

Комков Кирилл Федотович

**Исследование деформации структурно –  
неоднородных материалов, проявляющих  
разрыхление  
и тензорную нелинейность**

\* \* \*

**Цель исследования** - разработка методик для определения деформационных характеристик с учетом нелинейных эффектов и разработка математических моделей сред, деформация которых зависит от вида напряженного состояния

\* \* \*

**Объект исследования** – механика изотропных материалов, в описание деформации которых положены тензорно-нелинейные уравнения

## Основные задачи работы:

- а) приведение тензорно-нелинейных уравнений к виду, в котором **материальным функциям придан физический смысл** и возможность **определения по результатам испытаний**. Анализ уравнений с выводом теоретической связи параметров Лоде, связи их разницы с фазой подобия девиаторов напряжений и деформаций;
- б) **экспериментальные** исследования наполненных полимерных материалов с целью изучения особенностей их деформационных свойств, отражающих эффекты тензорной нелинейности;
- в) преобразование **тензорно-нелинейных уравнений к виду**, соответствующему уравнениям, описывающим деформацию **анизотропных материалов**. Вывод расчетных формул, связывающих характеристики упругости материалов, проявляющих **начальную разномодульность**;
- г) разработка методики **восстановления материальных функций** для всех напряженных состояниях, в том числе **для обобщенных растяжения и сжатия**;
- д) экспериментальные исследования связи среднего (гидростатического) напряжения с деформацией сдвига и связи объемной деформации (разрыхления) с продольной деформацией при растяжении. Вывод **уравнений связи шаровых тензоров напряжений и деформаций**, учитывающих эффекты тензорной нелинейности (Рейнольдса и Ривлина);
- е) анализ **тензорной нелинейности конструкционных материалов** (по результатам работ отечественных и зарубежных исследователей). Разработка методики определения напряженного состояния с наименьшим сопротивлением пластической деформации. Разработка **математической модели** конструкционных материалов (никель, медь, сталь и др.);
- ж) разработка **математической модели** наполненных полимеров, серых чугунов, бетонов и др.
- з) разработка математической модели зернистых композитов **с напередзаданной тензорной нелинейностью**;
- и) использование математических моделей для разработки **программ экспериментальных исследований** эффектов, сопровождающих **тензорную нелинейность**.

### 3. Тензорно-нелинейные уравнения

М. Рейнер  $\varepsilon_{ij} = \Phi_0 \delta_{ij} + \Phi_1 \sigma_{ij} + \Phi_2 \sigma_{ik} \sigma_{kj},$  (1)

$$\sigma_{ij} = F_0 \delta_{ij} + F_1 \varepsilon_{ij} + F_2 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj}, \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (2)$$

$\Phi_\alpha, F_\alpha$  – материальные функции; ( $\alpha = 0, 1, 2$ ).

В. В. Новожилов  $D_e = \Phi_\theta \{ (\varphi_m/2) D_\sigma + (\varphi_d/S_0) [D_\sigma^2 - (2/9) S_0^2 I] \},$  (3)

$$D_\sigma = G_\vartheta \{ 2g_m D_e - g_d (D_e^2 - 1/2 e_0^2 I) / e_0 \}. \quad (4)$$

$\Phi_\theta$  и  $G_\vartheta$  – обобщенная податливость и обобщенный модуль,

$\varphi_m, \varphi_d, g_m, g_d$  – тригонометрические коэффициенты.

#### Преобразование материальных функций.

Если ввести:  $\Phi_i = \gamma_i / \tau_i$  – податливости и  $G_i = \tau_i / \gamma_i$  – модули,

где  $\tau_i, \gamma_i$  – главные касательные напряжения и деформации,

то  $\rightarrow \Phi_m = \Phi_i / 3 = \Phi_\theta \sin(2\theta + \vartheta) / \sin 3\theta$  – средняя податливость, (5)

$$\Phi_d = \{ [(\phi_j - \phi_\alpha)^2] / 8 \}^{1/2} = 3\Phi_\theta \sin(\theta - \vartheta) / (2 \sin 3\theta) - \quad (6)$$

– среднеквадратическая податливость,  $\Phi_m = \Phi_\theta \varphi_m, \Phi_d = \Phi_\theta \varphi_d.$  (7)

$$G_m = G_i / 3 = G_\vartheta \sin(2\vartheta + \theta) / \sin 3\vartheta - \text{средняя жесткость}, \quad (7)$$

$$G_d = \{ (8/9) [(G_j - G_\alpha)^2] \}^{1/2} = 4G_\vartheta \sin(\theta - \vartheta) / \sin 3\vartheta - \quad (8)$$

– среднеквадратическая жесткость.  $G_m = G_\vartheta g_m, G_d = G_\vartheta g_d.$

$$e_{ij} = (\Phi_m/2) S_{ij} + \Phi_d (S_{i\alpha} S_{\alpha j} - 2/9 S_0^2 \delta_{ij}) / S_0, \quad (9)$$

$$S_{ij} = 2G_m e_{ij} - G_d (e_{i\alpha} e_{\alpha j} - 1/2 e_0^2 \delta_{ij}) / e_0; \quad (i, j, \alpha = 1, 2, 3). \quad (10)$$

Основной признак тензорной нелинейности:

$$\Phi_i \neq \Phi_j \text{ или } G_i \neq G_j; \quad i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j; \quad (11)$$

$g_d = G_d / G_\vartheta, \quad \varphi_d = 8g_d / 3$  – параметры тензорной нелинейности;

$S_0 = (3/2 S_{ij} S_{ij})^{1/2}, \quad e_0 = (2/3 e_{ij} e_{ij})^{1/2}$  – интенсивности напряжений и деформаций.

#### 4. Отклонение от подобия девиаторов $S_{ij}, e_{ij}$

$$\operatorname{tg} \omega = 2\Phi_d \sin 3\theta / (3\Phi_m + 2\Phi_d \cos 3\theta) = [G_d \sin 3\vartheta / (4G_m - G_d \cos 3\vartheta)], (12)$$

$\omega = \theta - \vartheta$  – фаза подобия девиаторов,  $\theta, \vartheta$  – углы вида напряженного и деформированного состояний.

**Связь между параметрами Лоде:**

$$\lambda_\sigma = -2\tau_1/\tau_2 - 1, \quad \lambda_\varepsilon = -2\gamma_1/\gamma_2 - 1, (13) \quad \Delta\lambda = (\lambda_\sigma - \lambda_\varepsilon), (14)$$

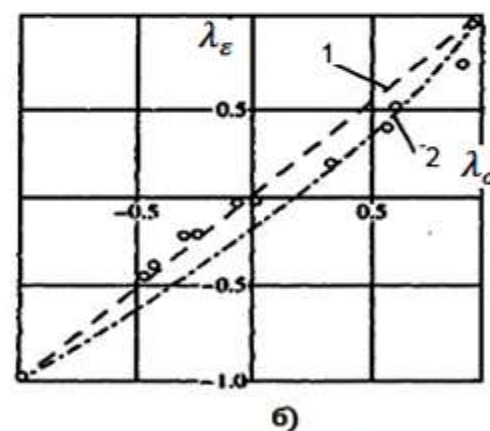
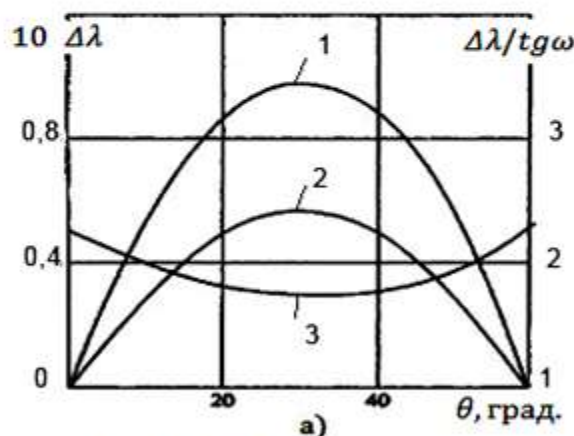
$$\tau_i = S_0(c_j - c_\alpha)/6, (15) \quad \gamma_i = \tau_i(\Phi_m - 2/3\Phi_d c_i), (16)$$

$$c_1 = 2 \cos \theta, \quad c_2 = \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta, \quad c_3 = -(\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta); (17)$$

$$\lambda_\varepsilon = (\lambda_\sigma + 1)(3\Phi_m - 2\Phi_d c_1)/(3\Phi_m - 2\Phi_d c_2) - 1, (18)$$

$$\Delta\lambda = 2(\lambda_\sigma + 1)\Phi_d(c_1 - c_2)/(3\Phi_m - 2\Phi_d c_2) \geq 0, (19)$$

$$\Delta\lambda = (\tau_2\gamma_1 - \tau_1\gamma_2)/(\tau_2\gamma_2/2) = \Delta A/A_\tau, \quad \operatorname{tg} \omega = \Delta A/A_\omega. (19)$$



**Графики: 1 –  $\Delta\lambda$ , 2 –  $\operatorname{tg} \omega$ , 3 –  $\Delta\lambda/\operatorname{tg} \omega$ . Графики: 1 –  $\lambda_\sigma = \lambda_\varepsilon$ , 2 –  $\lambda_\sigma > \lambda_\varepsilon$ .**

**1-я методика - восстановления диаграммы Лоде по результатам исследований Девиса Е. на образцах из отожженной меди.**

Если  $g_d > 0$ , то для всех  $\theta \neq 0$  и  $\pi/3 \rightarrow \omega > 0$  и  $\Delta\lambda > 0$ .

**Тензорная нелинейность и отклонение от подобия взаимосвязаны.**

## 5. Исследования свойств высоконаполненных полимерных материалов

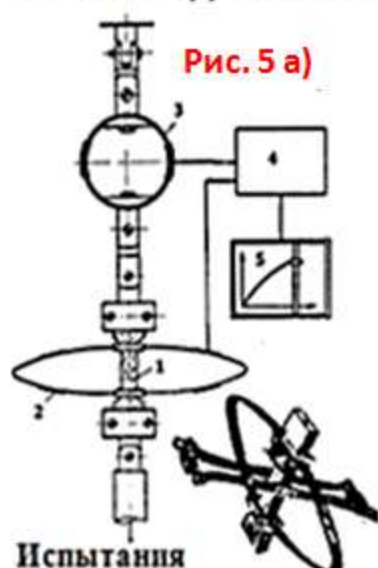


Рис. 5 а)

Испытания на растяжение и сжатие

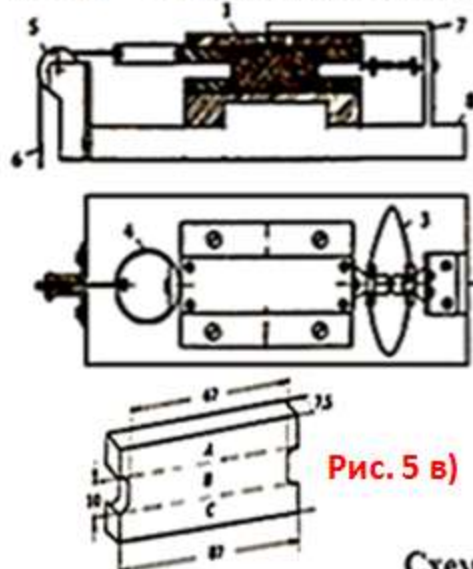


Рис. 5 в)

Испытания на сдвиг

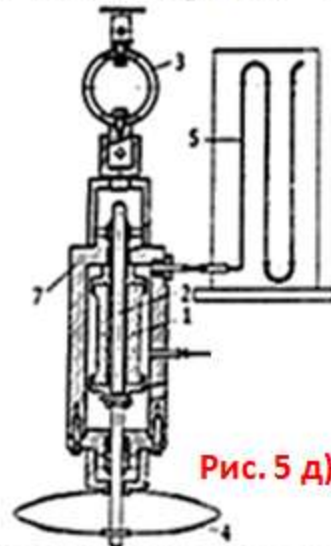


Рис. 5 д)

Схема dilatометра для испытаний с измерением объемной деформации

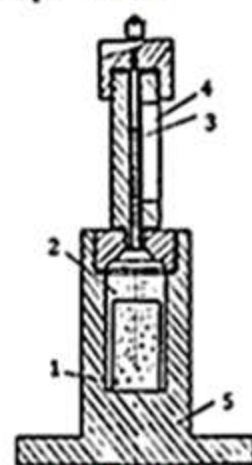


Рис. 5 ж)

Испытания на гидравлическое сжатие

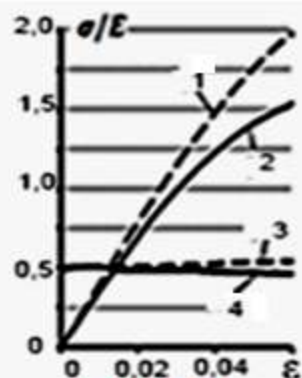


Рис. 5 б)



Рис. 5 г)

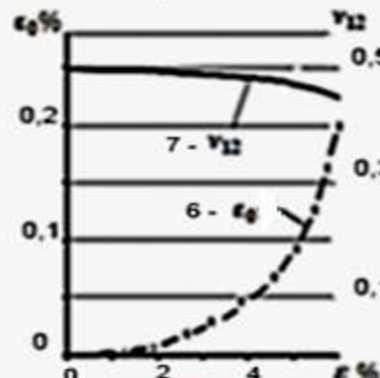


Рис. 5 е)

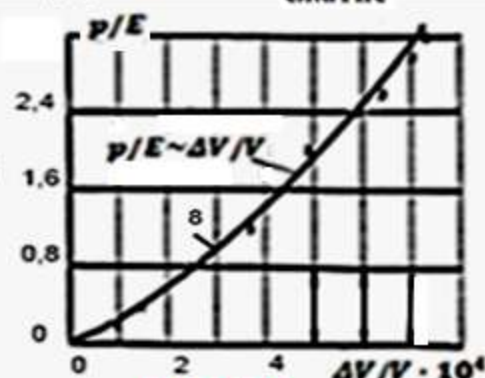


Рис. 5 з)

$$\alpha = \mu(E_3 - E_1) / 12E_1E_3,$$

$$E = 2E_1E_3 / (E_1 + E_3), \quad (20)$$

$$\nu_{12} = [3K(1 + 2\alpha) - 2\mu] / \{2[3K(1 + 2\alpha) + \mu]\},$$

$$\nu_{31} = [3K(1 - 2\alpha) - 2\mu] / \{2[3K(1 - 2\alpha) + \mu]\}, \quad (21)$$

$$E_1 = 9 / [3(1 + 2\alpha) / \mu + 1 / K], \quad E_3 = 9 / [3(1 - 2\alpha) / \mu + 1 / K]. \quad (22)$$

## 6. Методика восстановления материальных функций по диаграммам $S_0 \sim e_0$

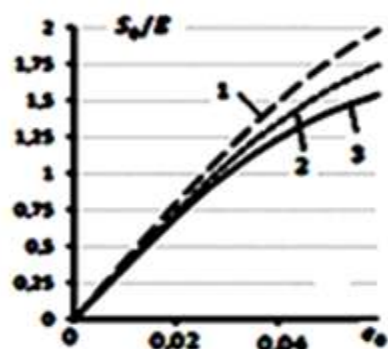


Рис. 6 а)

По значениям  $S_{0j}$  и  $e_{0j}$ ,  $\Phi_{pj}$ ,  $\Phi_{\tau j}$ ,  $\Phi_{cj}$ ,  $\Phi_{ij} = 3e_{0j}/S_{0j}$ ,  $i = p, \tau, c$ ,

1 – определение  $\Phi_{m\text{ ср}}$  и  $\Phi_{d\text{ ср}}$

$j = (15 \div 20)$

$$\phi_i = \Phi_m - 2\Phi_d c_i/3, \quad (23) \rightarrow \phi_1 = \Phi_c, \quad \phi_2 = \Phi_\tau, \quad \phi_3 = \Phi_p, \quad (24)$$

$$\rightarrow \Phi_{m\text{ ср}} = \Phi_{ij}/3, \quad (25)$$

$$\rightarrow \Phi_{d\text{ ср}} = \{[(\Phi_c - \Phi_\tau)^2 + (\Phi_\tau - \Phi_p)^2 + (\Phi_p - \Phi_c)^2]/8\}^{1/2}, \quad (26)$$

$$2 - \omega = \arctg[2\Phi_d \sin 3\theta / (3\Phi_m + 2\Phi_d \cos 3\theta)], \rightarrow \vartheta = \theta - \omega,$$

$$\Phi_\theta = a_1 + a_2 \cos 3\theta + a_3 (\cos 3\theta)^2 \quad \text{для всех } 0 \leq \theta \leq \pi/3, \quad (27)$$

$$a_1 = \Phi_\tau, \quad a_2 = (\Phi_p - \Phi_c)/2, \quad a_3 = (\Phi_c + \Phi_p - 2\Phi_\tau)/2,$$

$$\Phi_m = \Phi_\theta \sin(2\theta + \vartheta) / \sin 3\theta, \quad \Phi_d = 3\Phi_\theta \sin(\theta - \vartheta) / (2 \sin 3\theta), \quad (28)$$

$$G_m = G_\theta \sin(2\vartheta + \theta) / \sin 3\vartheta, \quad G_d = 4G_\theta \sin(\theta - \vartheta) / \sin 3\vartheta, \quad (29)$$

$$\Phi_\theta = [\Phi_m^2 + (4/3)\Phi_m\Phi_d \cos 3\theta + (4/9)\Phi_d^2]^{1/2},$$

Проверка:  $\Phi_\theta * G_\theta = \Phi_\theta * (G_m^2 - 1/2 G_m G_d \cos 3\vartheta + G_d^2/16) = 1.$

### Характеристики формоизменения

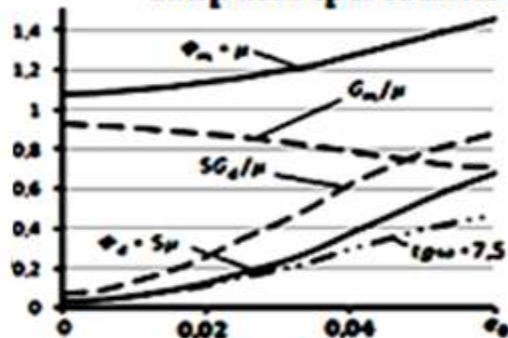


Рис. 6 б)

Изменение характеристик при  $\theta = 30^\circ$ .

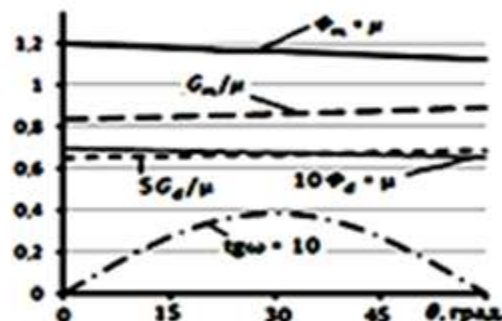


Рис. 6 в)

Изменение характеристик при  $e_0 = 0.03$ .

### Модули $G_i = G_m + G_d d_i/4$ .

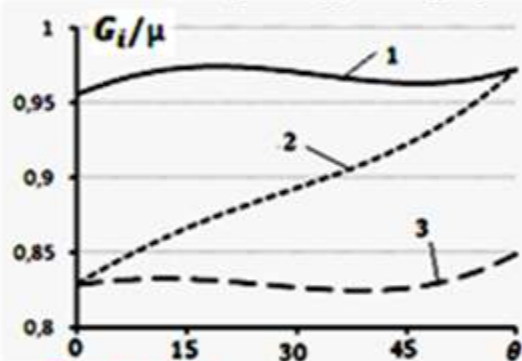


Рис. 6 г) Изменение модулей при  $e_0 = 0.03$ .

## 7. Определение характеристик формоизменения при $\theta = 0$ и $\theta = \pi/3$

$$g_i = (c_j - c_\alpha)/(d_j - d_\alpha), \quad (53) \quad g_i = G_i/G_\theta, \quad (54) \quad G_i = G_m + G_d d_i/4; \quad (55) \quad G_\theta = G_m \mp G_d/4. \quad (56)$$

а)  $\theta = \theta = 0, c_1 = d_1 = 2, \quad G_1 = \tau_1/\gamma_1 = 0/0; \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{по (53): } g_1 = 0/0/G_p, \quad g_2 = g_3 = 1. \\ \text{по (54): } g_1 = G_1/G_p > 1. \end{array} \right.$   
 $d_2 = d_3 = -1; \quad G_\theta = G_p; \quad G_1 = G_p + 3G_d/4;$

б)  $\theta = \theta = \pi/3, d_3 = -2; \quad G_3 = \tau_3/\gamma_3 = 0/0; \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{по (53): } g_3 = 0/0/G_c, \quad g_1 = g_2 = 1. \\ \text{по (54): } g_3 = G_3/G_c < 1, \end{array} \right.$   
 $d_1 = d_2 = 1, \quad G_\theta = G_c, \quad G_3 = G_c - 3G_d/4;$

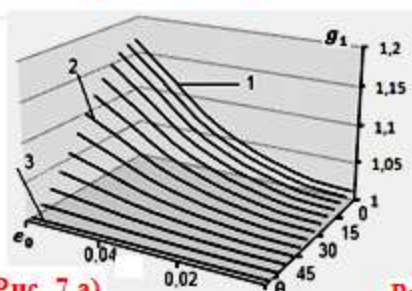


Рис. 7 а)

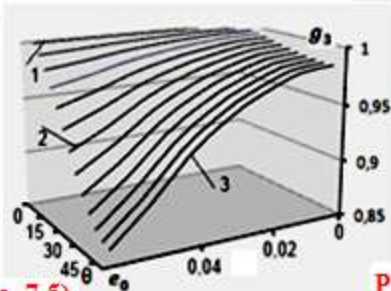


Рис. 7 б)

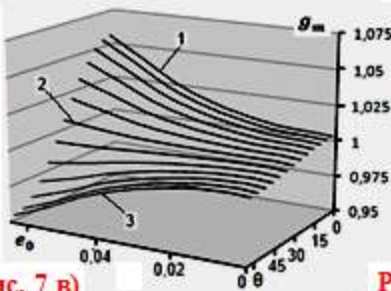


Рис. 7 в)

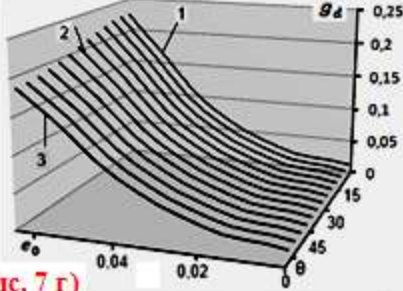


Рис. 7 г)

Зависимости коэффициентов  $g_1, g_3$  от  $e_0$  и  $\theta$ .

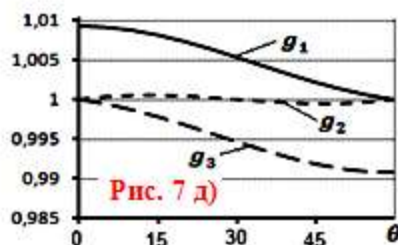


Рис. 7 д)

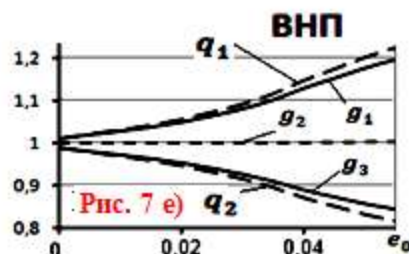


Рис. 7 е)

Зависимости коэффициентов  $g_m, g_d$  от  $e_0$  и  $\theta$ .

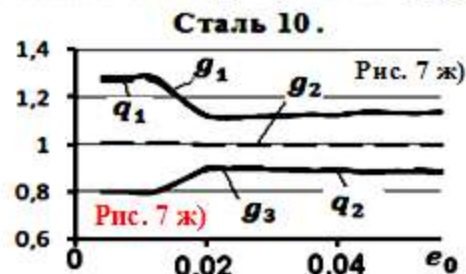


Рис. 7 ж)

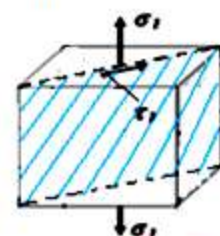


Рис. 7 з)

Зависимости  $g_1, g_2, g_3$  от  $\theta$ .

Связь коэффициентов  $g_1, g_3$  с параметром  $q$  при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/3$ :

а) (ВНП, сер. чугун и др.)

$$g_1 \leq G_c/G_p = q_1 = q, \quad g_3 \geq G_p/G_c = q_2 = 1/q \quad (57)$$

б) (никель, медь, сталь 10, сталь 30 и др.)

$$g_1 \approx G_c/G_\tau = q_1, \quad g_3 \approx G_\tau/G_c = q_2. \quad (58)$$

$\theta = 0: G_1 \leq q_1 G_p = G_c; \quad G_m \leq G_p(2 + q_1)/3, \quad G_d \leq 4G_p(q_1 - 1)/3. \quad g_1, g_2, g_3, g_d - \text{коэффициенты.}$

$\theta = \pi/3: G_3 > q_2 G_c = G_p; \quad G_m > G_c(2 + q_2)/3, \quad G_d \geq 4G_p(q_1 - 1)/3. \quad q_1 \text{ и } q_2 - \text{отношения секущих модулей.}$

## 8. Связь между шаровыми тензорами

$$\text{Из уравнения (2)} \rightarrow \sigma_0 = F_0 + 2G_m \varepsilon_0 - 2G_d(1/2 - \varepsilon_0^2/e_0^2)e_0, \quad (30)$$

$$F_0 = 3\Lambda_\varepsilon \varepsilon_0 + 2G_d(1/2 - \varepsilon_0^2/e_0^2)e_0 \rightarrow \sigma_0 = (3\Lambda_\varepsilon + 2G_m)\varepsilon_0 = 3K_\varepsilon \varepsilon_0, \quad (31)$$

$$F_0 = 3\Lambda_\varepsilon \varepsilon_0 - 2G_d \varepsilon_0^2/e_0 \rightarrow \sigma_0 = 3K_\varepsilon \varepsilon_0 - G_d e_0 \rightarrow \sigma_0 = 3K_\varepsilon \varepsilon_0 - \kappa_\varepsilon G_d e_0, \quad (32)$$

$\sigma_0 = \sigma_{ii}/3$ ,  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}/3$ ,  $\Lambda_\varepsilon$  - аналог постоянной Ляме,  $\kappa_\varepsilon$  - параметр.

$$\text{Из уравнения (1)} \rightarrow \varepsilon_0 = \Phi_0 + \Phi_m \sigma_0/2 + \Phi_d(2S_0^2/9 - \sigma_0^2)/S_0, \quad (33)$$

$$\Phi_0 \rightarrow \varepsilon_0 = \sigma_0/(3K_\sigma), \quad (34) \quad \varepsilon_0 = \Phi_k \sigma_0/3 + 2\Phi_d S_0/9, \quad (35)$$

$$\varepsilon_0 = \Phi_k \sigma_0/3 + 2\kappa_\sigma \Phi_d S_0/9. \quad (36)$$

Испытания на кручение при нулевой осевой деформации

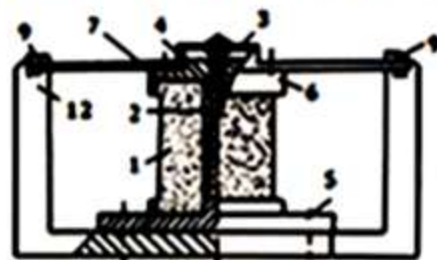


Рис. 8 а)

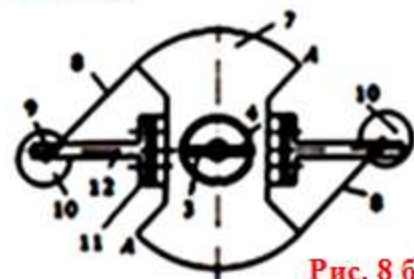
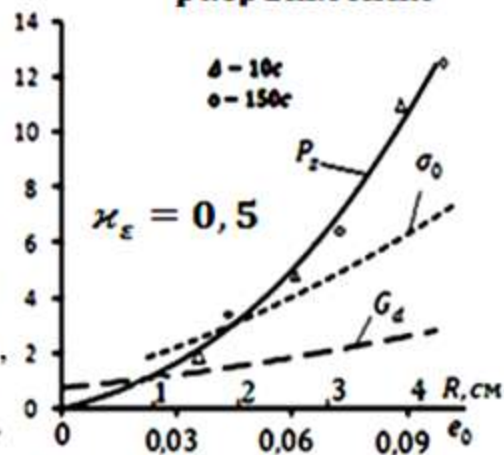


Рис. 8 б)

- 1- образец,  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^* + \varepsilon_g$ ,  $\varepsilon_0^* = \Phi_k \sigma_0/3$ ,  $\Phi_k = 1/K$ .  
 2- сердечник фланца,  $\varepsilon_g = 2\kappa_\sigma \Phi_d S_0/9$ ,  $\kappa_\sigma$  - параметр разрыхления  
 3 и 4 - силоизмеритель,  
 5, 6 - фланцы,  
 7 - диск, 8 - трос,  
 9 - блок, 10 - груз.

Рис. 8 в) Графики:  
 $P_z$  - 0,1, Н - осевая сила,  
 $\sigma_0$  - 20, МПа - среднее напряжение,  
 $G_d$ , МПа - модуль.





## 9. Характеристики ВНП в направлении главных напряжений

Уравнения (5) приводятся к виду:  $\varepsilon_i = a_{ij}\sigma_j$ , (37)  $a_{ii} = E_i^{-1}$ ,  $a_{ij} = -\nu_{ij}E_j^{-1}$ . (38)

$$E_i^{-1} = (\Phi_k + 3\Phi_m + \Phi_d c_{ii})/9, \quad (39) \quad \nu_{ij}E_i^{-1} = (3\Phi_m/2 - \Phi_k - \Phi_d c_{ij})/9, \quad (40)$$

$E_i$  — секущие модули и  $\nu_{ij}$  — коэффициенты поперечных деформаций,  $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$ .

С учетом  $\varepsilon_0 = \Phi_k \sigma_0/3 + 2\Phi_d S_0/9$ , (41)  $\Phi_k = K^{-1}$ ,  $c_{ii} = c_i(1 + \kappa)$ ,  $c_{ij} = c_\alpha + \kappa c_i$ ; (42)

Растяжение.

$i, j, \alpha = 1, 2, 3; i \neq j$ .

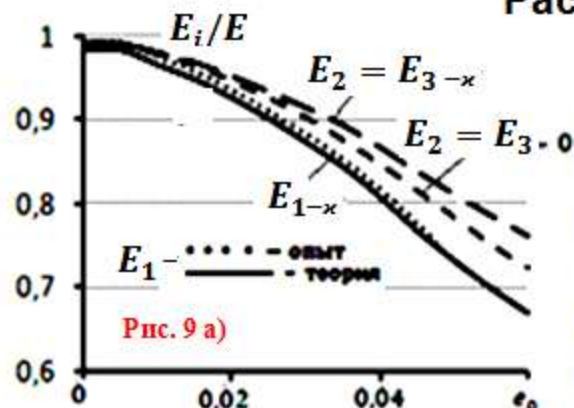


Рис. 9 а)

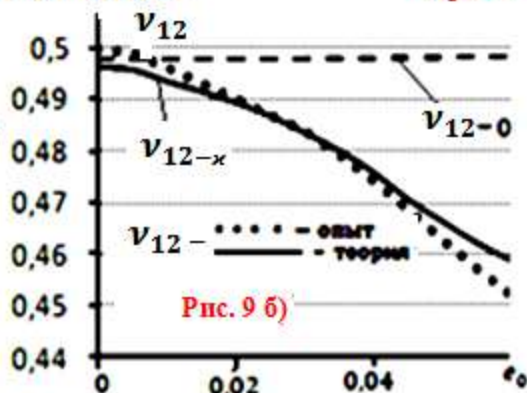


Рис. 9 б)

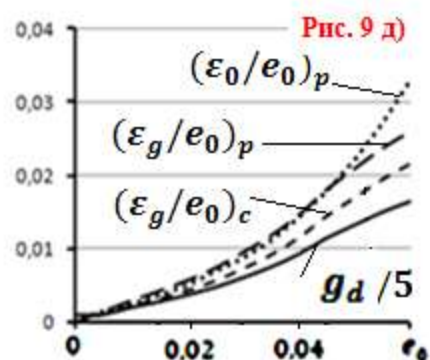


Рис. 9 д)

Связь разрывления с тензорной нелинейностью

$$\varepsilon_{11} = \sigma_{11}/E_1 - \nu_{21}\sigma_{22}/E_2,$$

$$\varepsilon_{22} = -\nu_{12}\sigma_{11}/E_1 + \sigma_{22}/E_2,$$

$$\gamma_{12} = \tau_{12}/G_{12}, \quad n = E_1/E_2,$$

$$E_2' = E_2/(1 - n\nu_{21}^2), \quad m = G_{12}/E_2.$$

Матрица упругости: (43)

$$(D) = E_2' \begin{pmatrix} n & n\nu_{12} & 0 \\ n\nu_{12} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1 - n\nu_{21}^2) \end{pmatrix}$$

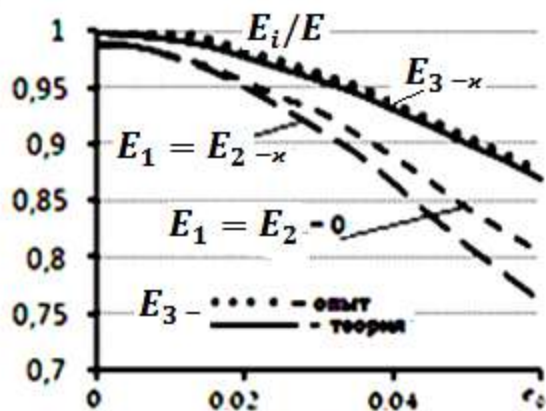


Рис. 9 в)

Сжатие.

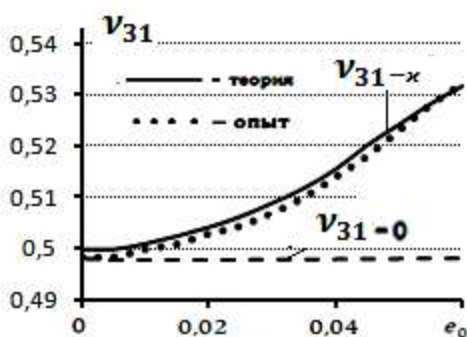


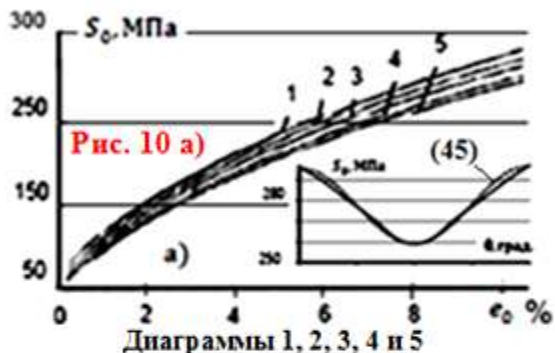
Рис. 9 г)

$$\varkappa = \varkappa_0(1 + \beta\xi), \quad (44) \quad \varkappa_p = 0,5, \quad \varkappa_c = 0,36, \quad \varkappa_0 = 0,43, \quad \beta = 0,48, \quad \xi = \sigma_0/S_0.$$

# 10. Тензорная нелинейность металлов и сплавов

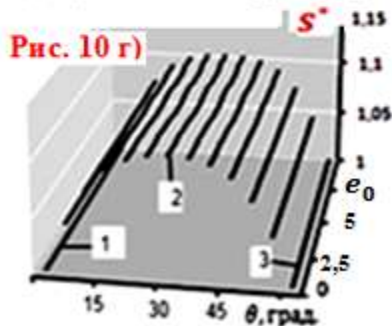
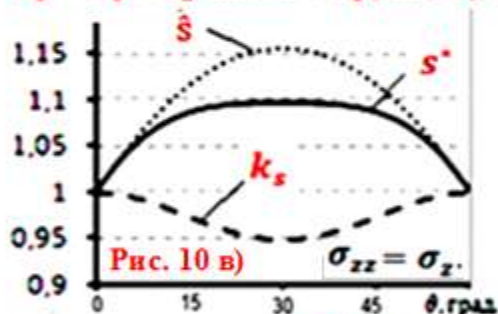
## А. Методика определения напряженного состояния с наименьшим сопротивлением пластической деформации

По результатам испытаний Ягна Ю. Н.,  
Митрохина Н. М.

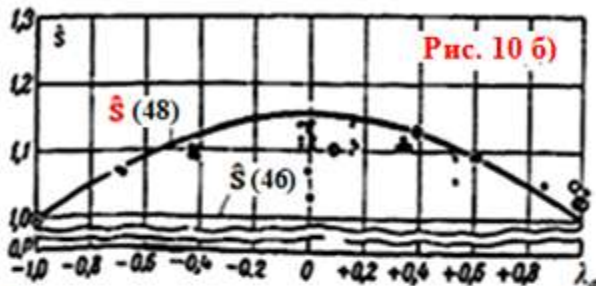


→  $|\lambda_{\sigma}| = \pm 1, \pm 0,75, \pm 0,5, \pm 0,25, 0.$

$$S_0 = a_1 + a_2 \cos 3\theta + a_3 (\cos 3\theta)^2. \quad (45)$$



Результаты исследований В. Лоде.



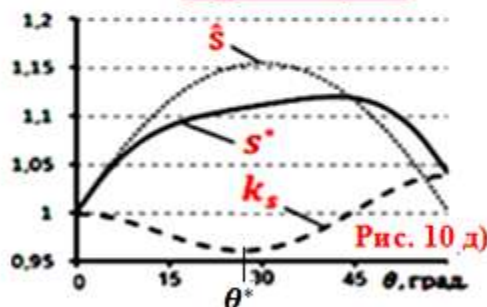
$s^*$  — точки, результаты исследований В. Лоде.

По 4 - й обобщенной гипотезе:  $A = \tau_i \gamma_i / 3,$  (49)

$$\gamma_i = \tau_i (\Phi_m - 2/3 \Phi_d c_i), \quad (50)$$

$$s^* = \hat{s} \{ 2 [ 3A - (\Phi_d/3) S_0^2 \cos 3\theta ] / \Phi_m \}^{1/2} / \sigma_z. \quad (51)$$

$$k_s = s^* / \hat{s}. \quad (52)$$



Зависимости:  $\hat{s}, s^*, k_s$  для никеля  
от угла  $\theta$  при  $\sigma_{zz} > \sigma_z$ .

$\sigma_z, \sigma_{zz}$  и  $\sigma_d$  - пределы текучести при растяжении, двухосном растяжении и сжатии.

Выводы: а) если  $s^* \neq \hat{s}$  при  $0 < \theta < \pi/3$ , то  $g_d \neq 0$ ;

б) если  $s^* = \hat{s}$  при всех  $\theta$ , то  $g_d = 0$ .

I группа (никель, медь и др.), по рис. 10 д), если  $\rightarrow k_{s \min}, \theta^* \rightarrow \sigma_{T \min}$ ;

II группа (ВНП, чугуны и др.), по рис. 10 е), если  $k_s > 1$  при  $0 < \theta \leq \pi/3$ .

По 3 - й гипотезе пластичности:

$$\hat{s} = (S_1 - S_3) / \sigma_z = 1. \quad (46)$$

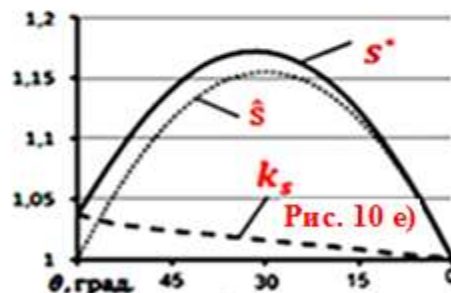
По 4 - й гипотезе:

$$A = \tau_i^2 / 3\mu. \quad (47)$$

$$\text{то } \hat{s} = 2 / \sqrt{3 + \lambda_{\sigma}^2}. \quad (48)$$

$\mu$  - модуль упругости.

$s^*, \hat{s}$  - относительные  
пределы текучести.

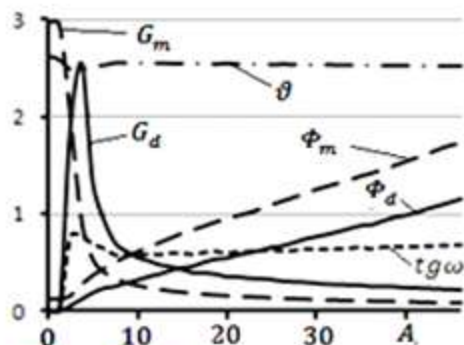


Зависимости:  $\hat{s}, s^*, k_s$  для сплава 24S-T4  
от угла  $\theta$  при  $\sigma_d > \sigma_z = \sigma_{0.2}$ .

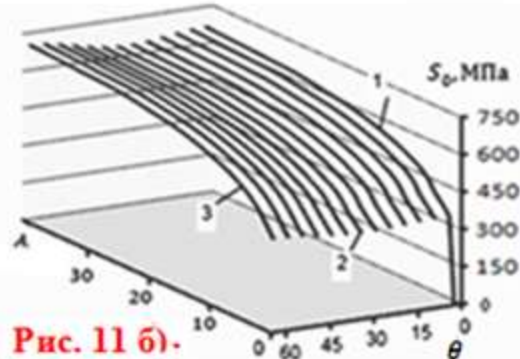
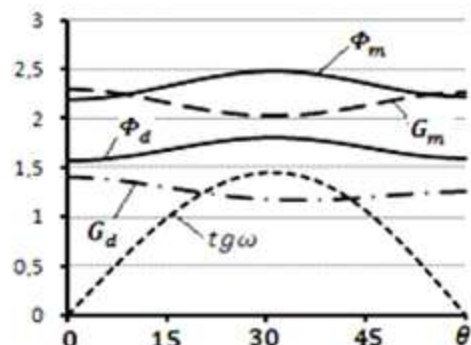
В. Деление материалов:

# 11. Математическая модель материалов группы I

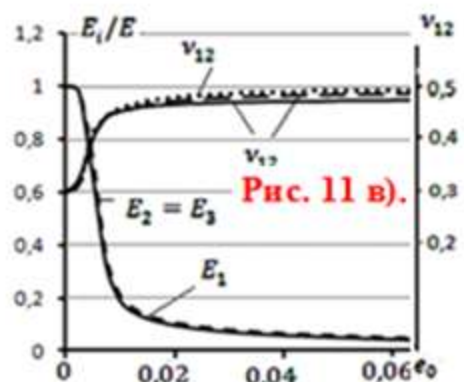
## Сталь 30. (по результатам А. М. Жукова и К. К. Лихарева).



**Рис. 11 а).** Характеристики формизменения с множителями:  $G_m * 3/\mu$ ,  $G_d * 40/\mu$ ,  $\Phi_m * \mu/20$ ,  $\Phi_d * \mu/2$ ,  $tg\omega * 15$ ,  $A = S_0 e_0/2$ .



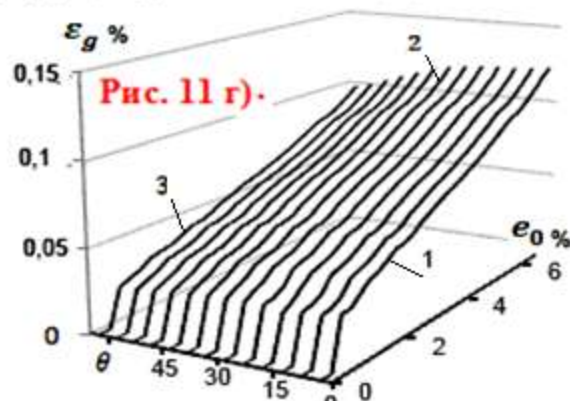
**Рис. 11 б).** Кривые упрочнения.



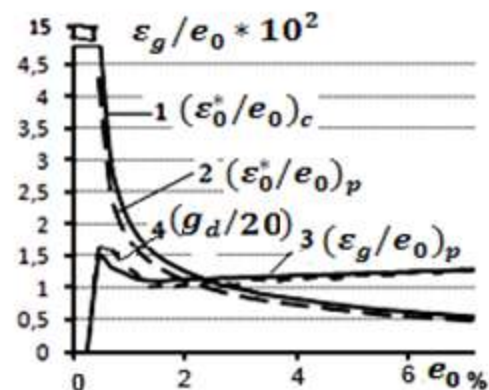
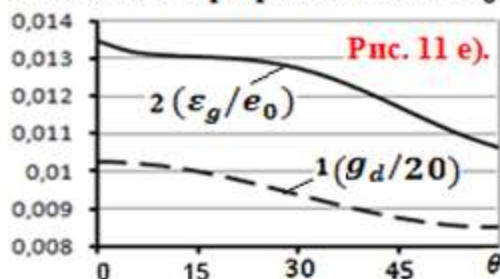
Характеристики  $E_i, \nu_{12}$ .

- теория
- ... опыт
- формула

$$\nu_t = (1 - \sigma/3K\varepsilon)/2. (53)$$



Зависимость разрыхления от  $e_0$  и  $\theta$ .



**Рис. 11 д).**

Изменение относительных величин  
 объемной деформации:  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^* + \varepsilon_g$ ,  
 $\varepsilon_0^* = \Phi_k \sigma_0/3$ ,  $\varepsilon_g = 2\kappa\Phi_d S_0/9$ .  
 $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \beta\xi)$ ,  $\varepsilon_p = 0,3$ ,  
 $\varepsilon_c = 0,23$ ,  $\varepsilon_0 = 0,264$ ,  $\beta = 0,42$ .

## 12. Направления будущих экспериментальных исследований:

А. Создание материалов с модулем  $G_d$  сопоставимым по значению с модулем  $G_m$ ;

Анализ (55) ÷ (58) для ВНП  $\rightarrow g_1 = \varphi_3 \approx q, g_2 = \varphi_2 \approx 1, g_3 = \varphi_1 \approx 1/q, (59) \quad q = \Phi_p / \Phi_c > 1.$

$g_d \approx 4(q-1)(\sqrt{(q^2+q+1)})/3q, (60) \quad \varphi_m = g_m \approx (q^2+q+1)/3q, (61) \quad \varphi_d \approx (q-1)(\sqrt{(q^2+q+1)})/2q. (62)$

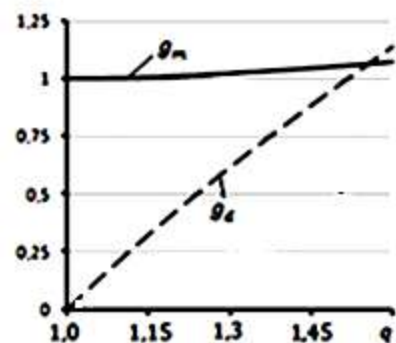


Рис. 12 а)

Изменение  $g_m, g_d$  и  $\varphi_d$  от параметра  $q$ .

б) зернистых композитов (образцы из пластин).

$\varepsilon_1 = \sigma/E_1(1 + \nu_{31}n), \varepsilon_2 = \sigma/E_1(\nu_{32}n - \nu_{12}), \varepsilon_3 = -\sigma/E_1(n + \nu_{13}), n = E_1/E.$

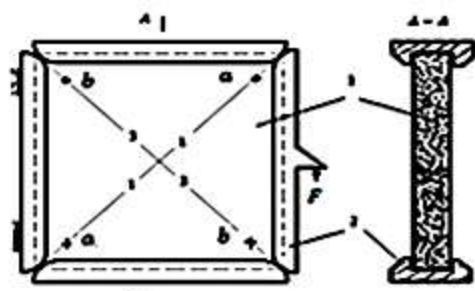


Рис. 12 г) Схема испытания на сдвиг  
1 - образец, 2 - рейжи.

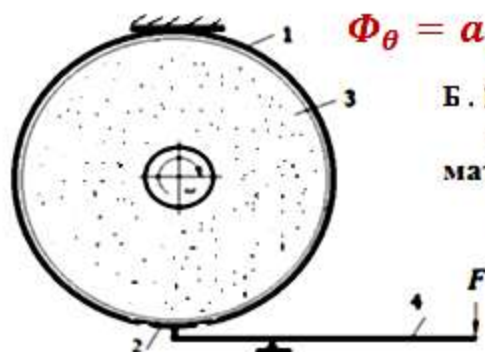


Рис. 12 б) Тормозное устройство.

1 - жесткая оболочка, 2 - активатор деформаций,  
3 - вращающийся цилиндр из зернистого материала,  
4 - рычажный механизм.

$$\Phi_\theta = a_1 + a_2 \cos 3\theta + a_3 (\cos 3\theta)^2. (63)$$

Б. Исследования нелинейных свойств конструкционных материалов с использованием математических моделей:

а) группы I и II;

1- образец,  
2- пружина,  
3- пластина,  
4- переходник.

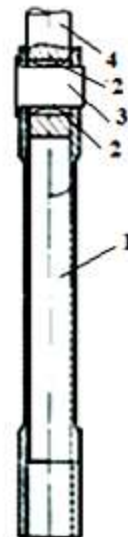


Рис. 12 в)

$$G_i = \tau_i / \gamma_i, \quad G_d = 2(G_1 - G_3) / \sqrt{3}.$$

№	Един. измер.	1	2	8	9
F	H	311	381	698	736
a(a-a)	мм	1,25	1,58	3,73	4,11
-a(b-b)	мм	1,21	1,50	3,16	3,42
-Δh	мм	1,2	2,0	15,1	18,1
G <sub>c</sub>	МПа	0,58	0,73	2,06	2,19
γ <sub>2</sub>	град.	1,9	2,5	5,5	6,0

Ожидаемые результаты испытаний.

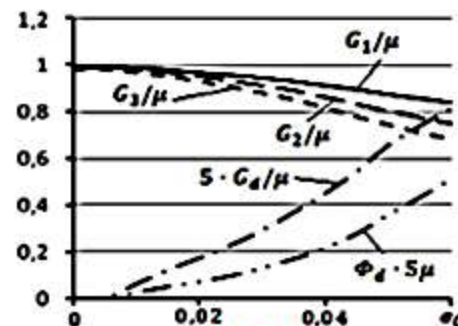


Рис. 12 д)

Графики ожидаемых характеристик формозменения.

### 13. Основные результаты:

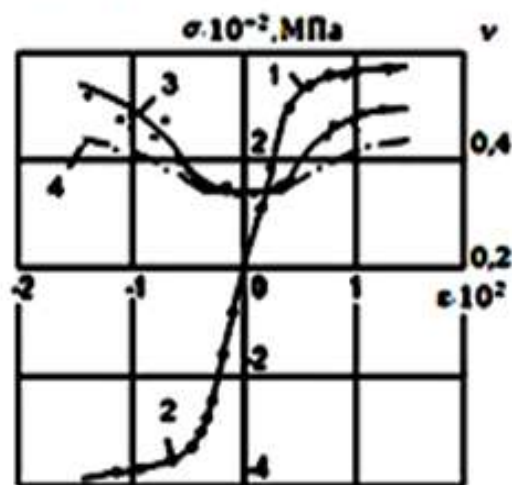
- а) выполнено **преобразование тензорно-нелинейных уравнений** к виду, в котором **материальным функциям придан физический смысл** и возможность определения по результатам испытаний. Дано **однозначное определение понятию тензорной нелинейности**. Установлена теоретическая связь параметров Лоде и связи их разницы с фазой подобия девиаторов напряжений и деформаций;
- б) проведены **экспериментальные исследования наполненных полимерных материалов** с целью изучения особенностей их деформационных свойств, отражающих **эффекты тензорной нелинейности**, в том числе связанных с различием начальных характеристик упругости. Проведены **экспериментальные исследования** связи среднего (гидростатического) напряжения с деформацией сдвига и связи объемной деформации (разрыхления) при растяжении;
- в) разработаны расчетные зависимости, связывающих характеристик упругости, при наличии **начальной разномодульности**. Выполнено **преобразование тензорно-нелинейных уравнений** к виду, характерному для описания **анизотропных материалов** и алгоритмы для расчета технических характеристик по результатам испытаний;
- г) **разработана методика восстановления материальных функций** для всех напряженных состояниях, в том числе для обобщенного растяжения и сжатия;
- д) проведен вывод **уравнений связи шаровых тензоров напряжений и деформаций**, учитывающие **эффекты тензорной нелинейности** (Рейнольдса и Ривлина);
- е) выявлены проявления **тензорной нелинейности конструкционных материалов**. Разработка методики определения напряженного состояния с наименьшим сопротивлением пластической деформации и разработаны тесты для разделения материалов по их проявлениям к тензорной нелинейности разделения материалов на две группы. **Разработана математическая модель материалов I группы** (никель, медь, сталь и др.);
- ж) разработана **математическая модель наполненных полимеров**, серых чугунов, бетонов и др. и зернистых композитов с напередзаданной тензорной нелинейностью;
- з) предложены **программы экспериментальных исследований** для изучения эффектов тензорной нелинейности с использованием моделей.

14. Сравнение результатов расчетов: А- по потенциалу , Б- по методике.

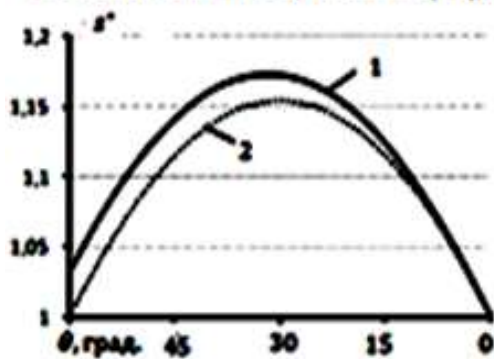
$$\Phi_m = \frac{3}{S_0} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial S_0} + \frac{\cos 3\theta}{S_0 \sin 3\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\}, \quad (65) \quad \Phi_d = -\frac{9}{2S_0^2 \sin 3\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad (66) \quad \Phi_k = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_0}. \quad (67)$$

$$\Phi = \sigma_0^2 / 2K + S_0^2 / 6\mu + bS_0^m (1 + a \cos 3\theta) / (3\mu m), \quad (68) \quad a, b, m - \text{постоянные.}$$

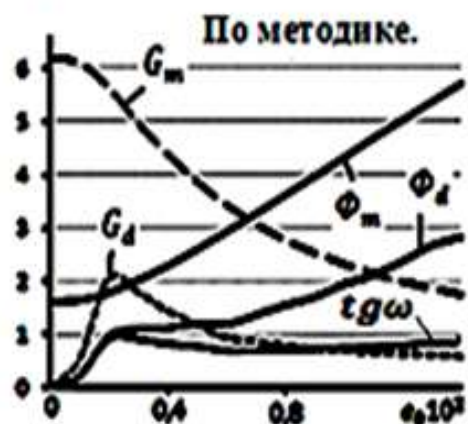
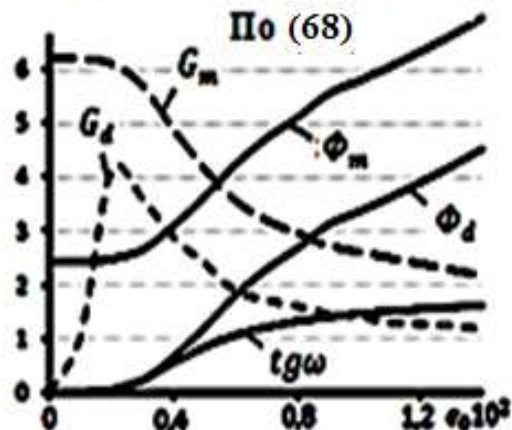
$$\Phi_m = \mu^{-1} [1 + b_0 [1 + a\eta(1 - 3/m)] S_u^{m-2}], \quad (69) \quad \Phi_d = \mu^{-1} [9ab_0 S_u^{m-2} / 2m], \quad (70) \quad S_u = S_0 / S_b.$$



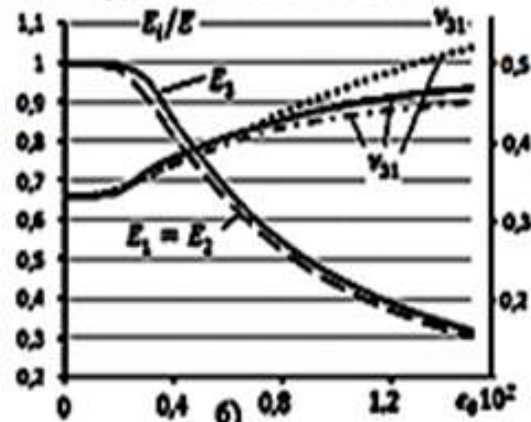
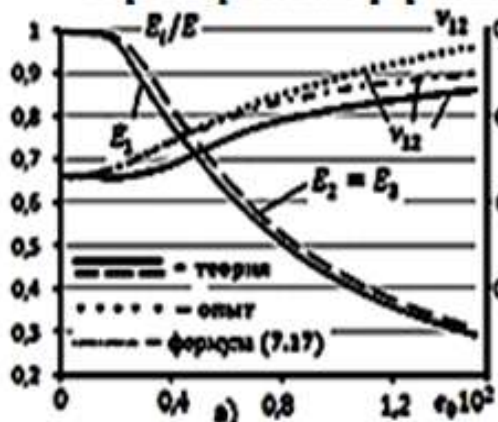
Исходные данные (Надин А. [90]).



1 - s', 2 - s сплава 24S-T4 для предела  $\sigma_{0.2}$ .



Характеристики формоизменения для сплава 24S-T4.



Зависимость характеристик  $E_i$  и  $\nu_{ij}$ : а) при растяжении; б) при сжатии.