

МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ: АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Матросов А.В.

E-mail: avmatrosov@mail.ru

Россия, Санкт-Петербургский государственный университет¹

Аннотация. В работе рассмотрен подход к реализации в Maple метода начальных параметров как аналитического метода построения решения краевой задачи системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Обсуждаются преимущества использования систем аналитических вычислений для реализации численно-аналитических методов.

Введение. Широкое внедрение с середины 70-х годов XX столетия вычислительной техники в деятельность научных и проектных организаций способствовало разработке и реализации разнообразных численных схем и методов расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций, зданий и сооружений. В основе некоторых методов, традиционно считающихся численными, на самом деле лежат аналитические построения, всего лишь "приспособленные" к дискретной структуре используемого инструментария — компьютера с архитектурой фон Неймана.

В последнее десятилетие большую популярность приобрели системы аналитических вычислений (Maple, Mathematica), которые, в отличие от традиционных компьютерных вычислительных систем, ориентированы не на «перемалывание» чисел, но на работу со структурами, позволяющими реализовывать аналитические построения и выкладки. Используя подобные системы, можно вернуться к истокам некоторых «численных» методов и реализовать их как аналитические или численно-аналитические методы, позволяющие построить с заданной точностью приближенное решение задачи в виде рядов определенной природы. Более того, указанные системы позволяют выполнять операции вещественную арифметику, используя в представлении чисел мантиссу любой длины. Это позволяет «доводить до числа» вычислительно-неустойчивые алгоритмы, к классу которых относятся алгоритмы многих численно-аналитических методов.

Метод начальных параметров (МНП) решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений является одним из таких численно-аналитических методов. При решении с его помощью задач определенного класса, например, балки на упругом винклеровском основании, алгоритм этого метода обладает свойством вычислительной неустойчивости. В данной работе на примере именно этого метода рассматриваются преимущества использования систем аналитических вычислений для реализации численно-аналитических методов.

Математическая модель. Пусть дана балка длины l переменного сечения, лежащая на упругом основании переменной жесткости и нагруженная распределенной по всей длине непрерывной поперечной нагрузкой и осевыми усилиями на концах. Введем прямоугольную систему координат, совместив ее начало с левым концом балки (рис. 1). Дифференциальное уравнение четвертого порядка изгиба балки

$$EI(x)w''''(x) - Tw''(x) + k(x)w(x) = q(x)$$

запишем в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений в матричной форме

$$\mathbf{W}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{W}(x) + \mathbf{B}(x), \quad (1)$$

где

$$\mathbf{W}(x) = \begin{bmatrix} w(x) \\ \theta(x) \\ M(x) \\ N(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI(x)}{EI(x)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k(x) & 0 & \frac{T}{EI(x)} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q(x) \end{bmatrix}$$

Здесь E — модуль упругости материала балки, $I(x)$ — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения, $k(x)$ — коэффициент постели упругого основания, T — величина осевого усилия, $q(x)$ — распределенная по всей длине балки поперечная нагрузка, $w(x)$ — прогиб балки по оси z , $\theta(x)$ — угол поворота сечения x , $M(x)$ и $N(x)$ соответственно момент и перерезывающая сила в сечении x .

¹ Аннотация на английском языке Автором не представлена.

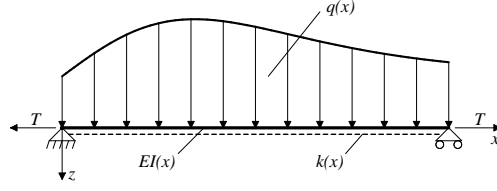


Рис.1. Расчетная схема балки на упругом основании

Численный подход [1]. Для получения решения методом начальных параметров разобьем балку по длине на n участков точками $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = l$. Если все $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$, $k = \overline{1, n}$ достаточно малы по сравнению с длиной балки l , то можно пренебречь на этих интервалах изменениями матриц $\mathbf{A}(x)$ и $\mathbf{B}(x)$ из уравнения (1) и положить

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}(x_k) = \mathbf{A}_k, \quad \mathbf{B}(x) = \mathbf{B}(x_k) = \mathbf{B}_k,$$

когда $x_{k-1} \leq x < x_k$.

Тогда на интервале $x_{k-1} \leq x < x_k$ поведение механической системы может быть описано системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{W}'(x) = \mathbf{A}_k \mathbf{W}(x) + \mathbf{B}_k. \quad (2)$$

Решение этой системы представим в виде ряда Тейлора в окрестности точки $x = x_{k-1}$. Сохраняя в нем некоторое конечное число членов ряда (например, пять), можно выразить значение вектора $\mathbf{W}(x)$ в точке $x = x_k$ по следующей формуле

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{W}_{k-1} + \Delta_k \mathbf{W}'_{k-1} + \frac{1}{2} \Delta_k^2 \mathbf{W}''_{k-1} + \frac{1}{6} \Delta_k^3 \mathbf{W}'''_{k-1} + \frac{1}{24} \Delta_k^4 \mathbf{W}''''_{k-1}. \quad (3)$$

Производные вектора решения $\mathbf{W}(x)$ в точке $x = x_{k-1}$ вычисляются последовательным дифференцированием системы (2), описывающей поведение балки на рассматриваемом интервале изменения независимой переменной:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}'_{k-1} &= \mathbf{A}_k \mathbf{W}_{k-1} + \mathbf{B}_k, \\ \mathbf{W}''_{k-1} &= \mathbf{A}_k (\mathbf{A}_k \mathbf{W}_{k-1} + \mathbf{B}_k), \\ \mathbf{W}'''_{k-1} &= \mathbf{A}_k^2 (\mathbf{A}_k \mathbf{W}_{k-1} + \mathbf{B}_k), \\ \mathbf{W}''''_{k-1} &= \mathbf{A}_k^3 (\mathbf{A}_k \mathbf{W}_{k-1} + \mathbf{B}_k). \end{aligned}$$

Подставив вычисленные значения производных в точке $x = x_{k-1}$ в (3), получим выражение вектора неизвестных функций системы $\mathbf{W}(x)$ в точке $x = x_k$ через его значения в точке $x = x_{k-1}$

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{A}_k^* \mathbf{W}_{k-1} + \mathbf{B}_k^*.$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k^* &= \mathbf{E} + \Delta_k \mathbf{A}_k + \frac{1}{2} \Delta_k^2 \mathbf{A}_k^2 + \frac{1}{6} \Delta_k^3 \mathbf{A}_k^3 + \frac{1}{24} \Delta_k^4 \mathbf{A}_k^4, \\ \mathbf{B}_k^* &= \Delta_k \mathbf{E} + \frac{1}{2} \Delta_k^2 \mathbf{A}_k + \frac{1}{6} \Delta_k^3 \mathbf{A}_k^2 + \frac{1}{24} \Delta_k^4 \mathbf{A}_k^3 \mathbf{B}_k. \end{aligned}$$

Через \mathbf{E} обозначена единичная матрица размерности (4×4) .

Используя полученную зависимость вектора решения $\mathbf{W}(x)$ на правом конце k -го интервала через его значение на левом конце, можно выразить значение вектора решения в точке $x = x_{k+1}$ через его значение в начальной точке $x = x_0$, т. е. на левом конце:

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{A}_k^+ \mathbf{W}_0 + \mathbf{B}_k^+, \quad (4)$$

где матрицы \mathbf{A}_k^+ и \mathbf{B}_k^+ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k^+ &= \mathbf{A}_k^* \mathbf{A}_{k-1}^+, \quad \mathbf{A}_0^+ = \mathbf{A}_0^*, \\ \mathbf{B}_k^+ &= \mathbf{A}_k^* \mathbf{B}_{k-1}^+ + \mathbf{B}_k^*, \quad \mathbf{B}_0^+ = \mathbf{B}_0^*. \end{aligned}$$

При $k = n$ это уравнение называется уравнением переноса граничных условий с начала на конец интервала изменения независимой переменной x . Оно позволяет определить значение вектора неизвестных функций $\mathbf{W}(x)$ в любой k -ой точке разбиения длины балки как функцию, зависящую от параметров внешней нагрузки и значения вектора $\mathbf{W}(x)$ в точке $x = 0$, соответствующей левому концу балки.

Для определения четырех компонентов вектора \mathbf{W}_0 следует использовать четыре граничных условия — по два на каждом конце балки, причем при вычислении граничных условий на правом конце следует использовать уравнение переноса граничных условий.

После нахождения компонентов вектора \mathbf{W}_0 из полученной системы уравнений, определение значений компонентов вектора $\mathbf{W}(x)$ в точках разбиения балки по ее длине не представляет сложности — достаточно последовательно для $k = \overline{1, n}$ применить полученное выше уравнение переноса (4).

Только что описанный алгоритм метода начальных параметров можно рассматривать как традиционное использование метода построения решения системы дифференциальных уравнений разложением в ряд Тейлора в условиях ручного счета или при его реализации в традиционных системах программирования, не предназначенных для работы с аналитическими вычислениями, например, Visual Fortran или С.

Аналитический подход [2]. На первый взгляд алгоритм метода начальных параметров позволяет получить дискретное решение в точках, разбивающих балку по ее длине на заданное число интервалов. Для получения решения в промежуточных точках следует уменьшать интервалы разбиения и снова строить уравнение переноса граничных условий для большего числа точек разбиения. Однако, если использовать возможности системы аналитических вычислений раскладывать в ряды функции, то метод начальных параметров позволяет получить аналитическое (в форме степенного ряда) решение, которое позволяет вычислять требуемые для расчета балки величины не на дискретном множестве точек, а в любой точке по длине балки.

Предположим, что все функции в уравнении (1) могут быть представлены сходящимися рядами Маклорена на всей длине балки $x \in [0, l]$

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}_i x^i, \quad \mathbf{B}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{B}_i x^i, \quad \mathbf{W}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{W}_i x^i. \quad (5)$$

Здесь \mathbf{A}_i являются числовыми матрицами размерности (4×4) , а \mathbf{B}_i и \mathbf{W}_i числовыми векторами размерности (4×1) . Компоненты матриц \mathbf{A}_i и векторов \mathbf{B}_i известны и определяются из вида соответствующих компонентов матрицы $\mathbf{A}(x)$ и вектора $\mathbf{B}(x)$, тогда как значения компонентов векторов \mathbf{W}_i являются неизвестными величинами, которые следует определить, исходя из дифференциального уравнения задачи и удовлетворения заданным граничным условиям.

Подставив в дифференциальное уравнение (1) разложения в степенные ряды вектора решения и коэффициентов системы (5), получим равенство двух степенных рядов

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \mathbf{W}_{j+1} x^j = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \left(\sum_{k+l=j} \mathbf{A}_k \mathbf{W}_l + \mathbf{B}_j \right) x^j.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x , получим систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов в разложении решения $\mathbf{W}(x)$

$$\begin{cases} \mathbf{W}_1 &= \mathbf{A}_0 \mathbf{W}_0 + \mathbf{B}_0, \\ 2\mathbf{W}_2 &= \mathbf{A}_1 \mathbf{W}_0 + \mathbf{A}_0 \mathbf{W}_1 + \mathbf{B}_1, \\ 3\mathbf{W}_3 &= \mathbf{A}_2 \mathbf{W}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{W}_1 + \mathbf{A}_0 \mathbf{W}_2 + \mathbf{B}_2, \\ &\dots \end{cases}$$

Решение этой бесконечной системы может быть выражено через вектор начальных параметров \mathbf{W}_0 путем последовательных подстановок в правые части уравнений системы выражений для векторов $\mathbf{W}_i, i = \overline{1, \infty}$, начиная с первого. Тогда решение дифференциального уравнения изгиба балки может быть получено в виде

$$\mathbf{W}(x) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{W}_i^* x^i \right) \mathbf{W}_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{B}_i^* x^i,$$

где матрицы \mathbf{W}_i^* размерности (4×4) и векторы \mathbf{B}_i^* размерности (4×1) представляются выражениями, в которые входят известные матрицы \mathbf{A}_k и векторы \mathbf{B}_k .

Завершает решение задачи определение четырех компонентов вектора \mathbf{W}_0 из системы четырех линейных уравнений, получающейся из условия удовлетворения полученного решения граничным условиями (по два на каждом конце балки). Например, если оба конца балки зашпелены (перемещение и угол поворота нулевые), то два неизвестных компонента \mathbf{W}_{03} и \mathbf{W}_{04} вектора начальных параметров \mathbf{W}_0 (два в этом случае известны из начальных условий на левом конце балки $\mathbf{W}_{01} = w(0) = 0$ и $\mathbf{W}_{02} = \theta(0) = 0$) можно найти из следующей системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{W}_{i,3,3}^* l^i \mathbf{W}_{03} + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{W}_{i,3,4}^* l^i \mathbf{W}_{04} + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{B}_{i,3}^* l^i = 0 \\ \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{W}_{i,4,3}^* l^i \mathbf{W}_{03} + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{W}_{i,4,4}^* l^i \mathbf{W}_{04} + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{B}_{i,4}^* l^i = 0. \end{cases}$$

Реализовать предложенный алгоритм средствами традиционного языка программирования высокого уровня (С, Pascal, Fortran, Java), конечно, можно, но для этого потребуются прежде всего разработать инструментальные средства (библиотеку объектов или процедур) работы со степенными рядами. С помощью системы аналитических вычислений, например, Maple, это делается быстро — в ней уже реализован аппарат работы не только со степенными рядами, но и с любыми аналитическими выражениями.

Вычислительные эксперименты. Известно, что методом начальных параметров (численный подход) не возможно выполнить расчет длинной балки на упругом основании, так как его алгоритм при определенных соотношениях длины и коэффициента постели основания становится вычислительно неустойчив. Предложенный в работе аналитический подход к реализации этого метода также при определенных параметрах задачи может быть вычислительно неустойчив. Однако используемая аналитическая среда Maple позволяет «настроить» ее так, чтобы указанный недостаток алгоритма не проявился.

На достоверность результатов расчета по методу начальных параметров, который можно рассматривать как одномерный вариант метода начальных функций, влияют два фактора [3]: первый — обеспечение сходимости рядов решения (5), второй — длина мантииссы в представлении вещественных чисел.

Во всех экспериментах рассматривалась длинная ($l = 20\text{м}$) бетонная балка ($E = 2 \cdot 10^{10}\text{Па}$) постоянного сечения (ширина $b = 0,1\text{м}$, высота $h = 0,15\text{м}$, $I(x) = bh^3/12\text{м}^4$) на упругом винклеровом основании, нагруженная на левом конце сосредоточенной силой $N = 10^3\text{Н}$. Для исключения отрыва точек подошвы балки от основания, к ней дополнительно была приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q = 10^3\text{Н/м}$.

Целью первого эксперимента являлось определение необходимого для сходимости рядов решения количества членов ряда, при этом коэффициент постели $k = 10\text{МН/м}^3$, а длина мантииссы равнялась 16. Графики частичных сумм степенного ряда для прогиба $w(x)$ и самого прогиба $w(x)$ представлены на рис. 2. Из графика частичных сумм ряда можно заметить, что в скобках после количества десятичных разрядов мантииссы 16 отображается имя переменной, а не минимально необходимое для сходимости количество членов ряда. Это говорит о том, что степенной ряд для прогиба при удержании 60 членов еще не сходится, а поэтому и на правом конце балки результаты расчета прогиба далеки от истинных значений.

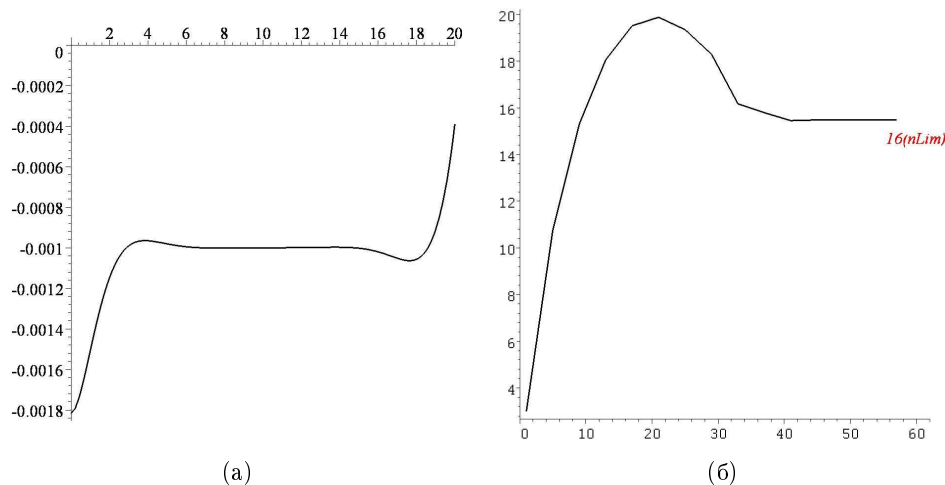


Рис.2. Прогиб $w(x)$ (а) и частичные суммы его степенного ряда (логарифмическая шкала) (б)

$k = 10\text{МПа}$, длина мантииссы 16, количество членов ряда 60

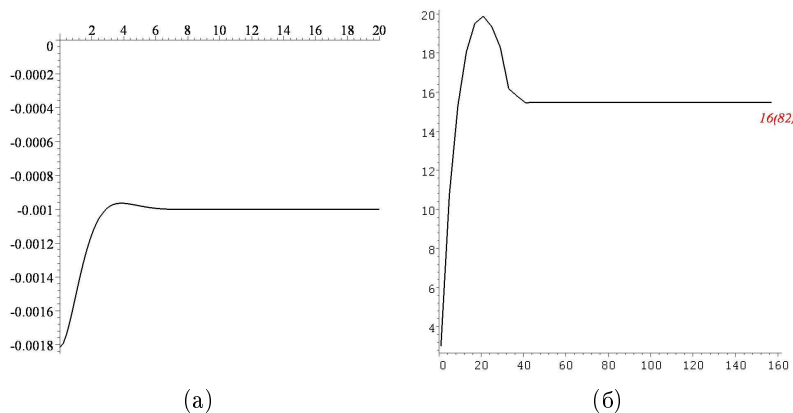


Рис.3. Прогиб $w(x)$ (а) и частичные суммы его степенного ряда (логарифмическая шкала) (б)
 $k = 10\text{МПа}$, длина мантиссы 16, количество членов ряда 160

Увеличение количества удерживаемых членов степенного ряда до 160 решило в данном случае проблему сходимости ряда и получения достоверных результатов (рис. 3). Причем на графике частичных сумм можно видеть минимальное число членов ряда 82, удержание которых достаточно для его сходимости.

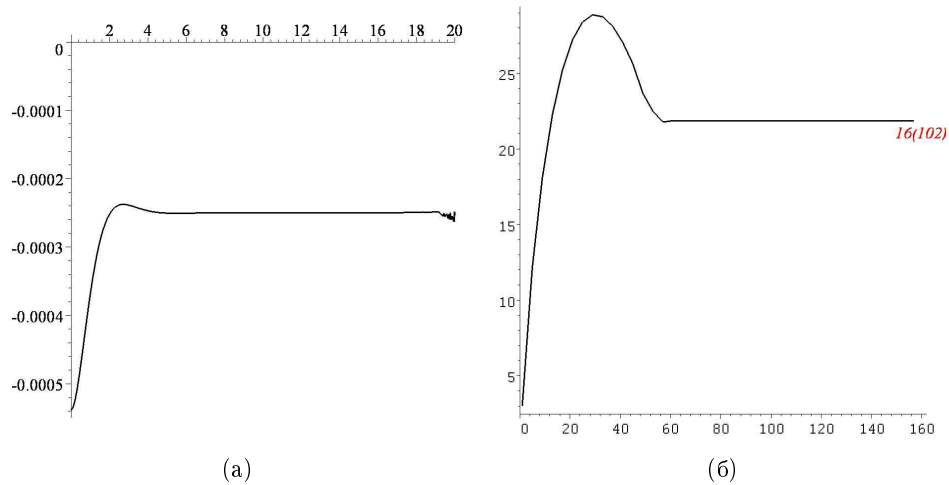


Рис.4. Прогиб $w(x)$ (а) и частичные суммы его степенного ряда (логарифмическая шкала) (б)
 $k = 50\text{МПа}$, длина мантиссы 16, количество членов ряда 160

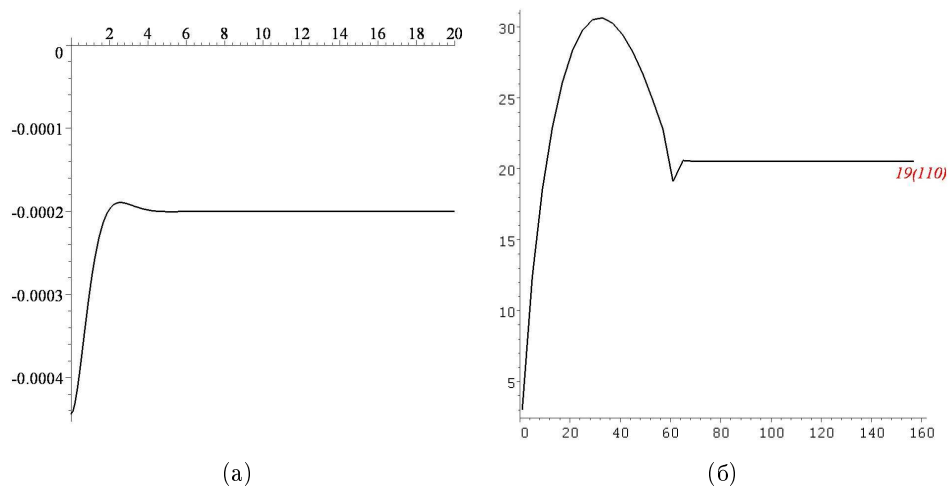


Рис.5. Прогиб $w(x)$ (а) и частичные суммы его степенного ряда (логарифмическая шкала) (б)
 $k = 50\text{МПа}$, длина мантиссы 19, количество членов ряда 160

Однако с увеличением жесткости основания (коэффициент постели $k = 50\text{МПа}$) сходимость ряда (106 удержанных членов) не гарантирует достоверности результатов расчета прогиба (рис. 4а). В данном случае мы имеем дело с феноменом, который называется вычислительной неустойчивостью, и связан он с накоплением ошибки вычислений при использовании мантиссы недостаточной длины в представлении вещественных чисел. Система аналитических вычислений Maple позволяет легко исправить возникшую ошибку — достаточно изменить системную переменную Digits, установив ее значение равным необходимому для устойчивого счета количеству разрядов мантиссы. Устойчивые результаты, полученные при вычислениях с мантиссой длиной 19, можно видеть на рис. 5.

Заключение. В работе показаны преимущества использования аналитических систем для реализации вычислительно-неустойчивых алгоритмов. Возможность выполнения расчетов с мантиссой практически неограниченной длины (в Maple максимальное значение длины мантиссы можно устанавливать равным 268435448) по существу снимает проблему вычислительной неустойчивости численных и численно-аналитических алгоритмов. Однако за такое удобство приходится платить скоростью выполнения программ

(системы аналитических вычислений интерпретируемы), а для ее увеличения необходимостью наличия на компьютере оперативной памяти большого объема (для некоторых задач до 4Гб).

Литература

- [1] В.А. Постнов *Численные методы расчета судовых конструкций*. Л.: Судостроение, 1977. 279 с.
- [2] А.В. Матросов *Marie 6. Решение задач высшей математики и механики*. СПб.: БХВ-Петербург, 2001. 528 с.
- [3] А.В. Матросов *Вычислительные проблемы метода начальных функций // Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов. Труды. XXI межд. конф. 4-7 окт. 2005г. СПб.:ВВМ, 2005. С.328-334*