Лекция №1

1° Стержень — тело, два размера которого намного меньше третьего. Рассматриваем прямолинейные стержни.

2° Стержень является прямолинейным если ось стержня является прямой линией.

3° Ось стержня — линия, которая проходит через центры тяжести поперечных сечений.

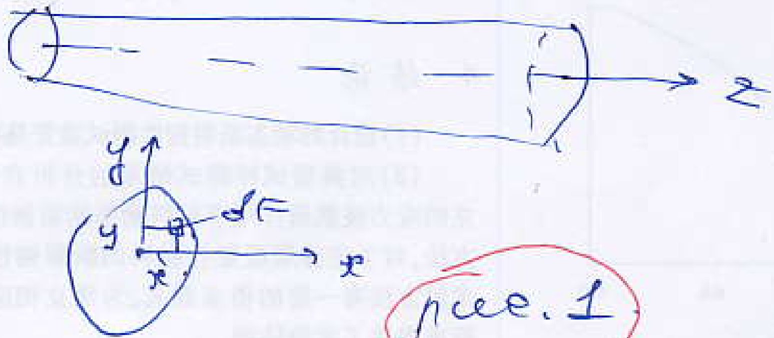


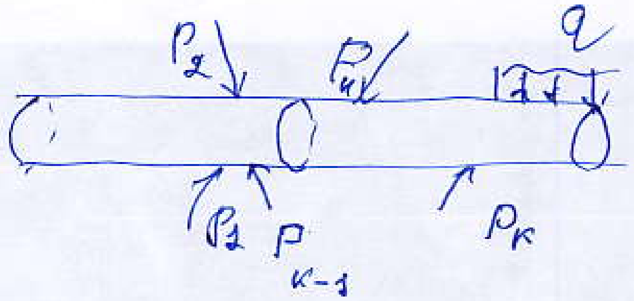
рис. 1

Формулы, по которым определяются координаты ЦТ сечения имеют вид рис. 1.

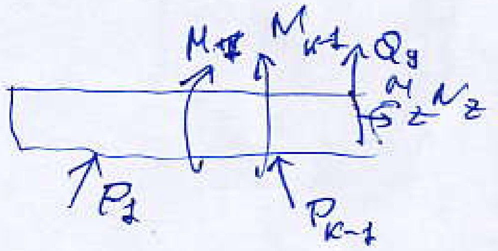
$$x_c = \iint_F x\,dF;\quad y_c = \iint_F y\,dF \quad (1)$$

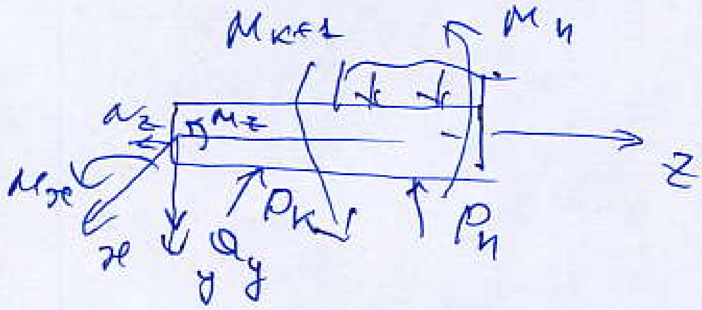
Растяжение - сжатие, кручение и изгиб стержня.

Внутренние силовые факторы при растяжении - сжатии кручении и изгибе стержня.



Разобьём стержень на две части





M_x – изгибающий момент,

Q_y – поперечная сила,

M_z – крутящий момент,

N_z – продольная сила.

1° N_z, M_x, M_z, Q_y – внутренние силовые факторы.

Запишем ур-ния равновесия, из которых найдём внутрен. силовые факторы

$$\left.\begin{aligned}
&Q_y + P_{ky} + \dots + P_{ny} + \int q(z)\,dz = 0,\\
&-M_z + P_{kz} + \dots + P_{nz} = 0,\\
&M_x + M_{kx} + \dots + M_{nx} + M_x(q) = 0,\\
&\cancel{M_z + M_{kz} + \dots M_{nz}}\\
&-M_z + M_{k+1,z} + \dots M_{n,z} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Гипотезы, которые используются при изучении растяжения-сжатия, кручения и изгиба стержня.

1. Гипотеза плоских сечений.

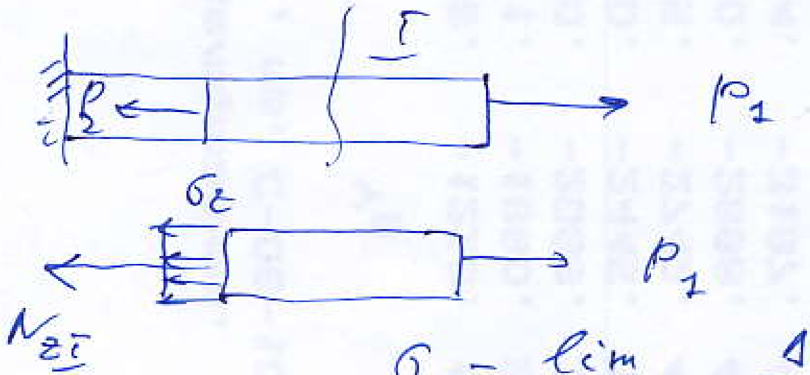
Плоское и нормальное к оси стержня сечение до деформации остается плоским и нормальным к оси стержня после деформ.

2. Стержень можно представить, состоящим из бесконечно тонких продольных волокон, которые друг с другом не взаимодействуют.

Растяжение-сжатие прямолинейного стержня.

Определение.

Стержень находится в состоянии растяжения-сжатия если только сила N_z не равна 0.



$N_{zI} = P_1$

$$\sigma_z = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} \to$$

$$\sigma_z = \frac{N_{zI}(g)}{F(g)} \qquad \sigma_z = \frac{P_1}{F}$$

Рис...

Принцип Сен-Венана.

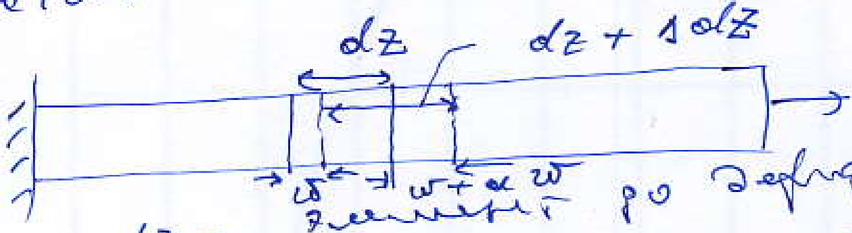
При растяжении-сжатии стержня напряженное состояние вблизи приложения сосредоточенной силы имеет сложный вид, на расстоянии порядка толщины поперечного сечения стержня от приложенной силы оно выравнивается и определяется формулой (2).

Замечание.

Принцип Сен-Венана справедлив и при кручении и изгибе стержня.

Лекция 2

Деформация стержня при растяжении-сжатии. Закон Гука.



dz - элемент до деформации.

$dz + \Delta dz$ - после деформации.

Деформация элемента определяется формулой $\varepsilon_z = \frac{(dz+\Delta dz)-dz}{dz}$ →

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}; \quad \Delta dz = dw;$$

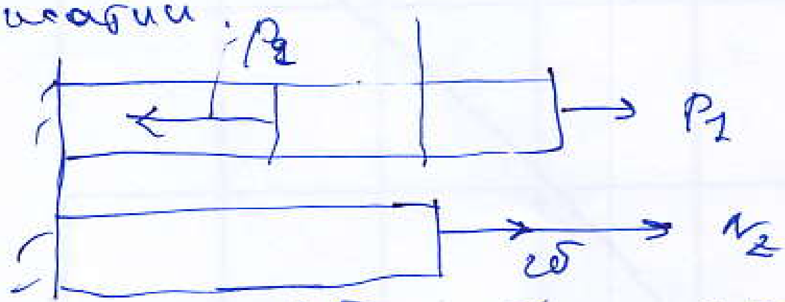
$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} \quad (1)$$

Связь между напряжением и деформацией при растяжении-сжатии выражается законом Гука:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z \quad (2)$$

E – модуль упругости I рода, или модуль Юнга.

Определение перемещений поперечных сечений стержня при растяжении-сжатии.

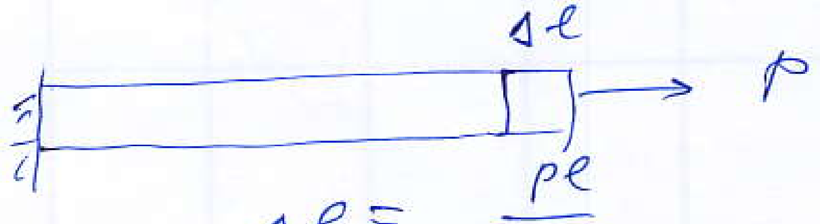


$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = \frac{\sigma_z}{E}, \quad dw = \frac{\sigma_z}{E}\,dz$$

$$dw = \frac{N_z}{EF}\,dz, \quad w = \int_0^z \frac{N_z}{EF}\,dz \quad (3)$$

Если E, F – постоянные то

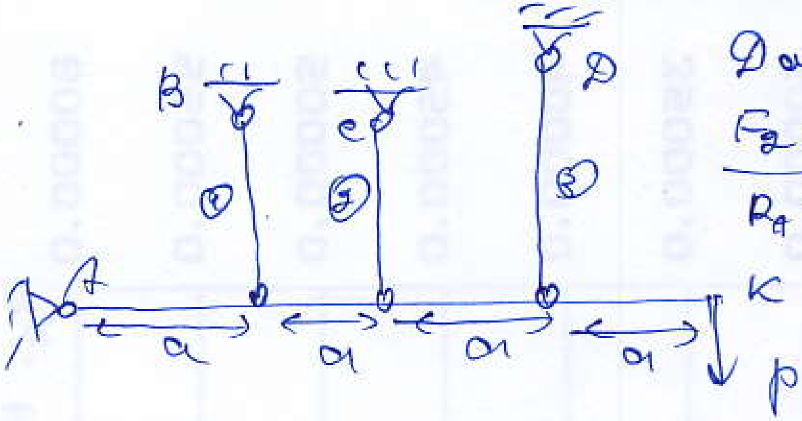
$$w = \frac{N_z}{EF}\,z \quad (4)$$



$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}$$

EF – жесткость стержня при растяжении-сжатии.

Статически неопределимые задачи при растяжении-сжатии стержня



Дано: a, F_1, l_1, E_1; F_2, l_2, E_2, F_3, l_3, E_3

$R_A = ?$ R_B; $R_C - ?$ $R_D - ?$

Теорема Клапейрона.

При статическом (медленном) приложении силы к линейно упругому телу работа, приложенной силы, равна полупроизведению этой силы на перемещение в точке приложения этой силы.

Док-во:

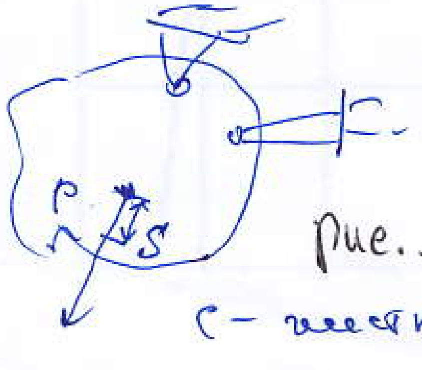


Рис....

c – жесткост.

$$A = \int_0^s c s \, ds \Rightarrow$$

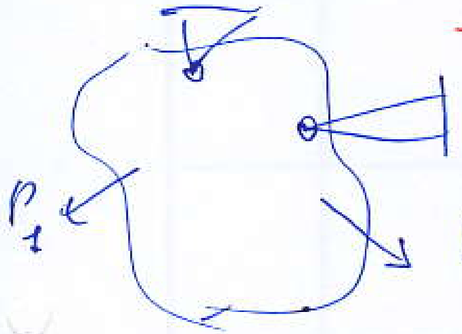
$$A = \frac{c s^2}{2}; \quad P = c s$$

$$A = \frac{P s}{2} \quad (1)$$

Теорема взаимности работ (Теорема Бетти). (7)

Работа сил первого состояния на перемещениях второго состояния равна работе сил второго состояния на перемещениях первого состояния.

Док-во



$$A_1 = \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_1}{2} + P_1 \delta_{2,1}$$

$$A_2 = \frac{P_2 \delta_2}{2} + \frac{P_1 \delta_1}{2} + P_2 \delta'_{1,2}$$

Рис....

$$A_1 = A_2 \Rightarrow$$

$$P \delta_{2,1} = P_2 \delta_{1,2} \quad (5)$$

Лекция N3

Деформация стержня при растяжении-сжатии с упругой опорой.

Полная потенциальная энергия имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l F E \varepsilon_z^2 dz - \int_0^l q(z) w \, dz + \frac{1}{2} c w^2(l) \quad (1)$$

$q(z)$ - интенсивность приложенных внешних сил, c - жёсткость пружины.

На действительном перемещении имеем

$$\delta \Pi = 0 \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем:

$$\int_0^l EF w' \delta w' dz - \int_0^l q \delta w \, dz + c\, w(l)\delta w(l) = 0$$

(8)

находим: интегрируя по частям

$$[EF w' \delta w]_0^l - \int_0^l \frac{d}{dz}(EF w') \delta w \, dz - \int_0^l q \delta w \, dz + c\, w(l) \delta w(l) = 0. \quad (3)$$

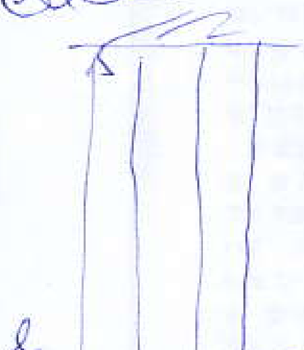
Из (3) находим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dz}(EF \cdot w') + q(z) = 0 \\ &EF w'(l) + c\, w(l) = 0 \\ &w(0) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Пример. Колонна под действием веса

сила

Дано: l, E-const, F-const, ρ, c



$$p(z) = \rho g F (l - z)$$

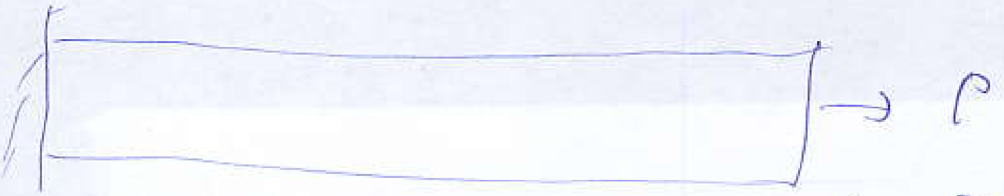
$$q = \frac{dp}{dz} = -\rho g F$$

Рис...

$$EF w'' - \rho g F = 0$$

$$w(0) = 0; \quad EF w'(l) + c\, w(l) = 0$$

Коэффициент Пуассона.



Вырежем из стержня беск. маленький элемент. до деформации.

— после деформации

Найдем приращение объёма

$$\Delta dV = (dx + \Delta dx)(dy + \Delta dy)(dz + \Delta dz) -$$

$$- dx\,dy\,dz = dV\left[(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)\right] \approx$$

$$\approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \quad \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z \ll 1$$

$$\Delta dV = dV(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\,\varepsilon_z;$$

ν – Коэффициент Пуассона

$$\Delta dV = (1-2\nu)\,\varepsilon_z\,dV \Rightarrow$$

$$1 - 2\nu \geq 0; \quad 0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}.$$

Лекция 4. Геометрические характеристики плоских сечений.

Лекция 5:

Кручение стержня круглого поперечного сечения.

При кручении только $M_z = M_{кр} \neq 0$

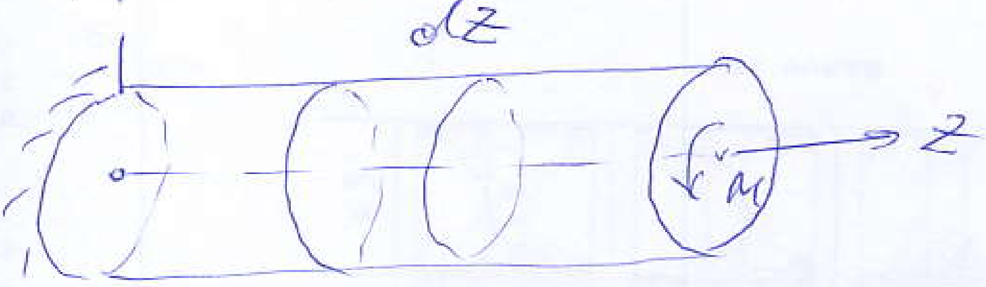


рис....

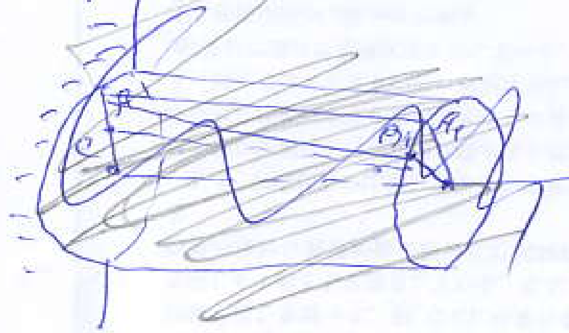
Гипотезы:

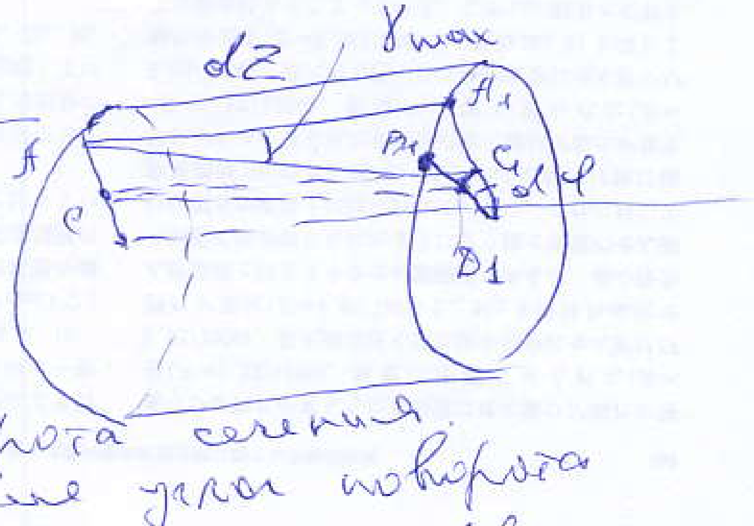
1°. Круглое и плоское сечение до деформации остаётся круглым и плоским после деформации

2° Плоское поперечное сечение стержня в процессе деформирования кручением поворачивается как абсолютно твёрдое целое.

Вырежем из стержня бесконечно маленький эл-т длиной dZ.

Левое сечение считаем условно неподвижным.





φ – угол поворота сечения

$d\varphi$ – приращение угла поворота

$\gamma_{max}\, dZ = R\, d\varphi$, $\gamma_{max} = R \frac{d\varphi}{dZ}$

$\frac{d\varphi}{dz} = \Theta$ – относительный угол закручивания. (11)

$$\gamma = r\frac{d\varphi}{dz} = r\Theta$$

З-кон Гука для сдвига

$$\tau = G\gamma \Rightarrow \tau = G r \Theta ; \quad \tau_{max} = G \cdot R \Theta$$

τ – касательное напряжение.

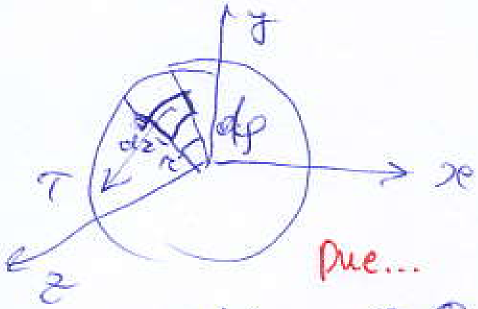


Рис...

$$M_z = \iint_F \tau r\, dF = \iint_F G r^2 \Theta\, dr\, r\, d\varphi \rightarrow$$

$$M_z = G\Theta \int_0^{R}\int_0^{2\pi} r^3\, dr\, d\varphi$$

$$M_z = G\Theta J_p \quad ; \quad J_p = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$\Theta = \frac{M_z}{G J_p} \quad (1)$$ EF – жесткость стержня при кручении.

$$\tau = \frac{r M_z}{J_p} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{R M_z}{J_p}$$

$$W_p = \frac{J_p}{R} \Rightarrow W_p = 0{,}2\, d^3$$

d – диаметр поперечного сечения

W_p – полярный момент сопротивления круглого поперечного сечения.

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_p} \quad (2)$$

формулами (1) и (2) пользуются при расчётах на жесткость и на прочность при кручении стержня.

на жесткость

$$\tau_{max} \le [\tau]$$

$[\tau]$ – допускаемое касат. напряжение

$$\frac{M_z}{[\tau]0,2} \le d^3; \quad d_1 \ge \sqrt[3]{\frac{M_z}{0,2[\tau]}}$$

расчёт на ~~прочность~~ жёсткость

$$\theta \le [\theta]; \quad d_2 \ge \sqrt[4]{\frac{M_z}{0,1 G [\theta]}}$$

В конечном итоге берётся стержня наибольшего значения из d_1 и d_2.

~~Пример. Работа~~

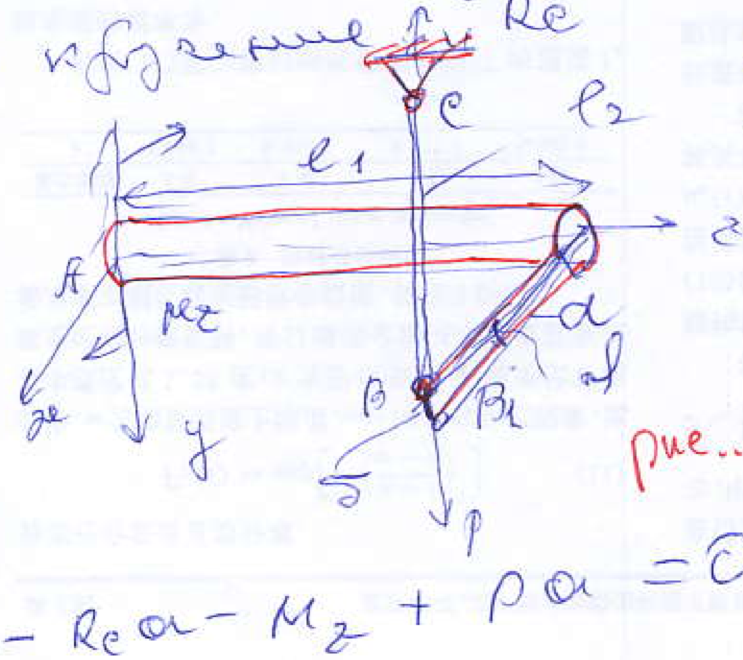
Угол поворота поперечного сечения стержня относительно (1) определяется по формуле.

$$d\varphi = \frac{M_z}{G I_p} dz \Rightarrow$$

$$\varphi = \int_0^z \frac{M_z}{G I_p} dz$$

Пример. Работа стержневой системы на растяжение-сжатие и кручение.

$l_1, I_p, G, a, F, E, P, l_2$



$$\Delta l_2 = \frac{R_c \cdot l_2}{EF};$$

$$\varphi = \frac{M_z l_1}{G I};$$

$$-R_c a - M_z + P a = 0$$

$$\varphi \cdot a = \frac{R_c l_2}{EF}$$

Растяжение пластины по двум взаимно перпендикулярным направлениям.

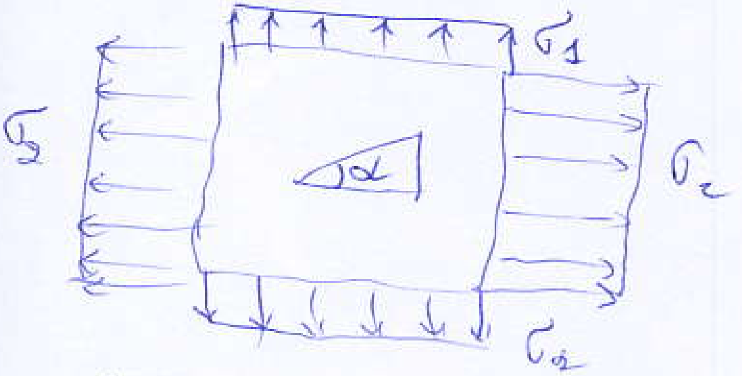


Рис.....

Вырежем бесконечно маленький элемент

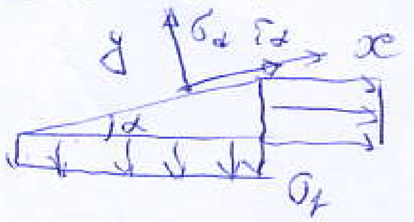


Рис...

$$\sum X_i = \tau_\alpha dF + \sigma_2 dF \sin\alpha \cos\alpha - \sigma_1 dF \cos\alpha \sin\alpha = 0$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (1)$$

$$\sum Y_i = \sigma_\alpha dF - \sigma_1 dF \cos^2\alpha - \sigma_2 dF \sin^2\alpha = 0$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha \quad (2)$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \quad (3)$$

Вырежем бесконечно маленький элемент

$$\sum X_i = \tau_{\alpha_1} dF - \sigma_1 dF \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 + \sigma_2 dF \cos\alpha_1 \sin\alpha_1 = 0$$

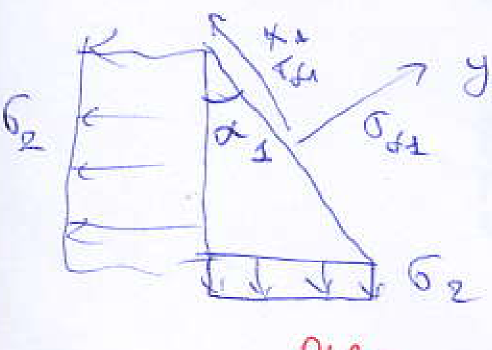


Рис.

$$\tau_{\alpha_1} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha_1 \quad (4)$$

$$\sum Y_{1i} = \sigma_{\alpha_1} dF - \sigma_1 dF \cos^2\alpha_1 - \sigma_2 dF \sin^2\alpha_1 = 0$$

$$\sigma_{\alpha_1} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha_1 \quad (5)$$

Если $\alpha = \alpha_1$, то угол между осями x и x_1 равен $\frac{\pi}{2}$ и $\tau_\alpha = \tau_{\alpha_1}$, что означает закон парности касательных напряжений.

Касательные напряжения на взаимно перпендикулярных площадках равны.

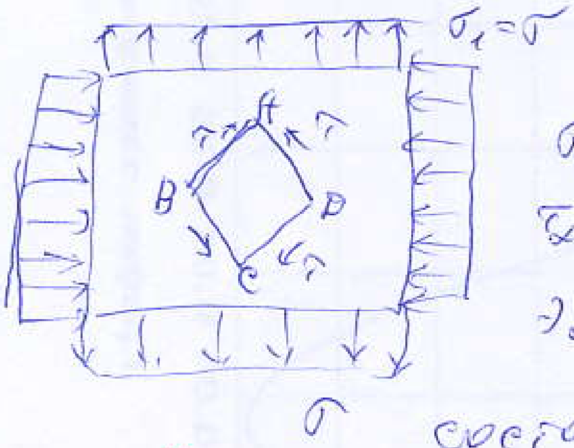
Частные случаи.

1° $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$,

$\tau_\alpha = \tau_{\alpha_1} = 0$; $\sigma_\alpha = 0$

Имеет место всестороннее растяжение-сжатие пластины.

2° $\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_2 = -\sigma$



$\alpha = 45°$

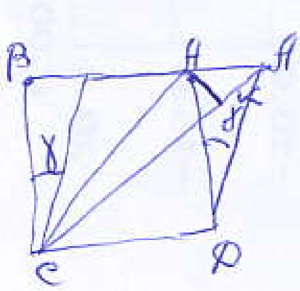
$\sigma_\alpha = 0$

$\tau_\alpha = \sigma$

Элемент находится в состоянии чистого сдвига.

Рис...

Вырежем бесконечно малый элемент.



$\tau = G \cdot \gamma$; G – модуль сдвига.

$AC = \frac{l}{\cos 45°} = l\sqrt{2}$

$AA' = l\,tg\,\gamma = l\gamma$ т.к. $\gamma \ll 1$

Рис....

$KA' = AA' \cos 45° = l\gamma \frac{\sqrt{2}}{2}$;

Деформация $\varepsilon = \frac{KA'}{\ell\sqrt{2}'} = \frac{\ell\gamma\sqrt{2}}{\ell\sqrt{2}\,2}$; $\varepsilon = \frac{\gamma}{2}$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \nu\frac{\sigma}{E} \Rightarrow \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{E}(1+\nu)\cdot\sigma$$

$$\tau = G\cdot\gamma \Rightarrow \sigma = G\gamma$$

$$\gamma = \frac{\sigma}{G};\quad \frac{\sigma}{2G} = \frac{1}{E}(1+\nu)\sigma \Rightarrow$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Данная формула связывает модули упругости 1-ого и 2-ого рода.