ПРОГРАММА ПОЛНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЯ ЕЕ ГРАФИКА НА ОСНОВЕ ПАКЕТА MAPLE

Адиятуллина Г.Р.

E-mail: gulshaton@mail.ru

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, Казань

Аннотация. *Представлена программа полного аналитического исследования функции и построения ее графика на основе пакета Maple.*

The program of function's complete researching and plotting on the basis of the maple package

Adiyatullina G.

Abstract. *The program of function's complete researching and plotting is represented here.*

Развитие процесса обучения, введение новых дисциплин в программу подготовки специалистов с высшим образованием по всем специальностям приводят к тому, что все больше работа студентов переносится с аудиторной на самостоятельную. Понятно, что это касается и математических дисциплин.

В условиях научно-технической революции средствами преподавания математических дисциплин, и не только их, становятся информационные технологии. В конце XX века возникла и быстро развилась так называемая символьная (компьютерная) математика. В настоящее время наиболее популярными среди специалистов являются пакеты символьной математики "Mathematica", "Maple", "MatLab", "MatCad". В лаборатории информационных технологий в математическом образовании ТГГПУ проводятся систематические исследования по внедрению в структуру учебного процесса систем символьной математики, которые позволят его облегчить и ускорить.

Увеличение объема индивидуальной работы студентов требует соответственного обеспечения учебно-методическими материалами. В первую очередь это касается индивидуальных семестровых заданий для студентов. Всем известны трудности, которые возникают при составлении таких заданий. Особенно это касается математических дисциплин, когда требуется подготовить большое количество различных заданий по изучаемой теме, причем без потери их качества. Нетрудно, конечно, набросать задания, а потом разбираться в громоздких и малоценных вычислениях студентов, пытаясь выяснить правильность ответа. Большого ума такая подготовка заданий не требует. Задачу генерации заведомо красивых ответов позволяют решить пакеты символьной математики.

Проверка результатов индивидуальных заданий студентов - тоже задача не из легких, особенно если они не сгенерированы с помощью Maple, и преподавателю не известен правильный ответ. Процесс проверки также можно автоматизировать, используя средства пакета Maple.

Исследование графиков функций, как известно, является важнейшим приложением дифференциального исчисления и обязательно изучается в курсе высшей математики не только на физико-математических отделениях, но и на всех отделениях высших учебных заведений. Эта тема является также важнейшей и в старших классах средней школы. Поэтому возникает необходимость создания программ аналитического самотестирования по этой теме студентов различных факультетов, в том числе и весьма далеких от естественно-научных профилей. Программа должна быть построена таким образов, чтобы студент (школьник) мог бы проконтролировать свое собственное решение. Подобная программа уже была рассмотрена ранее[3]. Ниже приводится дополненная для полного исследования программа и результат ее исполнения для функции:

```
> restart:
with(linalg):
> researchfunc:=proc(g)
local y,F,dy,X,n,SY,SY1,SY2,SX,SX1,SX2,delta,i,Y,df,
x_1,x_2,y_1,y_2,m1,m2,m3,j,Mi,Ma,Ne,KT,KT1,
J_1,J_2,X_1,X_2,Y_1,Y_2,XV,YV,XN,YN,
d2f,TPx1,TPx2,TPy1,TPy2,X1,m,Y1,TP,d,
P,P1,P2,T,H,H1,k,k1,NTP:
F:=(x)- > g:y:=(x)- > F(x):
dy:=(x)- > diff(y(x),x):
X:= { solve(dy(x)=0,x) } :
n:=LinearAlgebra[Dimension]( < op(X) > ):
print("Число точек, подозрительных на экстремум-n);
SY:=matrix(1,0,[]): SY1:=matrix(1,0,[]):
SX:=matrix(1,0,[]): SX1:=matrix(1,0,[]):
```

```
SX2:=matrix(1,0,[]): SY2:=matrix(1,0,[]):
delta:=0.00001: for i from 1 to n do
Y[i]:=simplify(subs(x=X[i],F(x))); od:
for i from 1 to n do df:=diff(y(x),x);
x_1:=evalf(X[i]-delta): x_2:=evalf(X[i]+delta):
y_1:=evalf(subs(x=x_1,df(x))): y_2:=evalf(subs(x=x_2,df(x))):
if y_1 < 0 and y_2 > 0 then
SY:=extend(SY,0,1,Y[i]); SX:=extend(SX,0,1,X[i]);
print(‘X[‘,i,‘]- является точкой минимума‘);
elif y_1 > 0 and y_2 < 0 then
SY1:=extend(SY1,0,1,Y[i]); SX1:=extend(SX1,0,1,X[i]);
print(‘X[‘,i,‘]- является точкой максимума‘);
else SY2:=extend(SY2,0,1,Y[i]);
SX2:=extend(SX2,0,1,X[i]);
print(‘X[‘,i,‘]- не является точкой экстремума‘);fi;od:
SY:=extend(SY,0,0,1): SX:=extend(SX,0,0,1):
SY1:=extend(SY1,0,0,1): SX1:=extend(SX1,0,0,1):
SY2:=extend(SY2,0,0,1): SX2:=extend(SX2,0,0,1):
m1:=LinearAlgebra[ColumnDimension]( < op(SY) > ):
print("Число минимумов-m1);
m2:=LinearAlgebra[ColumnDimension]( < op(SY1) > ):
print("Число максимумов-m2);
m3:=LinearAlgebra[ColumnDimension]( < op(SY2) > ):
print("Число точек, не являющихся экстремумами-m3);
i:=1:for j from 1 to m1 do
[SX[i,j],SY[i,j]];od:
Mi:= { seq([evalf(SX[i,j]),evalf(SY[i,j])],j=1..m1) } :
print(‘Координаты мин‘,Mi);
for j from 1 to m2 do
[SX1[i,j],SY1[i,j]];od:
Ma:= { seq([evalf(SX1[i,j]),evalf(SY1[i,j])],j=1..m2) } :
print(‘Координаты макс‘,Ma);
for j from 1 to m3 do
[SX2[i,j],SY2[i,j]];od:
Ne:= { seq([evalf(SX2[i,j]),evalf(SY2[i,j])],j=1..m3) } :
print(‘Координаты точек, не являющихся экстремумами‘,Ne);
KT:= { seq([op(Mi[i]),‘минимум‘],i=1..m1) } :
KT1:= { seq([op(Ma[i]),‘максимум‘],i=1..m2) } :
for i from 1 to n do
Y[i]:=simplify(subs(x=X[i],F(x)));od:
J_1:=seq(Y[i],i=1..n): Y_1:=evalf(max(J_1)):
Y_2:=evalf(min(J_1)): J_2:=seq(X[i],i=1..n):
X_1:=evalf(max(J_2)): X_2:=evalf(min(J_2)):
if X_1 < 0 then XV:=evalf(X_1/1.2):
elif X_1 > 0 then XV:=evalf(1.2*X_1):
else XV:=1: fi:
if X_2 > 0 then XN:=evalf(X_2/1.2):
elif X_2=0 then XN:=-1:
else XN:=evalf(1.2*X_2):fi:
if Y_1 < 0 then YV:=evalf(Y_1/1.2):
elif Y_1 > 0 then YV:=evalf(1.2*Y_1):
else YV:=1: fi:
if Y_2 > 0 then YN:=evalf(Y_2/1.2):
elif Y_2 < 0 then YN:=evalf(1.2*Y_2):
else YN:=-1: fi:
d2f:=(x)- > diff(y(x),x$2):
TPx1:=matrix(1,0,[]): TPx2:=matrix(1,0,[]):
TPy1:=matrix(1,0,[]): TPy2:=matrix(1,0,[]):
X1:= { solve(d2f(x)=0,x) } :
m:=LinearAlgebra[Dimension]( < op(X1) > ):
print("Число точек, подозрительных на точки перегиба-m);
for i from 1 to m do
```

```
Y1[i]:=evalf(subs(x=X1[i],F(x)));od:
print(‘функция вогнута:‘, (solve(diff(y(x),x$2) > 0,x)));
print(‘функция выпукла:‘, (solve(diff(y(x),x$2) < 0,x)));
delta:=0.0001:TP:=([]):
if m=1 then
x_1:=evalf(X1[1]+delta); x_2:=evalf(X1[1]-delta);
y_1:=evalf(subs(x=x_1,d2f(x))); y_2:=evalf(subs(x=x_2,d2f(x)));
d:=simplify(evalf(y_1*y_2));
if d < 0 then print(‘X1[1]- является точкой перегиба‘);
TP:=([X1[1],Y1[1]]):
else print(‘X1[1]- не является точкой перегиба‘);fi;
P:=plots[pointplot](Ma,symbol=CIRCLE,symbolsize=18,color=red, legend=‘Точки максимума‘):
P1:=plots[pointplot](Mi,symbol=CIRCLE,symbolsize=18, color=COLOR(RGB, 0.4960, 0.0000, 0.8000),
legend=‘Точки минимума‘):
P2:=plots[pointplot](TP,symbol=DIAMOND,symbolsize=18,color=blue, legend=‘Точки перегиба‘):
T:=plot(F(x),x=XN..XV,F=YN..YV,color=black):
H:=plots[textplot](KT,align= { BELOW,RIGHT } ):
H1:=plots[textplot](KT1,align= { ABOVE,RIGHT } ):
plots[display](T,P,P1,P2,H,H1);
elif m=0 then
P:=plots[pointplot](Ma,symbol=CIRCLE,symbolsize=18,color=red,
legend=‘Точки максимума‘):
P1:=plots[pointplot](Mi,symbol=CIRCLE,symbolsize=18, color=COLOR(RGB, 0.4960, 0.0000, 0.8000),
legend=‘Точки минимума‘):
P2:=plots[pointplot](TP,symbol=DIAMOND,symbolsize=18,color=blue, legend=‘Точки перегиба‘):
T:=plot(F(x),x=XN..XV,F=YN..YV,color=black):
H:=plots[textplot](KT,align= { BELOW,RIGHT } ):
H1:=plots[textplot](KT1,align= { ABOVE,RIGHT } ):
plots[display](T,P,P1,H,H1);
else for i from 1 to m do
x_1:=evalf(X1[i]+delta); x_2:=evalf(X1[i]-delta);
y_1:=evalf(subs(x=x_1,d2f(x))); y_2:=evalf(subs(x=x_2,d2f(x)));
if (y_1*y_2) < 0 then
TPx1:=extend(TPx1,0,1,X1[i]); TPy1:=extend(TPy1,0,1,Y1[i]);
print(‘X1[‘,i,‘]- является точкой перегиба‘);
else TPx2:=extend(TPx2,0,1,X1[i]);
TPy2:=extend(TPy2,0,1,Y1[i]);
print(‘X1[‘,i,‘]- не является точкой перегиба‘);fi;od;
TPx1:=extend(TPx1,0,0,1); TPx2:=extend(TPx2,0,0,1);
TPy1:=extend(TPy1,0,0,1); TPy2:=extend(TPy2,0,0,1);
k:=LinearAlgebra[ColumnDimension]( < op(TPx1) > ):
k1:=LinearAlgebra[ColumnDimension]( < op(TPx2) > ):
print("Число точек перегиба-k);
print("Число точек, не являющихся точками перегиба-k1);
i:=1:for j from 1 to k do
[TPx1[i,j],TPy1[i,j]]:od:
TP:= { seq([evalf(TPx1[i,j]),evalf(TPy1[i,j])],j=1..k) } :
print(‘коор-ты точек перегиба‘,TP);
for j from 1 to k1 do
[TPx2[i,j],TPy2[i,j]]:od:
NTP:= { seq([evalf(TPx2[i,j]),evalf(TPy2[i,j])],j=1..k1) } ;
print(‘Координаты точек не являющихся точками перегиба‘,NTP):
P:=plots[pointplot](Ma,symbol=CIRCLE,symbolsize=18,color=red, legend=‘Точки максимума‘):
P1:=plots[pointplot](Mi,symbol=CIRCLE,symbolsize=18, color=COLOR(RGB, 0.4960, 0.0000, 0.8000),
legend=‘Точки минимума‘):
P2:=plots[pointplot](TP,symbol=DIAMOND,symbolsize=18,color=blue,
legend=‘Точки перегиба‘):
T:=plot(F(x),x=XN..XV,F=YN..YV,color=black,legend=‘График функции‘):
H:=plots[textplot](KT,align= { BELOW,RIGHT } ):
H1:=plots[textplot](KT1,align= { ABOVE,RIGHT } ):
plots[display](T,P,P1,P2,H,H1):fi:
plots[display](T,P,P1,P2,H,H1);end proc:
```

> **researchfunc(x^6-21*x^5+175*x^4-735*x^3+1624*x^2-1764*x+720);**

Результаты:

Число точек, подозрительных на экстремум:=5

Число минимумов:=3

Число максимумов:=2

Число точек, не являющихся точками экстремума:=0

Координаты мин, { [1.336553473, -16.90089433], [5.663446527, -16,90089433], [3.500000000, -3.515625000] }

Координаты макс, { [2.42629964, 5.049042474], [4.573700359, 5.049042474] }

Координаты точек, не являющихся экстремумами, { }

Число точек, подозрительных на точки перегиба:=4

Функция вогнута: $RealRange \quad -\infty, Open \quad \frac{7}{2} - \frac{1}{30}\sqrt{1575 + 30\sqrt{1785}}$

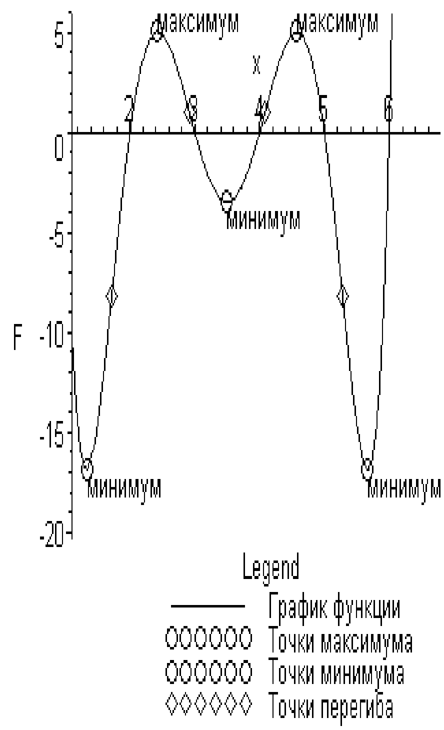
$$RealRange \quad Open \quad \frac{7}{2} - \frac{1}{30}\sqrt{1575 - 30\sqrt{1785}} \quad , Open \quad \frac{7}{2} + \frac{1}{30}\sqrt{1575 - 30\sqrt{1785}}$$

$$RealRange \quad Open \quad \frac{7}{2} + \frac{1}{30}\sqrt{1575 + 30\sqrt{1785}} \quad , \infty$$

Функция выпукла: $RealRange \quad Open \quad \frac{7}{2} - \frac{1}{30}\sqrt{1575 + 30\sqrt{1785}} \quad , Open \quad \frac{7}{2} - \frac{1}{30}\sqrt{1575 - 30\sqrt{1785}}$

$$RealRange \quad Open \quad \frac{7}{2} + \frac{1}{30}\sqrt{1575 - 30\sqrt{1785}} \quad , Open \quad \frac{7}{2} + \frac{1}{30}\sqrt{1575 + 30\sqrt{1785}}$$

ris1



1.

Число точек перегиба:=4

Число точек, не являющихся точками перегиба:=0

Координаты точек перегиба, { [5.277163098, -8.167145], [2.915456313, 1.033797], [4.084543687, 1.033796], [1.722836902, -8.167142] }

Корт-ты точек, не являющихся точками перегиба, { } Пользователю достаточно лишь ввести в последнюю строку исследуемую функцию, для того, чтобы получить результаты ее полного исследования. Программа построена таким образом, чтобы автоматически выбирались оптимальные параметры изображения.

Более полное воплощение идеи аналитического тестирования можно осуществить в пакете Maple с помощью процедуры создания собственных библиотек.

Литература

1. А.Матросов. Maple 6. Решение задач высшей математики. «БХВ-Петербург», 2001.
2. В.А.Дьяконов. Maple 7. Учебный курс. «Питер», СПб, 2002.
3. Проблемы информационных технологий в математическом образовании: Учебное пособие под ред. Ю.Г.Игнатьева. — Казань: ТГГПУ, 2005.