

ФУРЬЕ- И ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Дьяконов В.П.

E-mail: vpdyak@keytown.com

Смоленский государственный университет, Смоленск

Аннотация. Проведено сравнительное рассмотрение двух классов преобразований функций и сигналов средствами компьютерной математики – Фурье и вейвлет-преобразований. Показано, что несмотря на разработки новейших методов Фурье-преобразований (дискретного FFT, оконного FFT и др.) ряд недостатков таких преобразований устраняется применением новейших методов вейвлет-преобразований. Рассмотрены средства для проведения таких преобразований.

Fourier- and wavelet-transformation in computer mathematics

Vladimir Dyakonov

Abstract. The comparative consideration of two classes of transformations of functions and signals by means of computer mathematics – Fourier and Wavelet-transformations is carried out. It is shown, that despite of development of the newest methods of Fourier-transformations (discrete FFT, window FFT etc.) a number of lacks of such transformations is eliminated by application of the newest methods of Wavelet-transformations. The means for realization of such transformations are considered.

Зародившиеся в 80-х годах 20-го века системы компьютерной математики [1] в наши дни развиваются не только как программные, но и как аппаратные средства. Они стали основой разработки программируемых микрокалькуляторов с встроенными системами аналитических вычислений, математических и графических сопроцессоров в процессорах массовых персональных компьютеров [2], приемников систем глобального позиционирования, анализаторов спектра и др. важных разработок. В докладе рассматриваются важнейшие применения компьютерной математики в реализации фундаментальных Фурье- и вейвлет-преобразований.

Прямое преобразование Фурье позволяет получить в аналитическом виде функцию частоты $F(w)$ от временной функции $f(t)$. Оно реализуется формулой

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt, \quad (1)$$

Соответственно, обратное преобразование Фурье задается следующим образом:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt} dw. \quad (2)$$

Эта формула позволяет по функции $F(w)$ найти в аналитическом виде функцию $f(t)$. Преобразования Фурье лежат в основе спектрального метода анализа и синтеза сигналов.

Функции для обеспечения преобразований (1) и (2) в аналитическом виде есть во всех СКМ, например, Derive, Maple, Mathcad и Mathematica. Работа с ними достаточно полно описана в [3]. Пример применения функций прямого `fourier` и обратного `invfourier` преобразований в системе Maple с помощью пакета расширения `inttrans` представлен ниже:

```
> with(inttrans);
```

```
[addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable]
```

```
> f:=exp(-t^2)*sin(t)^2;
```

$$f := e^{(-t^2)} \sin(t)^2$$

```
> fourier(f,t,w);
```

```
> invfourier(% ,w,t);
```

$$\frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{\left(-1 - \frac{w^2}{4}\right)} (-\cosh(w) + e)$$

$$e^{(-t^2)} \operatorname{si}^2(t)$$

В данном случае в результате прямого и обратного преобразований Фурье исходная функция (сигнал) восстановлена. Введя между ними частотные преобразования (например, фильтрацию) можно оценивать аналитически степень искажений сигналов. К сожалению это возможно далеко не всегда. И по мере усложнения функции $f(t)$ сложность аналитического преобразования Фурье резко нарастает. Приходится переходить к численным методам Фурье-преобразований.

Современные цифровые системы и приборы представляют измеряемый сигнал в виде ряда *дискретных отсчетов* $y_0, y_1, \dots, y_{N-2}, y_{N-1}$, обычно размещаемых через постоянные промежутки времени. Таким образом, сигнал представляется в виде *периодической последовательности* $y_{k+N} = y_k$. При этом сигнал описывается как последовательность смещенных во времени дельта-функций:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k \delta(t - k), \quad (3)$$

которая может быть продолжена как вперед, так и назад.

Огромное значение в теоретическом и особенно экспериментальном анализе сигналов сыграло появление аналогово-цифровых и цифровых осциллографов (рис. 1) [4]. Если поначалу они применялись для просмотра формы сигналов и грубого контроля их 2-3 параметров (например, амплитуды и частоты повторения), то в наши дни современные осциллографы способны вычислять до полусотни и более параметров измеряемого, представленного дискретно.



Рис.1. Современные массовые бюджетные цифровые осциллографы серии TDS-1000B/2000B фирмы Tektronix, подключаемый USB-порту компьютера

С появлением СКМ резко возрос интерес к программному дискретному спектральному анализу сигналов с помощью рядов Фурье. Теоретически, ряд Фурье дискретного сигнала, имеющего N отсчетов, определяется выражением:

$$\dot{Y}_n = \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} s_k \exp -j \frac{2\pi nk}{N} .$$

Здесь j -мнимая единица, n - номер гармоники, k - индекс отсчетов сигнала (от 0 до $N-1$). Обычно приведенное

Тип окна	Выражение для Окна W_k	Свойство окна
Прямоугольное (Rectangle).	1	Очень узкий основной лепесток, хорошее частотное разрешение, плохое амплитудное разрешение, хорошее подавление белого шума.
Блэкмана (Blackman)	$0.42 - 0.5\cos(2\pi k/N) + 0.08\sin(4\pi k/N)$	Широкий основной лепесток, заметный спад боковых лепестков, хорошее амплитудное разрешение.
Хэннинга (Hanning)	$0.5(1 - \cos(2\pi k/N))$	Достаточно широкий основной лепесток, быстрый спад боковых лепестков, хорошее разрешение.
Хэмминга (Hamming)	$0.54 - 0.46\cos(2\pi k/N)$	Умеренно широкий основной лепесток, постоянный уровень боковых лепестков, неплохое разрешение.
С плоской вершиной (Flat Top)	$0.281 - 0.521\cos(2\pi k/N) + 0.198\cos(4\pi k/N)$	Хорошее разрешение по амплитуде, но плохое по частоте, размытые пики.

выражение нормируется путем задания периода $T=1$:

$$\dot{Y}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s_k \exp -j \frac{2\pi nk}{N} . \quad (4)$$

Для повышения разрешающей способности спектрального анализа и получения спектров, развернутых во времени, обычно используется оконное ДПФ. Оно означает введение в формулу ДПФ весовых множителей W_k , т. е. выполнение прямого ДПФ по формуле:

$$\dot{Y}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s_k W_k \exp -j \frac{2\pi nk}{N} . \quad (5)$$

Практически в большинстве цифровых осциллографов оконный спектральный анализ реализуется программным методом, также как это +реализовано в современных системах компьютерной математики, например в Mathcad [5]. Число типов окон ограничено 4-6. Ниже представлены данные о наиболее распространенных типах окон и их основных свойствах.

Большинство современных цифровых осциллографов реализует быстрое преобразование Фурье – особый алгоритм ДПФ позволяющий уменьшить число комплексных умножения до $(N/2) \bullet \log_2 N$. Это достигается, если число отсчетов составляет 2^k , где k – целое число. Обычное ДПФ требует N^2 комплексных умножений. Рис. 2 дает представление о том, как сильно уменьшается объем вычислений при БПФ в сравнении с ДПФ.



Рис.2. Число операций при ДПФ и БПФ

Ныне микропрограммное вычисление спектра по формуле (5) с применением методов БПФ реализовано в большинстве цифровых осциллографов. На рис. 3 показана спектрограмма прямоугольных импульсов, полученная с помощью осциллографа TDS-2024В корпорации Tektronix. Используется окно Хэннинга. Нетрудно заметить, что у данного осциллографа спектрограмма очень напоминает ее классическое изображение в виде вертикальных линий с частотами, соответствующими частотами гармоник. К сожалению, так

бывает не всегда – часто линии спектра имеют вид пиков заметной ширины, расположенных на шумовой дорожке.

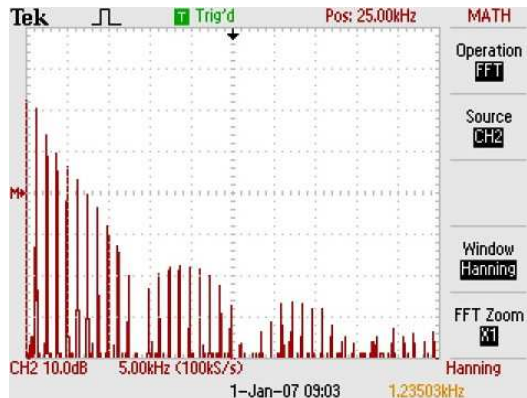


Рис.3. Спектрограмма прямоугольных импульсов, полученная с помощью осциллографа TDS-2024B

Наиболее полное развитие методы спектрального анализа получили в современных анализаторах спектра реального времени и в анализаторах сигналов. Некоторые из них имеют настолько высокую скорость выполнения оконных преобразований Фурье, что позволяют получать динамический спектр сложных коммуникационных сигналов и строить трехмерный спектр, что уже давно реализовано в СКМ Mathcad и MATLAB. Такие спектрограммы способны выделять мельчайшие детали сложных сигналов – см. рис. 4.

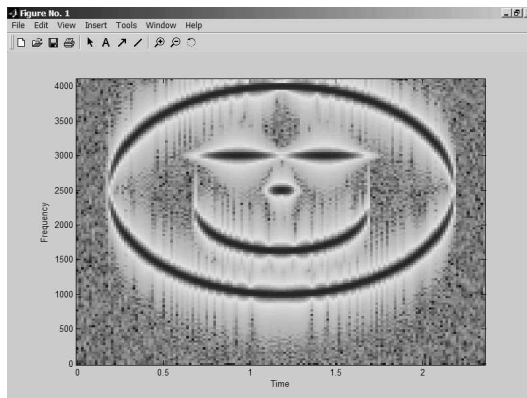


Рис.4. Оконный спектральный Фурье-анализ демонстрационного сигнала $v\cos ig$ в системе MATLAB

В ряде работ, например в [6-11], были показаны фундаментальные ограничения Фурье-анализа в части представления нестационарных сигналов и сигналов с быстрыми перепадами уровня. Эти серьезные ограничения были преодолены за счет применения специального аппарата представления произвольных сигналов и функций на основе нового математического базиса – вейвлетов.

Вейвлеты и их применение – новейшее научное направление, возникшее на стыке математики, информатики и техники связи. Технологии вейвлетов базируются на обобщенном представлении сигналов $s(t)$, или функций $y(x)$, в векторном пространстве в виде взвешенной суммы базисных функций $\Psi_k(t)$, помноженных на коэффициенты C_k :

$$s(t) = \sum_k C_k \psi_k(t), \quad (6)$$

Ряд Фурье использует в качестве базисных функции синусы и косинусы, представленные комплексной экспонентой $e^{itk} = \cos(tk) + i \cdot \sin(tk)$:

$$s(t) \sim \sum_k C_k e^{itk},$$

где

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(t) e^{-itk} dt.$$

Такие функции предельно локализованы в частотной области, вырождаясь на спектрограмме в вертикальную линию, но не локализованы во временной области: они не имеют резких перепадов и периодически и чисто абстрактно определены во времени от $-\infty$ до $+\infty$.

Прямо противоположный пример — некая импульсная базисная функция (функция Кронекера) прекрасно локализована во времени, но плохо в частотной области:

$$\psi_k(t) = \delta_k(t) = \begin{cases} 1, & k = t \\ 0, & k \neq t \end{cases} .$$

Термин *wavelet*, введенный впервые Морле (J. Morlet), означает “короткая или маленькая волна”. Временной образ вейвлетов определяется некоторой *psi-функцией* времени $\psi(t)$. А частотный или Фурье-образ определяется выражением:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(t) e^{-i\omega t} dt . \quad (7)$$

В основе вейвлет-преобразования лежит использование двух непрерывных и интегрируемых по всей оси t (или x) функций:

- вейвлет-функция $\psi(t)$ с $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$,
- масштабирующая или скейлинг-функция $\varphi(t)$ с $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1$.

φ -функции, задающие грубое приближение (аппроксимацию) сигнала, присущи только ортогональным вейвлетам. А детализирующие ψ -функции создаются на основе той или иной *базисной функции* $\psi_0(t)$, определяет тип вейвлета. ψ -функции должны иметь свойства смещения во времени и масштабирования:

$$\psi(t) \equiv \psi(a, b, t) = a^{-1/2} \psi_0 \left(\frac{t-b}{a} \right) \quad (8)$$

Параметр a задает ширину вейвлета, а b — его положение.

Прямое непрерывное вейвлет-преобразование (ПНВП) сигнала $s(t)$ задается вычислением *вейвлет-коэффициентов* по формуле:

$$C(a, b) = \langle s(t), \psi(a, b, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) a^{-1/2} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt. \quad (9)$$

ПНВП лежит в основе построения вейвлет-спектрограмм сигналов $f(t)$. Вейвлет-спектрограмма в простейшем случае отражает уровень вейвлет-коэффициентов (градациями яркости) в плоскости масштаб-время. На рис. 5 показан пример построения нестационарного сигнала (синусоида на которую наложен прямоугольный импульс с изменяющимся периодом повторения). Перепады сигнала на спектрограмме, полученной в СКМ МАТЛАВ, представлены в виде “зубцов”. Замечательно, что уменьшение амплитуды перепадов в сотни-тысячи раз (при этом они сливаются с синусоидой) перепады, тем не менее, отчетливо выявляются спектрограммой (подокно снизу). Способность вейвлет-спектрограмм обнаруживать артефакты сигналов не имеет прецедентов в технике спектрального анализа! Это полезно в сейсмографии, медицине и др. областях применения вейвлет спектрального анализа.

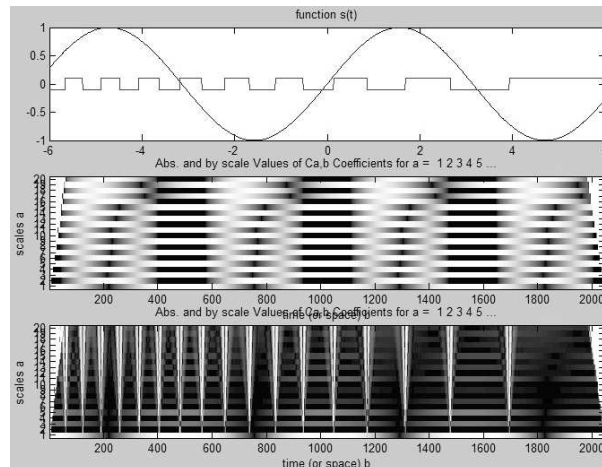


Рис.5. Вейвлет-спектрограмма сигнала синусоиды и прямоугольных импульсов с переменным периодом повторения

С учетом обычно ограниченной области определения сигналов и $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$:

$$C(a, b) = \int_R s(t) a^{-1/2} \psi \frac{t-b}{a} dt. \quad (10)$$

Обратное непрерывное вейвлет-преобразование (ОНВП) осуществляется по формуле реконструкции во временной области:

$$f = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da db}{a^2} \langle f, \psi^{a,b} \rangle \psi^{a,b}, \quad (11)$$

где

$$\psi^{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \psi \frac{x-b}{a}. \quad (12)$$

Здесь параметры сдвига и сжатия меняются непрерывно вдоль \mathbf{R} с ограничением $a \neq 0$, а ψ в (10) определяется выражением:

$$\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \widehat{\psi}(\xi)^2 |\xi|^{-1} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{\psi}(\omega)^2}{|\omega|^{-1}} d\omega. \quad (13)$$

Если ψ вещественная функция то будет справедливым более строгое, чем (11) выражение:

$$\psi = 2\pi \int_0^{\infty} d\xi \widehat{\psi}(\xi)^2 |\xi|^{-1} = 2\pi \int_{-\infty}^0 d\xi \widehat{\psi}(\xi)^2 |\xi|^{-1} < \infty. \quad (14)$$

В этом случае:

$$f = C_\psi^{-1} \int_0^{\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} db \langle f, \psi^{a,b} \rangle \psi^{a,b}. \quad (15)$$

В пакете расширения системы MATLAB — Wavelet Toolbox используется следующая формула:

$$s(t) = \frac{1}{K_\psi} \int_{R^+} \int_R C(a, b) a^{-1/2} \psi \frac{t-b}{a} \frac{dadb}{a^2}, \quad (16)$$

где K_ψ - константа, определяемая функций ψ .

Функция $\Psi \in L^2(\mathbf{R})$ называется ортогональным вейвлетом, если семейство $\{\Psi_{jk}\}$, определяемое формулой $\psi_{j,k} := 2^{k/2} \psi(2^k - j)$, $j, k \in \mathbf{Z}$, является ортонормированным базисом в пространстве $L_2(\mathbf{R})$, т. е.

$$\langle \psi_{jk}, \psi_{lm} \rangle = \delta_{jl} \cdot \delta_{km}, \quad j, k, l, m \in \mathbf{Z},$$

где

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq l \end{cases}.$$

В этом случае любая функция $f \in L^2(\mathbf{R})$ может быть точно представлена рядом

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{jk} \psi_{jk}(x),$$

который сходится в $L_2(\mathbf{R})$. Имеет место реставрация $f(x)$. Многочисленные примеры на вейвлет-анализ и синтез сигналов различной формы можно найти в [5,11].

Функция Хаара $H := X_{[0,1/2]} - X_{[1/2,1]}$ - простейший пример ортогонального вейвлета. Функция ρ у него имеет значение 1 в интервале $[0,1]$ и 0 за пределами этого интервала. Функция ρ имеет вид прямоугольных импульсов — меандра (значение 1 в интервале $[0,0.5]$ и -1 в интервале $[0.5,1]$). Конструирование вейвлетов (начиная с вейвлетов Хаара) дано в работах [6, 7]. В пакеты расширения современных СКМ включены уже десятки типов вейвлетов — как ортогональных, так и не ортогональных [11].

Итак, во избежание избыточности вейвлет-преобразований, можно задавать дискретные значения a и b на некотором множестве $Z = \{\dots -1, 0, 1, \dots\}$ равные:

$$a = 2^j \text{ и } b = k2^j,$$

где j и k — — целые числа, хотя возможны и иные способы задания дискретных значений a и b . Параметр j называется параметром масштаба. При этом вейвлет-функция может быть представлена в виде:

$$\psi_{j,k}(t) = a_0^{-j/2} \psi(a_0^{-j} t - k) \quad (17)$$

Условие, что множество $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbf{Z}}$ образует ортонормированную систему, означает, что любая функция $f \in L_2(\mathbf{R})$ может быть точно представлена рядом:

$$f = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \quad (18)$$

Тогда *прямое дискретное вейвлет-преобразование (ПДВП)* сводится в вычислению коэффициентов $C(a, b)$ по формуле (4), естественно, с подстановкой дискретных значений a и b , т. е., в конечном счете:

$$(j, k) = d_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} a_0^{-j/2} \psi(a_0^{-j} t - k) s(t) dt \quad (19)$$

Обратное дискретное вейвлет-преобразование (ОДВП) для непрерывных сигналов задается формулой:

$$s(t) = \frac{1}{C_\psi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} C(j, k) a_0^{-j/2} \psi(a_0^{-j} t - k) \quad (20)$$

В пакете Wavelet Toolbox системы MATLAB осуществляется нормировка базовых функций в частотной области таким образом, что $C_\psi = 1$. При этом окончательная *формула реконструкции* сигнала на основании (20) записывается в виде:

$$s(t) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} C(j, k) \psi_{j,k}(t) \quad (21)$$

Для ортогональных вейвлетов, например вейвлетов Добеши, возможно представление сигнала на основе суммирования его грубого представления с детализирующими локальными представлениями сигнала. Для этого используется *кратномасштабный анализ (multiresolution analysis) — КМА*. Он базируется на следующих, исходных предпосылках:

- пространство сигналов V может быть разбито на иерархически вложенные подпространства V_j , которые не пересекаются и объединение которых дает в пределе $L^2(\mathbf{R})$;
- для любой функции $s(t) \in V_j$ ее сжатая версия принадлежит пространству V_{j-1} ;
- существует такая функция $\varphi(x) \in V_0$, для которой ее сдвиги $\varphi_{0,j}(t) = \varphi(t - k)$ при $k \in \mathbf{Z}$ образуют ортонормированный базис пространства V_0 .

Так как функции $\varphi_{0,k}(t)$ образуют ортонормированный базис пространства V_0 , то функции

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j} t - k) \quad (22)$$

образуют ортонормированный базис пространства. Если дерево декомпозиции сигнала при вейвлет-преобразовании отсчитывать вниз, то можно сказать, что сигнал $s(t)$ есть предел аппроксимации $s_j(t) \in V_j$ при $j \rightarrow -\infty$ т. е.

$$s(t) = \lim_{j \rightarrow -\infty} s_j(t)$$

В соответствии с этим, при больших j мы получаем грубые приближения сигнала, а при малых — точные. Аппроксимация сигнала соответствует итерационной формуле:

$$s_j(t) = \sum_j C(j, k) \varphi_{j,k}(t), \quad (23)$$

причем

$$\varphi_{0,0}(t) = 2 \sum_k h_k \varphi(2t - k), \quad (24)$$

где h_k — некоторая последовательность. Сумма приближенной и детализирующей компонент, в конечном итоге, и дает исходный сигнал с тем или иным приближением — (22) и (24). В качестве стартового значения J часто берут 0, что, впрочем, не обязательно.

В общем случае реконструкция сигнала на n -ом уровне задается выражением:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j_n, k} \varphi_{j_n, k}(t) + \sum_{j=j_n}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j, k} \psi_k(t), \quad (25)$$

где a — аппроксимирующие и d — детализирующие коэффициенты.

Первой СКМ в ядро которой были включены функции прямого и обратного дискретных вейвлет-преобразований стали системы Mathcad. Для прямого преобразования используется функция wave, а для обратного iwave [5, 11]. Используются 4-коэффициентные ортогональные вейвлеты Добеши. Рис. 6 показывает создание сложного нестационарного сигнала, построение его графика и графика сигнала, прошедшего прямое, а затем обратное вейвлет-преобразования. Преобразованный сигнал практически ничем не отличается от исходного.

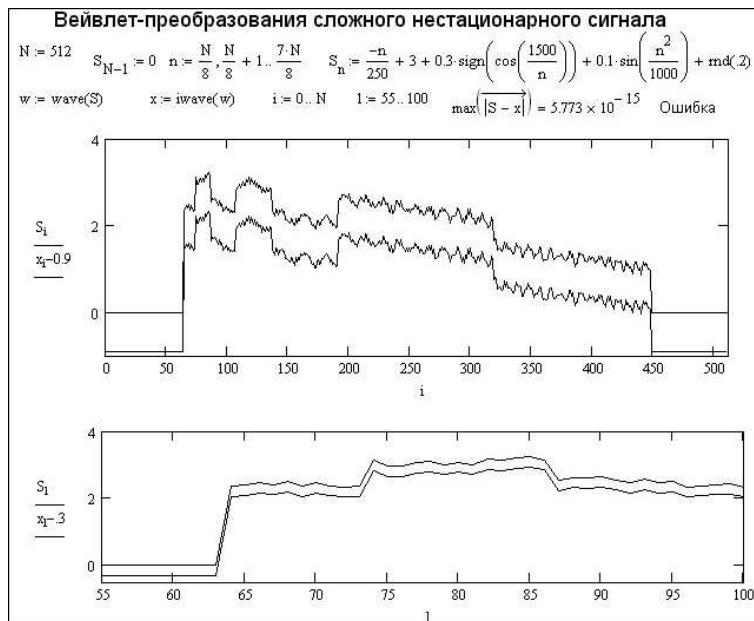


Рис.6. Пример создания сложного сигнала и его построения до и после вейвлет-преобразований

Для ортогональных вейвлетов существует *быстрое вейвлет-преобразование (Fast Wavelet Transform)*, называемое также *пирамидальным алгоритмом Малла (Mallat algorithm)*. Быстрое вейвлет-преобразование можно осуществлять, используя выражения:

$$a_{j+1,k} = \sum_m h_m a_{j,2k+m} \quad \text{и} \quad d_{j+1,k} = \sum_m g_m a_{j,2k+m}$$

$$\text{при } a_{0,k} = \int f(t) \varphi(t - k) dt$$

Это удобнее делать в частотной области, используя пары фильтров - низкочастотные **L₀** и высокочастотный **H₁**. Коэффициентами их передаточных характеристик являются детализирующие **sD** и аппроксимирующие **sA** коэффициенты. Описание этого подхода можно найти в [10]. Там же приведены диаграммы реализации алгоритма Малла и другие средства для работы с вейвлетами, включая обработку сигналов и изображений. Достаточно полное описание вейвлетов и инструментария для работы с ними дано в монографии [11]. Там же можно найти массу примеров применения вейвлет-преобразований.

Литература

1. Дьяконов В. П. Компьютерная математика. Теория и практика. М.: Нолидж.- 2001, 1296 с.
2. Дьяконов В. П. Intel. Новейшие информационные технологии. Достижения и люди. М.: СОЛОН-Пресс.- 2004, 416 с.
3. Кристаллинский Р. Е., Кристаллинский В. Р. Преобразование Фурье и Лапласа в системах компьютерной математики. М.: Горячая линия. Телеком.- 2006, 216 с.
4. Дьяконов В. П. Современная осциллография и осциллографы. М.: СОЛОН-Пресс.- 2005, 320 с.
5. Дьяконов В. П. Mathcad 11/12/13 в математике. Справочник. М.: Горячая линия. Горячая линия. Телеком.- 2007, 958 с.
6. И. Добеши. Десять лекций по вейвлетам. Пер. с англ. Е. В. Мищенко. Под ред. А. П. Петухова. М.: РХД, 2001, 464 с.
7. К. Чуи. Введение в вейвлеты. Пер. с англ. под ред. Я. М. Жилейкина. М.: Мир, 2001, 412 с.
8. В. И. Воробьев, В. Г. Грибунин. Теория и практика вейвлет-преобразований. С. Пб.: ВУС.- 1999.
9. И. Я. Новиков, С. Б. Стечкин, Основные конструкции всплесков, Фундаментальная и прикладная математика, т. 3, вып. 4.- 1997.
10. Дьяконов В. П. Абраменкова И. В. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. СПб.: Питер.- 2002, 608 с.
11. Дьяконов В. П. Вейвлеты. От теории к практике. Изд. 2-е переработанное и дополненное. М.:Солон-Пресс.- 2004,400 с.