

СИСТЕМА MATHEMATICA КАК СРЕДСТВО КОМПЬЮТЕРНОЙ ПОДДЕРЖКИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ВУЗОВ

Бушкова О.А.

E-mail: olgabushkova@mail.ru

Елабужский государственный педагогический университет, г. Елабуга¹

Аннотация. В статье рассмотрены возможности использования компьютерной системы *Mathematica* в математической подготовке студентов. Подробно описывается разработанный автором на базе системы *Mathematica* компьютерный учебник по одному из разделов курса геометрии педагогического вуза.

Одним из новых и перспективных направлений в области информатизации математического образования является использование в процессе обучения компьютерных математических систем, лидером среди которых заслуженно является компьютерная система *Mathematica*.

Представляющая огромный интерес для профессионалов, компьютерная система *Mathematica* с самого начала задумывалась и как учебное пособие, являя собой компьютерную математическую среду, и имеет одной из своих главных целей именно обучение (студентов, школьников и др.).

Буквально нажатием одной клавиши компьютерной системой могут быть решены все упражнения в курсе высшей математики. Это выполнение основных алгебраических и аналитических операций, упражнения линейной алгебры (вычисление различных произведений (векторов и матриц), операции над матрицами, решение систем линейных алгебраических уравнений, в том числе и несовместных и т. п.), задачи математического анализа (вычисление пределов, производных и интегралов, разложение функций в ряды и действия над рядами, полное исследование функций и построение их графиков и т. п.), теории дифференциальных уравнений и их систем. При этом появляется возможность получить не только окончательный ответ, но и увидеть результаты промежуточных вычислений.

Чрезвычайно плодотворно применение *Mathematica* в геометрии, которая использует в своих задачах средства алгебры и математического анализа.

Востребованность компьютерной системы *Mathematica* в математическом образовании не вызывает сомнений. Как ее применять (в методическом, научном и практическом отношении) — зависит от конкретного пользователя.

Мы придерживаемся точки зрения, согласно которой система *Mathematica* должна быть полностью включена в программу курса изучения математики в качестве компьютерного сопровождения изучения курса. Одним из способов внедрения *Mathematica* в учебный процесс является переиздание уже существующих традиционных учебников в новом варианте, когда изложение сопровождается иллюстрациями и примерами из системы *Mathematica*. Такая тенденция наблюдается в западных странах, где *Mathematica* уже заняла прочные позиции в системе образования. В качестве примеров можно привести книги. Первая из них посвящена возможностям системы *Mathematica* для усвоения основных концепций и подходов к решению задач линейной алгебры и является приложением к традиционному учебнику по линейной алгебре самого автора. Вторая является приложением к известному учебнику по теории дифференциального и интегрального исчисления, написанного Джеймсом Стюартом. В ней все примеры, приведенные в учебнике проиллюстрированы с использованием системы *Mathematica*.

Другой способ систематического применения компьютерной системы при изучении математических дисциплин — разработка на базе системы *Mathematica* компьютерных учебников по отдельным дисциплинам.

Компьютерный учебник представляет собой программно-методический комплекс, ориентированный на расширение возможностей преподавания дисциплины и позволяющий студенту самостоятельно освоить учебный курс или большой его раздел.

Mathematica позволяет создавать электронные документы, отличающиеся безупречным оформлением (цветные тексты и качественные иллюстрации, всевозможные выделения и т. д.), возможностью различной организации оглавления, очень быстрым поиском нужной информации по ряду критериев, наглядными примерами, которые можно изменять в ходе просмотра данных, наличием графики, в том числе и динамической, и даже возможностями мультимедиа — учебные материалы могут сопровождаться звуковыми комментариями.

Автором на базе системы *Mathematica* разработан компьютерный учебник по одному из разделов курса геометрии педагогического вуза.

Компьютерный учебник по дисциплине курса «Проективная геометрия» предназначен для студентов вторых курсов педагогических вузов.

Особенность изучения проективной геометрии заключается в минимальной наглядности учебного материала (даже проективные преобразования плоскости не представляются столь наглядными или привычными, как евклидовы движения или аффинные преобразования), несоответствии некоторых теоретических

¹ Аннотация на английском языке Автором не представлена.

выводов “соображениям здравого смысла”, сложности и непривычности математического аппарата теории, наличии большого количества аналитических выводов, доказательств и т.д. Это затрудняет понимание абстрактно-логических понятий и тем самым приводит к снижению качества знаний студентов. По этой причине в представленном учебном пособии акцент сделан на максимальное использование всех визуальных и вычислительных возможностей компьютера.

Учебник реализован в виде документа компьютерной системы Mathematica, где информация представлена в виде связанных между собой файлов. Содержание представляет собой иерархическое дерево разделов, соответствующее структуре учебного материала. Название того или иного параграфа организовано как гиперссылка на соответствующий файл.

Учебник состоит из следующих разделов: теоретический лекционный материал, разделенный на три главы; компьютерные анимации основных задач на построение; программы по решению опорных задач курса; тренажеры.

Теоретический материал в учебнике разбит на отдельные лекции в соответствии с учебным планом, причем объем и содержание каждой лекции соответствуют временным и интеллектуальным возможностям студентов. Система гиперссылок делает теоретическое изложение более удобным. Наряду с традиционным “линейным” прохождением по учебному тексту студенту предоставляется возможность самостоятельно выбрать и нелинейный путь изучения электронного учебного текста, выбрать наиболее удобную для него траекторию изучения материала. “Нелинейная” подача материала делает возможным многослойное, многоуровневое распределение учебной информации. Доступ к более глубокому уровню представления информации производится по запросу студента. Кроме того, в каждом параграфе имеются указатели ссылок, с помощью которых можно вернуться к оглавлению, перейти к следующему или предыдущему параграфу.

Одной из важных составляющих изучения любого раздела курса геометрии является умение осуществлять конструктивную деятельность в этой предметной области.

В преподавании проективной геометрии возникают сложности из-за нехватки времени для детального рассмотрения различных случаев расположения конфигураций и отображений, чертежей фигур. Погрешности построений при помощи линейки, а также неудачно выбранное расположение начальных данных влияют на результат построения, вызывая сомнения в правильности выполнения задания.

Компьютерная система Mathematica предоставляет возможность визуализации выполнения различных построений по геометрии, в частности – проективной, как с помощью статических графических образов, так и путем анимации.

Технология создания анимации внутри документа в среде Mathematica очень проста. Серию графических рисунков можно оживить подобно тому, как из серии неподвижных картинок-кадров можно создать мультфильм. Создание такой “ожившей” картинке выполняется в два этапа. Сначала нужно создать серию рисунков, в которых постепенно изменяется тот или иной параметр или сразу несколько параметров, и поместить их в последовательные ячейки документа. Затем нужно выделить все ячейки документа с кадрами. Чтобы просмотреть созданную таким образом анимацию, достаточно нажать комбинацию клавиш $\text{Ctrl}+\text{Y}$ или выбрать команду $\text{Cell} \Rightarrow \text{Animate Selection Graphics}$ (Ячейка \Rightarrow Оживить выделенные графики) или, что проще всего, дважды щелкнуть кнопкой мыши на изображении. В той ячейке, которая полностью видна на экране дисплея, будет начата демонстрация (ячейки с остальными изображениями при необходимости можно сделать скрытыми). Внизу экрана при этом появятся шесть кнопок, которые позволяют управлять демонстрационным процессом: изменить направление времени (представить анимацию в обратном направлении), ускорить, замедлить показ или приостановить его.

В качестве примеров нами разработаны и включены в учебник следующие компьютерные анимации: построение четвертой гармонической точки для данных трех точек, построение образа точки и прямой при заданном проективном отображении, построение полярных точек данной точки относительно данной линии второго порядка, построение полюса данной прямой относительно данной линии второго порядка, построение касательных к линии второго порядка, проходящих через данную точку и др. Для каждой задачи рассматриваются различные случаи взаимного расположения точек на прямой, точек и прямых относительно линии второго порядка. Шаги построения можно изучать последовательно, причем построения на каждом этапе происходят непосредственно на глазах пользователя и подробно комментируются.

Подобные демонстрации позволяют представить решение геометрической задачи на построение в динамике в виде разворачивающегося во времени процесса, от начала до готового чертежа, так что студенту дается возможность увидеть и технологию построения, и некоторые второстепенные детали, которые в готовом образе уже нельзя будет обнаружить. Возможности компьютерной графики, цветовые сочетания позволяют целенаправленно управлять процессом восприятия изображения, при этом внимание акцентируется на значимых элементах, а вспомогательные отесняются на задний план.

Построения на экране выполняются точнее и быстрее, чем на доске или в тетради, поэтому можно, подобрав удачное расположение начальных данных, дать студентам возможность пронаблюдать, также и в частных случаях, те или иные факты проективной геометрии.

Основу практической части компьютерного учебника составляют программы по решению опорных задач курса, составленные в функциональном стиле. Опорные задачи имеют, как правило, четкий алгоритм

и сложившуюся методику решения. Зная алгоритм решения, довольно легко реализовать его в виде программы в функциональном стиле в системе Mathematica.

Функциональное программирование представляет собой стиль программирования в среде Mathematica, хорошо приспособленный для построения программы по шагам. Это один из самых эффективных и надежных способов программирования, основная идея которого — составлять программу из функций, каждая последующая из которых использует результаты предыдущих, т. е. сначала строится функция от аргументов, затем — функция от этой функции и т. д. Особая роль в функциональном программировании принадлежит объекту “шаблон”. “Шаблоны” в системе Mathematica служат для задания выражений различных классов, придания переменным особых свойств, необходимых для создания специальных программных объектов. Наиболее распространенное применение “шаблонов” — указание на локальный характер переменных при задании функции пользователя.

Задание типов данных с помощью шаблонов позволяет удобно и эффективно программировать основные вычислительные задачи курса проективной геометрии, делает программы компактными, строгими и наглядными.

Рассмотрим листинг программы по нахождению уравнений проективного преобразования прямой.

```
Print ["Введите координаты i-той точки и ее образа в виде
ti := {{x1, x2},{x1', x2'}}"];
```

```
Print ["Затем введите U и нажмите клавиши “,Shift,+”,Enter,” “];
```

```
Выделяем первую координату точки;
```

```
x1 [t_] := Part[t, 1, 1];
```

```
Выделяем вторую координату точки;
```

```
x2 [t_] := Part[t, 1, 2];
```

```
Выделяем первую координату образа;
```

```
x3 [t_] := Part[t, 2, 1];
```

```
Выделяем вторую координату образа;
```

```
x4 [t_] := Part [t, 2, 2];
```

Подставляем координаты данных точек в формулы преобразования проективных координат для случая проективной прямой;

```
eq1 [t_] := k1 x3[t] == p11 x1[t] + p12 x2[t];
```

```
eq2 [t_] := k1 x4[t] == p21 x1[t] + p22 x2[t];
```

```
eq3 [t_] := k2 x3[t] == p11 x1[t] + p12 x2[t];
```

```
eq4 [t_] := k2 x4[t] == p21 x1[t] + p22 x2[t];
```

```
eq5 [t_] := k3 x3[t] == p11 x1[t] + p12 x2[t];
```

```
eq6 [t_] := k3 x4[t] == p21 x1[t] + p22 x2[t];
```

Решаем полученные системы уравнений и определяем коэффициенты в уравнениях преобразования;

```
S:= Solve {eq1[t1], eq2[t1], eq3[t2], eq4[t2], eq5[t3], eq6[t3], k1==1}, {p11, p12 ,p21, p22}, {k1, k2, k3};
```

Выводим на экран искомые уравнения преобразования; (функция Extract извлекает список подвыражений выражения);

```
L:=S//InputForm;
```

```
Y1:=Extract [L, {1, 1, 1}];
```

```
Y2:=Extract [L, {1, 1, 2}];
```

```
Y3:=Extract [L, {1, 1, 3}];
```

```
Y4:=Extract [L, {1, 1, 4}];
```

```
M1:={Y1};
```

```
M2:={Y2};
```

```
M3:={Y3};
```

```
M4:={Y4};
```

```
R1:=p11/.M1;
```

```
R2:=p12/.M2;
```

```
R3:=p21/.M3;
```

```
R4:=p22/.M4;
```

```
K:= {R1, R2, R3, R4};
```

```
U:=Print ["x1'=", x1*Part [K, 1] + Part [K, 2]*x2, "x2'=", Part [K, 3]*x1+Part [K, 4]*x2]
```

После запуска программа попросит ввести необходимые данные, укажет, как это нужно сделать, а затем выдаст окончательный ответ в том виде, который требует задача.

**Введите координаты i -той точки и ее образа в виде $t_i = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1', x_2'\}\}$
Затем введите U и нажмите клавиши $\text{Shift} + \text{Enter}$**

```
t1:={{1, 1},{1, 2}}
t2:={{1, 0},{2, 1}}
t3:={{1, -1},{1, 0}}
```

U

```
 $\lambda x_1' = 2 x_1 - x_2$      $\lambda x_2' = x_1 + x_2$ 
```

Программы составлены таким образом, чтобы каждый шаг их сопровождался подробными пояснениями, которые выделены в тексте программы отдельным цветом, а помимо окончательного ответа могут выдаваться и результаты промежуточных вычислений. Это позволит студенту при самостоятельном решении выбранных им задач на любом этапе проверить правильность своих вычислений.

Проведенный анализ геометрических задач, традиционно изучаемых студентами педагогических вузов в курсе проективной геометрии, позволил выделить ряд задач, решение которых целесообразно запрограммировать. К ним относятся задачи на составление уравнений проективного преобразования, заданного четырьмя парами соответствующих точек; определение образа и прообраза точки и прямой при заданном проективном преобразовании; поляритет относительно линии второго порядка на проективной плоскости; определение типа квадрики на проективной плоскости по ее уравнению и др.

Работа с готовыми программами способствует развитию алгоритмического и логико-дедуктивного мышления. Главной особенностью компьютерных учебников в системе Mathematica является возможность непосредственного выполнения всех вычислений прямо внутри учебника. Это позволяет студентам не только изучить реализацию алгоритма того или иного метода решения, но и, используя листинг программы, внести в него свои изменения, разработать собственную программу решения задачи. Это повышает познавательную активность и способствует более глубокому пониманию учебного материала. Полезным для студентов является также сравнение результатов самостоятельного решения задач с решением тех же задач в системе Mathematica. Такой анализ демонстрирует перспективность использования компьютерной системы при решении геометрических задач.

В завершение работы над каждой темой с целью контроля и оценки уровня усвоения материала студентам предлагается работа с тренажером. Тренажер снабжен системой автоматической проверки действий студента по решению задач и автоматического выставления оценки за решение. Он представляет собой программу, состоящую из набора процедур, объединенных в одной ячейке. Критерием правильности будет проводимое компьютером параллельно со студентом решение данной задачи как опорной по основной программе, составленной в функциональном стиле. Конкретные данные для каждого студента программа выбирает произвольным образом с помощью датчика случайных чисел. Сообщение этих данных студенту, пошаговые задания для него и его ответы составляют содержание диалога внутри одной ячейки. В системе Mathematica, начиная с версии 5.0, предусмотрена встроенная функция Input, которая вызывает малое диалоговое окно с текстом задания и окошком для впечатывания требуемого ответа.

После запуска программы на экране появляется диалоговое окно с просьбой ввести номер группы, фамилию и имя испытуемого. После того, как запрошенная информация введена, программа начинает предъявлять испытуемому задания, выбирая их последовательно из заложенного в нее набора заданий. Результат выполнения задания вводится в диалоговое окно испытуемым в виде численного или символьного выражения. Это выражение сравнивается с эталоном, полученным программой, и она отвечает либо поощрительным замечанием, либо констатацией неверного ответа и последующим наводящим вопросом. Задание считается выполненным при совпадении введенного выражения с эталонным. Количество неверных попыток можно фиксировать и в зависимости от него по окончании цикла предъявления вопросов выставить оценку по заранее заданной формуле.

Отметим, что с момента появления диалогового окна на экране компьютера и до окончания цикла предъявления вопросов все вычисления в самой системе Mathematica становятся невозможными, так что студент не может воспользоваться готовыми программами и вынужден выполнять задания самостоятельно.

Выбор задач в качестве основной формы контроля обусловлен тем, что передача вычислений компьютеру имеет тот недостаток, что не всегда требует от студента полного понимания используемых вычислительных алгоритмов. Только самостоятельное, выполненное "вручную", решение контрольной задачи может продемонстрировать усвоение материала.

Таким образом, работая в среде компьютерного учебника, студент может одновременно или попеременно использовать режим теории, режим примеров и иллюстраций, режим задач, режим тренажера. Специально выбирать тот или иной режим работы не нужно. Универсальность системы Mathematica позволяет совместить все режимы, и без каких-либо дополнительных действий пользователь может переходить от одного режима к другому.

Разработанный компьютерный учебник позволяет изучать курс проективной геометрии на более высоком уровне вычислительных и наглядных возможностей. Он может быть использован студентами педагогических вузов на занятиях всех типов: лекционных, практических, самостоятельных.

Студенты, имеющие компьютерный учебник, получают возможность готовиться к занятию как в его теоретической, так и практической частях, выяснить принципиальные стороны формальных теорем, разобраться в решении примеров и задач, которые остались за рамками занятия, восполнить любые пробелы в знаниях и умениях, образовавшиеся по тем или иным причинам.

Учебник может представлять интерес для студентов заочной формы обучения.

На примере данного учебника могут быть разработаны компьютерные учебники по другим разделам и дисциплинам курса математики педагогического вуза.

Литература

1. S. Hollis, *CalcLabs with Mathematica for Stewart's Calculus: Concepts and Contexts, Single Variable*, Academic Press, 228 (2000).
2. T. Lawson, W. Emerson *Mathematica Labs for Linear Algebra*, Wiley & Sons, 161 (1996).