# О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД

*Ибятов Р. И., Ахмадиев Ф.Г.*

E-mail: Ahkmadiev@ksaba.ru, R.Ibjatov@ksaba.ru

*Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань*

**Аннотация**. *Рассматривается течение гетерогенных сред по вращающимся проницаемым поверхностям и каналам с проницаемыми стенками. Уравнения движения, записанные в ортогональной системе координат, решаются методом поверхностей равных расходов.*

## Numerical solution of the equations of a mechanics of heterogeneous mediums

*Ibjatov R.I., Ahkmadiev F.G.*

**Abstract**. *The fluxion of heterogeneous mediums on rotaried permeable surfaces and channels with permeable walls is considered. The equations of motion which were written in orthogonal frame, are solved by a method of surfaces of equal expenditures.*

Рабочими средами для многих процессов химической, нефтехимической, пищевой и других отраслей промышленности являются многофазные гетерогенные системы. Технологический цикл, связанный с получением, переработкой и применением гетерогенных сред непременно включает в себя процессы разделения. Гидромеханические процессы разделения неоднородных сред производятся с помощью различных отстойников, фильтров и центробежных аппаратов. Расчет и проектирование таких аппаратов связаны с решением внутренних и внешних гидродинамических задач, с гетерогенными рабочими средами. Важной особенностью этих задач является наличие многообразия сложных явлений, таких, как неньютоновское реологическое состояние среды, переменность концентраций дисперсных включений, расслоение составляющих фаз, фильтрация несущей фазы через стенку.

Решение гидродинамической задачи, с учетом этих особенностей, вызывает большие трудности и требует привлечения современных методов вычислительной гидродинамики. Одним из перспективных методов, позволяющих учитывать сложную геометрию течения и нелинейную реологию среды, является метод поверхностей равных расходов. В соответствии с этим методом в поле течения суспензии вводятся поверхности равных расходов, уравнения которых строятся на основании интегрального соотношения изменения расхода $i$-ой фазы между соседними поверхностями. При этом решение уравнений гидромеханики сводится к численному определению положений этих поверхностей и скоростей на них. Преимущество данного метода состоит в том, что нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных преобразуются к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Однако, при численном моделировании течений, протекающих в областях с проницаемыми стенками, возникают дополнительные трудности. Эти особенности численных расчетов связаны с проявлением жестких свойств у получаемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений и могут иметь место, как во внешних, так и во внутренних задачах гидромеханики.

В качестве примера внешней задачи рассмотрим течение гетерогенной среды со степенным реологическим законом состояния по вращающимся проницаемым поверхностям. Рассмотрим режим фильтрования среды без образования осадка с изменением средней концентрации по длине аппарата. При этом, уравнения движения в квазигомогенном приближении могут быть записаны для смеси в целом. Течение ламинарное, осесимметрическое и установившееся. Течение рассматривается в ортогональной системе координат $(x, y, \varphi)$, у которой координата $x$ совпадает с образующей ротора.

Вращающаяся насадка представляет собой поверхность вращения, которая задана уравнением $z = f(r)$. Для выбранной формы насадки зависимость радиуса $r$ от продольной координаты $x$ определяется формулой

$$x = \int_0^r \sqrt{1 + (dz/dr)^2}\,dr.$$

Введем в поле течения поверхности равных расходов и обозначим их через $y_k = y_k(x)$, $\quad k = \overline{1, N}$, где $N$ - количество введенных поверхностей. Компоненты скорости для $k$-го слоя представим в виде $U_k = U_k[x, y_k(x)]$, $\quad V_k = V_k[x, y_k(x)]$, $W_k = W_k[x, y_k(x)]$. Тогда преобразованные уравнения движения среды на линиях тока имеют вид [1]

$$\rho U_k \frac{dU_k}{dx} = -\rho \frac{W_k^2}{r} \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{dP_k}{dx} + \rho F_y \frac{dy_k}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \quad mE_k^{n-1} \frac{\partial U_k}{\partial y} \quad + \rho F_x^k, \tag{1}$$

$$\rho U_k \frac{dW_k}{dx} = -\rho \frac{W_k}{r} \quad U_k \frac{\partial r}{\partial x} + V_k \frac{\partial r}{\partial y} \quad + \frac{\partial}{\partial y} \quad mE_k^{n-1} \frac{\partial W_k}{\partial y} \quad + \rho F_\varphi^k, \tag{2}$$

$$\frac{dy_k}{dx} = \frac{dy_{k-1}}{dx} + \frac{2V_f}{U_k^+ U_{k-1}} \delta_2^k - (y_k - y_k) \frac{d \, \ln r}{dx} - \frac{y_k - y_{k-1}}{(U_k^+ U_{k-1}^)} \quad \frac{dU_k}{dx} + \frac{dU_{k-1}}{dx} \quad , \tag{3}$$

где $E = \ (\partial W/\partial y)^2 + (\partial U/\partial y)^2 \ ^{0,5}$ - интенсивность скорости деформации.

Изменение средней концентрации определяется из уравнения

$$\frac{d\alpha_2}{dx} = -r\alpha_2 V_f \Bigg/ \int\limits_0^h rU dy. \tag{4}$$

Система уравнений (1)-(4) решается при начальных условиях:

$$x = x_{\text{н}} : \quad U = U_{\text{н}}(y), \quad W = W_{\text{н}}(y), \quad \alpha_2 = \alpha_{2\text{н}}. \tag{5}$$

Для вычисления значений слагаемых, представляющих в уравнениях движения (1), (2) изменения тензора вязкого напряжения, сеточные решения $U_k = U_k \left[x, y_k \left(x\right)\right]$ , $W_k = W_k \left[x, y_k \left(x\right)\right]$ представляются в виде разложения в ряд по полной системе базисных функций:

$$U = \sum_{j=1}^{N} A_j(x) \Psi_{kj}[y_k(x)], \tag{6}$$

$$W = \sum_{j=1}^{N} B_j(x) \Psi_{kj}[y_k(x)]. \tag{7}$$

Система (1)-(4) и начальные условия (5) представляют замкнутую систему уравнений, решение которой при известных правых частях можно получить одним из численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Одной из важнейшей внутренней задачи гидродинамики является течение жидких сред по различным криволинейным каналам и трубам с проницаемыми стенками. Течение рассматривается в ортогональной системе координат, у которой одна из координатных поверхностей $x_2 = const$ совпадает со стенкой канала, а координатные поверхности $x_1 = const$ составляют семейство нормалей к ней. При достаточно длинных каналах порядок продольной скорости будет значительно превышать порядок поперечной скорости. Тогда в квазигомогенном приближении преобразованные уравнения движения гетерогенной среды на поверхностях равных расходов (трубках тока) запишутся в виде [2]

$$\frac{\rho U^k}{H_1} \frac{dU^k}{dx_1} = -\frac{1}{H_1} \frac{dP_k}{dx_1} - \frac{\rho U^k V^k}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + T_k + \rho F_1, \qquad k = \overline{2, N} \ , \tag{8}$$

где $T_k = \frac{1}{H_1^2 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x_2} \quad H_1^2 H_3 \ m \quad \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{U}{H_1} \quad ^{n-1} \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{U}{H_1} \quad .$

Форма поверхностей равных расходов определяется геометрией сечения канала. Положения этих поверхностей находятся из системы уравнений

$$\frac{dy_k}{dx_1} = \frac{dy_{k-1}}{dx_1} + \frac{2H_1 \Phi_k}{\Delta_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta_k} \cdot \frac{d\Delta_k}{dx_1}, \ k = \overline{2, N} \, ; \tag{9}$$

где $\Delta_k = (UZH_2)_{k-1} + (UZH_2)_k, \Phi_2(x_1) = -\left(|V| \, Z\right)_{k=1};$

$$\Phi_k(x_1) = 0, \quad k = \overline{3, N-1} \, ; \qquad \Phi_N(x_1) = -\left(|V| \, Z\right)_{k=N} \ .$$

Процесс фильтрации через стенку канала описывается уравнениями фильтрации:
$\frac{\partial H_1 H_3 V_{mj}}{\partial x_2} = 0, \qquad V_{mj}^n = -\frac{k_{mj}}{\psi_{mj}} \frac{\partial P_{mj}}{H_2 \partial x_2}; \quad j{=}1$ и $N$, (10)

которые интегрируются аналитически. Здесь значения индекса $j$=1 и $N$ указывают на разные стенки канала.

Изменение средней концентрации определяется из уравнения

$$\frac{d\alpha_2}{dx_1} = \alpha_2 \cdot \frac{(ZH_1 V_m)_1 + (ZH_1 V_m)_N}{\int\limits_{y_1}^{y_N} UZH_2 dx_2}, \tag{10}$$

где $Z = H_3(x_3 - x_3)$, $H_i$ - коэффициенты Ляме.

Уравнения (8)-(10) решаются при начальных условиях:

$$x_1 = x_{1\text{н}} : \quad \alpha_2 = \alpha_{2\text{н}}, \quad U = U_{\text{н}}(x_2) \, . \tag{11}$$

Слагаемое $T_k$ в правой части (8) содержит частные производные по поперечной координате. Для их вычисления сеточные решения представляются в виде разложения в ряд по полной системе базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям. Граничные условия, а также система базисных функций записываются после выбора геометрии канала.

Трудности интегрирования уравнений движения для напорных течений связаны с определением падения давления по длине канала. Неизвестный градиент давления присутствует во всех рекуррентных уравнениях (8), поэтому, для разрешения системы уравнений (8)-(9) относительно $U'_k,\ y'_k,\ P'$ применяется прогонка [2]. С этой целью данную систему необходимо привести к виду

$$\frac{dU_k}{dx_1} = L_k \frac{dP}{dx_1} + I_k, \quad k = \overline{2, N-1}; \tag{12}$$

$$\frac{dy_{k-1}}{dx_1} + a_k \frac{dy_k}{dx_1} + b_k \frac{dP}{dx_1} = c_k, \quad k = \overline{2, N}. \tag{13}$$

Отметим, что система (13) достаточна для определения производных $y'_k$ и перепада давления $P'$, поскольку положения поверхностей $y_1(x_1)$ и $y_N(x_1)$ определяются из других соображений. При фильтровании среды без образования осадка они совпадают с поверхностями канала. Так как система (13) состоит из $N-1$ дифференциальных уравнений, одно уравнение освобождается для определения градиента давления $P'$.

Численные расчеты по уравнениям (1)-(4) и (10), (12), (13) были выполнены в безразмерных переменных. При выполнении численных расчетов на входном сечении задаются распределения поверхностей равных расходов и значения скоростей на них. При расчетах были использованы различные виды начального профиля - равномерный, треугольный, параболический. Во всех случаях профиль скорости развивался до некоторого установившегося вида, который не зависит от выбора начального профиля. Когда стенки непроницаемы, численные расчеты могут быть выполнены методом Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага.

В случае наличия проницаемой стенки, объем среды между стенкой и крайней поверхностью равных расходов будет убывать из-за фильтрации жидкости. Когда крайняя поверхность тока достигает проницаемую стенку, то она исчезает. При этом происходит уменьшение степени разложения сеточного решения (6), (7) в ряд. Изменение аппроксимации скорости вносит возмущение в числовое значение тензора вязкого напряжения, и, следовательно, в соответствующие слагаемые уравнения движения. Резкое изменение отдельных членов уравнения сохранения импульсов уравновешивается изменением гидродинамических параметров. В результате этого числовое решение $y_k(x)$ терпит локальное искривление. Причем, чем меньше остается количество введенных поверхностей равных расходов, тем заметнее становится локальное возмущение решения. Нами показано, что одношаговый метод Рунге-Кутты, как правило, не позволяет рассчитывать такие пикообразные участки. Поэтому был применен метод Гира, предназначенный для решения жесткой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Литература**

1. Ибятов Р.И., Холпанов Л.П., Ахмадиев Ф.Г., Фазылзянов Р.Р. Математическое моделирование течений гетерогенных сред по вращающимся проницаемым поверхностям // Теоретические основы химической технологии. 2003, т. 37, № 5, с. 479-492.
2. Ибятов Р.И., Холпанов Л.П., Ахмадиев Ф.Г., Бекбулатов И.Г. Математическое моделирование течения многофазной гетерогенной среды по проницаемой трубе // Теоретические основы химической технологии. 2005, т. 39, № 5, с. 533-541.