальная энергия, так что без этого понятия нам не обойтись. А пользоваться одновременно двумя функциями, отличающимися лишь знаком – это роскошь; это привело бы лишь к возрастанию числа формул и увеличению возможности ошибок. Так что в нашем курсе мы обойдемся без понятия силовой функции.

Функция  $\Pi$  впервые встречается в работах Лагранжа; правда, он никак ее не называет. А название “потенциальная энергия” утвердилось в середине XIX века.

Заметим, что в общем случае потенциальная энергия зависит от времени, которое рассматривается как параметр. Весьма часто, однако, встречается случай, когда такой зависимости нет. Займемся им.

В случае стационарного потенциального поля  $\Pi = \Pi(\bar{\mathbf{r}})$ , т.е.  $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$ . Тогда:

$$dA = (\bar{\mathbf{F}}, d\bar{\mathbf{r}}) = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx - \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy - \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz = -d\Pi.$$

Получено основное свойство стационарного потенциального поля – элементарная работа силы  $\bar{\mathbf{F}}$  такого поля есть полный дифференциал:

$$dA = -d\Pi.$$

Из этой формулы нетрудно получить ряд следствий.

**Следствие 1.** Работа силы  $\bar{\mathbf{F}}$  стационарного потенциального поля не зависит от формы пути и равна разности значений  $\Pi$  в начальном и конечном положении.

Действительно,

$$A = \int_{\Gamma} (\bar{\mathbf{F}}, d\bar{\mathbf{r}}) = - \int_{\Gamma} d\Pi = - [\Pi(\bar{\mathbf{r}}) - \Pi(\bar{\mathbf{r}}_0)],$$

где  $\bar{\mathbf{r}}_0$  и  $\bar{\mathbf{r}}$  – радиус-векторы начального и конечного положений, т.е.

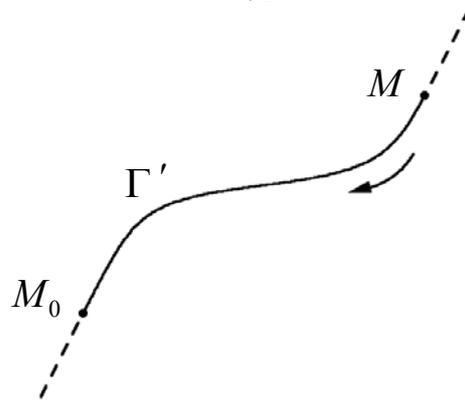
$$A = \Pi(\bar{\mathbf{r}}_0) - \Pi(\bar{\mathbf{r}}).$$

Обратите внимание на порядок следования слагаемых в этой формуле.

В частности, если  $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_0$  (замкнутый путь), то  $A = 0$ .

В следствии 1 мы работу выражали через потенциальную энергию. Теперь поступим наоборот. А от знака “минус” избавимся тривиальным способом.

Пусть теперь  $\Gamma'$  – путь, начинающийся в точке  $M$  и кончающийся в точке  $M_0$ .



Его форма может совпадать с формой пути  $\Gamma$ , а может и отличаться.

Теперь рассуждаем так.

Если начальное и конечное положения меняются ролями, то криволинейный интеграл 2-го рода меняет знак:

$$A' \equiv \int_{\Gamma'} (\bar{\mathbf{F}}, d\bar{\mathbf{r}}) = -A = \Pi(\bar{\mathbf{r}}) - \Pi(\bar{\mathbf{r}}_0),$$

так что

$$\Pi(\bar{\mathbf{r}}) = A' + \Pi(\bar{\mathbf{r}}_0).$$

**Следствие 2.** Потенциальная энергия точки в стационарном потенциальном поле равна сумме работы, совершаемой полем при переходе точки из данного положения в начальное, и значения потенциальной энергии в этом начальном положении; последнее может быть выбрано произвольно.

Что может быть выбрано произвольно: значение энергии или начальное положение? Можно понимать и так, и эдак: в обоих случаях утверждение будет верным.

Данное следствие раскрывает механический смысл понятия потенциальной энергии, исходное определение которого было достаточно формальным.

Значит, если работа стационарного силового поля не зависит от формы пути, то, вычисляя работу его при переходе материальной точки из произвольного положения в некоторое начальное и добавляя всякий раз одну и ту же константу, мы можем определить потенциальную энергию для всех точек пространства.

Потенциальная энергия при этом определяется с точностью до произвольной константы, которая никакой роли не играет.

**Замечание.** Полученные выводы не распространяются на нестационарные потенциальные поля.

Именно: в них работа может зависеть от формы пути и закона движения по траектории, а сама потенциальная энергия определена уже не с точностью до постоянного слагаемого, а с точностью до заданной функции времени. Соответственно, в данном случае следствие 2 уже не может служить заменой первоначального определения.

**Пример.** Рассмотрим точку массы  $m$  в однородном поле сил тяжести. Если ось  $z$  направлена вертикально вверх, то

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -mg.$$

Соотношения

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

выполняются, если

$$\boxed{\Pi = mgz}.$$

Это – формула для потенциальной энергии однородного поля сил тяжести; произвольная постоянная фиксирована условием  $z = 0 \square \Pi(\vec{r}) = 0$ .

Фактически речь идет о гравитационном поле вблизи поверхности Земли, причем наша формула – приближенная (Землю считаем плоской).

Перейдем к более общему случаю поля сил всемирного тяготения. Но сперва рассмотрим еще более общую постановку задачи.

## 2. Потенциальная энергия точки в центральном силовом поле

Здесь нужно пояснение.

Речь идет о поле, для которого сила  $\vec{F}$ , действующая на точку, направлена вдоль прямой, соединяющей ее с неподвижным центром  $O$ , причем модуль силы зависит только от расстояния точки до центра:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \frac{\vec{r}}{r}, \quad r = |\vec{r}|.$$

В условии задачи говорилось о модуле силы, но фактически  $F(r)$  может иметь любой знак. Запишем аккуратно, что собою представляет эта величина.

Здесь  $F(r)$  – проекция силы  $\vec{F}$  на направление радиус-вектора  $\vec{r}$ .

Теперь вычислим элементарную работу силы центрального силового поля.

$$\begin{aligned} dA &= (\vec{F}, d\vec{r}) = F(r) \frac{(\vec{r}, d\vec{r})}{r} = \frac{F(r)}{r} \cdot \frac{1}{2} d(\vec{r}, \vec{r}) = \\ &= \frac{F(r)}{r} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r dr = F(r) dr = -d\Pi, \end{aligned}$$

откуда

$$\boxed{\Pi = -\int F(r) dr}.$$

В этой формуле потенциальная энергия также определяется с точностью до произвольной постоянной, так как в ней фигурирует неопределенный интеграл.

Рассмотрим частные случаи полученной формулы.

**Пример 1.** Точка в поле гравитации неподвижного сферически симметричного тела массы  $M$ .

Случай сферической симметрии мы выбрали как наиболее простой: ведь поле тела со сферически симметричным распределением масс – такое же, как и у материальной точки той же массы.

Неподвижность же нужна, чтобы получить стационарное силовое поле.

Воспользуемся законом всемирного тяготения.

$$\bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{r}}) = -\gamma m M \frac{\bar{\mathbf{r}}}{r^3} = -\frac{\gamma m M}{r^2} \frac{\bar{\mathbf{r}}}{r},$$

так что

$$F(r) = -\frac{\gamma m M}{r^2}.$$

Здесь  $\gamma$  – универсальная гравитационная постоянная,  $m$  – масса точки.

А далее используем правило вычисления потенциальной энергии для точки в центральном силовом поле.

$$\int F(r) dr = \frac{\gamma m M}{r},$$

поэтому

$$\Pi = -\frac{\gamma m M}{r}.$$

Произвольная постоянная фиксирована условием  $r = \infty \Rightarrow \Pi(\bar{\mathbf{r}}) = 0$ .

При таком выборе произвольной постоянной потенциальная энергия во всех точках пространства строго отрицательна. То, что при  $r = 0$  она обращается в бесконечность, не должно нас особенно волновать: все равно эта формула верна, лишь если  $r$  больше, чем радиус притягивающего тела.

Запишем еще выражение для  $\Pi$  в виде функции координат материальной точки.

В декартовых координатах:

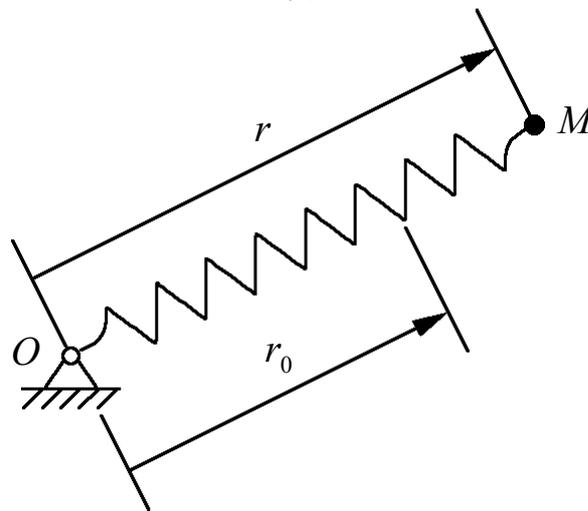
$$\Pi(x, y, z) = -\frac{\gamma m M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

**Пример 2.** Точка, соединенная линейной пружиной с неподвижным центром.

Речь идет о пружине, деформация которой подчиняется закону Гука.

$$\bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{r}}) = -c(r - r_0) \frac{\bar{\mathbf{r}}}{r},$$

где  $c$  – жесткость,  $r_0$  – длина пружины в недеформированном состоянии.



Вновь считаем интеграл от  $F(r)$ .

$$\int F(r) dr = -\frac{c(r-r_0)^2}{2},$$

поэтому

$$\boxed{\Pi = \frac{c(r-r_0)^2}{2}}.$$

Произвольная постоянная фиксирована условием  $r = r_0 \Rightarrow \Pi(\vec{r}) = 0$ .

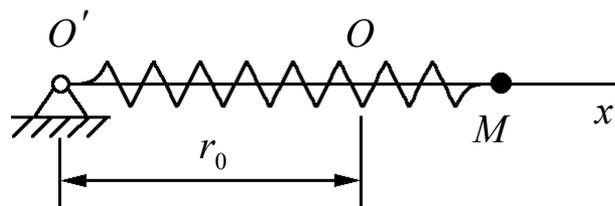
В декартовых координатах:

$$\Pi(x, y, z) = \frac{c(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r_0)^2}{2}.$$

Во многих задачах полезен частный случай этой формулы.

Частный случай: если точка движется вдоль оси  $Ox$  и начало координат выбрано так, что при  $x = 0$  пружина не деформирована, то

$$\boxed{\Pi = \frac{cx^2}{2}}.$$



### 3. Потенциальная энергия механической системы

Обобщим наши предыдущие рассмотрения на случай механической системы.

Вспомним сначала определение потенциальной энергии для материальной точки.

Для потенциальной энергии  $\Pi = \Pi(\bar{\mathbf{r}}, t)$  материальной точки:

$$(*) \quad \bar{\mathbf{F}} = -\text{grad } \Pi,$$

т.е.

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Впредь нам будет удобнее несколько изменить обозначения.

Пусть  $\varphi = \varphi(\bar{\mathbf{a}}, \dots)$  – скалярная функция каких-либо аргументов, среди которых – вектор  $\bar{\mathbf{a}}$  с компонентами  $a_x, a_y, a_z$ . **Производной** этой функции по векторному аргументу  $\bar{\mathbf{a}}$  называется вектор

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\mathbf{a}}} = \frac{\partial \varphi}{\partial a_x} \bar{\mathbf{i}} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_y} \bar{\mathbf{j}} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_z} \bar{\mathbf{k}}.$$

Символ, стоящий в левой части равенства, тем самым точно определен.

С точностью до обозначений – это то же самое понятие градиента. Поэтому понятие производной скалярной функции по векторному аргументу в действительности не зависит от выбора базиса.

Применительно к градиенту запись выглядит так:

Так как  $\bar{\mathbf{r}} = x\bar{\mathbf{i}} + y\bar{\mathbf{j}} + z\bar{\mathbf{k}}$ , то

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{\mathbf{r}}} = \frac{\partial \Pi}{\partial x} \bar{\mathbf{i}} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \bar{\mathbf{j}} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \bar{\mathbf{k}},$$

т.е. вместо формулы (\*) имеем:

$$(**) \quad \bar{\mathbf{F}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{\mathbf{r}}}.$$

Что мы от такой смены обозначений выгадали? А вот что. У нас сейчас будет много радиус-векторов, а символ grad – “безликий”: по нему не видно, по какому именно векторному аргументу производится дифференцирование. В формуле же (\*\*) этот аргумент указан явно.

Соотношения же для компонент вектора  $\bar{\mathbf{F}}$  остаются такими же, что и были.

Рассмотрим теперь СМТ, конфигурация которой задается набором радиус-векторов  $\bar{\mathbf{r}}_1, \dots, \bar{\mathbf{r}}_n$  ее точек  $M_\nu$ . Введем  $3n$ -мерный радиус-вектор  $\bar{\mathbf{r}}$  изображающей точки в конфигурационном пространстве данной СМТ; его компонентами служат декартовы координаты  $x_1, y_1, z_1, \dots, z_n$ .

Напоминаю: раз мы говорим о  $3n$ -мерном конфигурационном пространстве, то речь идет или о свободной системе материальных точек, или о системе материальных точек, освобожденной от связей.

Объединим силы  $\bar{\mathbf{F}}_\nu$ , приложенные к точкам системы, в один  $3n$ -мерный вектор силы  $\bar{\mathbf{F}}$  с компонентами  $F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, \dots, F_{nz}$ .

Подобное мы уже делали, когда обсуждали реакции идеальных связей.

**Силовое поле** на конфигурационном пространстве СМТ – векторное поле

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{r}}, t),$$

значение которого при данных  $\bar{\mathbf{r}}$  и  $t$  определяет  $3n$ -мерный вектор силы, действующий в данный момент на СМТ, если ее конфигурация характеризуется  $3n$ -мерным радиус-вектором  $\bar{\mathbf{r}}$ .

Итак, мы ввели понятия потенциального силового поля и потенциальной энергии материальной точки. Наша очередная цель – обобщить полученные результаты на случай системы материальных точек. Для этого мы ввели понятия многомерного вектора силы и радиус-вектора изображающей точки. Мы видели, что с их помощью определение силового поля на конфигурационном пространстве системы материальных точек записывается так же, как и для одной точки. Понятия стационарности и нестационарности силового поля переносятся на случай системы материальных точек дословно. А вот определение потенциального силового поля мы сейчас запишем.

Силовое поле на конфигурационном пространстве СМТ называется **потенциальным**, если существует такая скалярная функция  $\Pi = \Pi(\bar{\mathbf{r}}, t)$  – потенциальная энергия СМТ, что

$$(***) \quad \boxed{\bar{\mathbf{F}} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{\mathbf{r}}}} .$$

Формально определение – такое же, как и для одной материальной точки. Только  $\bar{\mathbf{F}}$  и  $\bar{\mathbf{r}}$  обозначают уже не трехмерные, а  $3n$ -мерные векторы.

Поясним записанное утверждение.

В обычных обозначениях

$$\Pi = \Pi(\bar{\mathbf{r}}_1, \dots, \bar{\mathbf{r}}_n, t) \equiv \Pi(x_1, y_1, z_1, \dots, z_n, t),$$

а формула (\*\*\*) соответствует системе равенств

$$\bar{\mathbf{F}}_v = - \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}, \quad v = 1, \dots, n,$$

или же совокупности  $3n$  скалярных равенств

$$F_{1x} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_1}, \quad F_{1y} = - \frac{\partial \Pi}{\partial y_1}, \quad \dots, \quad F_{nz} = - \frac{\partial \Pi}{\partial z_n}.$$

Таким образом, язык многомерной геометрии обеспечивает компактность записи, а при желании ее всегда можно расшифровать.

С учетом этого следующее утверждение становится очевидным.

Все общие утверждения из п.1 переносятся на многомерный случай с заменой слова “точка” на “система” и слова “положение” на “конфигурация”. В частности, для стационарного потенциального поля:

- 1) работа не зависит от формы пути, а для замкнутого пути равна нулю;

2) потенциальная энергия СМТ равна сумме работы, совершаемой полем при переходе системы из данной конфигурации в начальную, и значения потенциальной энергии в этой начальной конфигурации;

3) справедливо основное свойство:  $dA = -d\Pi$ , поскольку

$$dA = (\bar{\mathbf{F}}, d\bar{\mathbf{r}}) \equiv \sum_v (\bar{\mathbf{F}}_v, \delta\bar{\mathbf{r}}_v) = -\frac{\partial\Pi}{\partial x_1} dx_1 - \\ - \frac{\partial\Pi}{\partial y_1} dy_1 - \frac{\partial\Pi}{\partial z_1} dz_1 - \dots - \frac{\partial\Pi}{\partial z_n} dz_n = -d\Pi.$$

Теперь вспомним, что силы служат мерами воздействия на материальные точки со стороны других точек, тел или физических полей. Часто бывает, что точки подвергаются сразу нескольким воздействиям. В этой связи отметим следующее.

**Замечание.** Потенциальные поля обладают свойством аддитивности: если на точки механической системы действуют несколько силовых полей с потенциальными энергиями  $\Pi^{(k)}(\bar{\mathbf{r}}, t)$ , то это эквивалентно действию на нее силового поля с потенциальной энергией

$$\Pi = \sum_k \Pi^{(k)}.$$

В самом деле, если  $\bar{\mathbf{F}}_v^{(k)} = -\frac{\partial\Pi^{(k)}}{\partial\bar{\mathbf{r}}_v}$ , то по закону независимости действия сил:

$$-\frac{\partial\Pi}{\partial\bar{\mathbf{r}}_v} = -\sum_k \frac{\partial\Pi^{(k)}}{\partial\bar{\mathbf{r}}_v} = \sum_k \bar{\mathbf{F}}_v^{(k)} \equiv \bar{\mathbf{F}}_v.$$

А это и означает, что функция  $\Pi$  служит потенциальной энергией для системы сил  $\bar{\mathbf{F}}_v$ .

В частности, потенциальную энергию СМТ можно представить в виде суммы внешней и внутренней потенциальных энергий:

$$\Pi = \Pi^{(e)} + \Pi^{(i)};$$

тогда

$$\bar{\mathbf{F}}_v^{(e)} = -\frac{\partial\Pi^{(e)}}{\partial\bar{\mathbf{r}}_v}, \quad \bar{\mathbf{F}}_v^{(i)} = -\frac{\partial\Pi^{(i)}}{\partial\bar{\mathbf{r}}_v}.$$

#### 4. Закон сохранения механической энергии

Начнем с предварительных рассмотрений и определения.

Выделим среди сил, действующих на точки СМТ, потенциальные и непотенциальные:

$$\bar{\mathbf{F}}_v = -\frac{\partial\Pi}{\partial\bar{\mathbf{r}}_v} + \bar{\mathbf{F}}_v^*, \quad v = 1, \dots, n.$$

**Полной механической энергией** СМТ называется сумма ее кинетической и потенциальной энергий:

$$E = T + \Pi .$$

От чего зависит эта величина? Потенциальная энергия зависит от положений точек системы и от времени, а кинетическая энергия – также и от скоростей. Поэтому:

$$E = E ( \bar{\mathbf{r}}, \dot{\bar{\mathbf{r}}}, t ) ,$$

где  $\bar{\mathbf{r}}$  –  $3n$ -мерный вектор, определяющий конфигурацию СМТ.

Выясним, по какому закону в общем случае изменяется полная механическая энергия.

**Теорема** (об изменении полной механической энергии). Производная по времени от полной механической энергии СМТ удовлетворяет формуле

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial t} + N_*} ,$$

где  $N_* \equiv \sum_{\nu} ( \bar{\mathbf{F}}_{\nu}^*, \bar{\mathbf{v}}_{\nu} )$  – мощность непотенциальных сил.



По теореме об изменении кинетической энергии:

$$\frac{dT}{dt} = N^{(e)} + N^{(i)} \equiv N = \sum_{\nu} ( - \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{\mathbf{r}}_{\nu}} , \bar{\mathbf{v}}_{\nu} ) + N_* .$$

Теперь будем дифференцировать потенциальную энергию.

Так как

$$\Pi = \Pi ( \bar{\mathbf{r}}, t ) \equiv \Pi ( x_1, y_1, z_1, \dots, z_n, t ) ,$$

то

$$\begin{aligned} d\Pi &= \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial z_n} dz_n + \frac{\partial \Pi}{\partial t} dt = \\ &= \sum_{\nu} ( \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{\mathbf{r}}_{\nu}} , d\bar{\mathbf{r}}_{\nu} ) + \frac{\partial \Pi}{\partial t} dt , \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{d\Pi}{dt} = \sum_{\nu} ( \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{\mathbf{r}}_{\nu}} , \bar{\mathbf{v}}_{\nu} ) + \frac{\partial \Pi}{\partial t} .$$

Таким образом,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{d\Pi}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial t} + N_* .$$



Итак, изменение полной механической энергии с течением времени обусловлено как нестационарностью силового поля, так и работой непотенциальных сил.

Для того, чтобы правильно интерпретировать доказанную теорему, нам все-таки придется учесть деление сил на внешние и внутренние.

Выделяя среди потенциальных и непотенциальных сил внешние и внутренние, получаем:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial t} + N_*^{(e)} + \frac{\partial \Pi^{(i)}}{\partial t} + N_*^{(i)}.$$

Интерпретация первых двух слагаемых трудностей не вызывает.

Первые два слагаемых отражают приток механической энергии к системе извне (или отток ее).

Например, если точки нашей системы находятся в поле сил притяжения какого-либо внешнего тела, а это тело приблизилось к ним, то потенциальная энергия системы в той же конфигурации будет уже другой. Или: система может двигаться в какой-либо среде, и эта среда оказывает сопротивление движению; тогда будет отлична от нуля мощность  $N_*^{(e)}$ .

С последними двумя слагаемыми ситуация несколько иная. Здесь надо иметь в виду, что даже в том случае, когда мы – для простоты – моделируем механическую систему в виде совокупности материальных точек, то эти точки вовсе не похожи на геометрические точки. Это – макроскопические объекты, обладающие внутренней структурой.

Поэтому наряду с механическим состоянием данной системы можно рассматривать еще и ее внутреннее состояние.

В этой связи запишем:

Материальные тела, помимо полной механической энергии, имеют еще внутреннюю энергию, которая, вообще говоря, носит немеханический характер и определяется внутренним состоянием этих тел (например, температурой).

Не следует путать внутреннюю энергию с внутренней потенциальной энергией; последняя зависит только от координат точек и, быть может, от времени.

Рассмотрение внутренней энергии выходит за рамки теоретической механики; это понятие исследуется в других разделах физики. Вообще говоря, в составе внутренней энергии, в зависимости от исследуемого круга явлений, можно учитывать: энергию хаотического (т.е. теплового) движения микрочастиц, энергию химического взаимодействия атомов, внутриядерную энергию и так далее.

Нам сейчас потребуется лишь следующий факт.

Если  $U$  – суммарная внутренняя энергия тел системы, то

$$\frac{dU}{dt} = - \frac{\partial \Pi^{(i)}}{\partial t} - N_*^{(i)} + \dots,$$

где многоточием обозначены слагаемые, отражающие приток к системе немеханических видов энергии (например, приток тепла).

Поэтому

$$\frac{d}{dt} (E + U) = \frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial t} + N_*^{(e)} + \dots$$

Фактически  $E + U$  – это полная энергия системы (уже без уточнения: механическая); в правой части стоит приток к системе различных видов энергии извне.

Последнее равенство выражает общий закон природы – закон сохранения и превращения энергии: энергия не возникает и не исчезает, она может лишь переходить от одной физической системы к другой.

Возвращаясь к теореме об изменении полной механической энергии, делаем вывод:

Слагаемые  $\frac{\partial \Pi^{(i)}}{\partial t} + N_*^{(i)}$  характеризуют переход внутренней энергии в механическую и наоборот.

Обычно, кстати, как раз бывает “наоборот”: за счет сил трения полная механическая энергия переходит во внутреннюю в форме тепла. Но вернемся к механике. Выясним условия, когда полная механическая энергия не меняется с течением времени. Очевидно, это бывает тогда, когда правые части в формуле для производной от полной механической энергии равны нулю.

**Следствие** (закон сохранения механической энергии). Если силовое поле потенциальных сил стационарно, а мощность непотенциальных сил тождественно равна нулю, то

$$(*) \quad \boxed{E = \text{const}} .$$

Действительно,  $\frac{\partial \Pi}{\partial t} \equiv 0$  и  $N_* \equiv 0 \quad \square \quad \frac{dT}{dt} = 0$ , т.е.  $E = \text{const}$ .

Утверждение это совершенно понятно, только скажем несколько слов о смысле условия  $N_* = 0$ .

Непотенциальные активные силы, для которых мощность в действительном движении тождественно равна нулю, называются **гироскопическими**.

Обсуждать происхождение этого прочно укоренившегося термина мы сейчас не будем, а приведем примеры гироскопических сил.

Примеры гироскопических сил:

1) сила Лоренца  $\bar{\mathbf{F}} = e [ \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{B}} ]$ , действующая на частицу с зарядом  $e$  со стороны магнитного поля с вектором индукции  $\bar{\mathbf{B}}$ ;

2) кориолисова сила инерции

$$\bar{\Phi}^{\text{кор}} = -m \bar{\omega}^{\text{кор}} \equiv -2m [ \bar{\omega}, \bar{\mathbf{v}}^{\text{отн}} ] ,$$

фигурирующая в уравнениях движения материальной точки в неинерциальной СО.

В обоих случаях сила перпендикулярна скорости, так что мощность равна нулю:

$$(\bar{\mathbf{F}}, \bar{\mathbf{v}}) \equiv 0 \quad \text{и} \quad (\bar{\Phi}^{\text{кор}}, \bar{\mathbf{v}}^{\text{отн}}) \equiv 0 .$$

Напомним, что в динамике точки сила, перпендикулярная вектору скорости точки, называется азгической силой.

Между прочим, переносная сила инерции является потенциальной силой; но этого мы сейчас касаться не будем.

Из данных примеров видно, что оговорка “в действительном движении” в определении гироскопических сил сделана не зря. Мощности данных сил на возможных скоростях не обязаны равняться нулю.

Кроме активных сил, на систему могут действовать реакции связей. Мы уже отмечали, когда их мощности равны нулю – когда связи являются идеальными и стационарными.

Делаем вывод.

Вывод: закон сохранения механической энергии (\*) выполняется, если:

а) поле потенциальных сил стационарно;

б) связи – идеальные и стационарные (так что  $\sum_v (\bar{\mathbf{R}}_v, \bar{\mathbf{v}}_v) \equiv \equiv 0$ );

в) непотенциальные активные силы являются гироскопическими.

В частности, он выполняется, если соблюдаются первые два условия, а непотенциальных активных сил нет вообще; такие механические системы называются **консервативными**.

Термин этот происходит от латинского слова conservatio, которое как раз и означает: “сохранение”.

**Замечание.** Формулу (\*) часто записывают в виде

$$T + \Pi = h,$$

где  $h$  – **постоянная энергии** (она определяется начальными условиями:  $h = T_0 + \Pi_0$ ). Это соотношение называется **интегралом энергии**.

Если для механической системы имеет место интеграл энергии, то его наличие позволяет получить ответы на ряд важных вопросов о движении данной системы без привлечения самих уравнений движения.

Вот пример.

Так как  $T \geq 0$ , то  $\Pi \leq h$ . Условие  $\Pi(\bar{\mathbf{r}}) \leq h$  выделяет в конфигурационном пространстве **область возможности движения**.

Поскольку постоянную энергии можно определить, зная только начальные условия, то для консервативной системы мы – не решая уравнений движения – часто можем заранее выделить те части пространства, куда эта система попасть никак не сможет.

## 5. Уравнения Лагранжа для систем с потенциальными силами

В этом пункте мы получим разновидность уравнений Лагранжа, которые применимы для систем с потенциальными силами и нередко бывают более удобными, чем обычные уравнения Лагранжа.

Пусть на механическую систему наложены идеальные, удерживающие и голономные связи, а все активные силы являются потенциальными.

Предположения о связях – те же самые, которые мы делали при выводе обычных уравнений Лагранжа.

Мы собираемся работать с обобщенными координатами. Поэтому первым делом выразим через обобщенные координаты потенциальную энергию.

Подставляя в формулу  $\Pi = \Pi(\bar{\mathbf{r}}, t)$  выражения

$$\bar{\mathbf{r}}_v = \bar{\mathbf{r}}_v(q_1, \dots, q_s, t), \quad v = 1, \dots, n,$$

представим потенциальную энергию в виде:

$$\Pi = \Pi(q_1, \dots, q_s, t).$$

Строго говоря, получается новая функция, но ее принято обозначать той же буквой  $\Pi$ .

Отметим, что даже в случае стационарного силового поля функция эта может явно зависеть от времени, если связи нестационарны.

Теперь вычислим обобщенные силы.

Так как

$$\bar{\mathbf{F}}_v = - \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{\mathbf{r}}_v},$$

то

$$\begin{aligned} Q_i &= \sum_v (\bar{\mathbf{F}}_v, \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i}) = - \sum_v \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}, \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_v}{\partial q_i} \right) = \\ &= - \sum_v \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x_v} \cdot \frac{\partial x_v}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_v} \cdot \frac{\partial y_v}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_v} \cdot \frac{\partial z_v}{\partial q_i} \right) = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Итак,

$$(*) \quad \boxed{Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}}.$$

Таким образом, обобщенная потенциальная сила равна частной производной от потенциальной энергии по обобщенной координате, взятой с обратным знаком.

Это – очень важная формула. А запомнить ее нетрудно, если сравнить ее с записанной выше формулой для обычных сил  $\bar{\mathbf{F}}_v$ .

Теперь запишем определение.

Функция  $L = T - \Pi$  называется **функцией Лагранжа** механической системы с потенциальными силами.

Напомним, что сумма кинетической и потенциальной энергий представляет собой полную механическую энергию. Но сейчас потенциальная энергия не прибавляется к кинетической, а вычитается из нее.

Эту функцию ввел Лагранж, обозначив ее прописной буквой  $Z$  и никак не назвав. Современные название и обозначение даны в честь Лагранжа.

**Теорема.** Уравнения движения механической системы с потенциальными силами можно записать в виде:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0}, \quad i = 1, \dots, s.$$

Это и есть уравнения Лагранжа для систем с потенциальными силами. Они похожи на обычные уравнения Лагранжа 2-го рода, но вместо  $T$  используется  $L$ , а в правой части стоит нуль. Следует запомнить, что в правой части этих уравнений стоит нуль. Типичная ошибка на экзамене: записать в правых частях этих уравнений обобщенные силы.



Так как  $\Pi$  не зависит от обобщенных скоростей, то

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} = 0.$$

Поэтому имеем:

$$T = L + \Pi, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \equiv - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i},$$

получаем:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i};$$

слагаемые с  $\Pi$  сокращаются. ■

Иногда найденные нами уравнения называют “уравнениями Лагранжа для консервативных систем”. Но это выражение не очень удачно, поскольку в консервативных механических системах поле потенциальных сил стационарно; а данные уравнения верны и при отсутствии стационарности, т.е. не только для консервативных систем.

Таким образом, для механических систем с потенциальными силами можно пользоваться как обычными уравнениями Лагранжа 2-го рода, так и уравнениями, в которых фигурирует функция Лагранжа. Что проще?

При составлении уравнений Лагранжа, в которых используется функция Лагранжа, не нужно вычислять обобщенные силы. Но взамен мы должны получить выражение потенциальной энергии через обобщенные координаты. В конкретных задачах это нередко – но не всегда – оказывается более простой операцией, и тогда лучше пользоваться уравнениями Лагранжа для потенциальных систем.

Отметим еще, что при выводе данной модификации уравнений Лагранжа мы опирались на формулу (\*). Она имеет и самостоятельное значение.

**Замечание.** Если связи, наложенные на механическую систему с потенциальными силами, являются также стационарными, то необходимые условия ее равновесия  $Q_i = 0$  в силу (\*) принимают вид:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, s.$$

Вместе с дополнительными условиями  $\dot{q}_i(0) = 0$  они являются также и достаточными.

Таким образом, в положениях равновесия частные производные от потенциальной энергии должны равняться нулю. Использование этого условия для нахождения положений равновесия механических систем является весьма эффективным.