# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ШПЕРНЕРОВЫХ СЕМЕЙСТВ

*Кочкарев Б.С.*

E-mail:

*Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Казань*

**Аннотация**. *В предлагаемой работе продолжается исследование свойств одного класса семейств подмножеств конечного множества несравнимых по бинарному отношению включения. Приводится рекурсивный алгоритм построения этих семейств и улучшаются некоторые ранее полученные мощностные оценки.*

## About one class of shperner families

*Kochkarev B. S*

**Abstract**. *In this paper we study properties of some class. It is a class of families of subsets of finite set of incomparable by binary relation "subset". We show recursive algorithm which construct these families. Also we improve well-known power values.*

При решении многих проблем дискретной математики возникает необходимость изучать семейства подмножеств некоторого конечного множества, удовлетворяющие тем или иным ограничениям [1]. В работах [2-4] были установлены структурные свойства одного класса максимальных семейств подмножеств Шпернера [5]. В данной работе продолжается исследование свойств указанного класса семейств. Приводится рекурсивный алгоритм построения этих семейств и улучшаются некоторые ранее полученные мощностные оценки. Для полноты изложения приводятся необходимые определения и результаты из [2-4].

Пусть S- конечное множество элементов {a$_1$,a$_2$,...,a$_n$}.

Определение 1. ([6]) Семейство F подмножеств множества S называется шпернеровым, Если элементы F являются попарно несравнимыми по бинарному отношению включения.

Определение 2. ([2]) Шпернерово семейство F называется максимальным, если добавление к F любого подмножества A S нарушает свойство шпернеровости семейства F.

Определение 3. Будем говорить, что шпернерово семейство F имеет тип (k,k+1), если для любого .

В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем иметь дело с максимальными шпернеровыми семействами (м.ш.с) типа (k,k+1).

Обозначим через число элементов в которые не входит элемент и через число элементов в которые элемент входит. Пусть Очевидно, при любом справедливо неравенство $r_i \le \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}$ .

Определение 4. ([2]) Число $s, 0 \le s \le \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}$ назовем допустимым, если существует такое м.ш.с., что для некоторого

Из [2-4] известно, что если допустимое число, то для любого найдутся м.ш.с. с $r_i = s$. Поэтому в дальнейшем в качестве элемента будем рассматривать, как правило, фиксированный элемент .

Теорема 1. ([2]) Число $s = \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} - 1$ не является допустимым. Кажется естественным поставить вопрос относительно допустимых значений s в пределах $0 \le s \le \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}$ .

Теорема 2. Для м.ш.с. все числа 0,1,..., $\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} - 2$, $\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}$ . Являются допустимыми.

Очевидно, для м.ш.с. $F = \{A : |A| = k\}$ и $F' = \{A' : |A'| = k+1\}$ $r_i = \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}$ , $i = \overline{1,n}$. Следовательно, в этом случае имеем $r' = r = \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}$ .

Теорема 3. Для любого м.ш.с. G, отличного от м.ш.с. $F, F', r' < \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} - 1$

Определение 5. [3] Всякое шпернерово семейство F типа $(k, k+1,$ $|F| = r_n = s$ назовем реализацией числа s.

Определение 6. [3] Некоторая реализация F числа s называется допустимой, если существует м.ш.с. $F' \supset F$ с $r_n = s$

Очевидно, необходимым условием допустимости некоторой реализации числа s является допустимость этого числа. Из теоремы 1 вытекает.

Следствие. Никакая реализация числа $s = \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} - 1$ не является допустимой.

Для любого допустимого числа s, $0 \le s \le \begin{array}{l} n-1 \\ k \end{array}$, можно построить $\left(\begin{array}{l} n-1 \\ k \\ S \end{array}\right) 2^s$ различных реализаций с $r_n = s$, но не всякая реализация допустимого числа S является допустимой реализацией.

Теорема 4 [3] Всякая допустимая реализация F допустимого числа S однозначно доопределяется до м.ш.с. $F' \supseteq F$.

Теорема 5. Любая реализация числа $s = \begin{array}{l} n-1 \\ k \end{array}$ является допустимой реализацией.

Теорема 6. [3] Число $g(n,k)$ м.ш.с. n-элементного множества удовлетворяет неравенствам

$$2^{\left(\begin{array}{l} n-1 \\ k \end{array}\right)} < g(n,k) < 3^{\left(\begin{array}{l} n-1 \\ k \end{array}\right)} - \begin{array}{l} n-1 \\ k \end{array} \quad 2^{\left(\begin{array}{l} n-1 \\ k \end{array}\right)^{-1}}$$

Теорема 7. Существует инъективное отображение множества $F_{(k,k+1)}$ семейств типа $(k,k+1)$ в множество семейств $F_{(k+1,k+2)}$ типа $(k+1,k+2)$ для $k < \frac{n}{2} - 1$

Известно явное значение для k=1, именно

$$g(n,1) = 2^n - n$$

Поскольку общие оценки (теорема 6) для этого случая имеют вид

$$2^{\left(\begin{array}{l} n-1 \\ k \end{array}\right)} < g(n,1) < 3^{\left(\begin{array}{l} n-1 \\ k \end{array}\right)},$$

то асимптотика для $g(n,1)$ получается увеличением нижней оценки в два раза, т.е.

$$g(n,1) \sim 2 \cdot 2^{\left(\begin{array}{l} n-1 \\ 1 \end{array}\right)} \tag{1}$$

В предложении, что указанная закономерность стабильна относительно k, мы имеем

$$g(n,k) \sim (k+1) 2^{\left(\begin{array}{l} n-1 \\ k \end{array}\right)} \tag{2}$$

В частности, для n=5 число м.ш.с. типа (2,3) равно 187. Использование оценки (2) в этом случае дает

$$g(5,2) \approx 3 \cdot 2^{\left(\begin{array}{l} 4 \\ 2 \end{array}\right)} = 192$$

Кстати оценка (1) для n=5 дает расхождение от точного значения м.ш.с. типа (1,2) точно на такую же величину 5, именно $g(5,1) \approx 2^5 = 32$, тогда как точное значение $g(5,1) = 27$.

В заключение приведем рекурсивный алгоритм для построения всех м.ш.с. типа (k,k+1)

Существует единственное м.ш.с. с $r_n = 0$. Это семейство, состоящее из всех подмножеств А, $|| = k$, $a_n \in A$ и всех подмножеств В, $|| = k+1$, $a_n \notin$ . Далее построение м.ш.с. осуществляем индуктивным способом. Пусть $F_t$ множество м.ш.с., построенных на шаге t ($F_1 = \{F \cdot r_n = 0\}$). Множество $F_{t+1}$ образуется с помощью преобразований м.ш.с. из . Пусть F-произвольное м.ш.с из . Очевидно F состоит из некоторых подмножеств А,$|| = k$, $a_n \notin A$;В,$|| = k+1$, $a_n \in$ и А,; В,. Пусть $= \{, || = k, a_n \notin A, A \notin F\}$, $B = \{B, |B| = k+1, a_n \in B, B \notin F\}$. Осуществим над F следующие преобразования: добавим к F некоторое множество из $\cup$ и исключим из F все подмножества сравнимые по включению с добавленным множеством. Полученное семейство обозначим через $F'$. После исключения указанных подмножеств может случиться, что среди остальных подмножеств из $\cup$ есть подмножества несравнимые по включению с подмножествами из $F'$. Добавив последние подмножества к мы получим, очевидно, м.ш.с. Проделав указанное преобразование F относительно всех множеств из А и В и аналогичные преобразования со всеми множествами F из F$_t$, мы получим множество м.ш.с., образующих множество F$_{t+1}$. Согласно приведенным выше результатам min $r_n(F) = t-1$, если $t < \begin{array}{l} n-1 \\ k \end{array} - 2$ и $r_n(F) = \begin{array}{l} n-1 \\ k \end{array}$, $F \in F_t$ если $F \in F_{\left(\begin{array}{l} n-1 \\ k \end{array}\right)}$.

**Литература**


1. Erdos P., Kleitman D.J. Extremal problems among subsets of a set // Discrete Math. - 1974 - V.8.-P/ 281-294.

2. Кочкарев Б.С. Структурные свойства одного класса максимальных шпернеровых семейств подмножеств конечного множества // Логика и приложения. Тез. Международная конференция, посвященная 60-летию со дня рождения академика Ю.Л. Ершова.- Новосибирск, 2000-с. 61-62.
3. Кочкарев Б.С. Структурные свойства одного класса максимальных шпернеровых семейств подмножеств // Известия вузов. Математика, - 2005.-№7.-с.37-42.
4. Кочкарев Б.С. Об одном классе максимальных шпернеровых семейств подмножеств конечного множества // Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т.11. Проблемы современной математики. Материалы научной конф., посвященной 125-летию КГПУ (Казань, 22-24 октября 2001 г.), Казань: Унипресс, 2001.-с. 160-162.
5. Sperner E. Ein Satz über Untermengen einer end lichen Menge // Math.Z.-1928.-Bd.27.-S.544-548.
6. Korchunov A.D. The number and the structure typical Sperner and k-non-separable families of subsets of a finite set // Fundamentals of Computations Theory. International Conference FCN'87. - Kazan, 1987. - P. 239-243.