КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА MAPLE

Мифтахов Р.Ф.

E-mail: rustor@bk.ru

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Казань

Аннотация. *Качественно исследуются уравнения Эйнштейна для равновесных статистических систем со скалярным взаимодействием, определяется характер поведения системы в особых точках.*

Qualitative analysis of dynamic system in maple

Miftahov R.F.

Abstract. *Einstein's equations for equilibrium statistical systems with scalar interaction are qualitatively investigated, is defined character of system in singular points.*

Скалярное поле может эффективно изменять состояние статистической системы, что приводит к ряду космологических последствий. Рассмотрим космологическую ситуацию, когда материя представлена лишь вырожденной Ферми-системой со скалярным взаимодействием. Уравнения Эйнштейна в этом случае будут иметь вид:

$$E^* - \frac{a'}{a}(E^* - 3P^*) = 0;$$

$$3\,{a'}^2 = 8\pi E^*,$$

Значения плотности энергии и давления Ферми-системы и скалярного поля равны:

$$E_f^* = \frac{m^4\beta^4}{8\pi^2}\left[\sqrt{1+\varphi^2}(2+\varphi^2) - \varphi^4 \ln\frac{1+\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi}\right]$$

$$E_f^* - 3P_f^* = \frac{m^4\beta^4}{3\pi^2}\varphi^2(\sqrt{1+\varphi^2} - \varphi^2 \ln\frac{1+\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi}). \qquad (1)$$

$$E_s^* = \frac{\beta^2 m^2}{8\pi q^2}\quad \varphi^2 - 2\varphi\varphi' + \varphi' a + \mu^2 a^2(\varphi - \frac{a}{\beta})\quad ; \qquad (2)$$

$$E_s^* - 3P_s^* = \frac{\mu_s^2\Phi^2}{2\pi} = \frac{\beta^2\mu_s^2 m^2}{2\pi q^2}a^2(\varphi - \frac{a}{\beta})^2.$$

После подстановки плотностей уравнения Эйнштейна обратятся в сложные выражения, содержащие производные первого и второго порядка:

$$F_1 = (a(\eta), \varphi(\eta), a'(\eta), \varphi'(\eta));$$

$$F_2 = (a(\eta), \varphi(\eta), a'(\eta), \varphi'(\eta), \varphi''(\eta)).$$

Используя качественные методы, исследуем поведение динамической системы в особых точках. С помощью замены и элементарных преобразований приведем систему к стандартному виду:

$$a' = F(a, \varphi, \Phi)$$

$$\varphi' = F(a, \varphi, \Phi)$$

$$\Phi' = F(a, \varphi, \Phi)$$

Здесь и далее, в следствии громоздкости получаемых выражений, уравнения системы записаны в общем виде.

При этом исследуемая система стала трехмерной, с множеством параметров. Для решения поставленной задачи применялись стандартные операторы Maple 8, а также команды входящие в пакет Linalg.

Приравняв правые части полученных выражений к нулю, и решив систему уравнений относительно неизвестных функций, получим особую точку динамической системы, для конкретных значений параметров.

$$a_0 = 1.1745, \varphi_0 = -0.3024 - 0.1828i, \Phi_0 = 0$$

Составим, с помощью команды >matrix, характеристическую матрицу следующего вида:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} - \lambda & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_1}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} - \lambda & \frac{\partial F_2}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial F_3}{\partial a} & \frac{\partial F_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_3}{\partial \Phi} - \lambda \end{bmatrix}$$

Находим собственные числа полученной матрицы, используя команду пакета Linalg
$>$ charpoly.

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -133.72 + 316.2i, \lambda_3 = 0.003 + 0.007i.$$

Все собственные числа в данной особой точке (для данного набора параметров) имеют ненулевые вещественные части, следовательно, особая точка является невырожденной. Вещественные части собственных чисел различных знаков, т.е. полученная особая точка - седловая.

Использование программы Maple 8 при исследовании динамической системы позволяет в полной мере охарактеризовать поведение системы в особых точках. Также путем изменения значений параметров легко рассмотреть различные случаи бифуркации динамической системы.

Литература

1. Игнатьев Ю.Г. Релятивистские кинетические уравнения для неупруго взаимодействующих частиц в гравитационном поле. // Известия ВУЗов, Физика, Казань. – 1983. – т. 24, №.8. – с. 15
2. Игнатьев Ю.Г. Идеальная жидкость с коротким скалярным взаимодействием в поле плоской гравитационной. // Известия ВУЗов, Физика, Казань. – 1983. – т. 24, №.12. – с. 9
3. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1981.
4. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. СПб.: Питер, 2004.