Лекция

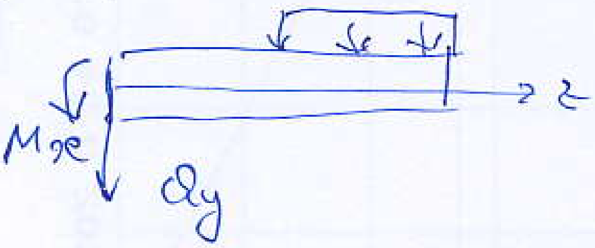
Прямой поперечный изгиб стержня

Гипотезы

1°. При изгибе стержня плоское, перпендикулярное к оси стержня сечение и до деформации остается плоским и перпендикулярным к оси стержня после деформации.

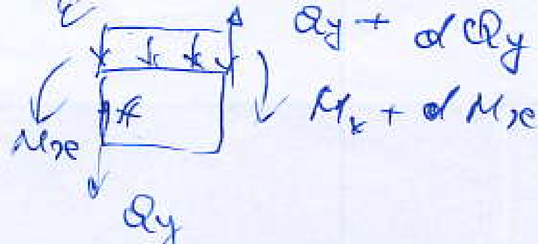
2° Ось стержня при изгибе не растягивается и не сжимается.

3° При изгибе стержень можно представлять состоящим из бесконечно тонких продольных волокон, которые друг с другом не взаимодействуют.



При прямом поперечном изгибе стержня только M_x и Q_y не равны 0.

Связь между внутренними силовыми факторами при прямом поперечном изгибе стержня.



$$\Sigma Y = \cancel{Q_y} + q\,dz - \cancel{Q_y} - dQ_y = 0$$

$$\Sigma M_x(C) = M_x - M_x - dM_x + (Q_y - dQ_y)\,dz - q\frac{(dz)^2}{2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dQ_y}{dz} = q(z) \quad (1)$$

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y \quad (2)$$

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

$q = 10\ \frac{Н}{м}$;

$M = 5$ Нм

$P = 24$ Н

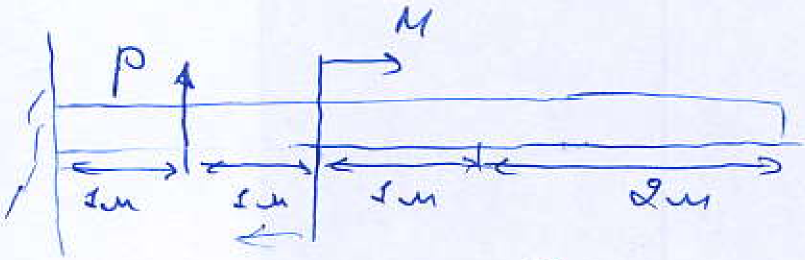


Рис.....

~~Лекция~~.

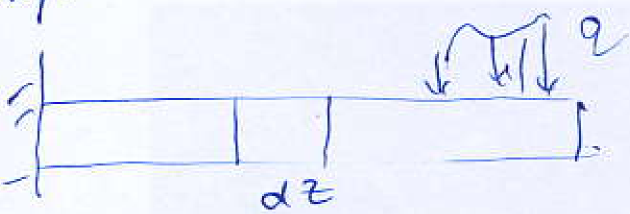
Уравнение упругой линии стержня

Воспользуемся уравнениями для внутренних силовых факторов

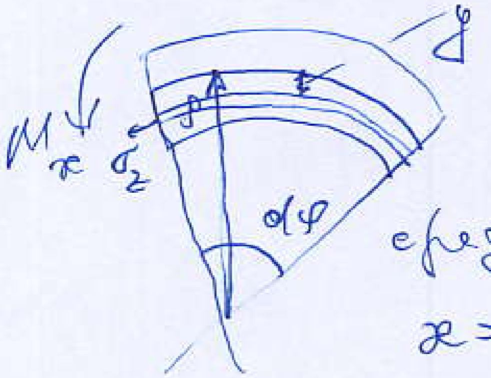
$$\frac{dQ_y}{dz} = q(z), \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y$$

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = q(z) \quad (1)$$

Найдём деформацию стержня при его изгибе



Элемент после деформации имеет вид



ρ – радиус кривизны срединной линии.

$æ = \frac{1}{\rho}$ кривизна.

Найдём деформацию ε_z.

$$d\varphi = \frac{dz}{\rho}; \quad \Delta z = (\rho - y)\,d\varphi = (\rho - y)\frac{dz}{\rho}$$

$$\varepsilon_z = (\rho - y)\frac{dz}{\rho} - dz \Rightarrow \quad \varepsilon_z = -\frac{y}{\rho} \quad (2)$$

$$M_x = \iint_F y\,\sigma_z\,dF; \quad \sigma_z = E\varepsilon_z;$$

$$M_x = -\frac{E}{\rho}\iint_F y^2\,dF \Rightarrow$$

$$M_x = -\frac{E}{\rho} J_x \quad (3)$$

EJ_x – жёсткость стержня при изгибе

Кривизна имеет вид

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2 v}{dz^2}$$

тогда

$$M_x = E J_x \frac{d^2 v}{dz^2} \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1) получаем уравнение упругой линии стержня.

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(E J_x \frac{d^2 v}{dz^2}\right) = q(z) \quad (5)$$

При постоянном $E J_x$ имеем:

$$E J_x \frac{d^4 v}{dz^4} = q(z) \quad (6)$$

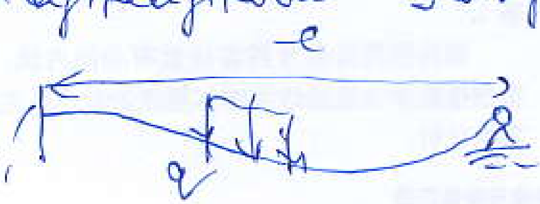
Возможные граничные условия

1. Заделка.

$$v\Big|_{z=0} = 0$$

$$\frac{dv}{dz}\Big|_{z=0} = 0$$

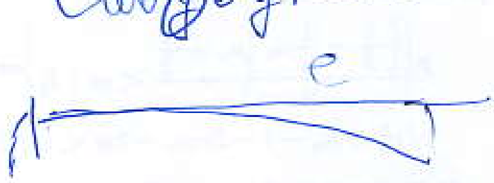
2. Шарнирное закрепление



$$v\Big|_{z=l} = 0; \quad M_x\Big|_{z=l} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2}\Big|_{z=l} = 0$$

3. Свободный край



$$M_x = 0; \quad Q_y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2}\Big|_{z=l} = 0$$

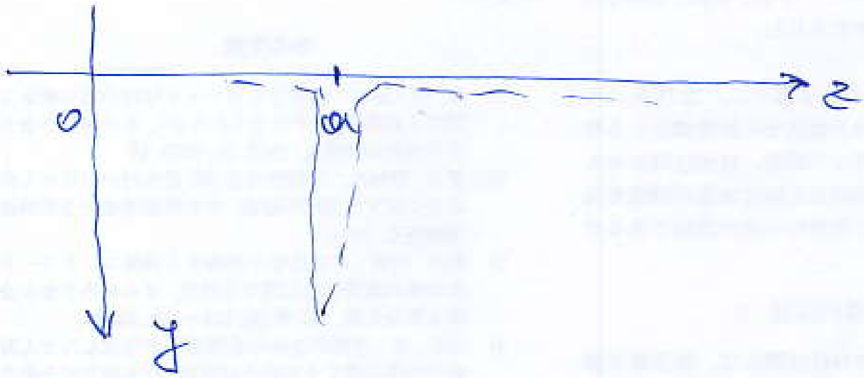
$$\frac{d^3 v}{dz^3}\Big|_{z=l} = 0$$

Функция Хевисайда (Лекция 8) (20)

Введём δ-функцию таким образом, что

$$\delta(z-a) = \begin{cases} 0, & z \neq a \\ \infty, & z = a \end{cases}$$

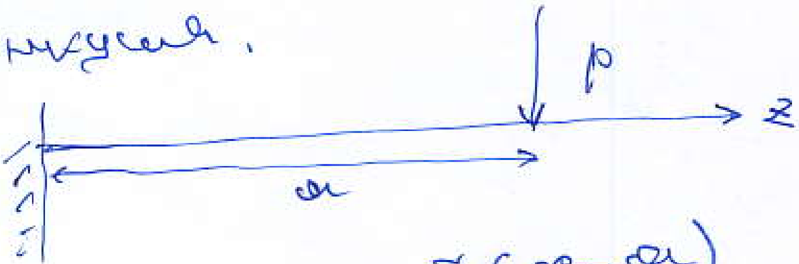
при этом



при этом

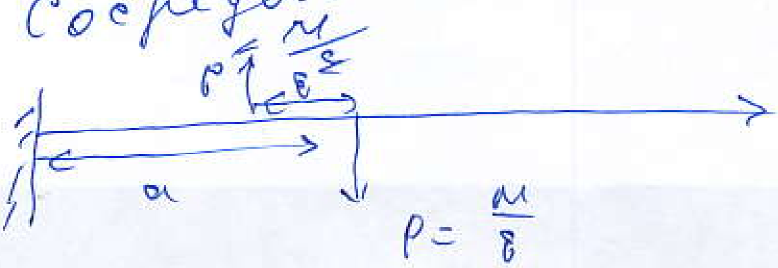
$$\int_0^\infty f(z)\,\delta(z-a)\,dz = f(a)$$

здесь $f(z)$ – произвольная интегрируемая функция.



$$q(P) = P\,\delta(x-a)$$

Сосредоточенный момент



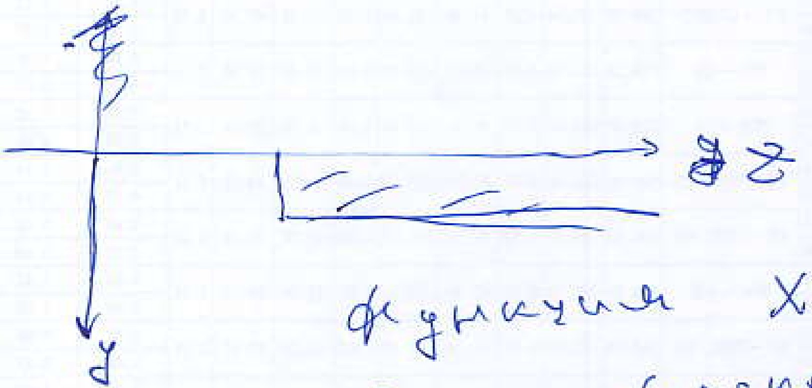
M задан,

$$P = \frac{M}{\varepsilon}$$

$$q(м) = P\,\delta\left[z - \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right] - P\,\delta\left[z - \left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$q(м) = м\,\delta'(z - a)$$

$$\int_0^\infty 1 \cdot \delta(z-a)\,dz = \begin{cases} 0; & z < a \\ 1; & z \ge a \end{cases}$$

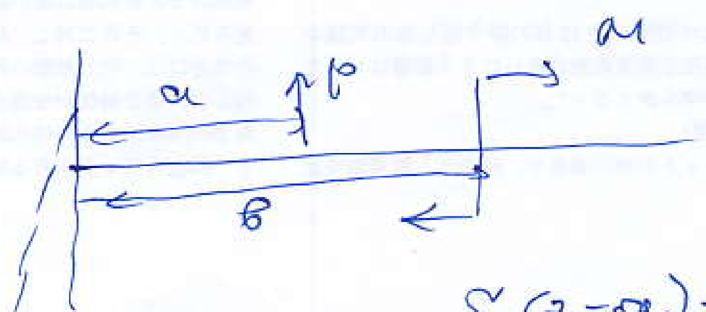


функция Хевисайда нулевого порядка (скачковая функция)

$$v^{(1)} = \begin{cases} 0; & z < a \\ \dfrac{(z-a)}{1!}; & z \ge a \end{cases}$$

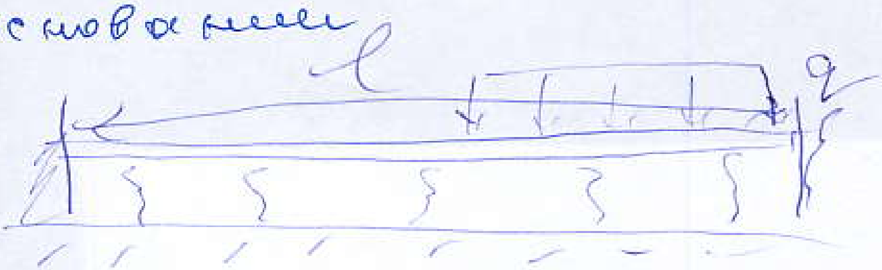
$$v^{(n)} = \begin{cases} 0; & z < a \\ \dfrac{(z-a)^n}{n!}; & z \ge a \end{cases}$$

Пример.



$$EJ_x \frac{d^4 v}{dz^4} = -P\,\delta(z-a) + м\,\delta'(z-b)$$

Изгиб стержня на упругом основании



Ур-ие имеет вид

$$EJ_x \frac{d^4 v}{dz^4} + k v = q(z) \quad (1)$$

Коэффициент k – жесткость упругого основания.

Из (1) получаем

$$\frac{d^4 v}{dz^4} + 4 \varkappa^4 v = q_0(z) \quad (2)$$

$$q_0 = \frac{1}{EJ} q(z)$$

Решение ур-ия (2) ищем в виде

$$v = v_ч + v_о$$

$v_ч$ – частное решение ур-ия (2), а

$v_о$ удовлетворяет ур-ию

$$\frac{d^4 v_0}{dz^4} + 4 \varkappa^4 v_0 = 0 \quad (3)$$

$$v_0 = c e^{\lambda z}$$

$\lambda^4 + 4\varkappa^4 = 0$ – характеристическое ур-ие. Корни его имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm (1+i)\varkappa \\ \lambda_{3,4} &= \pm (1-i)\varkappa \end{aligned}\right\} (4)$$

$i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

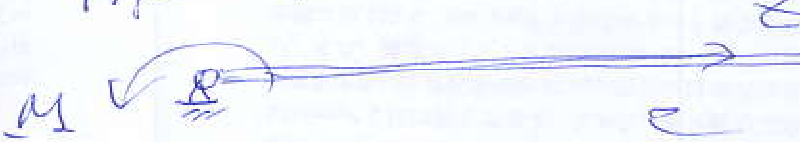
Используя (4), получим:

$$v_0 = C_1 e^{\varkappa(1+i)z} + C_2 e^{-\varkappa(1+i)z} + C_3 e^{\varkappa(1-i)z} + C_4 e^{-\varkappa(1-i)z}$$

После перехода от комплексных переменных к действительным, получаем:

$$v_0 = C_1 e^{\varkappa z}\cos\varkappa z + C_2 e^{\varkappa z}\sin\varkappa z + C_3 e^{-\varkappa z}\sin\varkappa z + C_4 e^{-\varkappa z}\cos\varkappa z \qquad (5)$$

Пример (1)



Полубесконечный стержень, на конце которого приложен момент M.

Граничные условия:

$$v\big|_{z=0} = 0; \quad M_x\big|_{z=0} = M \Rightarrow [v'' EJ]_{z=0} = M$$

$v_z = 0$; $v = v_0$ — используя (5), получим $v = v_0$

При $z \to \infty$: $v, v', v'', v''' \to 0$

и следовательно: $C_1 = C_2 = 0$

$$v = C_3 e^{-\varkappa z}\sin\varkappa z + C_4 e^{-\varkappa z}\cos\varkappa z$$

$$v' = C_3(-\varkappa) e^{-\varkappa z}\sin\varkappa z + C_3\varkappa e^{-\varkappa z}\cos\varkappa z - C_4\varkappa e^{-\varkappa z} - C_4\varkappa e^{-\varkappa z}\sin\varkappa z$$

$$v'' = -2C_3\varkappa^2 e^{-\varkappa z}\cos\varkappa z + 2C_4\varkappa^2 e^{-\varkappa z}\sin\varkappa z$$

Используя граничные условия при $z=0$, получаем:

$C_4 = 0; \quad C_3 = -\frac{M}{2EJ\varkappa^2}$

и окончательно

$$v = -\frac{M}{2\varkappa^2 E J_x} e^{-\varkappa z} \sin \varkappa z$$

При определении изгиба стержня конечной длины решение ур-ния v_0 удобно брать в виде:

$$v_0 = C_1 \operatorname{sh}\varkappa z \sin\varkappa z + C_2 \operatorname{sh}\varkappa z \cos\varkappa z + C_3 \operatorname{ch}\varkappa z \cos\varkappa z + C_4 \operatorname{ch}\varkappa z \sin\varkappa z$$

$\boxed{\text{Лекция}}$ 9

Тензор напряжений.

Рассмотрим деформируемое твердое тело, которое находится в произвольном напряженном состоянии. Вырежем из этого тела бесконечно малый элемент

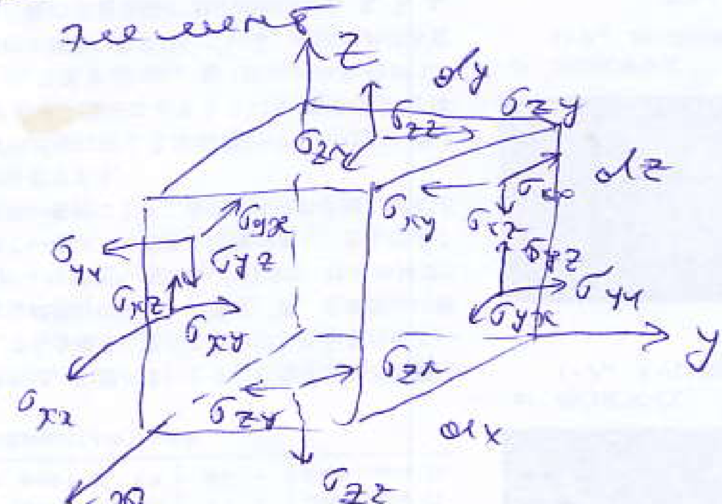


рис.

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ — нормальные напряжения,

$\sigma_{xz}, \sigma_{xy}, \dots$ — касательные напряжения.

Тензор напряжений:

$$T_\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{Vmatrix} \quad (1)$$

Ур-ие равновесия:

$$\sum_i M_x(F_i) = \sigma_{yz}\, \underline{dx\, dz\, dy} - \sigma_{zy}\, \underline{dy\, dx\, dz} = 0$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} \quad (2)$$

Аналогично:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} \\ \sigma_{zx} &= \sigma_{xz} \end{aligned}\right\} \; 3$$

Из (2) и (3) следует закон парности касательных напряжений.

Напряжения, действующие на площадку под произвольным углом. Нормальные напряжен.

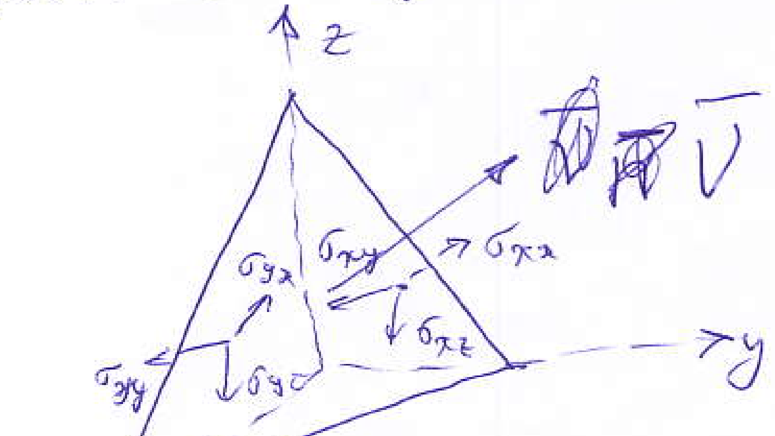


рис....

$\bar n$ = cos

$$\bar n = \cos(\widehat{\bar n, x})\,\bar i + \cos(\widehat{\bar n, y})\,\bar j + \cos(\widehat{\bar n, z})\,\bar k$$

$$\bar{\nu} = l\,\bar{i} + m\,\bar{j} + n\,\bar{k}$$

p_x, p_y, p_z – проекции напряжения на соответствующие оси, действующие на площадку с нормалью $\bar{\nu}$.

$$\sum X_i = p_x \cancel{dF} - \sigma_{xx}\, l \cancel{dF} - \sigma_{yx}\, m \cancel{dF} - \sigma_{zx}\, n \cancel{dF} = 0$$

$$\sum Y_i = p_y \cancel{dF} - \sigma_{yy}\, m \cancel{dF} - \sigma_{xy}\, l \cancel{dF} - \sigma_{zy}\, n \cancel{dF} = 0$$

$$\sum Z_i = p_z \cancel{dF} - \sigma_{zz}\, n \cancel{dF} - \sigma_{xz}\, l \cancel{dF} - \sigma_{yz}\, m \cancel{dF} = 0$$

$$p_x = \sigma_{xx}\, l + \sigma_{xy}\, m + \sigma_{xz}\, n$$

$$p_y = \sigma_{yx}\, l + \sigma_{yy}\, m + \sigma_{yz}\, n$$

$$p_z = \sigma_{zx}\, l + \sigma_{yz}\, m + \sigma_{zz}\, n$$

$$\left\| \begin{matrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} l \\ m \\ n \end{matrix} \right\|$$

Нормальное напряжение, действующее на наклонную площадку

$$\sigma_\nu = \vec{p} \cdot \vec{\nu} = p_x\, l + p_y\, m + p_z\, n \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_\nu = \sigma_{xx}\, l^2 + \sigma_{yy}\, m^2 + \sigma_{zz}\, n^2 +$$
$$2(\sigma_{xy}\, l m + \sigma_{xz}\, l n + \sigma_{yz}\, m n)$$

$l = \cos(\bar{\nu}, x)$; $m = \cos(\bar{\nu}, y)$, $n = \cos(\bar{\nu}, z)$

Лекция 10

Главные напряжения и главные площадки.

Площадка называется главной если касательные напряжения на ней равно 0.

Имеем

$$\sigma_\nu = \sigma \qquad (1)$$

при этом

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \sigma l \\ p_y &= \sigma m \\ p_z &= \sigma n \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

из (1) и (2) получаем:

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_{xx}-\sigma) l + \sigma_{xy} m + \sigma_{xz} n &= 0 \\ \sigma_{yx} l + (\sigma_{yy}-\sigma) m + \sigma_{yz} n &= 0 \\ \sigma_{zx} l + \sigma_{zy} m + (\sigma_{zz}-\sigma) n &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Определитель данной системы уравнений относительно l, m, n должен обратиться в 0.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma_{xx}-\sigma & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy}-\sigma & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}-\sigma \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sigma^3 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) +$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \right) \sigma -$$

$$- \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = 0$$

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

I_1, I_2, I_3 – являются инвариантами тензора напряжений. Т.е. их величины не зависят от выбора системы координат.

Найдем главные оси координат.

Имеем

$$(\sigma_{xx} - \sigma_1) l_1 + \sigma_{xy} m_1 + \sigma_{xz} n_1 = 0$$

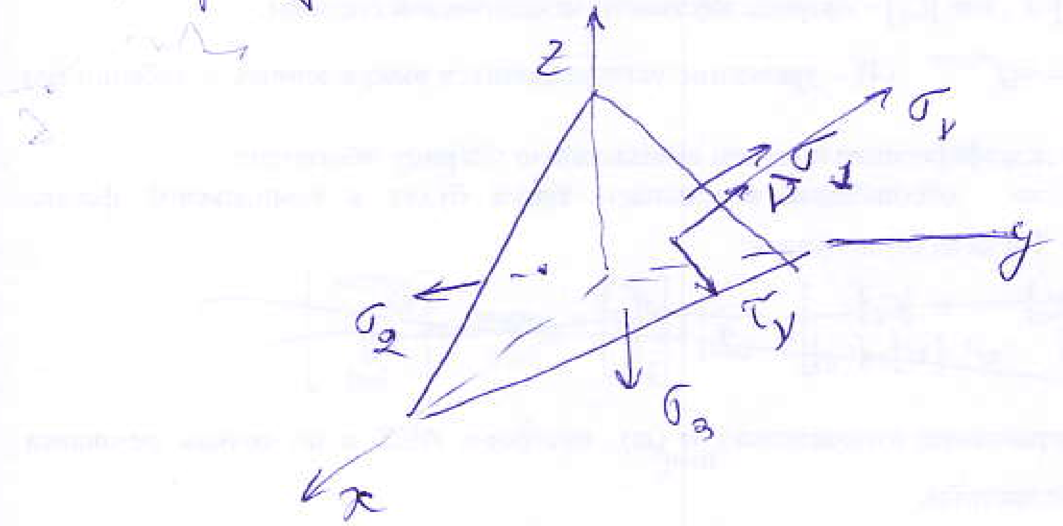
$$\sigma_{xy} l_1 + (\sigma_{yy} - \sigma_1) m_1 + \sigma_{yz} n_1 = 0$$

$$l_1^2 + n_1^2 + m_1^2 = 1$$

из данной системы находим направляющие косинусы l_1, m_1, n_1 для оси x_1 с напряжением σ_1. Аналогичным образом находим направляющие косинусы l_2, m_2, n_2 и l_3, m_3, n_3.

Максимальные касательные напряжения

Нарисуем элемент в главных осях.



$$p_x = \sigma_1 l;\quad p_y = \sigma_2 m;\quad p_z = \sigma_3 n$$

$$\sigma_\nu = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2$$

$$\tau_\nu^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1;\quad n^2 = 1 - l^2 - m^2$$

$$\tau_\nu^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) l^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) m^2 + \sigma_3^2 - \left[(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 + \sigma_3\right]^2$$

$$\frac{\partial \tau_\nu^2}{\partial l} = 0;\quad \frac{\partial \tau_\nu^2}{\partial m} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2(\sigma_1^2-\sigma_3^2)l-2[(\sigma_1-\sigma_3)l^2+(\sigma_2-\sigma_3)m^2+\sigma_3]2l(\sigma_1-\sigma_3)=0$$

$$2(\sigma_2^2-\sigma_3^2)m-2[(\sigma_1-\sigma_3)l^2+(\sigma_2-\sigma_3)m^2+\sigma_3]2m(\sigma_2-\sigma_3)=0$$

Пусть $m=0$, тогда:

$$(\sigma_1^2-\sigma_3^2)-2[(\sigma_1-\sigma_3)l^2+\sigma_3](\sigma_1-\sigma_3)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_1+\sigma_3-2[(\sigma_1-\sigma_3)l^2+\sigma_3]=0$$

$$\Downarrow$$

$$1-2l^2=0;\quad l^2=\frac{1}{2};\quad l=\pm\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$l^2=n^2=\frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\tau_\nu^2=\frac{1}{2}\sigma_1^2+\frac{1}{2}\sigma_3^2-\left[\frac{1}{2}\sigma_1+\frac{1}{2}\sigma_3\right]^2 \Rightarrow$$

$$\tau_\nu^2=\frac{1}{4}(\sigma_1-\sigma_3)^2;$$

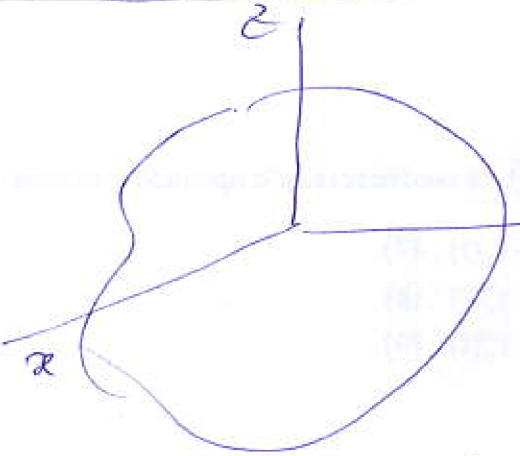
$$\tau^{(1)}_{\nu\,max}=\pm\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$$

Аналогичным образом имеем:

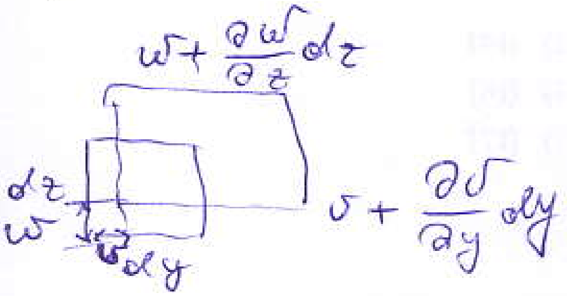
$$\tau^{(2)}_{\nu\,max}=\pm\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2};\quad \tau^{(3)}_{\nu\,max}=\pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$

(Лекция 11)

Тензор деформаций



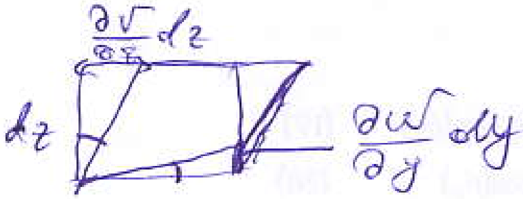
Тело находится в произвольном напряженно-деформированном состоянии. Рассмотрим бесконечно малый элемент



$$\varepsilon_{yy} = \frac{\left(v+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)-v}{dy} \Rightarrow$$

$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$; аналогично

$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$;



Угол сдвига $\gamma_{yz} =$

аналогично

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Получаем окончательное выражение для тензора деформаций:

$$T_\varepsilon = \begin{Vmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{Vmatrix} \quad (1)$$

Обобщенный закон Гука

Для изотропного ~~тела~~ материала связь между напряжениями и деформациями имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz} \\ \varepsilon_{yy} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} + \frac{1}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz} \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} + \frac{1}{E}\sigma_{zz} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\sigma_{xy}; \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\sigma_{yz}; \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\sigma_{zx}$$

Выражения напряжения через деформации получим:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu}\Theta\right)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-2\nu}\Theta\right)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu}\Theta\right) \quad (3)$$

$$\sigma_{xy} = G\gamma_{xy}; \quad \sigma_{yz} = G\gamma_{yz}; \quad \sigma_{zx} = G\gamma_{zy}$$

$$\Theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

Пл-кое напр. состояние. (33)

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0; \qquad (4)$$

$$u = u(x,y);\ v = v(x,y);\ w = w(x,y)$$

Принимая во внимание (3) и (4), получаем:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu}\Theta\right)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-2\nu}\Theta\right) \qquad (5)$$

$$0 = \varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu}\Theta$$

Из (5) исключаем ε_{zz} и получаем:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy});\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) \qquad (6)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1-\nu^2}\,\frac{1-\nu}{2}\,\gamma_{xy}$$

Используя теорему Клапейрона получаем удельную потенциальную энергию упругих деформаций:

$$d\Pi_y = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx} + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right)$$

Потенциальная энергия всего тела имеет вид:

$$\Pi_y = \iiint_V (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx} + \tau_{xy}\gamma_{xy})\,dx\,dy\,dz \qquad (7)$$

Найдём потенциальную энергию при плоском напряженном состоянии.

$$\Pi_y = \iiint_V (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \tau_{xy}\gamma_{xy})\,dx\,dy\,dz \quad (8)$$

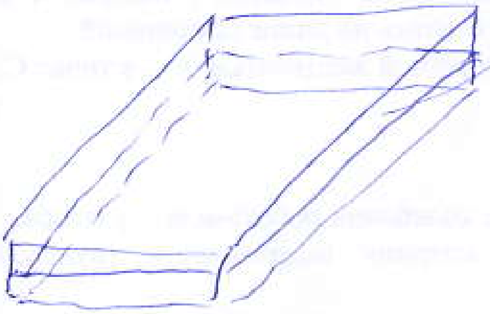
Подставляя (6) в (8), получаем:

$$\Pi = \frac{E}{1-\nu^2}\iiint_V \left(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + 2\nu\,\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy}^2\right)dx\,dy\,dz \quad (9)$$

Лекция 12

Изгиб прямоугольной пластины.

Опр. Пластиной наз. упругое тело, 2 размера которого намного больше третьего.



срединная плоскость

Гипотезы

1° Гипотеза прямой нормали

При изгибе пластины нормаль к срединной плоск-ти ~~поверхности~~ до деформации остается прямой нормально после деформации.

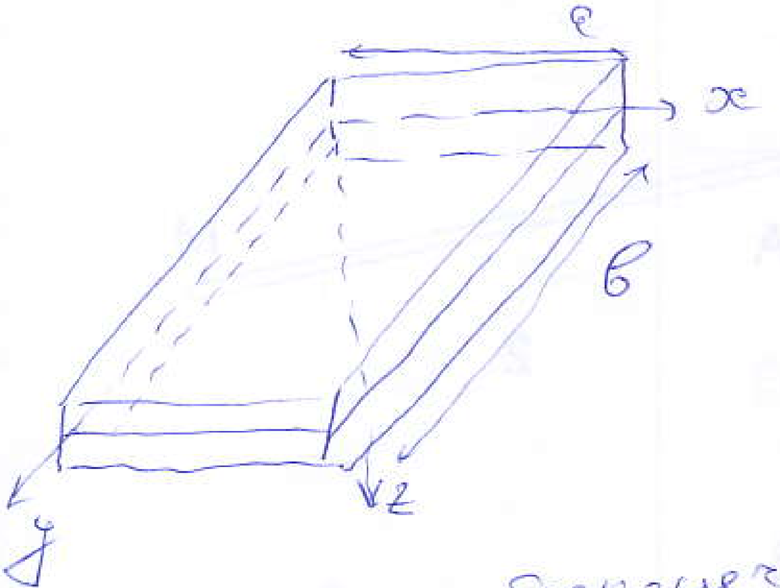
2. Пластина состоит из бесконечно тонких пластинок параллельных срединной пл-ти, которые друг с другом не взаимодействуют.

3. При изгибе пластины срединная плос-ть остается нерастяжимой.

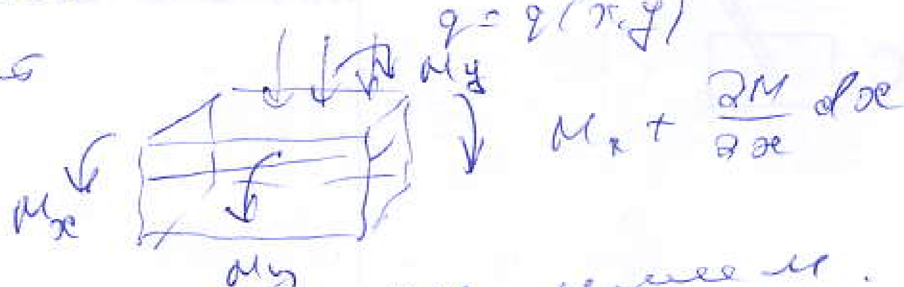
При изгибе пластина находится в плоском напряженном состоянии: (35)

$$\sigma_{zz}=0, \quad \sigma_{zx}=\sigma_{zy}=0$$

$$\varepsilon_{zx}=\varepsilon_{zy}=0, \quad \varepsilon_{zz}\neq 0.$$



Вырезаем бесконечно малый элемент



Из прошлой лекции имеем:

$$\sigma_{xx}=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx}+\nu\varepsilon_{yy}\right)$$

$$\sigma_{yy}=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy}+\nu\varepsilon_{xx}\right) \qquad (1)$$

$$\sigma_{xy}=\frac{E}{2(1-\nu^2)}(1-\nu)\gamma_{xy}$$

Деформации опред. следующим образом:

$$\varepsilon_{xx}=-z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad (2)$$

$$\gamma_{xy}=-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

Используя формулы (1) и (2), (38)

получаем выражения для изгибающих моментов:

$$M_x = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z\, dz = + D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y = + D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad (3)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$ — цилиндрическая жесткость

Используя (2) и формулу (9), найдём полную промтков лекции, найдём полную потенциальную энергию пластины

$$П = \frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right] dx\,dy - \int_0^a\int_0^b q(x,y)\, w\, dx\,dy \qquad (10)$$

Возможные граничные условия.

Пусть для определенности при $y=0$ и $y=b$ имеем шарнирное опирание, при $x=0$ — заделка, а при $x=a$ — свободный край. Тогда имеем

$$w\big|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad w\big|_{y=0} = w\big|_{y=b} = 0 \qquad (11)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{y=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{y=b} = 0,$$ условия

Условия на кромке при $y=b$ будут (37)
получены ниже.

Лекция

Получим дифференциальное ур-ие
для определения прогибов $w=w(x,y)$.
На действительном перемещении
потенциальная энергия $П$ принимает
экстремальное значение, т.е.:

$$\delta П = 0$$

Воспользовавшись формулой (10) из
предыдущей лекции, будем иметь:

$$\delta П = D\int_0^a\int_0^b \Big[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \qquad (1)$$

$$+ \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\delta\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + $$

$$+ 2(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big]dx\,dy - \int_0^a\int_0^b q\,\delta w\,dx\,dy = 0$$

Интегрируя выражение (1) два раза
по частям и используя граничные
условия (21) предыдущей лекции,
получаем:

$$\delta П = \int_0^a\int_0^b \left[D\nabla^4 w - q\right]\delta w\,dx\,dy +$$

$$+ \int_0^a D\Big[\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\delta w}{\partial y}\Big]_{y=b}dx - \qquad (2)$$

$$- \int_0^a D\Big\{\Big[(1-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\Big]\delta w\Big\}_{y=b}dx = 0$$

Для выполнения ур-ия (2) необходимо приравнять 0 ~~вырх~~ выражения при $\delta w(x,y)$, $\frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=b}$; $\delta w\big|_{y=b}$. В результате получим:

$$D\nabla^4 w = q \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} &\left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_{y=b} = 0 \\ &\left[(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right]_{y=b} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 \quad (5)$$

Уравнения изгиба пластин. (3) носит название уравнения С. Жермен. Граничные условия (4) называются естественные граничные условия и означают равенство 0 на границе $y=b$ изгибающего момента и обобщенной поперечной силы.

Метод Навье решения задачи об изгибе прямоугольной пластины

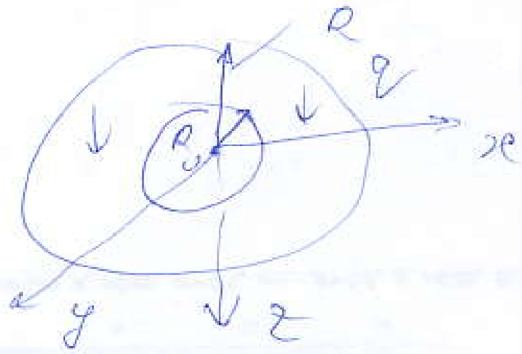
Пример.

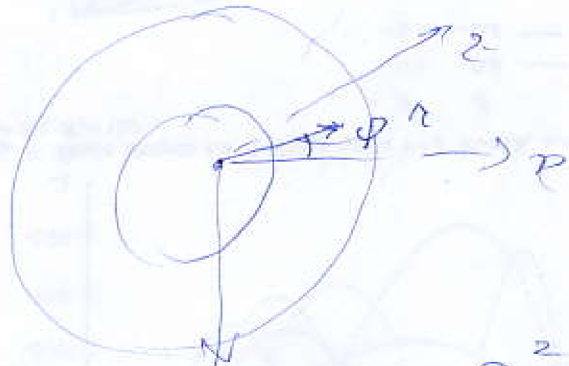
Лекция

Метод Леви решения задачи об изгибе прямоугольной пластины

1. Пример.

Осесимметричный изгиб круглой пластины





$$\nabla^4 w = \frac{q}{D}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

При осесимметричном изгибе

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2 = \frac{q}{D} \quad \text{или}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]\right\} = \frac{q}{D}$$

$$w = w_r + w_0;$$

$$\nabla^4 w_0 = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_0}{dr}\right)\right]\right\} = 0 \Rightarrow$$

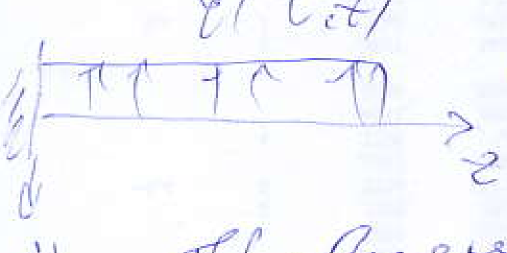
$$w_0 = c_1 + c_2 \ln r + c_3 r^2 + c_4 r^2 \ln r$$

Постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 находим из граничных условий.

Пример.

Лекция

Собственные колебания прямолинейного стержня



Уравнение движения имеет вид:

$$EJ\frac{\partial^4 v}{\partial z^4}+\rho F\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0 \quad (1)$$

ρ - плотность материала, F - площадь поперечного сечения стержня.

Решение ур-ия (1) ищем в виде:

$$v=V(z)e^{i\omega t} \quad (2)$$

ω - частота собственных колебаний.

Подставляя (2) в (1), получаем:

$$EJ\frac{d^4 V}{dz^4}-\rho F\omega^2 V=0$$

или

$$V^{IV}-\lambda^4 V=0 \quad (3) \quad \text{где}$$

$$\lambda^4=\frac{\rho F\omega^2}{EJ} \quad (4)$$

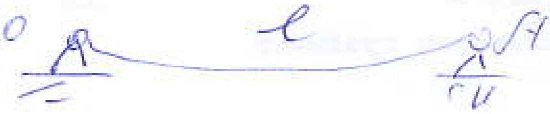
$$V=Ce^{\varkappa z};\quad \varkappa^4-\lambda^4=0$$

$$\varkappa_{1,2}=\pm\lambda,\quad \varkappa_{3,4}=\pm i\lambda, \text{ т.е.}$$

$$V(z)=C_1\,\mathrm{sh}\,\lambda z+C_2\,\mathrm{ch}\,\lambda z+C_3\sin\lambda z+C_4\cos\lambda z \quad (5)$$

Ф-лой (5) определяется балочная функция.

Пример 1.
Шарнирное опирание стержня



$$\left.v\right|_{z=0} = \left.v\right|_{z=l} = 0$$
$$\left.v''\right|_{z=0} = \left.v''\right|_{z=l} = 0$$

$$v'' = \lambda^2 (C_1 \operatorname{sh} \lambda z + C_2 \operatorname{ch} \lambda z - C_3 \sin \lambda z - C_4 \cos \lambda z)$$

$$C_2 + C_4 = 0$$
$$C_2 - C_4 = 0 \qquad (6)$$
$$C_1 \operatorname{sh} \lambda l + C_2 \operatorname{ch} \lambda l + C_3 \sin \lambda l + C_4 \cos \lambda l = 0$$
$$C_1 \operatorname{sh} \lambda l + C_2 \operatorname{ch} \lambda l - C_3 \sin \lambda l - C_4 \cos \lambda l = 0$$

из (6) находим:
$$C_2 = C_4 = 0$$

$$\cancel{C_1 \operatorname{sh} \lambda l + C_2 \operatorname{ch}}$$
$$C_1 \operatorname{sh} \lambda l + C_3 \sin \lambda l = 0$$
$$C_1 \operatorname{sh} \lambda l - C_3 \sin \lambda l = 0 \qquad (7)$$

из (7) получаем
$$2 C_3 \sin \lambda l = 0; \Rightarrow$$
$$\sin \lambda l = 0$$

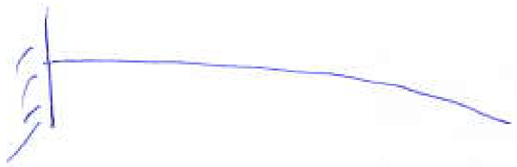
$\lambda_n l = \pi n$; $\lambda_n = \dfrac{\pi n}{l}$; откуда имеем,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\lambda_n^4 EJ}{\rho F}} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 \frac{EJ}{\rho F}}$$

$$v_n = C_n \sin \lambda_n z \Rightarrow$$

$$\boxed{v = C_n \sin \frac{\pi n z}{l}} \qquad (8)$$

Пример 2. Стержень с заделанным и свободным концами



$$v\big|_{z=0}=0;\quad v'\big|_{z=0}=0$$

$$v''\big|_{z=l}=0\quad v'''\big|_{z=l}=0$$

$\boxed{\text{Лекция}}$

ортогональность балочных функций