# ПРОГРАММА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕГРЕ БИЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ

*Аминова А.В*

E-mail: asya.aminova@ksu.ru

*Казанский государственный университет*[1]

**Аннотация**. *Предлагается программа вычисления характеристики Сегре билинейной формы. В основу программы положены метод Вейля приведения матрицы линейной вектор-функции к каноническому виду и метод Фаддеева вычисления коэффициентов характеристического полинома, которые хорошо поддаются алгоритмизации в отличие от распространенных методов, связанных с нахождением элементарных делителей. Приложения в алгебре, геометрии и теоретической физике.*

В 1952 А. З. Петров доказал теорему о трех типах пространств Эйнштейна, которые получили в мировой литературе название типов Петрова. Позже выяснилось, что принадлежность ко второму и третьему типам Петрова указывает на присутствие в пространстве гравитационного излучения. Тем самым удалось пролить свет на один из самых сложных и запутанных вопросов общей теории относительности.

Тип Петрова является локальной характеристикой, для его определения в данной точке пространства-времени достаточно вычислить характеристику Сегре симметричной билинейной формы, связанной с тензором кривизны.

С другой стороны, характеристика Сегре тензора энергии-импульса $T_{ij}$ содержит важную информацию о распределении и движении материи. Определив характеристику Сегре тензора Эйнштейна $G_{ij} \equiv R_{ij} - \frac{R}{2} g_{ij} = \kappa T_{ij}$ поля тяготения общего вида, можно указать, какие физические системы и поля порождают заданную геометрию пространства-времени. Так, идеальной жидкости отвечает характеристика Сегре тензора энергии-импульса (т. е. тензора Эйнштейна) типа $\{1(1\overset{0}{1}1)\}$, а ненулевое собственное значение этого тензора определяет давление и плотность энергии. Изотропному электромагнитному полю соответствует характеристика Сегре $\{(2\overset{0}{1}1)\}$ и т. д.

В докладе предлагается программа вычисления характеристики Сегре билинейной формы. В основу программы положены метод Вейля приведения матрицы линейной вектор-функции к каноническому виду и метод Фаддеева вычисления коэффициентов характеристического полинома, которые хорошо поддаются алгоритмизации в отличие от распространенных методов, связанных с нахождением элементарных делителей.

Все участки программы, кроме участка, связанного с решением характеристического уравнения, относятся к билинейной форме произвольного ранга $n$. Учитывая прикладной характер задачи, мы даем решение характеристического уравнения для случаев $n = 2, 3, 4$,что обусловливает разветвление программы на три части. При необходимости число $n$ может быть увеличено.

Описание программы.

1. Ввод данных. Ввод с терминала порядка $n$ матрицы $G$. Задание массивов (5 двумерных и 5 одномерных).

2. Метод Фаддеева вычисления коэффициентов характеристического полинома. В результате $k$-го повторения цикла с управляющей переменной $m$ вычисляется коэффициент $p(k)$ характеристического полинома и матричный коэффициент $B_k = F$ присоединенной матрицы. Так как $B_n = 0$, то значения $F(i, j)$ при выходе из цикла должны равняться нулю. Это свойство используется для контроля вычислений. Реализуется печать чисел $F(i, j)$.

3. Вычисление и печать собственных значений матрицы $G$ – корней характеристического полинома. Программа разветвляется на три ветви в соответствии со значением $n$: ветвь $n = 2$ – решение квадратного уравнения, ветвь $n = 3$ – решение кубического уравнения и ветвь $n = 4$ – решение уравнения четвертой степени. При выходе из подпрограмм вещественные части корней записываются на переменную $\alpha(i)$, мнимые части – на переменную $\beta(i)$. Реализуется их печать.

4. Проверка наличия комплексных корней. Если таковые имеются, реализуется печать “характеристика Сегре комплексного типа”. Конец программы. В противном случае вычисления продолжаются.

5. Упорядочение (вещественных) корней. Корни располагаются в неубывающую последовательность.

6. Определение кратностей корней, их перенумерация и печать числа разных корней $k$ и самих корней $\alpha(i)$ вместе с их кратностями $m(i)$.

[1]Аннотация на английском языке Автором не представлена.

7. Метод Вейля определения характеристики Сегре. Организуется цикл с управляющей переменной $l$, меняющейся с шагом 1 от 1 до $k$. При $l$–м повторении цикла исследуется $l$-й корень. Составляется матрица $H = G - \alpha(l)E$ ($E$ – единичная матрица), ищутся ее степени, определяются их ранги $r(1), \ldots, r(y(l))$, вводятся $r(0) = n + 1$ и $r(y(l) + 1) = r(y(l))$, вычисляются $u(l, i) = r(i - 1) - 2r(i) + r(i + 1)$ при $i = 1, \ldots, y(l)$, где $y(l)$– показатель степени той матрицы$H^{y(l)}$, ранг которой равен $n + 1 - m(l)$, числа $y(l), y(l) - 1, \ldots, 1$ определяют порядки жордановых клеток, соответствующих собственному значению $\alpha(l)$. Числа $u(l, y(l)), u(l, y(l) - 1), \ldots, u(l, 1)$ показывают, сколько раз повторяются эти жордановы клетки.
8. Печать характеристики Сегре матрицы $G$. Организуются три вложенных цикла: по $l$ от 1 до $k$, по $i$ от $y(l)$ с шагом -1 до 1 и по $j$ от 1 до $u(l, 1)$, реализующие печать $i$ $j$ раз (при условии $u(l, 1) \neq 0$). Числа, относящиеся к одному $l$, заключаются в круглые скобки. Характеристика Сегре обозначается квадратными скобками. Числа в круглых скобках определяют показатели степеней элементарных делителей, относящихся к одному и тому же собственному числу. В результате выполнения этого участка программы на дисплее возникнет характеристика Сегре в виде

$$[\ldots \underbrace{y(l)y(l)\ldots y(l)}_{u(l,y(l))} \underbrace{y(l)-1, y(l)-1, \ldots, y(l)-1}_{u(l,y(l)-1)} \ldots \underbrace{11\ldots 1}_{u(l,1)} \ldots],$$

где $l$ меняется от 1 до $k$.

Пример выполнения программы.

$$n = 4$$

ВВЕДИ МАТРИЦУ ПОСТРОЧНО

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} m = 1 & p(1) = 0 \\ m = 2 & p(2) = -1 \\ m = 3 & p(3) = 0 \\ m = 4 & p(4) = 0 \end{matrix}$$

КОНТРОЛЬ $F = 0$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦЫ $G$

$$\begin{matrix} Re\alpha(1) = 1 & Im\alpha(1) = 0 \\ Re\alpha(2) = -1 & Im\alpha(2) = -1 \\ Re\alpha(3) = 0 & Im\alpha(3) = 0 \\ Re\alpha(4) = 0 & Im\alpha(4) = 0 \end{matrix}$$

ЧИСЛО РАЗНЫХ КОРНЕЙ $k = 3$

КОРЕНЬ $\alpha(1) = -1$ КРАТНОСТЬ $m(1) = 1$

КОРЕНЬ $\alpha(2) = 0$ КРАТНОСТЬ $m(2) = 2$

КОРЕНЬ $\alpha(3) = 1$ КРАТНОСТЬ $m(3) = 1$

ХАРАКТЕРИСТИКА СЕГРЕ РАВНА [(1)(2)(1)]