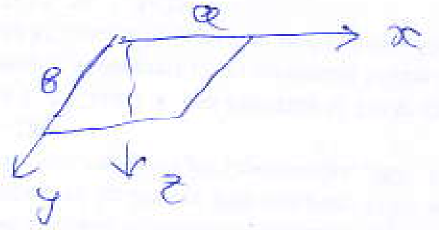
(Лекция) ①

Собственные колебания прямоугольной пластины.

Рассмотрим собственные колебания прямоугольной пластины



В этом случае уравнение колебательного движения пластины имеет вид:

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 \quad (2)$$

Рассмотрим колебания пластины, когда граничные условия удовлетворяют шарнирному опиранию по всем кромкам, т.е.:

$$w\big|_{x=0} = 0; \quad w\big|_{x=a} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=a} = 0$$

$$w\big|_{y=0} = 0, \quad w\big|_{y=b} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{y=0} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{y=b} = 0 \quad (3)$$

В этом случае решение уравнения (1) следует взять в виде:

$$w = C_{nk}\, e^{i\omega t} \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad (4)$$

$k = 1, 2, \ldots; \quad n = 1, 2, \ldots$

Подставляя (4) в (1), получаем:

$$D\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2-\rho h\omega_{kn}^2=0 \Rightarrow$$

$$\omega_{kn}=\sqrt{\frac{D}{\rho h}\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2} \Rightarrow$$

$$\omega_{kn}=\sqrt{\frac{D}{\rho h}}\;\lambda_{kn} \qquad (5)$$

где:

$$\lambda_{kn}=\pi^2\left[\left(\frac{k}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]$$

Рассмотрим собственные колебания прямоугольной пластины, когда две противоположные кромки имеют шарнирное ~~опор~~ опирание на двух остальных ~~может~~ могут быть произвольные граничные условия.

Пусть для определенности имеем:

$$w\Big|_{x=0}=w\Big|_{x=a}=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=0}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{x=a}=0$$

Тогда решение уравнения (1) ищем в виде:

$$w=f_n(y)\sin\frac{\pi n x}{a}\,e^{i\omega t} \qquad (6)$$

$$n=1,2,\ldots$$

Подставляем (6) в (10), получаем:

$$D\left[f_n^{IV} - 2 f_n^{II}\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + f_n\right] - \xi \omega_n^2 f = 0$$

$$f_n^{IV} - 2\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 f_n^{II} + f_n - \frac{\omega_n^2}{D} f = 0 \Rightarrow$$

$$f_n^{IV} - 2\varkappa_n^2 f_n^{II} + k_n f = 0$$

$$\varkappa_n^2 = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2$$

$$f_n = C e^{\lambda y}$$

$$\lambda^4 - 2\varkappa_n^2 \lambda^2 + k_n = 0$$

$$\lambda_{1,2}^2 = \varkappa_n^2 \pm \sqrt{\varkappa_n^4 - k_n}$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\varkappa_n^2 + \sqrt{\varkappa_n^4 - k_n}}$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{\varkappa_n^2 + \sqrt{\varkappa_n^4 - k_n}}$$

$$\lambda_3 = \sqrt{\varkappa_n^2 - \sqrt{\varkappa_n^4 - k_n}}$$

$$\lambda_4 = -\sqrt{\varkappa_n^2 - \sqrt{\varkappa_n^4 - k_n}}$$

или

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \pm\sqrt{\varkappa_n^2 + \sqrt{\varkappa_n^4 - \frac{\omega_n^2}{D}}}\\ \lambda_{3,4} &= \pm\sqrt{\varkappa_n^2 - \sqrt{\varkappa_n^4 - \frac{\omega_n^2}{D}}}\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Принимая во внимание (5), получим:

$$f_n = c_1\, sh\, \lambda_1 z + c_2\, ch\, \lambda_1 z + c_3\, sh\, \lambda_2 z + c_4\, ch\, \lambda_2 z \quad (6)$$

Рассмотрим для определённости заделку по двум остальным кромкам, т. е.

$$w|_{y=0} = w|_{y=b} = 0; \quad w'|_{y=0} = w'|_{y=b} = 0 \quad (7)$$

Имеем:

$$f_n' = c_1 \lambda_1\, ch\, \lambda_1 z + c_2 \lambda_1\, sh\, \lambda_1 z + c_3 \lambda_2\, ch\, \lambda_2 z + c_4 \lambda_2\, sh\, \lambda_2 z \quad (8)$$

Используя (6) и (8), получаем систему однородных уравнений относительно постоянных c_1, c_2, c_3, c_4:

$$c_2 + c_4 = 0$$

$$c_1 \lambda_1 + c_3 \lambda_2 = 0$$

$$c_1\, sh\, \lambda_1 b + c_2\, ch\, \lambda_1 b + c_3\, sh\, \lambda_2 b + c_4\, ch\, \lambda_2 b = 0$$

$$c_1 \lambda_1\, ch\, \lambda_1 b + c_2 \lambda_1\, sh\, \lambda_1 b + c_3 \lambda_2\, ch\, \lambda_2 b + c_4 \lambda_2\, sh\, \lambda_2 b = 0$$

Обращая определитель данной системы в нуль, получаем трансцендентное ур-ие для определения частот колебаний

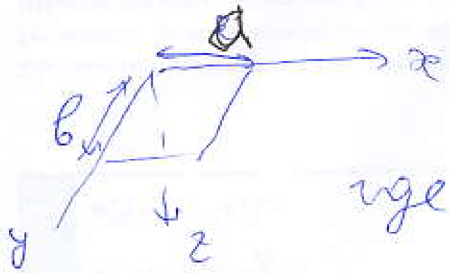
ω_{nk} где $(k = 1, 2, \ldots)$.

$\boxed{\text{Лекция}}$

Собственные колебания пластины при наличии сил вязкотрения

Рассмотрим собственные колебания прямоугольной пластины при наличии сил вязкого трения. В этом случае дифференциальное ур-ие изгиба пластины имеет вид:

$$D\nabla^4 w + \rho h \ddot{w} + D^* \nabla^4 \dot{w} = 0 \quad (1)$$



где $D^* = \dfrac{E^* h^3}{12(1-\nu^2)}$

E^* - вязкоупругий модуль Юнга.

Рассмотрим шарнирное опирание пластины.

$$w = f_{kn}(t)\sin\frac{\pi k x}{a}\sin\frac{\pi k y}{b} \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем:

6

$$\rho h \ddot{f}_{kn} + D^* \left[\left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 \right]^2 \dot{f}_{kn} +$$

$$+ D \left[\left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 \right]^2 f_{kn} = 0$$

или

$$\ddot{f}_{kn} + 2e_* \mu_{kn}^2 \dot{f}_{kn} + \mu_{kn}^2 f_{kn} = 0 \qquad (3)$$

$$2e_* = \frac{E_*}{E}$$

Решение ур-ния (3) ищем в виде:

$$f_{kn} = C_{kn} e^{\lambda_{kn} t} \qquad (4)$$

Подставляя (4) в ур-ие (3), получаем:

$$\lambda_{kn}^2 + 2e_* \mu_{kn}^2 \lambda_{kn} + \mu_{kn}^2 = 0$$

откуда находим:

$$\lambda_{kn} = -\cancel{\frac{2}{2}} e_* \mu_{kn}^2 \pm \sqrt{e_*^2 \mu_{kn}^4 - \mu_{kn}^2}$$

или

$$\lambda_{kn} = -e_* \mu_{kn}^2 \pm e_* \mu_{kn}^2 \sqrt{1 - \frac{\mu_{kn}^2}{e_*^2 \mu_{kn}^4}} \Rightarrow$$

$$\lambda_{kn} = -e_* \mu_{kn}^2 \pm e_* \mu_{kn}^2 \sqrt{1 - \frac{1}{e_*^2 \mu_{kn}^2}} \qquad (5)$$

Большое вязкое трение. Тогда

$$\frac{1}{e_*^2 \mu_{kn}^2} < 1;$$

В этом случае имеем

$$f_{kn} = C_{kn}^{(1)} e^{-\lambda_{kn}^{(1)} t} + C_{kn}^{(2)} e^{-\lambda_{kn}^{(2)} t} \quad (6)$$

$$\lambda_{kn}^{(1)} = e_* \mu_{kn}^2 + e_* \mu_{kn}^2 \sqrt{1 - \frac{1}{e_*^2 \mu_{kn}^2}} > 0$$

$$\lambda_{kn}^{(2)} = e_* \mu_{kn}^2 - e_* \mu_{kn}^2 \sqrt{1 - \frac{1}{e_*^2 \mu_{kn}^2}} > 0$$

Постоянные $C_{kn}^{(1)}$ и $C_{kn}^{(2)}$ находятся из начальных условий.

В данном случае имеет место апериодическое движение.

Если имеет место случай малого трения, тогда:

$$\frac{1}{e_*^2 \mu_{kn}^2} > 1, \quad 1 - \frac{1}{e_*^2 \mu_{kn}^2} < 0$$

И следовательно

$$\lambda^{(1)}_{kn} = -e_* \mu^2_{kn} + i\, e_* \mu^2_{kn} \varkappa^2_{kn}$$

$$\lambda^{(2)}_{kn} = -e_* \mu^2_{kn} - i\, e_* \mu^2_{kn} \varkappa^2_{n}$$

$$\varkappa^2_{kn} = \frac{1}{e_*^2 \mu^2_{kn}} - 1; \qquad i = \sqrt{-1}$$

В данном случае имеем периодические затухающие колебания.

$$f_{kn} = e^{-e_* \mu^2_{kn} t}\left(C_1 \sin e_* \mu^2_{kn} \varkappa^2_n t + C_2 \cos \mu^2_{kn} \varkappa^2_n t\right)$$

$\boxed{\text{Лекция}}$

Формула Рэлея-Ритца для определения собственных частот колебания стержня

Рассматриваем собственные колебания стержня в случае, когда отсутствуют силы вязкого трения.

Тогда имеет место закон сохранения полной механической энергии.

$$\hat{E} = T + \Pi = const \qquad (1)$$

$$\hat{E} = \frac{1}{2}\rho F \int_0^l \dot{v}^2 dz + \frac{1}{2} E J_x \int_0^l v''^2 dz = C \quad (2)$$

Функцию прогиба представим в виде:

$$v = V(z) \sin \omega t \quad (3)$$

где

$V = V(z)$ – координатная функция,

ω – частота собственных колебаний стержня.

Подставим (3) в (2) и в результате получим:

$$\hat{E} = \left[\frac{1}{2}\rho F \omega^2 \int_0^l V^2 dz\right] \cos^2 \omega t +$$
$$+ \left[\frac{EJ_x}{2} \int_0^l V''^2 dz\right] \sin^2 \omega t = C \quad (4)$$

Пусть $\sin \omega t = 0$; тогда $\cos \omega t = 1$

в этом случае имеем:

$$\frac{1}{2}\rho F \omega^2 \int_0^l V^2 dz = C \quad (5)$$

Если $\cos \omega t = 0$, тогда $\sin \omega t = 1$, в этом случае получаем:

$$\frac{EJ_x}{2} \int_0^l V''^2 dz = C \quad (6)$$

Из (5) и (6) находим:

$$\omega^2 = \frac{EJ_x \int_0^l V''^2 dz}{\rho F \int_0^l V^2 dz} \quad (7)$$

Замечание. Формулу Рэлея–Ритца можно так же применять при нахождении частоты колебаний пластины.

Пример. Найдём частоту колебаний стержня, один конец которого заделан, а другой свободен.

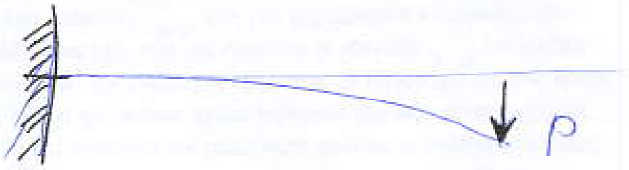


рис....

В качестве координатной функции возьмём прогиб стержня под действием силы P на конце. В этом случае:

$$EJ_x V^{IV} = 0$$

$$V\Big|_{z=0} = 0; \quad V'\Big|_{z=0} = 0$$

$$V^{II}\Big|_{z=l} = 0; \quad EJ_x V^{III}\Big|_{z=l} = P$$

Имеем:

$$V = c_0 + c_1 z + \frac{c_2}{2} z^2 + \frac{c_3}{6} z^3$$

Удовлетворяя граничным условиям, получаем:

$$c_0 = c_1 = 0$$

$$c_2 + c_3 l = 0$$

$$c_3 = \frac{P}{EJ_x}$$

11

Т.к. координатная функция определена с точностью до произвольной постоянной, то имеем:

$$V = C\left(-\ell z^2 + \frac{z^3}{3}\right) \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), находим квадрат частоты

$$\omega^2 = \frac{35}{99}\frac{E J_x}{\rho F \ell^4}$$