РАЗВЕРТКИ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Митюшов Е.А., Митюшова Л.Л.

E-mail: не представлен

Уральский государственный технический университет, г.Екатеринбург

Аннотация. *В работе на конкретных примерах методами компьютерной геометрии даются способы построения разверток линейчатых поверхностей. Приведены оригинальные алгоритмы получения разверток для всех возможных случаев.*

Algorithms for construction of ruled surfaces

Mityushov E.A., Mityushova L.L.

Abstract. *This work, by concrete examples using computer geometry, offers methods of constructing and developing ruled surfaces. It gives original algorithms for obtaining developments for all possible cases.*

Аннотация. *Изучение развёртывающихся поверхностей, традиционно, относится к начертательной и дифференциальной геометриям. В каждом из этих разделов геометрии, исходя из собственных целей, рассматриваются специальные проблемы, изложение которых не позволяет с достаточной эффективностью выполнить синтез полученных знаний. Объединение этих знаний на качественно новом уровне происходит в новой бурно развивающейся области прикладной математики - компьютерной геометрии, которая, ориентируясь на использование персональных компьютеров, позволяет проводить моделирование пространственных объектов и создавать их изображение непосредственно на экране компьютера. В работе на конкретных примерах иллюстрируются преимущества такого подхода при получении любых разверток линейчатых поверхностей.*

Развертываемые поверхности

Развертываемой на плоскость называется такая поверхность, которая путем изгибания (без разрывов и складок) всеми своими точками может быть совмещена с плоскостью. При этом каждой точке на развертке соответствует единственная точка поверхности; принадлежащие поверхности прямые линии остаются прямыми; отрезки линий сохраняют свою длину; угол, образованный линиями на поверхности, остается равным углу между соответствующими линиями на развертке; площадь какой либо замкнутой области на поверхности сохраняет свою величину внутри соответствующей замкнутой области на развертке.

Математически это означает, что развертываемая поверхность изометрична плоскости. Известно, что линейчатая поверхность тогда и только тогда является развертываемой, когда ее полная (гауссова) кривизна равна нулю. Это эквивалентно условию

$$LN - M^2 = 0,$$

где L, M и N — коэффициенты второй дифференциальной формы поверхности, определяемые равенствами

$$L(u,v) = \vec{r}_{uu}{}'' \cdot \frac{\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}'}{|\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}'|}, \quad N(u,v) = \vec{r}_{vv}{}'' \cdot \frac{\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}'}{|\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}'|}, \quad M(u,v) = \vec{r}_{uv}{}'' \cdot \frac{\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}'}{|\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}'|}.$$

Непосредственная проверка показывает, что этому условию удовлетворяют уравнения

$$\vec{r} = \vec{r}_{\text{н}}(u) + v\vec{l},$$

и

$$\vec{r} = (1-v)\vec{r}_{\text{н}}(u) + v\vec{r}_S,$$

, а так же уравнение поверхности касательных к гладкой пространственной кривой

$$\vec{r} = \vec{r}_{\text{н}}(u) + (\vec{\rho}(u,v) \cdot \vec{\tau}(u))\vec{\tau}(u),$$

где $\vec{\rho}(u,v)$– линейная по параметру v вектор-функция.

Других развертываемых поверхностей не существует.

Развертка цилиндрической поверхности

Рассмотрим получение развертки линии $\vec{r} = \vec{r}(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$ лежащей на цилиндрической поверхности. Для получения развертки необходимо записать уравнение линии в системе координат $Oxyz$, одна из осей которой, например ось Oy, параллельна образующей. Тогда уравнения линии в плоскости $O\xi\eta$ развертки имеют вид

$$\begin{cases} \xi = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{z})^2} dt, \\ \eta = y(t), \end{cases} \qquad (t_1 \le t \le t_2). \qquad (1)$$

Пример 1

Найти развертку цилиндрических поверхностей, образующих n-клинный трехпараметрических купол высоты h с радиусом основания R. Элемент купола моделируется поверхностью эллиптического цилиндра

$$\frac{z-h}{\mathrm{H}}^{2} + \frac{x - R\cos\alpha}{R\cos\alpha}^{2} = 1, \quad \alpha = \frac{\pi}{n},$$

ограниченного плоскостями

$$z = 0 \;\text{ и }\; y = \pm x tg\alpha.$$

Записывая уравнение поверхности в параметрической форме

$$\begin{aligned} R\cos\alpha - x &= R\cos\alpha\sin t, \\ h - z &= h\cos t, \end{aligned} \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2},$$

с помощью равенств (1) находим уравнения линий сечения цилиндра в развертке

$$\begin{cases} \xi = \int\limits_{0}^{t} \sqrt{h^2 + (R^2\cos^2\alpha - h^2)\cos^2 t}\; dt, \\ \eta = \pm R\sin\alpha(1 - \sin t), \end{cases} \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

При значениях $R = 10$, $h = 10$, n = 8 соответствующая поверхность и ее развертка приведены на рис.1а,1б.

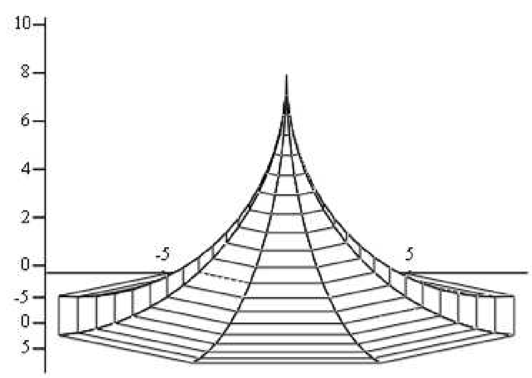

Рис. 1а

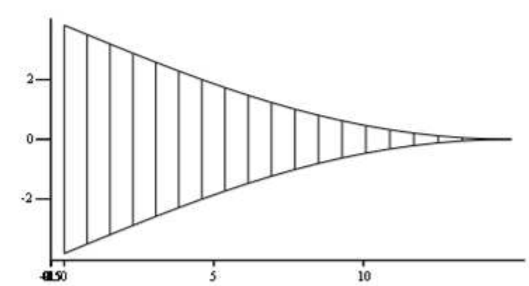

Рис. 1б

Пример 2

Найти развертку цилиндрических поверхностей, образующих n-клинный трехпараметрический купол высоты h с радиусом основания R. Элемент купола моделируется поверхностью эллиптического цилиндра

$$\frac{z}{\mathrm{h}}^{2} + \frac{x}{R\cos\alpha}^{2} = 1, \qquad \alpha = \frac{\pi}{n},$$

ограниченного плоскостями

$$z = 0 \;\text{ и }\; y = \pm x tg\alpha.$$

Записывая уравнение поверхности в параметрической форме

$$\begin{aligned} x &= R\cos\alpha\sin t, \\ z &= h\cos t, \end{aligned} \qquad (0 \le t \le \frac{\pi}{2}),$$

находим уравнения линий сечения цилиндра в развертке

$$\begin{cases} \xi = \int\limits_0^t \sqrt{h^2 + (R^2\cos^2\alpha - h^2)\cos^2 t}\; dt, \\ \eta = \pm R\sin\alpha\sin t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

При значениях $R = 10$, $h = 5$, $n = 8$ соответствующая поверхность и ее развертка приведены на рис.2а,2б.

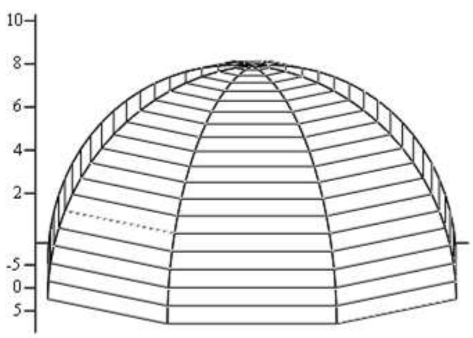

Рис. 2а

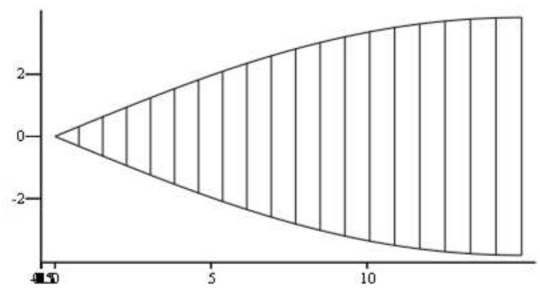

Рис. 2б

Развертка конической поверхности

Развертку линии $\vec{r} = \vec{r}(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, лежащей на конической поверхности будем задавать на плоскости развертки в полярных координатах

$$R = R(\psi).$$

При этом элементарный полярный угол $d\psi$ находим как отношение элементарной дуги ds к расстоянию R от этой дуги до вершины $\vec{r}_S = \{x_S, y_S, z_S\}$ конической поверхности

$$d\psi = \frac{ds}{R} \quad \text{или} \quad d\psi = \frac{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}\; dt}{\sqrt{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 + (z - z_S)^2}}.$$

Откуда

$$\psi = \int\limits_{t_1}^{t} \frac{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}\; dt}{\sqrt{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 + (z - z_S)^2}}$$

Уравнение заданной линии на развертке конической поверхности в параметрической форме принимает вид

$$\begin{cases} R = \sqrt{(x(t) - x_S)^2 + (y(t) - y_S)^2 + (z(t) - z_S)^2}, \\ \psi = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} dt}{\sqrt{(x(t) - x_S)^2 + (y(t) - y_S)^2 + (z(t) - z_S)^2}}. \end{cases} \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \tag{0.1}$$

Пример 3

Найти развертку "косой воронки", моделируемой уравнением

$$\vec{r} = (1 - v)\{a\cos t, a\sin t, 0\} + v\{0, y_S\, z_S\}, \quad 0 \le v \le 1, \ 0 \le t \le 2\pi.$$

Определяем уравнение линии $\vec{r} = \{a\cos t, a\sin t, 0\}$ на развертке конической поверхности согласно уравнению (2)

$$\begin{cases} R = \sqrt{(a\cos t)^2 + (a\sin t - y_S)^2 + (z_S)^2}, \\ \psi = a\int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{(a\cos t)^2 + (a\sin t - y_S)^2 + (z_S)^2}}, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

При $a = 1$, $y_S = 2$, $z_S = 2$ соответствующая "косая воронка" и ее развертка указаны на рис.3а,3б.

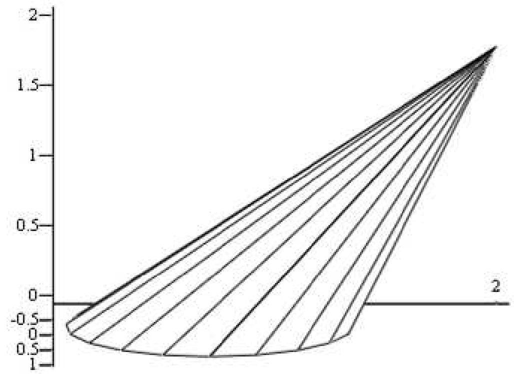

Рис. 3а

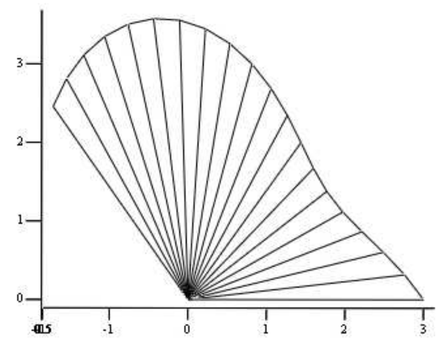

Рис. 3б

Развертка поверхности касательных

Рассмотрим второго порядка гладкости направляющую линию $\vec{r}_{\text{Н}} = \vec{r}_{\text{Н}}(t)$, $(t_1 \le t \le t_2)$, являющуюся ребром возврата для поверхности касательных, и будем искать ее развертку из условия, что величины ds и p для направляющей кривой и ее развертки в соответствующих точках совпадают. Введем в рассмотрение плоскость (ξ, η), ось $O\xi$ которой направлена по касательной к направляющей в ее начальной точке. С учетом определения кривизны плоской кривой находим уравнения линии развертки в параметрической форме

$$\begin{cases} \xi = \int\limits_{t_1}^{t} |\dot{\vec{r}}_{\text{Н}}(\tau)| \cos \int\limits_{t_1}^{\tau} \dfrac{|\dot{\vec{r}}_{\text{Н}}(t) \times \ddot{\vec{r}}_{\text{Н}}(t)|}{|\dot{\vec{r}}_{\text{Н}}(t)|^2} dt d\tau, \\ \eta = \int\limits_{t_1}^{t} |\dot{\vec{r}}_{\text{Н}}(\tau)| \sin \int\limits_{t_1}^{\tau} \dfrac{|\dot{\vec{r}}_{\text{Н}}(t) \times \ddot{\vec{r}}_{\text{Н}}(t)|}{|\dot{\vec{r}}_{\text{Н}}(t)|^2} dt d\tau, \end{cases} \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2. \tag{0.2}$$

Пример 4

Найти развертку поверхности, заданной уравнением

$$\vec{r} = \{a \cos t, a \sin t, ct\} + v\vec{\tau}(t), \quad 0 \le v \le v^*, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

В данном случае направляющей кривой $\vec{r}_{\text{н}} = \{a \cos u, a \sin u, cu\}$ является винтовая линия с постоянным радиусом кривизны. Следовательно, её разверткой является окружность. При этом с использованием полярных координат имеем

$$\rho = \frac{|\ \dot{\vec{r}}_{\text{н}}\ |^3}{|\ \dot{\vec{r}}_{\text{н}} \times \ddot{\vec{r}}_{\text{н}}\ |} = \frac{a^2 + c^2}{a}.$$

Подстановка в уравнения (3) дает

$$\psi = \frac{1}{\rho} \int\limits_0^t \sqrt{\dot{x}_{\text{н}}^2 + \dot{y}_{\text{н}}^2 + \dot{z}_{\text{н}}^2}\ dt \Rightarrow \psi = \frac{a}{a^2 + c^2} \int\limits_0^t \sqrt{a^2 + c^2}\ dt, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

или

$$\psi = \frac{at}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Развертка поверхности (рис.4) при $a = 4$, $c = 1$, $v^* = 4$ это кольцо с внутренним радиусом равным $\dfrac{17}{4}$ и внешним $\sqrt{\dfrac{17}{4}^2 + 4^2}$.

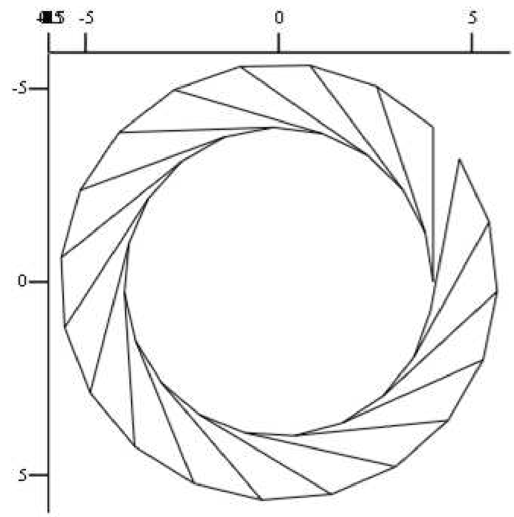

Рис. 4

Пример 5

Найти уравнение кубического сплайна , проходящего через точки $M_0(0,-2,0)$, $M_1(1,0,0)$, $M_2(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $M_3(0,0,-2)$, на развертке поверхности касательных к этому сплайну.

Уравнение направляющего кубического сплайна в матричной форме записи имеет вид

$$\hat{r}_{\text{н}} = S^{3\times 4}\begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le \sqrt{5}+\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

где
$$S^{3\times 4} = \begin{pmatrix} 0.059 & -0.699 & 1.718 & 0 \\ -9.31\times 10^{-3} & -0.087 & 1.137 & -2 \\ -0.056 & 0.435 & -0.694 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая кривая изображена на рис.5а.

Уравнение поверхности касательных в матричной форме записывается в виде

$$\hat{r} = \hat{r}_{\text{H}} + v\hat{\tau}(t), \quad -v^* \leqslant v \leqslant v^*,\ 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{5}+\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2},\ \text{где}\ \hat{\tau} = \frac{\dot{\hat{r}}_{\text{H}}}{\sqrt{\dot{\hat{r}}_{\text{H}}\cdot\dot{\hat{r}}_{\text{H}}}}.$$

Тогда уравнения кубического сплайна на развертке поверхности касательных имеет вид

$$\begin{cases} \xi = \int\limits_{t_1}^{t} |\dot{\vec{r}}_{\text{H}}(\tau)| \cos \int\limits_{t_1}^{\tau} \dfrac{|\dot{\vec{r}}_{\text{H}}(t)\times\ddot{\vec{r}}_{\text{H}}(t)|}{|\dot{\vec{r}}_{\text{H}}(t)|^2} dt d\tau, \\ \eta = \int\limits_{t_1}^{t} |\dot{\vec{r}}_{\text{H}}(\tau)| \sin \int\limits_{t_1}^{\tau} \dfrac{|\dot{\vec{r}}_{\text{H}}(t)\times\ddot{\vec{r}}_{\text{H}}(t)|}{|\dot{\vec{r}}_{\text{H}}(t)|^2} dt d\tau, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\sqrt{5}+\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}. \tag{0.3}$$

Соответствующая поверхность касательных и направляющая на развёртке поверхности касательных изображены на рис.5б, рис.5в.

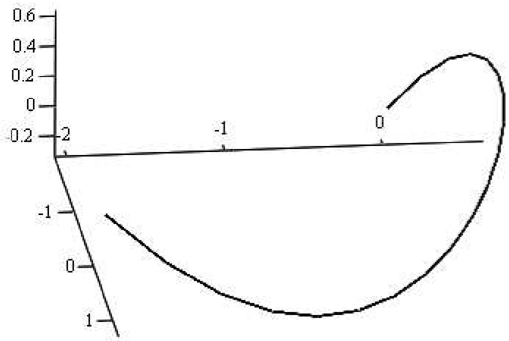

Рис. 5а

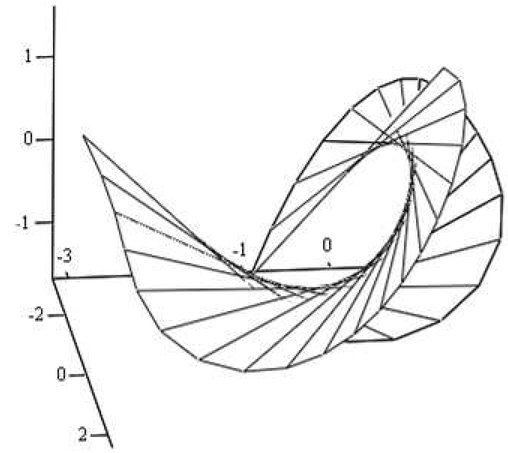

Рис. 5б

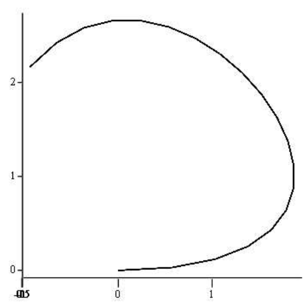

Рис. 5в