ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СПОНТАННОГО НАРУШЕНИЯ СИММЕТРИИ В КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ СРЕДСТВАМИ ПАКЕТА Maple

Алсмади К.

E-mail: smadi2002@maktoob.com

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, Казань

Аннотация. *Средствами пакета Maple на основе релятивистской кинетической модели процессов спонтанного нарушения симметрии построена и исследована численная модель процесса процесса бариогенезиса в космологической плазме.*

The research of the relativistic kinetic model of spontaneous symmetry breaking in the cosmological plasma by tools package Maple

Alsmadi K.

Abstract. *By means of Maple packet on the basis of relativistic kinetic model of spontaneous symmetry breakdown processes the numerical model of baryogenesis process in cosmological plasma is constructed and researched.*

В середине 80-х - начале 90-х годов Ю.Г.Игнатьевым была сформулирована кинетическая модель описания процессов нарушения симметрии и были получены некоторые оценки, вытекающие из предложенной модели [1]-[3]. В частности, на основе сделанных оценок было высказано предположение, что учет кинетики процесса бариогенезиса позволит снизить нижнюю оценку массы свермассивных бозонов до величины порядка $5 \cdot 10^{14}$Гэв. Однако детальный анализ этой модели в этих работах произведен не был и в силу внешних обстоятельств исследования в этом направлении не были завершены. В работах [5], [6] идеи Ю.Г.Игнатьева были развиты и была сформулирована математическая модель бариогенезиса в горячей вселенной. С математической точки зрения эта модель сводится в конечном итоге к решению обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Однако, полученное формальное решение задачи выражается через пятикратные плохо сходящиеся интегралы, что чрезвычайно усложняет исследование модели бариогенезиса. Целью настоящей работы как раз и является проведение более детального анализа кинетической модели бариогенезиса и построение его математической и численной компьютерной модели средствами компьютерной математики.

Удельная энтропия барионов

В [6] было показано, что функция распределения X-бозонов в линейном по нарушению симметрии приближении равна:

$$f_X(\mathbb{P},t) = f_X^0(0;\mathbb{P},0) + \delta f_0(\mathbb{P},t) + \delta f(\lambda), \qquad (1)$$

где $\delta f(\lambda)$ - линейный и четный по λ функционал, не вносящий вклад в окончательный результат; а δf - отклонение от равновесия функции распределения:

$$\delta f_0(\mathbb{P},t) = -e^{-\Phi(\mathbb{P},t)} \int\limits_0^t e^{\Phi(\mathbb{P},t')} \dot{f}_0(0;\mathbb{P},t')dt' \qquad (2)$$

- отклонение от равновесия бозонной функции распределения в симметричной плазме $\lambda = 0$, и введено обозначение:

$$\Phi(\mathbb{P},t) = \frac{1}{\tau_0} \int\limits_0^t \frac{a(t')\beta_0(\mathbb{P},t')dt'}{\sqrt{a^2(t') + \mathbb{P}^2/m_X^2}}; \qquad (3)$$

τ_0 - собственное время распада свободного X-бозона: $\tau_0 = \frac{4\pi m_X}{s^2} \sim \frac{3}{2}(m_X\alpha)^{-1}$.
Поскольку фермионы находятся в состоянии ЛТР и являются ультрарелятивистскими, в условиях слабого нарушения CP - инвариантности, когда $\lambda_a \ll 1$ можно получить приближенное соотношение:

$$\mathcal{N} \approx \frac{3}{2}\frac{\mathcal{T}^3\zeta(3)}{\pi^2} + \lambda\frac{\mathcal{T}^3}{6} \Rightarrow \Delta N_a \approx \lambda_a\frac{\mathcal{T}^3}{3}. \qquad (4)$$

В стандартной SU(5) модели вероятности распада X-бозона в лептонном, (qe), и кварковом, $(\bar{q}\bar{q})$, каналах одинаковы[1], т.е., $1 - 2r = O^1(\Delta r)$. С учетом этого фактора в стандартной SU(5) модели можно получить

[1]с учетом цветов и ароматов

одно замкнутое уравнение первого порядка на величину $B=u+2d$, т.е., на избыточную концентрацию барионов $\Delta\mathcal{N}_B=\frac{1}{3}\mathcal{N}_B\mathcal{T}^3$, интегрируя которое с учетом начальных условий, найдем:

$$\Delta\mathcal{N}_B(\infty)=\frac{4\Delta r N_X}{3\pi^2}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\int\limits_t^\infty \Psi(t')dt'\right)G(t)dt, \quad (5)$$

где

$$\Psi(t)=\frac{2N_X}{\pi^2\mathcal{T}^3}\int\limits_0^\infty \mathbb{P}^2\dot{\Phi}f_0\beta_0 d\mathbb{P}, \quad (6)$$

$$G(t)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^\infty \mathbb{P}^2\dot{\Phi}\delta f_0 d\mathbb{P}. \quad (7)$$

Остается теперь вычислить величину $\delta_S=\delta n_B/S$; тем самым задача формально решена и удельная энтропия определяется в квадратурах:

$$\delta_S=\frac{\Delta\mathcal{N}_B}{\mathcal{S}}. \quad (8)$$

Исследование решения

В дальнейшем будем полагать, что, во-первых, X-бозоны распадаются, в основном, на промежуточных стадиях расширения, когда $T\sim m_X$, и, во-вторых, что доля X-бозонов достаточно мала, по сравнению с общим числом частиц: $N_X\ll N$, так что с достаточной степенью точности космологическую плазму на стадии распада X-бозонов можно считать ультрарелятивистской. Это дает нам законы изменения масштабного фактора и температуры со временем:

$$a(t)=a_0\sqrt{t};\quad T=\mathcal{T}_0\frac{1}{\sqrt{t}}, \quad (9)$$

где $\mathcal{T}_0$ есть температура плазмы в планковских единицах на планковский же момент времени. Исследуем линейное решение, для чего перейдем от переменных t,p к новым переменным η,ξ: $t=\tau_0\eta$, $p=\frac{1}{\sqrt{\eta}}m_X\xi;\quad \Rightarrow \mathbb{P}=m_X\xi\sqrt{\tau_0}$. где τ_0 - собственное время распада свободного X-бозона, таким образом значению безразмерного времени $\eta=1$ соответствует время $t=\tau_0$. Введем далее безразмерный параметр σ [3], зависящий от констант полевой теории[2]:

$$\sigma=\frac{m_X}{T(\tau_0)}=\frac{m_X\sqrt{\tau_0}}{\mathcal{T}_0}=\frac{\chi\sqrt{m_X}}{\sqrt{\alpha}\mathcal{T}_0}, \quad (10)$$

равный отношению массы X-бозона к температуре на момент его полураспада, где χ - безразмерный параметр порядка 1, зависящий от параметров полевой теории, α - константа взаимодействия (от 0.1 до 0.01).

Как показали проведенные исследования, конечные результаты вычислений весьма слабо чувствительны к учету статистических факторов при вычислении функции $\Phi(\eta,\xi)$, тогда как в тоже время они весьма чувствительны к учету статистических факторов на других этапах вычислений. Поэтому в дальнейшем функцию $\Phi(\eta,\xi$ мы будем вычислять в больцмановском приближении, в то время как на других этапах вычислений будем удерживать статистические факторы. Тогда в больцмановском приближении $\beta_0\approx 1/2$, и мы получим для функции Φ:

$$\dot{\Phi}(\mathbb{P},t)=\frac{1}{2\tau_0}\frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\eta+\xi^2}},\quad \Phi(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\quad \sqrt{\eta}\sqrt{\eta+\xi^2}-\xi^2\ln\frac{\sqrt{\eta}+\sqrt{\eta+\xi^2}}{\xi}\Bigg), \quad (11)$$

Подставляя затем функцию $\Phi(\xi,\eta)$ в выражение (2) для отклонения функции распределения X-бозонов от равновесия и переходя к новым переменным получим:

$$\delta f_0(\xi,\eta,\sigma)=\frac{1}{2}\sigma\exp(-\Phi(\xi,\eta))\int\limits_0^\eta\frac{\exp(\Phi(\xi,\eta')+\sigma\sqrt{\eta'+\xi^2})d\eta'}{[1+\exp(\sigma\sqrt{\eta'+\xi^2})]^2\sqrt{\eta'+\xi^2}}. \quad (12)$$

Используя выражение для конечной концентрации барионов (5), а также выражение для плотности энтропии (8), получим искомое выражение для конечной плотности удельной энтропии, приходящейся на один барион:

$$\delta_S=\frac{N_b(\infty)}{S}=\frac{30\Delta r\mathcal{N}_X}{\pi^4\mathcal{T}^3\mathcal{N}}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\int\limits_t^\infty \Psi(t')dt'\right)G(t)dt, \quad (13)$$

[2]Введенный в [3] параметр σ равен квадрату σ, используемого в настоящей работе.

где функции $\Psi(t)$, $G(t)$ и $\delta f(\mathbb{P}, t)$ определяются выражениями (6), (7) и (2), соответственно. Перейдем от временной переменной t и импульсной $\mathbb{P}$ к безразмерным временной переменной η и импульсной переменной ξ и выберем нормировку масштабного фактора на ультрарелятивистской в целом стадии расширения (9).Тогда получим выражение для удельной энтропии:

$$\delta_S = \frac{15\Delta r \mathcal{N}_X}{2\pi^6 \mathcal{N}} \sigma^3 \int\limits_0^\infty d\eta e^{-\Theta(\eta)} \sqrt{\eta} \int\limits_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta + \xi^2}} \delta f(\eta, \xi), \tag{14}$$

где $\Theta(\eta) = \int\limits_t^\infty \Psi(t) dt$. Так как $\dot{\Phi} \geq 0$, то и $\Psi(t) > 0$, таким образом, $\Theta(\eta)$ - неотрицательная монотонно убывающая функция: $\frac{d\Theta}{d\eta} \leq 0$. При этом:

$$\delta f(\eta, \xi) = e^{-\Phi(\eta,\xi)} \int\limits_0^\eta d\eta' e^{\Phi(\eta',\xi)} \frac{\partial}{\partial \eta'} \frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\eta'+\xi^2}} - 1}. \tag{15}$$

Переходя к новым переменным, получим при больцмановской аппроксимации функции $\Phi(x)$ выражение для функции $\Psi(\eta)$, в котором уже учтен статистический фактор:

$$\Psi(\eta) = \frac{\sqrt{\eta} N_X \sigma^3}{2\pi^2 \tau_0} \int\limits_0^\infty \frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\eta+\xi^2}} - 1} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta + \xi^2}} \tag{16}$$

Введем новые переменные x и z: $\xi = \sqrt{\eta}\,\mathrm{sh}(x)$, $z = \sigma\sqrt{\eta}$. Тогда получим:

$$\Psi(\eta) = \frac{N_X}{\pi^2 \tau_0} z^3 \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{sh}^2\, t dt}{e^{z\,\mathrm{ch}\, t} - 1}.$$

Вычисляя интеграл $\int \Psi dt$ и меняя порядок интегрирования в полученном выражении, найдем:

$$\Theta(\eta) = \frac{\pi^3 N_X}{120\sigma^2} \Xi(\sqrt{\eta}\sigma), \tag{17}$$

где введена монотонно убывающая функция $\Xi(x)$:

$$\Xi(x) = 1 - \frac{80}{\pi^5} x^3 \int\limits_0^\infty \mathrm{th}^2 x D(x\,\mathrm{ch}\, z) dz, \tag{18}$$

изменяющаяся на интервале $0 \geq \Xi(x) \leq 1$. и функция $D(x)$:[3]

$$D(x) = \frac{3}{x^3} \int\limits_0^x \frac{t^3}{e^t - 1} dt,$$

имеющая следующие асимптотики:

$$D(x) \approx \begin{cases} 3\sum\limits_0^\infty \frac{B_n}{(n+3)n!}\, x^n, & x \lesssim 1; \\ \\ \frac{\pi^4}{5x^3} - 3 \quad 1 + \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} \quad e^{-x}, & x \gg 1, \end{cases} \tag{19}$$

где B_n - числа Бернулли. График функции $D(X)$ показан на Рис. 1.

---

[3] Функция $D(x)$ связана с функциями Дебая (см., например, [8]).

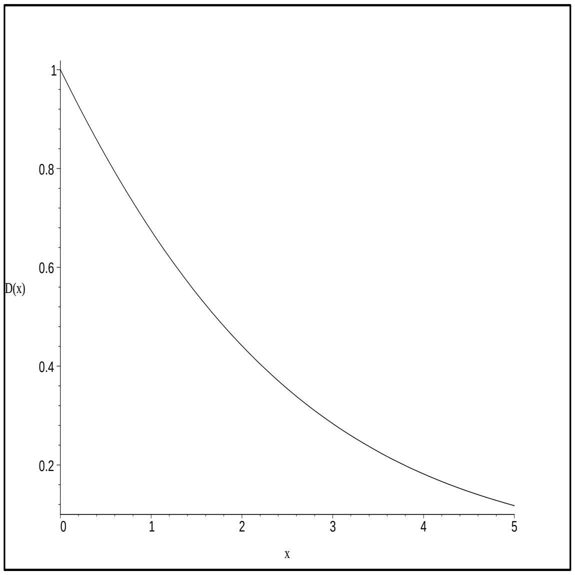

Рис.**1.** *График функции $D(x)$, построенный с помощью пакета Maple на аппроксимациях вида (19).*

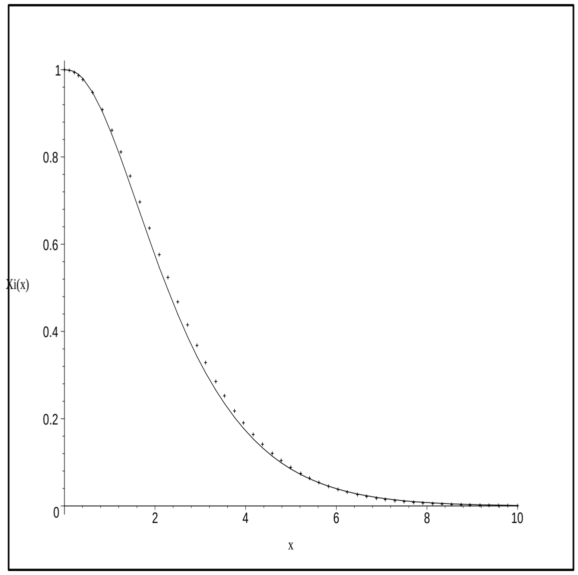

Рис.**2.** *График функции $\Xi(x)$. Точками обозначен график экстраполирующей функции $F(x)$ (20).*

Для вычислений с функциями $D(x)$ и $\Xi(x)$ была создана специальная библиотека в пакете символьной математики Maple, в которой определены процедуры быстрого вычисления этих функций с помощью их различных аппроксимаций. График функции $\Xi(x)$ показан на Рис.2. На отрезке $[0,10]$ функция $\Xi(x)$ хорошо экстраполируется функцией

$$F(x) = \frac{e^{-\alpha x^2}}{1+\beta x^2} \tag{20}$$

с параметрами $\alpha = 0,05$, $\beta = 0,09$.

Отклонение от равновесия, $\delta f(\eta,\xi)$

Перейдем теперь к вычислению функции $\delta f(\eta,\xi)$. Как нетрудно видеть, функция $\Phi(\eta,\xi)$ является медленно меняющейся функцией, так как $\Phi'_\eta < 1/2$, причем: $\lim\limits_{\eta\to 0} e^{\Phi(\eta,\xi)} = 1$, и в широких пределах изменения переменных η,ξ $\exp(\Phi(\eta,\xi)) \approx 1$. Временная же производная равновесной функции распределения бесконечно растет в области $\sigma\sqrt{\eta+\xi^2} \to 0$; при больших же значениях этого аргумента эта производная мала. Таким образом, главный вклад в отклонение функции распределения от равновесия дают значения переменных η,ξ в области $\sqrt{\eta+\xi^2} \lesssim \sigma^{-1}$, в которой $\exp(\Phi)$ можно считать примерно постоянной. Таким образом, проводя интегрирование по частям в (15), найдем приближенно:

$$\delta f(\eta,\xi) \simeq \frac{1}{e^{\sigma\xi}-1} - \frac{e^{-\Phi(\eta,\xi)}}{e^{\sigma\sqrt{\eta+\xi^2}}-1}. \tag{21}$$

Подставляя эту функцию во внутренний интеграл (14) и вводя функцию:

$$\mathrm{Df}(\eta,\sigma) = \sigma^2 \int\limits_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta+\xi^2}} \left[\frac{1}{e^{\sigma\xi}-1} - \frac{e^{-\Phi(\eta,\xi)}}{e^{\sigma\sqrt{\eta+\xi^2}}-1}\right], \tag{22}$$

получим:

$$\delta_S = \frac{15\Delta r \mathcal{N}_X}{2\pi^6\mathcal{N}}\sigma \int\limits_0^\infty d\eta e^{-\Theta(\eta)}\sqrt{\eta}\,\mathrm{Df}(\eta,\sigma). \tag{23}$$

Переходя к численному интегрированию в (23), заметим, что неудобные для численного интегрирования интегралы как раз содержатся в функции $\mathrm{Df}(\eta,\sigma)$, - прямое применение численного интегрирования наталкивается на проблему расходимости. Поэтому первоначально интеграл (22) необходимо преобразовать к удобному для численного интегрирования виду. Для этого перепишем интеграл (22) в эквивалентной форме:

$$\mathrm{Df}(\eta,\sigma) =$$

$$= \sigma^2 \left[\int\limits_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta+\xi^2}} \quad \frac{1}{e^{\sigma\xi}-1} - \frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\eta+\xi^2}}-1} \Bigg) + \int\limits_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta+\xi^2}} \frac{1-e^{-\Phi(\eta,\xi)}}{e^{\sigma\sqrt{\eta+\xi^2}}-1} \right].$$

Вычисляя первую часть интеграла с помощью подстановок $\xi = \sqrt{\eta}x$, $\xi = \sqrt{x^2-1}$, найдем:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta+\xi^2}} \quad \frac{1}{e^{\sigma\xi}-1} - \frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\eta+\xi^2}}-1} \Bigg) =$$

$$= \eta \left[\int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\eta}x}-1} + \int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{\eta+x^2}} \frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\eta}x}-1} \right].$$

Аналогично преобразуем теперь часть B интеграла. Подставляя в этот интеграл выражение для $\Phi(\eta,\xi)$ и производя подстановку $\xi = \sqrt{\eta}x$, и разлагая экспоненту в ряд Тейлора при малых значениях η, получим приближенно:

$$B \approx \frac{1}{2}\eta^2 \int\limits_0^\infty \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}} \frac{\sqrt{1+x^2} - x^2 \ln \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}}{e^{\sigma\sqrt{\eta}\sqrt{1+x^2}}-1}.$$

Численное интегрирование этих выражений уже не встречает затруднений. С учетом сделанных выше замечаний в пакете Maple была создана библиотека специальных процедур ускоренного вычисления функции $\mathrm{Df}(\eta,\sigma)$ при любых значениях переменных.

Прежде, чем перейти к изложению результатов, произведем удобную нормировку функции δ_S. Как отмечалось в [5], ранее была получена оценка удельной энтропии на один барион:

$$\delta_S^0 = \frac{45\zeta(3)}{4\pi^4} \frac{N_X}{N} \Delta r. \tag{24}$$

Поэтому будем соотносить наши результаты к этой оценке, вводя относительную величину:

$$\Delta_S = \frac{\delta_S}{\delta_S^0} \tag{25}$$

- приведенную удельную энтропию. Проводя численное интегрирование в выражении (23) с помощью указанных процедур в пакете Maple, получим семейство графиков функции $\Delta_S(\sigma)$. На Рис. 3 показаны рассчитанные графики зависимости $\Delta_S(\sigma)$ при различных значениях N_X - числа типов $X-$ бозонов, которое является параметром модели взаимодействий.

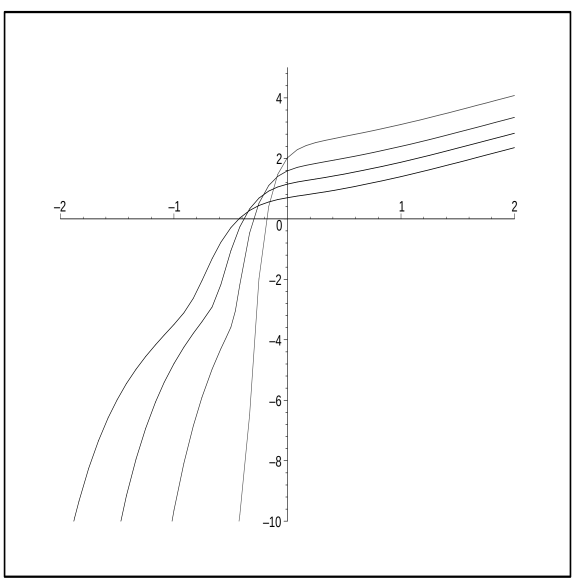

Рис.**3.** *Приведенная удельная энтропия на один барион, $\lg \Delta_S(\sigma, N_X)$, в зависимости от числа X-бозонов, N_X. По оси абсцисс отложены значения $\lg \sigma$. В правой части рисунка снизу вверх: $N_X = 1$; $N_X = 3$; $N_X = 10$; $N_X = 53$.*

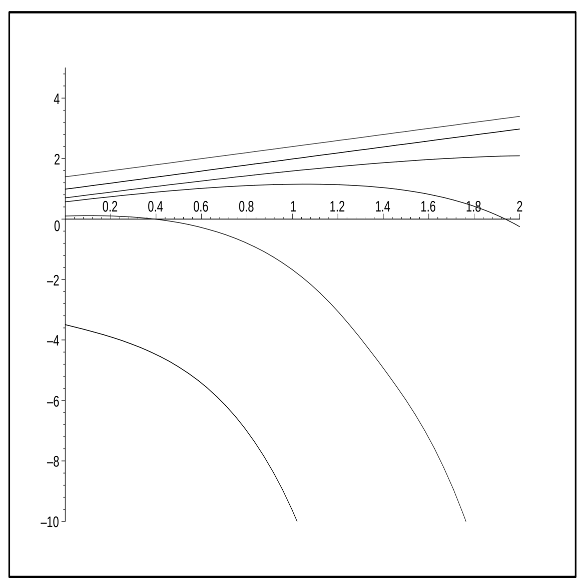

Рис.**4.** *Зависимость приведенной удельной энтропии на один барион от числа типов X - бозонов. Снизу вверх: $\sigma = 0,1$; $\sigma = 0,4$; $\sigma = 0,7$; $\sigma = 1$; $\sigma = 3$; $\sigma = 10$. По оси абсцисс отложены значения $\lg N_X$, по оси ординат - $\lg \Delta_S$.*

Библиотека процедур вычисления специальных функций

Пакет символьной математики Maple хорошо вычисляет интегралы, в том числе, и определенные. Однако, при условиях плохой сходимости интегралов, наличия в подынтегральных выражениях различных особенностей, неприятных для численных расчетов, процесс интегрирования может существенно затянуться, привести к зависанию программы и даже к ошибкам в случае появления в подынтегральном выражении слишком больших или слишком малых чисел. В ряде случаев программа Maple отказывается проводить интегрирование, если, например, подынтегральное выражение расходится внутри или на границах промежутка интегрирования, хотя определенный интеграл по всем признакам сходится. Именно с такими типами интегралов мы и столкнулись при вычислениях кинетических параметров теории. В этих случаях необходимо комбинировать аналитические и численные методы и там, где это необходимо, заменять функции некоторыми аппроксимациями.
Создадим сначала необходимую в дальнейшем контролируемую процедуру вычисления определенного интеграла по формуле трапеций:

```
> YuFunctions[Integral]:=proc(a,b,N,n,x,f)
> local x0,i,F: x0:=a+(b-a)/N*(i-1/2):
> F:=evalf(subs(x=x0,f),n):evalf((b-a)/N*sum(F,i=1..N),n):end:
```

где введены параметры: a - нижний предел интегрирования, b - верхний, N - количество интервалов разбиения, n - удерживаемое число значащих цифр, x - переменная интегрирования, f - подынтегральная функция этой переменной.

Первым делом создадим приемлемую процедуру вычисления введенной нами функции D(x):

```
> D(x)=3/x^3*Int(t^3/(e^t-1),t=0..x);
```

Рассмотрим асимптотики этой функции; для этого разложим в ряд Тейлора подинтегральное выражение, используя известную из теории специальных функций формулу (см., например, [9]):

```
> t/(exp(t)-1) = sum(bernoulli(n)*t^n/n!,n = 0 .. infinity):
```

где bernoulli(n) $= B_n$ - числа Бернулли. Интегрируя далее это соотношение, получим:

```
> D(x) = 3*sum(x^n*bernoulli(n)/((n+3)*n!),n=0..infinity);
```

При больших значения аргумента, $x \gg 1$, мы можем использовать другое разложение, представляя интеграл в виде:

```
> D(x) = 3/(x^3)*Int(t^3/(exp(t)-1),t = 0
> .. infinity)-
> 3/(x^3)*Int(t^3/(exp(t)-1),t = x .. infinity):
```

Поэтому введем эту функцию как кусочно-заданную с помощью команды Maple piecewise(xx,f1(x),f2(x)), где xx- некоторое алгебраическое условие, при котором f=f1, во всех остальных случаях f=f2:

```
> YuFunctions[Db]:=proc(x) local n:
> evalf(piecewise(x<3,3*sum(x^n*bernoulli(n)/((n+3)*n!),n=0..12),
> Pi^4/(5*x^3)
> -3/x^3*YuFunctions[Integral](x,40+x,400,6,t,t^3/(exp(t)-1))),6):
> end:
```

Проверим, как проводятся вычисления с помощью введенной процедуры:

```
> YuFunctions[Db](2);YuFunctions[Db](3);YuFunctions[Db](20);
```

$$0.00243521$$

Прямые же вычисления этой функции с помощью стандартной Maple-команды проводятся на порядок дольше и дают неправильный результат - интеграл оказывается комплексной величиной. Следует отметить, что появление мнимой части при вычислениях заведомо вещественных функций от заведомо вещественных аргументов - достаточно распространенная проблема в символьной математике, по-видимому, связанная с процедурой определения специальных функций на комплексной области в ядрах этих программ, скрытых от пользователей. Проблемы подобного рода и вынуждают исследователей создавать свои пользовательские библиотеки, переопределяя стандартные процедуры пакетов символьной математики, удобство которых неоспоримо для пользователей в других областях. Следует заметить, что приведенный результат получен в пакете Maple версии 8.0, но точно такой же результат получается и в версии 9.5.
Перейдем к созданию процедуры вычисления функции $\Xi(z)$:

```
> Xi(z) =
> 1-(80*z^3/(Pi^5))*Int(tg(x)^2*`D(z*ch(x))`,x = 0 ..
> infinity):
```

При вычислении этой функции в области больших значений z мы сталкиваемся с необходимостью интегрировать выражение от экспоненциально малых значений функции по большому промежутку. Вклад этих значений аргумента в конечный результат стремится к нулю, поэтому с требуемой точностью мы представим функцию $\Xi(z)$ также в виде кусочно-заданной функции, приравнивая ее значения нулю при $\Xi(z) < 0,001$.

```
> YuFunctions[Xi]:=proc(x):
> evalf(piecewise(x<10,1-80/Pi^5*x^3*
> YuFunctions[Integral](0,20,100,4,t,
> tanh(t)^2*YuFunctions[Db](x*cosh(t))),0),6):end:
```

Отклонение функции распределения X-бозонов от равновесия описывается интегралом вида:

```
> Df(t,s) = s^2*Int([(1/(exp(s*x)-1)-
> exp(1/2*(sqrt(t)*sqrt(t+x^2)-x^2*ln((sqrt(t)+sqrt(t+x^2))/x)))
> /(exp(s*sqrt(t+x^2))-1))]*x^2/(sqrt(t+x^2)),x = 0 .. infinity):
```

Ввиду громоздкости выражений создадим сначала промежуточные процедуры вычисления входящих в интеграл функций:

```
> YuFunctions[Phi]:=proc(t,x):1/2*
> (sqrt(t)*sqrt(t+x^2)-
> x^2*ln((sqrt(t)+sqrt(t+x^2))/x)):end:
> YuFunctions[df]:=proc(t,x,s):
> 1/(exp(s*x)-1)-exp(-YuFunctions[Phi](t,x))/
> (exp(s*sqrt(t+x^2))-1):end:
```

Введем теперь с помощью процедуры интегрирования процедуры и процедуры вычисления кусочно-заданной функции процедуры вычисления интегралов, предварительно для устранения проблемы сходимости разбив промежуток интегрирования и заменяя бесконечное значение на границе интегрирования значением x=20, учитывая что в подынтегральное выражения входят экспоненты и что $e^{20} \sim 10^9 \gg 1$.

```
> YuFunctions[J0]:=proc(z) local x:
> evalf(piecewise(z<0.1,1/z*(sqrt(2)-1),
> YuFunctions[Integral](0,1,100,6,
> x,x^2/(sqrt(1+x^2)*(exp(z*x)-1)))),6):end:
> YuFunctions[J2]:=proc(z) local x:
> 1/2*YuFunctions[Integral](0,20,100,6,x,x^2/(sqrt(1+x^2)*
> (exp(z*x)-1))*(sqrt(1+x^2)-x^2*ln((1+sqrt(1+x^2))/(x))))
> :end:
```

Таким образом, отклонение функции распределения от равновесия можно описать процедурой:

```
> YuFunctions[Df]:=proc(eta,s) local x:
> s^2*eta*(YuFunctions[J0](sqrt(eta)*s)+
> YuFunctions[J1](sqrt(eta)*s)+
> YuFunctions[J2](s*sqrt(eta))):end:
```

Для упрощения расчетов экстраполируем теперь функцию $\Xi(z)$ функцией F(z):

```
> YuFunctions[Xi1]:=proc(x):
> exp(-0.05*x^2)/(1+0.09*x^2):end:
> YuFunctions[Xi1Exp]:=proc(N,s,t):
> evalf(exp(-Pi^3*N/(120*s^2)*
> YuFunctions[Xi1](s*sqrt(t)))):end:
```

и создадим теперь процедуру вычисления удельной энтропии, ds(s,N) а также ее приведенного значения, $Ds(s, N)$:

```
> YuFunctions[ds]:=proc(s,N) local FF, GG:
> FF:=sqrt(t)*exp(-Pi^3*N/(120*s^2)* YuFunctions[Xi1](s*sqrt(t))):
> GG:=FF**YuFunctions[Df](t,s): evalf(15*N/(2*Pi^6)*s*
> YuFunctions[Integral](0,40,200,4,t,GG)):end:
> YuFunctions[Ds]:=proc(s,N):4*Pi^4/(45*Zeta(3))*
> YuFunctions[ds](s,N):e
> nd:
```

Сохраним теперь созданные процедуры в пользовательской библиотеке YuFunctions, сохраняемой в файле KinFunc.m:

```
> save(YuFunctions,‘KinFunc.m‘);
```

Обращаясь к созданной библиотеке процедур, можно строить графики зависимости приведенной энтропии от параметров процесса.

Литература

[1] Игнатьев Ю.Г. Релятивистская кинетика бариогенезиса в горячей Вселенной. *Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации.* Тезисы докл. Всесоюзной конференции, Москва, 1984, с. 19-21

[2] Игнатьев Ю.Г. Релятивистская кинетика бариогенезиса в горячей Вселенной. *Астроном. журнал*, 1985, т. 62, с. 633-638

[3] Игнатьев Ю.Г. Кинетическая модель бариогенезиса в симметричной горячей Вселенной. *Классические и квантовостатистические проблемы релятивистской теории гравитации*, Межвузовский сб. научных трудов, Казань, 1991, Изд-во КГПИ, с. 6-21

[4] Игнатьев Ю.Г. Релятивистские кинетические уравнения для неупруго взаимодействующих частиц в гравитационном поле. *Изв. ВУЗов, Физика*, 1983, т.26, No 8, с. 19-23

[5] Yu.G. Ignatyev, K. Alsmadi. *Gravitation & Cosmology*, **11**, No 3, 252 (2005).

[6] Yu.G. Ignatyev, K. Alsmadi. *Gravitation & Cosmology*, **11**, No 4, 363 (2005)

[7] Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения.// *ГИФМЛ*, Москва-Ленинград, 1963

[8] E. Janke, F. Emde, F.Lösch, Tafeln Höherrer Funktionen, B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1960

[9] А.Д.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев, *Интегралы и ряды. Дополнительные главы*, М., наука, 1986.