ПЕРЕНОРМИРОВКА ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА КВАНТОВАННОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В ПАКЕТЕ MAPLE

Попов А.А.

E-mail: apopov@kzn.ru

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, Татарстан 2, Казань 420021, Россия

Аннотация. *В работе вычислены явные выражения для контрчленов ДеВитта-Швингера, необходимые для реализации процедуры перенормировки вакуумного среднего оператора тензора энергии-импульса квантованного скалярного поля методом раздвижки точек. Задача решена на фоне произвольного гравитационного фона и произвольной разности координат раздвинутых точек.*

A.A.Popov

Renormalization of stress-energy tensor of quantized scalar field

Abstract. *It is evaluated the explicit expressions for the expansion of DeWitt-Schwinger's counterterms in terms of difference of coordinates of the separated points. These counterterms are needed for the renormalization of vacuum expectation value of the stress-energy tensor for a quantized scalar field. The result is valid in an arbitrary gravitational field and for the arbitrary difference of coordinates of the separated points.*

Для описания вакуумных эффектов квантованных полей в искривленных пространствах-временах используют ряд величин таких, например, как вакуумное среднее квадрата квантованного поля и $\langle T^\mu_\nu \rangle$ - вакуумное среднее оператора тензора энергии-импульса квантованного поля. Эти величины дают информацию о поляризации вакуума поля, рождении частиц, спонтанном нарушении симметрии и обратном влиянии квантованных полей на геометрию пространства-времени.

Как известно, величины $\langle T^\mu_\nu \rangle$ являются расходящимися, что соответствует учету бесконечно большого числа степеней свободы вакуума квантованного поля. Такие величины не могут быть измерены (поэтому физического смысла не имеют). Одной из возможных процедур выделения конечной или измеряемой части таких величин (перенормировки) является процедура вычитания из них так называемых контрчленов ДеВитта-Швингера. Процедуре вычитания при этом должна предшествовать процедура регуляризации $\langle T^\mu_\nu \rangle$ раздвижкой точек, т.е. представления $\langle T^\mu_\nu \rangle$ в виде оператора, действующего на двухточечную функцию Грина квантованного поля. Как и контрчлены ДеВитта-Швингера (которые также являются двухточечными функциями) регуляризованные величины $\langle T^\mu_\nu(x,\widetilde{x}) \rangle_{unren}$ являются конечными (они расходятся лишь при $x \to \widetilde{x}$), поэтому процедура перенормировки представляет собой вычитание конечных величин. А получающаяся в результате разность $\langle T^\mu_\nu(x) \rangle_{ren}$ также является конечной, поскольку контрчлены ДеВитта-Швингера $\langle T^\mu_\nu(x,\widetilde{x}) \rangle_{DS}$ содержат все расходимости регуляризованных величин $\langle T^\mu_\nu(x,\widetilde{x}) \rangle_{unren}$ [1]

$$\langle T^\mu_\nu(x) \rangle_{ren} = \lim_{\widetilde{x}\to x} \left(\langle T^\mu_\nu(x,\widetilde{x}) \rangle_{unren} - \langle T^\mu_\nu(x,\widetilde{x}) \rangle_{DS} \right). \tag{1}$$

Ковариантные выражения для контрчленов ДеВитта-Швингера $\langle T^\mu_\nu(x,\widetilde{x}) \rangle_{DS}$ в терминах геодезического интервала, соединяющего раздвинутые точки, для полей спина $0, 1/2$ и 1 было получено в работах Кристенсена [2, 3]. Для скалярного поля они имеют вид

$$\langle T^\mu_\nu(x,\widetilde{x}) \rangle_{DS} = \langle T^\mu_\nu \rangle_{quartic} + \langle T^{\mu\nu} \rangle_{quadratic} + \langle T^\mu_\nu \rangle_{log} + \langle T^\mu_\nu \rangle_{linear} + \langle T^\mu_\nu \rangle_{finite}, \tag{2}$$

где

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle_{quartic} = \frac{1}{2\pi^2(\sigma^\rho\sigma_\rho)^2} \left(g^{\mu\nu} - 4\frac{\sigma^\mu\sigma^\nu}{(\sigma^\rho\sigma_\rho)} \right), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \langle T^{\mu\nu} \rangle_{quadratic} = \frac{1}{4\pi^2(\sigma^\rho\sigma_\rho)} \Bigg[& \frac{2}{3} R^{(\mu}{}_\alpha \frac{\sigma^{\nu)}\sigma^\alpha}{(\sigma^\rho\sigma_\rho)} - \frac{2}{3} R_{\alpha\beta} \frac{\sigma^\alpha\sigma^\beta\sigma^\mu\sigma^\nu}{(\sigma^\rho\sigma_\rho)^2} \\ & -\frac{m^2}{2} \left(g^{\mu\nu} - 2\frac{\sigma^\mu\sigma^\nu}{(\sigma^\rho\sigma_\rho)} \right) - \left(\frac{1}{6} - \xi \right) \left(R^{\mu\nu} - \frac{R}{2} \left(g^{\mu\nu} - 2\frac{\sigma^\mu\sigma^\nu}{(\sigma^\rho\sigma_\rho)} \right) \right. \\ & \left. -2R^\mu{}_\alpha{}^\nu{}_\beta \frac{\sigma^\mu\sigma^\nu}{(\sigma^\rho\sigma_\rho)} + 2g^{\mu\nu} R_{\alpha\beta} \frac{\sigma^\alpha\sigma^\beta}{(\sigma^\rho\sigma_\rho)} \right) \Bigg], \end{aligned} \tag{4}$$

$$\langle T^{\mu\nu}\rangle_{log} = \frac{1}{4\pi^2} \quad \frac{1}{60} \quad R^{\rho\mu\tau\nu}R_{\rho\tau} - \frac{1}{4}R^{\rho\tau}R_{\rho\tau}g^{\mu\nu} \quad - \frac{R}{180} \quad R^{\mu\nu} - \frac{R}{4}g^{\mu\nu}$$
$$+\frac{1}{120}R^{\mu\nu}{}_{;\rho}{}^{\rho} - \frac{1}{360}R^{;\mu\nu} - \frac{1}{720}R_{;\rho}\rho g^{\mu\nu} - \frac{m^4}{8}g^{\mu\nu}$$
$$-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} - \xi \quad m^2 \quad R^{\mu\nu} - \frac{R}{2}g^{\mu\nu} \quad - \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} - \xi \quad ^2 \quad -2R \quad R^{\mu\nu} - \frac{R}{4}g^{\mu\nu}$$
$$+2R^{;\mu\nu} - 2R_{;\rho}{}^{\rho}g^{\mu\nu} \Big]\Big\} \quad \gamma + \frac{1}{2}\ln \quad \frac{1}{4}m^2(\sigma^\rho\sigma_\rho) \quad , \tag{5}$$

$$\langle T^{\mu\nu}\rangle_{linear} = \frac{1}{4\pi^2} \quad \Bigg\{\frac{1}{12} \quad R^{\mu\nu} - \frac{R}{4}g^{\mu\nu} \quad {}_{;\alpha} \frac{\sigma^\alpha}{(\sigma^\rho\sigma_\rho)} - \frac{1}{3} \quad R^{(\mu}{}_{\alpha}g^{\nu)}{}_{\beta}$$
$$-\frac{R_{\alpha\beta}}{4}g^{\mu\nu} \quad {}_{;\gamma} \frac{\sigma^\alpha\sigma^\beta\sigma^\gamma}{(\sigma^\rho\sigma_\rho)^2} - \frac{R_{\alpha\beta;\gamma}}{12}\frac{\sigma^\alpha\sigma^\beta\sigma^\gamma}{(\sigma^\rho\sigma_\rho)^2} \quad g^{\mu\nu} - 4\frac{\sigma^\mu\sigma^\nu}{(\sigma^\rho\sigma_\rho)} \quad \Bigg\}$$
$$- \quad \frac{1}{6} - \xi \quad (R^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta} - R_{\alpha\beta}g^{\mu\nu})_{;\gamma}\frac{\sigma^\alpha\sigma^\beta\sigma^\gamma}{(\sigma^\rho\sigma_\rho)^2} + \frac{1}{4}R_{;\alpha}\frac{\sigma^\alpha}{(\sigma^\rho\sigma_\rho)}\Big[g^{\mu\nu}$$
$$-2\frac{\sigma^\mu\sigma^\nu}{(\sigma^\rho\sigma_\rho)} \quad + \quad \frac{1}{6} - \xi \quad ^2 \frac{3}{4}R_{;\alpha}\frac{\sigma^\alpha}{(\sigma^\rho\sigma_\rho)}g^{\mu\nu}\Bigg), \tag{6}$$

$$\langle T^{\mu\nu}\rangle_{finite} = -\frac{1}{8\pi^2} \quad -\frac{3}{4}m^4 \quad g^{\mu\nu} - \frac{4}{3}\frac{\sigma^\mu\sigma^\nu}{(\sigma^\rho\sigma_\rho)} \quad + \frac{1}{360} \quad R^{\rho\tau kl}R_{\rho\tau kl}$$
$$-R^{\rho\tau}R_{\rho\tau} + R_{;\rho}{}^{\rho}) \frac{\sigma^\mu\sigma^\nu}{(\sigma^\rho\sigma_\rho)} \quad + \quad \frac{1}{6} - \xi \quad \frac{m^2}{4}R \quad g^{\mu\nu} \quad - 2\frac{\sigma^\mu\sigma^\nu}{(\sigma^\rho\sigma_\rho)}$$
$$+\frac{1}{12}R_{;\rho}{}^{\rho}\frac{\sigma^\mu\sigma^\nu}{(\sigma^\rho\sigma_\rho)} - \frac{m^2}{2}R^{\mu\nu} \quad + \quad \frac{1}{6} - \xi \quad ^2 \frac{R^2}{4}\frac{\sigma^\mu\sigma^\nu}{(\sigma^\rho\sigma_\rho)} + \quad \frac{1}{20}R^{\mu\nu}{}_{;\alpha\beta}$$
$$+\frac{1}{30}R^{(\mu}{}_{\alpha;}{}^{\nu)}{}_{\beta} - \frac{1}{48}R_{;\alpha\beta}g^{\mu\nu} - \frac{1}{180}R_{\alpha\beta}{}^{;(\mu\nu)} + \frac{1}{72}R_{\alpha\beta;\rho}{}^{\rho}g^{\mu\nu} + \frac{1}{18}R^{\mu}{}_{\alpha}R^{\nu}{}_{\beta}$$
$$-\frac{1}{36}R_{\alpha}{}^{\rho}R_{\rho\beta}g^{\mu\nu} + \frac{1}{90}R_{\alpha\rho}R^{\rho(\mu\nu)}{}_{\beta} + \frac{1}{90}R^{\mu}{}_{\rho}R^{\nu}{}_{\alpha}{}^{\rho}{}_{\beta} + \frac{1}{45}R^{\mu\rho\nu\tau}R_{\rho\alpha\tau\beta}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{45}R^{\mu}{}_{\tau\rho\alpha}R^{\nu\rho\tau}{}_{\beta}+\frac{1}{45}R^{\mu}{}_{\rho\tau\alpha}R^{\nu\rho\tau}{}_{\beta}\quad\frac{\sigma^{\alpha}\sigma^{\beta}}{(\sigma^{\rho}\sigma_{\rho})}-2\quad-\frac{1}{45}R_{\alpha}{}^{\rho}R^{(\mu}{}_{\rho}\\
&+\frac{1}{90}R^{\rho\tau}R^{(\mu}{}_{\rho\alpha\tau}+\frac{1}{90}R^{\rho\tau k}{}_{\alpha}R_{\rho\tau k}{}^{(\mu}+\frac{1}{60}R^{(\mu}{}_{\alpha;\rho}{}^{\rho}-\frac{1}{180}R^{;(\mu}{}_{\alpha}\quad\frac{\sigma^{\nu)}\sigma^{\alpha}}{(\sigma^{\rho}\sigma_{\rho})}\\
&-\quad-\frac{1}{90}R_{\alpha\rho}R^{\rho}{}_{\beta}+\frac{1}{180}R^{\rho\tau}R_{\rho\alpha\tau\beta}+\frac{1}{180}R_{\rho\tau k\alpha}R^{\rho\tau k}{}_{\beta}+\frac{1}{120}R_{\alpha\beta;\rho}{}^{\rho}\\
&-\frac{1}{360}R_{;\alpha\beta}\quad\frac{\sigma^{\alpha}\sigma^{\beta}}{(\sigma^{\rho}\sigma_{\rho})}\quad g^{\mu\nu}-2\frac{\sigma^{\mu}\sigma^{\nu}}{(\sigma^{\rho}\sigma_{\rho})}\quad+\frac{m^{2}}{6}\quad 2R^{(\mu}_{\alpha}\frac{\sigma^{\nu)}\sigma^{\alpha}}{(\sigma^{\rho}\sigma_{\rho})}\\
&-R_{\alpha\beta}\frac{\sigma^{\alpha}\sigma^{\beta}}{(\sigma^{\rho}\sigma_{\rho})}\quad-\frac{g^{\mu\nu}}{2}+\frac{\sigma^{\mu}\sigma^{\nu}}{(\sigma^{\rho}\sigma_{\rho})}\qquad+\quad\frac{1}{6}-\xi\qquad-\frac{1}{3}\quad RR^{(\mu}{}_{\alpha}\\
&+\frac{1}{2}R^{;(\mu}{}_{\alpha}\quad\frac{\sigma^{\nu)}\sigma^{\alpha}}{(\sigma^{\rho}\sigma_{\rho})}+\quad\frac{1}{6}RR_{\alpha\beta}\frac{\sigma^{\mu}\sigma^{\nu}}{(\sigma^{\rho}\sigma_{\rho})}-\frac{1}{6}R_{;\alpha\beta}\quad g^{\mu\nu}-2\frac{\sigma^{\mu}\sigma^{\nu}}{(\sigma^{\rho}\sigma_{\rho})}\\
&+\frac{1}{3}R_{\alpha}{}^{\rho}R^{(\mu}{}_{\rho}{}^{\nu)}{}_{\beta}-\frac{1}{6}R_{\alpha\beta}{}^{;(\mu\nu)}+\frac{1}{6}R_{\alpha\beta;\rho}{}^{\rho}g^{\mu\nu}-\frac{1}{3}R_{\alpha}{}^{\rho}R_{\rho\beta}g^{\mu\nu}+\frac{1}{6}R^{\mu\nu}R_{\alpha\beta}\\
&+m^{2}\quad R^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\quad-R_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\quad\Big]\,\frac{\sigma^{\alpha}\sigma^{\beta}}{(\sigma^{\rho}\sigma_{\rho})}\quad-\quad\frac{1}{6}-\xi\quad{}^{2}\Big[R\quad R^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta}\\
&-R_{\alpha\beta}g^{\mu\nu})\,\frac{\sigma^{\alpha}\sigma^{\beta}}{(\sigma^{\rho}\sigma_{\rho})}-\frac{3}{4}R_{;\alpha\beta}\frac{\sigma^{\alpha}\sigma^{\beta}}{(\sigma^{\rho}\sigma_{\rho})}g^{\mu\nu}\quad+\qquad-\frac{1}{5}R^{(\mu}{}_{\alpha;\beta\gamma}-\frac{1}{30}R_{\alpha\beta}{}^{;(\mu}{}_{\gamma}\\
&-\frac{4}{45}R^{\tau}{}_{\alpha}{}^{\rho(\mu}R_{\rho\beta\tau\gamma}-\frac{1}{9}R^{(\mu}{}_{\alpha}R_{\beta\gamma}-\frac{1}{45}R_{\alpha}{}^{\rho}R_{\rho\beta}{}^{(\mu}{}_{\gamma}\quad\frac{\sigma^{\nu)}\sigma^{\alpha}\sigma^{\beta}\sigma^{\gamma}}{(\sigma^{\rho}\sigma_{\rho})^{2}}\\
&-\quad\frac{1}{72}R_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}+\frac{1}{90}R^{\rho}{}_{\alpha}{}^{\tau}{}_{\beta}R_{\rho\gamma\tau\delta}+\frac{1}{20}R_{\alpha\beta;\gamma\delta}\quad\frac{\sigma^{\alpha}\sigma^{\beta}\sigma^{\gamma}\sigma^{\delta}}{(\sigma^{\rho}\sigma_{\rho})^{2}}\quad g^{\mu\nu}-4\frac{\sigma^{\mu}\sigma^{\nu}}{(\sigma^{\rho}\sigma_{\rho})}\\
&+\quad\frac{1}{90}R^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta;\gamma\delta}-\frac{1}{45}R^{\rho}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta}R_{\rho\gamma}{}^{\nu}{}_{\delta}+\frac{1}{18}R_{\alpha\beta;\gamma\delta}g^{\mu\nu}+\frac{1}{36}R_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}g^{\mu\nu}\\
&+\frac{1}{36}R^{\rho}{}_{\alpha}{}^{\tau}{}_{\beta}R_{\rho\gamma\tau\delta}g^{\mu\nu}\quad\frac{\sigma^{\alpha}\sigma^{\beta}\sigma^{\gamma}\sigma^{\delta}}{(\sigma^{\rho}\sigma_{\rho})^{2}}\quad-\quad\frac{1}{6}-\xi\qquad\frac{2}{3}R^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta;\gamma\delta}\\
&+\frac{1}{3}R^{\rho}{}_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta}R_{\rho\gamma}{}^{\nu}{}_{\delta}+\frac{1}{3}R_{\alpha\beta}R^{\mu}{}_{\gamma}{}^{\nu}{}_{\delta}-\frac{2}{3}R_{\alpha\beta;\gamma\delta}g^{\mu\nu}-\frac{1}{3}R_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}g^{\mu\nu}\\
&-\frac{1}{3}R^{\rho}{}_{\alpha}{}^{\tau}{}_{\beta}R_{\rho\gamma\tau\delta}g^{\mu\nu}\quad\frac{\sigma^{\alpha}\sigma^{\beta}\sigma^{\gamma}\sigma^{\delta}}{(\sigma^{\rho}\sigma_{\rho})^{2}}\quad+O\quad\frac{1}{m^{2}}\quad,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где m - масса скалярного поля, ξ-постоянная связи скалярного поля с кривизной, $R(x)$ - скалярная кривизна пространства времени, $R_{\mu\nu}(x)$ - тензор Риччи, $R_{\mu\nu\rho\tau}(x)$ - тензор Римана, $\sigma(x,\widetilde{x})$ - половина геодезического интервала, соединяющего раздвинутые точки, $g_{\mu\nu}(x)$ - метрический тензор, $\sigma^{\mu}=g^{\mu\nu}(\partial\sigma/\partial x^{\nu})$, γ - постоянная Эйлера, точка с запятой означает ковариантную производную.

Эти выражения решают задачу о перенормировке $\langle T^{\mu}_{\nu}\rangle$ в принципе, однако вычисление явных выражений для $\langle T^{\mu}_{\nu}(x,\widetilde{x})\rangle_{DS}$ на фоне заданного в той или иной системе координат гравитационного фона и для заданной разности координат раздвинутых точек остается задачей весьма трудоемкой. Немногочисленные примеры вычисления $\langle T^{\mu}_{\nu}(x,\widetilde{x})\rangle_{DS}$ в пространствах с большой степенью симметрии существуют [4, 5]. В произвольном случае подобная задача может быть решена с использованием компьютерных систем аналитических вычислений. Таким вычислениям должна предшествовать процедура разложения величины

$$
\sigma(x,\widetilde{x})=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(x)\frac{\partial\sigma(x,\widetilde{x})}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial\sigma(x,\widetilde{x})}{\partial x^{\nu}}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(x)\sigma_{\mu}(x,\widetilde{x})\sigma_{\nu}(x,\widetilde{x}) \tag{8}
$$

в ряд по степеням разности координат раздвинутых точек

$$
\varepsilon^{\mu}\equiv\widetilde{x}^{\mu}-x^{\mu}. \tag{9}
$$

Такое разложение может быть построено, учитывая, что (см. [6])

$$
\sigma^{\mu}(x,\widetilde{x})=-u^{\mu}(x)ds, \tag{10}
$$

где

$$
u^{\mu}=\frac{dx^{\mu}}{ds}, \tag{11}
$$

ds - дифференциал длины дуги между точками $P(x^{\mu})$ и $\widetilde{P}(\widetilde{x}^{\mu})$ вдоль геодезической линии, их соединяющей. Величина $u^{\mu}(x)ds$ может быть найдена из разложения функции $\widetilde{x}^{\mu}(ds)$, описывающих геодезическую при условии, что $\widetilde{x}^{\mu}(0) \equiv x^{\mu}$

$$\begin{aligned}\widetilde{x}^{\mu}(ds) \quad &= \quad x^{\mu} + \frac{dx^{\mu}}{ds}ds + \frac{1}{2!}\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2}ds + \frac{1}{3!}\frac{d^3x^{\mu}}{ds} + \frac{1}{4!}\frac{d^4x^{\mu}}{ds^4}ds^4 \\ &+\frac{1}{5!}\frac{d^5x^{\mu}}{ds^5}ds^5 + O(ds^6)\end{aligned} \tag{12}$$

Коэффициенты в этом разложении могут быть найдены из уравнения геодезической

$$\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} = -\Gamma^{\mu}_{kp}u^k u^p \tag{13}$$

и производных от этого уравнения по s

$$\begin{aligned}&\frac{d^3x^{\mu}}{ds^3} = -\frac{d\Gamma^{\mu}_{kp}}{ds}\ u^k u^p - 2\Gamma^{\mu}_{kp}u^k\frac{du^p}{ds} = \ -\Gamma^{\mu}_{kp,q} + 2\Gamma^{\mu}_{ka}\Gamma^{a}_{pq}\ \ u^k u^p u^q; \\ &\frac{d^4x^{\mu}}{ds^4} = \ \frac{d}{ds}\ \ -\Gamma^{\mu}_{kp,q} + 2\Gamma^{\mu}_{ka}\Gamma^{a}_{pq}\ \ \ u^k u^p u^q + \ -\Gamma^{\mu}_{kp,q} + 2\Gamma^{\mu}_{ka}\Gamma^{a}_{pq}\ \ \ \ \frac{du^k}{ds}u^p u^q \\ &+u^k\frac{du^p}{ds}u^q + u^k u^p\frac{du^q}{ds}\ \ \ = \ -\Gamma^{\mu}_{kp,qs} + 4\Gamma^{\mu}_{ka,p}\Gamma^{a}_{qs} + \Gamma^{\mu}_{kp,a}\Gamma^{a}_{qs} + 2\Gamma^{\mu}_{ka}\Gamma^{a}_{pq,s} \\ &-2\Gamma^{\mu}_{ab}\Gamma^{a}_{kp}\Gamma^{b}_{qs} - 4\Gamma^{\mu}_{ka}\Gamma^{a}_{pb}\Gamma^{b}_{qs}\ \ \ u^k u^p u^q u^s.\end{aligned} \tag{14}$$

Поэтому разложение (12) может быть переписано в форме

$$\begin{aligned}\widetilde{x}^{\mu}(ds) \quad &= \quad x^{\mu}(0) + u^{\mu}ds - \frac{1}{2!}\Gamma^{\mu}_{kp}u^k u^p ds^2 + \frac{1}{3!}\ \ -\Gamma^{\mu}_{kp,q} + 2\Gamma^{\mu}_{ka}\Gamma^{a}_{pq}\ \ u^k u^p u^q ds^3 \\ &+\frac{1}{4!}\ \ -\Gamma^{\mu}_{kp,qs} + 4\Gamma^{\mu}_{ka,p}\Gamma^{a}_{qs} + \Gamma^{\mu}_{kp,a}\Gamma^{a}_{qs} + 2\Gamma^{\mu}_{ka}\Gamma^{a}_{pq,s} - 2\Gamma^{\mu}_{ab}\Gamma^{a}_{kp}\Gamma^{b}_{qs} \\ &-4\Gamma^{\mu}_{ka}\Gamma^{a}_{pb}\Gamma^{b}_{qs}\ \ \ u^k u^p u^q u^s ds^4 + O(ds^5).\end{aligned} \tag{15}$$

Эти уравнения могут быть решены методом последовательных приближений относительно $u^{\mu}ds$. Так решение первого порядка имеет вид

$$u^{\mu}ds = \widetilde{x}^{\mu}(ds) - x^{\mu}(0) + O\ \ ds^2\ \ = \varepsilon^{\mu} + O(\varepsilon^2). \tag{16}$$

Решения второго и третьего порядка

$$u^{\mu}ds = \varepsilon^{\mu} + \frac{1}{2}\Gamma^{\mu}_{kp}(u^k ds)(u^p ds) + O(ds^3) = \varepsilon^{\mu} + \frac{1}{2}\Gamma^{\mu}_{kp}\varepsilon^k\varepsilon^p + O(\varepsilon^3), \tag{17}$$

$$\begin{aligned}u^{\mu}ds \quad &= \quad \varepsilon^{\mu} + \frac{1}{2}\Gamma^{\mu}_{ab}\ \ \ \varepsilon^a + \frac{1}{2}\Gamma^{a}_{kp}\varepsilon^k\varepsilon^p\ \ \ \ \ \varepsilon^b + \frac{1}{2}\Gamma^{b}_{qs}\varepsilon^q\varepsilon^s\ \ \ + \ \ \ \frac{1}{6}\Gamma^{\mu}_{kp,q} \\ &-\frac{1}{3}\Gamma^{\mu}_{ka}\Gamma^{a}_{pq}\ \ \ \varepsilon^k\varepsilon^p\varepsilon^q + O(\varepsilon^4) = \varepsilon^{\mu} + \frac{1}{2}\Gamma^{\mu}_{kp}\varepsilon^k\varepsilon^p + \ \ \ \frac{1}{6}\Gamma^{\mu}_{kp,q} \\ &+\frac{1}{6}\Gamma^{\mu}_{ka}\Gamma^{a}_{pq}\ \ \ \varepsilon^k\varepsilon^p\varepsilon^q + O(\varepsilon^4).\end{aligned} \tag{18}$$

Необходимое для построения $\langle T^{\mu}_{\nu}(x,\widetilde{x})\rangle_{DS}$ решение четвертого порядка есть

$$\begin{aligned}u^{\mu}ds \quad &= \quad \varepsilon^{\mu} + \frac{1}{2}\Gamma^{\mu}_{ab}\ \ \varepsilon^a + \frac{1}{2}\Gamma^{a}_{kp}\varepsilon^k\varepsilon^p + \ \ \ \frac{1}{6}\Gamma^{a}_{kp,l} + \frac{1}{6}\Gamma^{a}_{kc}\Gamma^{c}_{pl}\ \ \ \varepsilon^k\varepsilon^p\varepsilon^l\ \ \ \ \ \varepsilon^b + \frac{1}{2}\Gamma^{b}_{qs}\varepsilon^q\varepsilon^s \\ &+\ \ \ \frac{1}{6}\Gamma^{b}_{qs,j} + \frac{1}{6}\Gamma^{b}_{qa}\Gamma^{a}_{sj}\ \ \ \varepsilon^q\varepsilon^s\varepsilon^j\ \ \ +\ \ \ \frac{1}{6}\Gamma^{\mu}_{ab,c} - \frac{1}{3}\Gamma^{\mu}_{ad}\Gamma^{d}_{bc}\ \ \ \ \ \ \varepsilon^a + \frac{1}{2}\Gamma^{a}_{kp}\varepsilon^k\varepsilon^p \\ &\ \ \varepsilon^b + \frac{1}{2}\Gamma^{b}_{qs}\varepsilon^q\varepsilon^s\ \ \ \ \ \ \varepsilon^c + \frac{1}{2}\Gamma^{c}_{lj}\varepsilon^l\varepsilon^j\ \ \ \ +\ \ \ \frac{1}{24}\Gamma^{\mu}_{kp,qs} - \frac{1}{6}\Gamma^{\mu}_{ka,p}\Gamma^{a}_{qs} - \frac{1}{24}\Gamma^{\mu}_{kp,a}\Gamma^{a}_{qs} \\ &-\frac{1}{12}\Gamma^{\mu}_{ka}\Gamma^{a}_{pq,s} + \frac{1}{12}\Gamma^{\mu}_{ab}\Gamma^{a}_{kp}\Gamma^{b}_{qs} + \frac{1}{6}\Gamma^{\mu}_{ka}\Gamma^{a}_{pb}\Gamma^{b}_{qs}\ \ \ \varepsilon^k\varepsilon^p\varepsilon^q\varepsilon^s + O(\varepsilon^5)\end{aligned} \tag{19}$$

или

$$\begin{aligned}-\sigma^{\mu} \quad &= \quad u^{\mu}ds = \ \varepsilon^{\mu} + \frac{1}{2}\Gamma^{\mu}_{kp}\varepsilon^k\varepsilon^p + \ \ \ \frac{1}{6}\Gamma^{\mu}_{kp,q} + \frac{1}{6}\Gamma^{\mu}_{ka}\Gamma^{a}_{pq}\ \ \ \varepsilon^k\varepsilon^p\varepsilon^q + \ \ \ \frac{1}{24}\Gamma^{\mu}_{kp,qs} \\ &+\frac{1}{24}\Gamma^{\mu}_{kp,a}\Gamma^{a}_{qs} + \frac{1}{12}\Gamma^{\mu}_{ka}\Gamma^{a}_{pq,s} + \frac{1}{24}\Gamma^{\mu}_{ab}\Gamma^{a}_{kp}\Gamma^{b}_{qs}\ \ \ \varepsilon^k\varepsilon^p\varepsilon^q\varepsilon^s + O(\varepsilon^5).\end{aligned} \tag{20}$$

Подстановка этих выражений (учитывая также (8)) в (2) с последующим разложением результата по степеням $\widetilde{x}^{\mu} - x^{\mu}$ и отбрасыванием членов, исчезающих при $x \to \widetilde{x}$, приводит к искомым явным выражениям для разложения $\langle T^{\mu}_{\nu}(x, \widetilde{x})\rangle_{DS}$ по степеням разности координат раздвинутых точек.

Описанная программа была реализована в пакете символьных вычислений MAPLE. Входными параметрами являются коэффициенты метрического тензора $g_{\mu\nu}(x)$, описывающего фоновую геометрию пространства-времени, и разность координат раздвинутых точек $\varepsilon^{\mu} = \widetilde{x}^{\mu} - x^{\mu}$. Результаты таких вычислений совпадают с ранее известными [4] для соответствующего выбора входных параметров.

Работа поддержана грантами РФФИ № 05-02-17344, 05-02-39023, 06-01-00765.

Литература

[1] B.S. DeWitt, Phys.Rep. **19C** 295 (1975)

[2] S.M. Cristensen, Phys.Rev.D **14** 2499 (1976)

[3] S.M. Cristensen, Phys.Rev.D **17** 946 (1978)

[4] P. R. Anderson, W. A. Hiscock, and D. A. Samuel, Phys. Rev. D **51**, 4337 (1995)

[5] P. B. Groves, P. R. Anderson, E. D. Carlson, Phys.Rev. D **66** 124017 (2002)

[6] Синг, Общая теория относительности. Издательство ин. литературы, М. 1963