ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ВО ВСЕЛЕННОЙ ФРИДМАНА СРЕДСТВАМИ ПАКЕТА MAPLE

Игнатьев Ю.Г., Эльмахи Н.

E-mail: ignatev_rambler.ru, Nourdino@yahoo.com

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, Казань

Аннотация. *Построена динамическая модель сферических возмущений мира Фридмана при произвольном уравнении состояния и созданы анимационные модели эволюции плотности возмущений средствами пакета Maple.*

The research of the spherical perturbations' dynamic model in Friedmann Universe by means of Maple package

Ignatyev Ty., Elmahi N.

Abstract. *It is constructed the dynamic model of Friedmann world's spherical perturbations at random equation of state and created animation models of perturbations density's evolution by means of Maple package.*

Введение

В ряде работ одного из Авторов совместно с А.А.Поповым [1]-[3] строилась теория сферических возмущений мира Фридмана в связи с необходимостью развития релятивистской кинетической теории с учетом гравитационных взаимодействий. Примененная для вывода кинетических уравнений процедура одного из Авторов усреднения локальных флуктуаций гравитационного поля выявила интересный факт: средние квадратичные флуктуации гравитационного поля выступаю в роли тензора энергии-импульса идеальной жидкости с предельно-жестким уравнением состояния [3]. В работе одного из Авторов совместно с А.А.Поповым были получены точные решения уравнений для сферически-симметричных возмущений ультрарелятивистского мира Фридмана с произвольным индексом кривизны [4].

Симметрия пространства и тензор энергии-импульса

Рассмотрим пространство-время со сферической симметрией, метрику которого в *изотропной* системе координат[1] $(r, \theta, \varphi, \eta)$, где η - временная, r - радиальная переменные, можно записать в виде:

$$ds^2 = e^{\nu} d\eta^2 - e^{\lambda}[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \qquad (1)$$

где $\lambda = \lambda(r, \eta)$; $\quad \nu = \nu(r, \eta)$ -произвольные скалярные функции своих аргументов.

В условиях сферической симметрии пространства-времени тензор энергии-импульса, как известно, принимает вид тензора энергии-импульса идеальной изотропной жидкости:

$$T^{ik} = (\varepsilon + p)u^i u^k - p g^{ik}, \qquad (2)$$

где скаляры $\varepsilon(r, \eta)$ и $p(r, \eta)$ - плотность энергии и давление жидкости, соответственно, а u^i - единичный времениподобный вектор динамической скорости этой жидкости:

$$g_{ik} u^i u^k = 1. \qquad (3)$$

Таким образом, найдем ненулевые компоненты ТЭИ:

$$T_4^1 = (\varepsilon + p)e^{(\nu-\lambda)/2}\frac{v}{1 - v^2}; \quad T_4^4 = \frac{\varepsilon + v^2 p}{1 - v^2};$$

$$T_1^1 = -\frac{\varepsilon v^2 + p}{1 - v^2}; \quad T_2^2 = T_3^3 = -p. \qquad (4)$$

[1] Т.е., в системе координат, в которой метрика трехмерного пространства принимает конформно-плоский вид

Уравнения Эйнштейна

Нетривиальные уравнения Эйнштейна относительно метрики (1) имеют вид:

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda} \quad \frac{\lambda'^2}{2} + \lambda'\nu' + \frac{2}{r}(\lambda' + \nu') \quad - e^{-\nu} \quad \ddot{\lambda} - \frac{1}{2}\dot{\lambda}\dot{\nu} + \frac{3}{4}\dot{\lambda}^2 \quad = 8\pi\frac{\varepsilon v^2 + p}{1 - v^2}; \tag{5}$$

$$\frac{1}{4}e^{-\lambda} \quad 2(\lambda'' + \nu'') + \nu'^2 + \frac{2}{r}(\lambda' + \nu') \quad - e^{-\nu} \quad \ddot{\lambda} - \frac{1}{2}\dot{\lambda}\dot{\nu} + \frac{3}{4}\dot{\lambda}^2 \quad = 8\pi p; \tag{6}$$

$$-e^{-\lambda} \quad \lambda'' + \frac{1}{4}\lambda'^2 + \frac{2}{r}\lambda' \quad + \frac{3}{4}e^{-\nu}\dot{\lambda}^2 = 8\pi\frac{\varepsilon + v^2 p}{1 - v^2} \quad (= 8\pi T_4^4); \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda}(2\dot{\lambda}' - \nu'\dot{\lambda}) = 8\pi(\varepsilon + p)e^{(\nu-\lambda)/2}\frac{v}{1 - v^2} \quad (= 8\pi T_4^1); \tag{8}$$

где f' означает производную от функции f по радиальной переменной r, а $\dot{f}$ - производную по временной переменной η и всюду принята универсальная система единиц, в которой $G = c = \hbar = 1$. Вычитая из обеих частей уравнения (5) соответствующие части уравнения (6), получим с учетом (4) следствие:

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda} \quad \frac{1}{2}\lambda'^2 + \lambda'\nu' - \frac{1}{2}\nu'^2 + \frac{1}{r}(\lambda' + \nu') - (\lambda'' + \nu'') \quad = 8\pi(\varepsilon + p)\frac{v^2}{1 - v^2}. \tag{9}$$

Фоновое пространство-время

В изотропных сферических координатах невозмущенное гравитационное поле описывается метрикой однородной изотропной вселенной:

$$ds^2 = a^2(\eta) \quad d\eta^2 - \frac{1}{\rho^2(r)}[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)] \quad , \tag{10}$$

где:

$$\rho(r) = 1 + \frac{1}{4}kr^2, \tag{11}$$

а *индекс кривизны* $k = 0$ - для пространственно-плоской вселенной и $k = \pm 1$ - для вселенной с положительной и отрицательной кривизной 3-х мерного пространства, соответственно. При этом r и η являются безразмерными переменными, а *масштабный фактор* $a(\eta)$ имеет размерность длины. Таким образом в невозмущенном состоянии введенные скалярные метрические функции λ и ν равны:

$$\nu_0 = \ln a^2(\eta); \quad \lambda_0 = \ln \quad \frac{a(\eta)}{\rho(r)} \quad ^2, \tag{12}$$

при этом вследствие однородности пространства времени:

$$p = p_0(\eta); \quad \varepsilon = \varepsilon_0(\eta); \quad v_0 = 0. \tag{13}$$

Подставляя (12), (13) в уравнения Эйнштейна (5)-(9), получим систему уравнений, описывающую динамику вселенной Фридмана:

$$\frac{1}{a^2} \quad \frac{\dot{a}^2}{a^2} + k \quad = \frac{8\pi}{3}\varepsilon; \tag{14}$$

$$\frac{1}{a^2} \quad 2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} + k \quad = -8\pi p. \tag{15}$$

Как известно, второе из этих уравнений, (15), можно заменить на алгебраически-дифференциальное следствие первого и второго (см., например, [**?**]):

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + p) = 0. \tag{16}$$

Если нам известно уравнение состояния, т.е., зависимость вида:

$$p = p(\varepsilon), \tag{17}$$

то уравнение (16) интегрируется в квадратурах:

$$-3\ln a = \int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p(\varepsilon)} + \mathrm{Const}. \tag{18}$$

Подставляя решение (18) в уравнение (14), получим замкнутое дифференциальное уравнение первого порядка относительно $\varepsilon(\eta)$. В случае *баротропного* уравнения состояния:

$$p = \kappa\varepsilon \tag{19}$$

уравнение (16) легко интегрируется:

$$\varepsilon = c_1 a^{-3(\kappa+1)}, \tag{20}$$

а уравнение (14) интегрируется в квадратурах. Указанные уравнения интегрируются в элементарных функциях для ранней Вселенной ($t \to 0$). Как известно в этом случае поведение решений не зависит от индекса кривизны k и не отличается от поведения решений для пространственно плоской Вселенной ($k = 0$):

$$a = a_1 \eta^{\dfrac{2}{3\kappa+1}}; \ \varepsilon = c_1 a_1^{-3(1+\kappa)} \eta^{-\dfrac{6(1+\kappa)}{3\kappa+1}}, \quad \kappa + 1 \neq 0, \tag{21}$$

где постоянные a_1 и c_1 связаны соотношением:

$$a_1 = \quad (3\kappa+1)\sqrt{\frac{2\pi c_1}{3}}\Biggr)^{\dfrac{2}{3\kappa+1}}, \quad 1 + 3\kappa \neq 0. \tag{22}$$

При $\kappa = -1$ получаем из (21) так называемое инфляционное решение:

$$a = -\frac{1}{\Lambda\eta}, \quad t = -\ln\eta;$$

$$a = a_1 e^{\Lambda t}; \quad \varepsilon = \frac{3\Lambda^2}{8\pi} = \mathrm{const}. \tag{23}$$

Решения (22), соответствующие значениям $\kappa < -1$, описывают так называемую *темную материю*.

Уравнения для сферически-симметричных возмущений

Рассмотрим теперь малые сферически симметричные возмущения однородного изотропного космологического решения (12), полагая:

$$\begin{aligned} &\lambda = \ln a^2(\eta) + \delta\lambda; \qquad \nu = \ln a^2(\eta) + \delta\nu; \\ &p = p_0(\eta) + \left.\frac{dp}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon_0} \delta\varepsilon; \quad \varepsilon = \varepsilon_0(\eta) + \delta\varepsilon, \end{aligned} \tag{24}$$

где скалярные функции $\delta\lambda(r,\eta)$, $\delta\nu(r,\eta)$, $\delta\varepsilon(r,\eta)$, $v(r,\eta)$ будем полагать малыми одного порядка малости. Подставляя (24) в уравнение (9) в первом приближении по малости возмущений $\delta\lambda, \delta\nu, \delta\varepsilon$, v получим одно замкнутое уравнение относительно функции $\delta\lambda + \delta\nu$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{\rho(r)}{r}(\lambda+\nu)' \quad = 0. \tag{25}$$

Интегрируя уравнение (25), найдем (см. [4]): его решения, выраженные через пару произвольных функций $C_1(\eta)$, $C_2(\eta)$. Будем в дальнейшем искать лишь такие решения уравнений Эйнштейна класса C^1, которые за некоторой сферой совпадают с однородным изотропным невозмущенным решением. Такие решения соответствуют запаздывающим решениям уравнений гиперболического типа. Тогда согласно должно быть (см. [4]):

$$\delta\lambda + \delta\nu = 0, \Rightarrow \ \delta\lambda = -\delta\nu. \tag{26}$$

В работе [4] исследованы сферически симметричные возмущения только в ультрарелятивистской вселенной ($\kappa = 1/3$), но при этом получены решения линеаризированных уравнений Эйнштейна для всех типов вселенной Фридмана. В этой статье мы ограничимся случаем пространственно-плоской вселенной ($k = 0$), но коэффициент баротропы κ будем считать произвольным. Таким образом, с учетом фоновых уравнений Эйнштейна (14)-(15), которые в случае $k = 0$ имеют своим следствием:

$$2\frac{\ddot a}{a} = \frac{\dot a^2}{a^2}(1 - 3\kappa), \tag{27}$$

получим замкнутую систему трех дифференциальных уравнений Эйнштейна, линеаризированных вокруг фонового решения (10), относительно трех неизвестных, $\delta\nu(r,\eta)$, $\delta\varepsilon(r,\eta)$, $v(r,\eta$:

$$\delta\ddot\nu + 3\delta\dot\nu\frac{\dot a}{a} - 3\kappa\delta\nu\frac{\dot a^2}{a^2} = 8\pi a^2 \delta p; \tag{28}$$

$$3\delta\dot{\nu}\frac{\dot{a}}{a}+3\delta\nu\frac{\dot{a}^2}{a^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\delta\nu=-8\pi a^2\delta\varepsilon; \tag{29}$$

$$\frac{1}{a^3}\frac{\partial}{\partial\eta}a\delta\nu'=-8\pi\varepsilon_0(1+\kappa)v. \tag{30}$$

Последнее из этой системы уравнений, (30), является определением радиальной скорости, $v(r,\eta)$. Одно из уравнений (28),(29) определяет возмущение плотности энергии, $\delta\varepsilon(r,\eta$.

Выделение частицеподобных решений

Имея ввиду в дальнейшем рассмотрение и частицеподобных решений уравнений для возмущений, рассмотрим канонические уравнения движения классической гравитирующей точечной частицы в гравитационном поле, которой соответствует δ-образное распределение плотности энергии. В результате двух конкурирующих процессов - аккреции окружающей материальной среды и обратного процесса - испарения вещества масса классической точечной частицы в материальной среде не может быть постоянной. Поэтому запишем инвариантную функцию Гамильтона классической массивной частицы в виде[2]:

$$\mathcal{H}(x,P)=\sqrt{g^{ik}P_iP_k}-m, \quad (=0),$$

где $m=m(s)$ - скалярная функция. В сферически-симметричной метрике решением уравнений движения, не нарушающим сферической симметрии, является линия времени, которая соответствует состоянию покоя частицы в начале координат, при этом масса покоя может являться произвольной функцией координатного времени:

$$m=m(\eta). \tag{31}$$

В [7], [8] показано, что для выделения частицеподобной, сингулярной, части решения в дальнейшем удобно ввести новую полевую функцию $\psi(r,\eta)$, такую что [7]:

$$\delta\nu=-\delta\lambda=2\frac{\psi(r,\eta)-m(\eta)}{ar}\equiv 2\frac{\Phi(r,\eta)}{ar}, \tag{32}$$

причем должно выполняться соотношение:

$$\lim_{r\to 0}\frac{\psi}{r}\ <\infty. \tag{33}$$

Выделяя в правой части уравнения (28) сингулярную часть плотности энергии, подставляя в уравнения (27)-(29) функцию $\delta\nu$ в форме (32) и исключая сингулярную часть, получим систему линейных уравнений относительно функции Φ и возмущений плотности энергии и скорости:

$$\ddot{\Phi}+\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi}-\frac{3}{2}(1+\kappa)\frac{\dot{a}^2}{a^2}\Phi=4\pi ra^3\kappa\delta\varepsilon, \tag{34}$$

$$3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi}-\psi''=-4\pi ra^3\delta\varepsilon, \tag{35}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\dot{\Phi}}{r}=-4\pi ra^3(1+\kappa)\varepsilon_0 v. \tag{36}$$

Умножая уравнение (35) на κ и складывая обе его части с соответствующими частями уравнения (34), получим замкнутое уравнение:

$$\ddot{\Phi}+\frac{\dot{a}}{a}(1+3\kappa)\dot{\Phi}-\frac{3}{2}(1+\kappa)\frac{\dot{a}^2}{a^2}\Phi-\kappa\psi''=0. \tag{37}$$

В [8] доказана следующая теорема:

Теорема. *Линейные сферически - симметричные возмущения метрики Фридмана описываются системой двух независимых линейных однородных уравнений (38)*

$$\ddot{\Psi}+\frac{\dot{a}}{a}(1+3\kappa)\dot{\Psi}-\frac{3}{2}(1+\kappa)\frac{\dot{a}^2}{a^2}\Psi-\kappa\Psi''=0 \tag{38}$$

и (39)

$$\ddot{\mu}+\frac{\dot{a}}{a}(1+3\kappa)\dot{\mu}-\frac{3}{2}(1+\kappa)\frac{\dot{a}^2}{a^2}\mu=0 \tag{39}$$

[2] Подробности см. в [6]

относительно двух функций $\mu(\eta)$ и $\psi(r,\eta)$, несингулярных в начале координат. Сферически - симметричные возмущения плотности энергии и скорости определяются через возмущения метрики соотношениями (40)-(41):

$$\delta\varepsilon = -\frac{1}{4\pi r a^3} \quad 3\frac{\dot{a}}{a}(\dot{\Psi} - \dot{\mu}) - \Psi'' \quad , \tag{40}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\dot{\Psi} - \dot{\mu}}{r} = -4\pi r a^3 (1+\kappa)\varepsilon_0 v. \tag{41}$$

Эволюция массы частицеподобного источника

Исследуем космологическую эволюцию массы частицеподобного источника. Переходя в уравнении эволюции массы (39) от переменной η к переменной $a(\eta)$ с учетом соотношения (27) приведем его к виду:

$$\frac{d^2\mu}{da^2} + \frac{3}{2}\frac{1+\kappa}{a}\frac{d\mu}{da} - \frac{3}{2}(1+\kappa)\frac{\mu}{a^2} = 0. \tag{42}$$

Общее решение этого уравнения находится без труда:

$$\mu = C_+ a + C_- a^{-\frac{3}{2}(1+\kappa)}, \tag{43}$$

где C_+ и C_- - произвольные константы. Член с коэффициентом C_+ в этом решении соответствует аккреционным процессам, член с коэффициентом C_- - процессам испарения. Из решения (43) видно, что конечной массе частицы в момент времени $t = 0$ соответствует $C_- = \tilde{C}_- = 0$. Решения (43) обобщают решения, полученные ранее в [3]- [4] для двух частных значений коэффициента адиабаты $\kappa = 0$ и $\kappa = 1/3$, соответствующих нерелятивистскому и ультрарелятивистскому уравнения состояния, соответственно. Рассмотрим численный пример. Пусть на планковский момент времени $t = t_{Pl}$ масса частицеподобного источника равна планковской массе, тогда на современный момент времени $t \sim 10^{60} t_{Pl}$ согласно (43) современная масса "частицы" изменяется в пределах от $10^{-18} M_\odot$ при $\kappa = 1$ до $10^2 M_\odot$ при $\kappa = 0$.

Эволюционное уравнение для несингулярной моды возмущений

Из общего невозмущенного решения (21) получим полезные отношения:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3\kappa+1}\frac{1}{\eta}; \quad \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{2(1-3\kappa)}{(3\kappa+1)^2}\frac{1}{\eta^2}, \quad (1+\kappa \neq 0), \tag{44}$$

используя которые, приведем уравнение (38) для несингулярной моды возмущений к виду:

$$\ddot{\Psi} + \frac{2}{\eta}\dot{\Psi} - \frac{6(1+\kappa)}{(1+3\kappa)^2}\frac{\Psi}{\eta^2} - \kappa\Psi'' = 0. \tag{45}$$

Общее решение эволюционного уравнения в виде степенного ряда для случая $\kappa \neq 0$, $1+\kappa \neq 0$

Представим решение эволюционного уравнения (45), удовлетворяющее условию (33), в виде ряда по степеням радиальной переменной r:

$$\Psi(r,\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(\eta) r^n. \tag{46}$$

Подставляя функцию $\Psi(r,\eta)$ в форме (46) в эволюционное уравнение (45) и приравнивая нулю коэффициенты при каждой степени r в полученном уравнении, получим цепочку зацепляющихся уравнений:

$$\Psi_{2m} = 0; \quad \ddot{\Psi}_{2m+1} + 2\frac{\dot{\Psi}_{2m+1}}{\eta} - \frac{6(1+\kappa)}{(1+3\kappa)^2}\frac{\Psi_{2m+1}}{\eta^2} - \kappa(2m+3)(2m+2)\Psi_{2m+3}; \quad m = \overline{0,\infty} \tag{47}$$

Таким образом, общее решение представляет собой ряд по нечетным степеням радиальной переменной r. Для частных решений, отвечающих специальным физическим условиям, этот ряд можно оборвать на любом нечетном $n = N \geqslant 3$. В этом случае для последнего члена ряда, полагая $\Psi_n(\eta) = 0, \quad n > N$, получаем из (47) замкнутое уравнение:

$$\ddot{\Psi}_N + 2\frac{\dot{\Psi}_N}{\eta} - \frac{6(1+\kappa)}{(1+3\kappa)^2}\frac{\Psi_N}{\eta^2} = 0, \quad (N = 2p+1). \tag{48}$$

Поскольку это уравнение ничем не отличается от эволюционного уравнения для массы частицеподобного источника, его общее решение с точностью до переобозначений будет совпадать с решением (43)с некоторыми произвольными константами C_+^p и C_-^p.

Подставляя это решение в предпоследнее уравнение цепочки (47), получим уравнение для определения Ψ_{2p-1}:

$$\ddot{\Psi}_{2p-1}+2\frac{\dot{\Psi}_{2p-1}}{\eta}-\frac{6(1+\kappa)}{(1+3\kappa)^2}\frac{\Psi_{2p-1}}{\eta^2}=\kappa(2p+3)(2p+2)!\ \ C_+^p\eta^{\frac{2}{1+3\kappa}}+C_-^p\eta^{-\frac{3(1+\kappa)}{1+3\kappa}}\ . \tag{49}$$

Вследствие линейности этого уравнения его общее решение является суммой общего решения соответствующего однородного уравнения, Ψ^0_{2p-1}, и частного решения неоднородного, Ψ^1_{2p-1}. Но общее решение однородного совпадает с уже упоминавшемся решением (39), а частное решение можно представить в виде суммы двух решений, соответствующих двум членам в правой части (43). Очевидно поэтому, что соответствующее частное решение имеет вид:

$$\Psi^1_{2p-1}=A_{p-1}\eta^{\frac{2}{1+3\kappa}+2}+B_{p-1}\eta^{-\frac{3(1+\kappa)}{1+3\kappa}+2}. \tag{50}$$

Таким образом, найдем константы $A_\pm$. Подставляя полученные решения в предыдущие уравнения, повторим аналогичные выкладки. Тем самым мы указали алгоритм построения общего решения эволюционного уравнения (45), сводящийся к повторению операций дифференцирования. Это общее решение, соответствующее наивысшей степени $N=(2p+1)$ радиальной переменной, содержит $2N$ произвольных констант, появляющихся всякий раз при решении соответствующих однородных уравнений.

Начальные и граничные условия

Таким образом, как мы отмечали и в предыдущей статье, при $\kappa>0$ сферически-симметричные возмущения метрики Фридмана описываются гиперболическим уравнением, при $\kappa<0$ - эллиптическим. Характеристиками гиперболического уравнения (45) являются:

$$r\mp\sqrt{\kappa}\eta=\mathrm{Const}, \tag{51}$$

т.е. расходящиеся и сходящиеся волны.

Пусть в момент “времени” η_0 сферически-симметричное возмущение метрики сосредоточено в сфере “радиуса” r. Т.е., в этот момент выполнены следующие граничные условия:

$$\delta\nu(r,\eta_0)|_{r=r_0}=-\,\delta\lambda(r,\eta_0)|_{r=r_0}=0; \tag{52}$$

$$\delta\nu'(r,\eta_0)\ _{r=r_0}=-\,\delta\lambda'(r,\eta_0)\ _{r=r_0}=0. \tag{53}$$

Внутри этой сферы заданы функции $\delta\nu(r,\eta_0)$ и $\delta\lambda(r,\eta_0)$ вместе со своими первыми производными. Тогда можно следующим образом сформулировать граничные и начальные условия задачи в терминах введенных функций:

$$\Phi(r,\eta)|_{r\geqslant r_0+\sqrt{\kappa}(\eta-\eta_0)}=0;\qquad \Phi'(r,\eta)\ _{r\geqslant r_0+\sqrt{\kappa}(\eta-\eta_0)}=0, \tag{54}$$

$$\Phi(r,\eta_0)=\phi(r);\qquad \frac{\partial}{\partial\eta}\Phi(r,\eta)\ _{\eta_0}=f(r). \tag{55}$$

При этом вследствие уравнений на возмущения за границей “звукового” горизонта автоматически должны обращаться в нуль возмущения плотности энергии, давления и скорости:

$$\delta\varepsilon(r,\eta)|_{r>r_0+\sqrt{\kappa}(\eta-\eta_0)}=0;\quad v(r,\eta)|_{r>r_0+\sqrt{\kappa}(\eta-\eta_0)}=0. \tag{56}$$

Рассмотрим частные решения в виде степенных рядов по радиальной переменной, удовлетворяющие начальным (54) и граничным (55) условиям. В этом случае функция $\Phi(r,\eta)$ имеет вид:

$$\Phi(r,\eta)=\alpha(\eta)+\beta(\eta)r+\gamma(\eta)r^3. \tag{57}$$

Напомним, что член с нулевой степенью по r в функции $\Phi(r,\eta)$ описывает массу точечноподобного источника. Поэтому сразу получим: $\alpha(\eta)=\mu(\eta)$. Выписывая граничные условия (54) в момент времени $\eta=\eta_0$, получим связь констант:

$$\alpha_0\equiv\alpha(\eta_0)=\mu_0;\quad \beta(\eta_0)\equiv\beta_0=-\frac{3\mu_0}{2r_0};\quad \gamma(\eta_0)\equiv\gamma_0=\frac{\mu_0}{2r_0^3}, \tag{58}$$

где $\mu_0\equiv\mu(\eta_0)$. Таким образом:

$$\Phi(r,\eta_0)=\mu_0\left[1-\frac{3}{2}\frac{r}{r_0}+\frac{1}{2}\quad\frac{r}{r_0}\quad^3\right],(r<r_0);\quad \text{и}\quad \Phi(r,.\eta)=0,\ (r\geqslant r_0). \tag{59}$$

При этом имеют место соотношения:

$$\beta(\eta)=C_+^0\eta^{\frac{2}{1+3\kappa}}+C_-^0\eta^{-\frac{3(1+\kappa)}{1+3\kappa}}+\frac{3\kappa(1+3\kappa)}{7+9\kappa}C_+^1\eta^{2\,\frac{(2+3\kappa)}{1+3\kappa}}-\frac{\kappa(1+3\kappa)}{1-\kappa}C_-^1\eta^{-\frac{1-3\kappa}{1+3\kappa}}, \tag{60}$$

$$\gamma(\eta) = C^1_+ \eta^{\frac{2}{1+3\kappa}} + C^1_- \eta^{-\frac{3(1+\kappa)}{1+3\kappa}}; \tag{61}$$

Таким образом, полагая $\eta = \eta_0$ получим группу начальных условий:

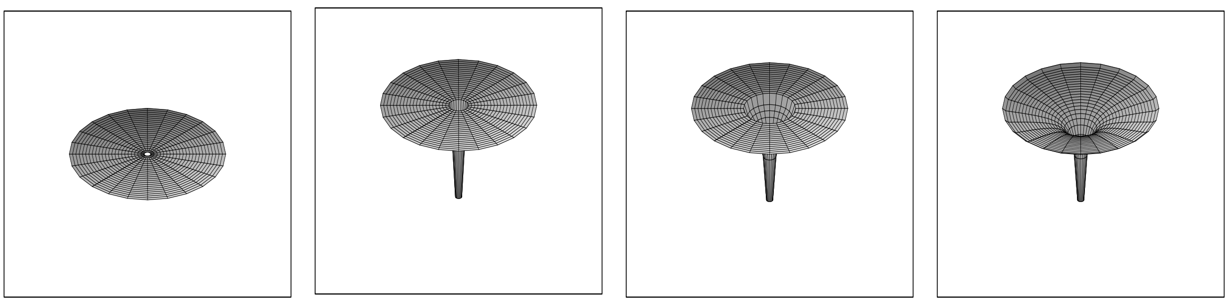
$$\mu_0 = C_+ \eta_0^{\frac{2}{1+3\kappa}} + C_- \eta_0^{-\frac{3(1+\kappa)}{1+3\kappa}}; \tag{62}$$

$$\beta_0 = -\frac{3\mu_0}{2r_0} = C^0_+ \eta_0^{\frac{2}{1+3\kappa}} + C^0_- \eta_0^{-\frac{3(1+\kappa)}{1+3\kappa}} + \frac{3\kappa(1+3\kappa)}{7+9\kappa} C^1_+ \eta_0^{2\frac{(2+3\kappa)}{1+3\kappa}} - \frac{\kappa(1+3\kappa)}{1-\kappa} C^1_- \eta_0^{-\frac{1-3\kappa}{1+3\kappa}}; \tag{63}$$

$$\gamma_0 = \frac{\mu_0}{2r_0^3} = C^1_+ \eta_0^{\frac{2}{1+3\kappa}} + C^1_- \eta_0^{-\frac{3(1+\kappa)}{1+3\kappa}}. \tag{64}$$

Соотношения (62)-(64) необходимо рассматривать как систему уравнений относительно коэффициентов $C^i_\pm$. Как видим, это система трех линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно 6 неизвестных. К этой системе необходимо добавить аналогичную систему уравнений из начальных условий (55) относительно временной производной функции.

В пакете Maple полученные решения представлены в виде анимационных процедур, позволяющих непосредственно наблюдать динамику развития возмущений:



а. б. в. г.

Рис.1. *Кадры анимации возмущения плотности: а. $t = 0$, б. $t = 0.1$, в. $t = 1$, г. - $t = 2$.*

Литература

[1] Ю.Г.Игнатьев, А.А.Попов. В сб. “Проблемы теории гравитации, релятивистской кинетики и эволюции вселенной”, Казань, Изд-во КГПИ, 1988, с.5-16

[2] Ю.Г.Игнатьев, А.А.Попов. Известия ВУЗов, Физика,1989, № 5, с. 82-87

[3] Yu.G.Ignat'ev and A.A.Popov. *Astrophysics and Space Science*,1990, Vol 163, pp. 153-174.

[4] Yu.G.Ignat'ev, A.A.Popov. *Physics Letters A*, 1996, Vol. 220, pp.22-29.

[5] J.L.Synge. Relativity: The General Theory, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960.

[6] Ю.Г.Игнатьев. Известия ВУЗов, Физика, 1983, № 8, с. 15-19

[7] Ю.Г.Игнатьев. Диссертация на соискание уч.степени доктора физ.-мат.наук, Минск, ИТФ АН БССР, 1988

[8] Ю.Г.Игнатьев, Н.Эльмахи. Известия ВУЗов, Физика, в печати.