ИССЛЕДОВАНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ СВОЙСТВ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ

Широкова О.А.

E-mail: Olga.Shirokova@ksu.ru, OShirokova@mail.ru

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет

Аннотация. *В работе методом возмущения исследуется реакция фильтрационных течений со свободными границами на вариации исходных данных.*

Research of variational properties of the filtration problem

Shirokova O.A.

Abstract. *In this paper, a parameter perturbation technique is used in order to receive quantitative estimations of free boundary problem decision variations.*

Цель работы состоит в том, чтобы методом линейного программирования решить задачу об интервале разброса значений интегральных характеристик (расхода и смоченной площади грунта) фильтрационного течения при изменении коэффициента фильтрации в рамках заданной системы ограничений.

Во многих задачах фильтрации неточность исходной информации приводит к необходимости исследовать изменение их решений при вариации исходных данных [1,2]. В связи с этим возрос интерес к изучению вариационных свойств таких задач, особенно в нелинейных случаях. Нелинейность в них может быть связана как с законом фильтрации, так и с наличием свободных границ.

Применение методов теории возмущения [2] дает возможность перейти от сложных краевых задач со свободными границами для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных к линейным краевым задачам в областях с известными границами.

Постановка задачи безнапорной фильтрации

Рассмотрим плоское фильтрационное течение жидкости через слабо неоднородную плотину произвольной формы при стационарном режиме.

Краевая задача для функции напора h(x,y) в области течения Ω имеет вид [3]:

$$\vec{U} = -K(x,y)\cdot\nabla h, \quad divU = 0, \quad (x,y)\in\Omega,$$

$$\partial h/\partial n = 0 \quad , \quad (x,y)\in\Gamma_v;$$

$$\begin{gathered} h = h_i, \qquad (x,y)\in\Gamma_i, \quad i=\overline{1,2}; \\ p = \rho g(h(x,y)-y) = 0 \quad , \quad (x,y)\in\Gamma_P; \\ p=0, \quad \partial h/\partial n = 0, \quad (x,y)\in\Gamma_y', \end{gathered} \tag{1}$$

где p- давление, ρgy- гидростатическое давление, ρ- плотность жидкости, g- ускорение свободного падения, K(x,y)- коэффициент фильтрации, Γ_y'- депрессионная кривая, Γ_v - непроницаемое основание, Γ_P - участок высачивания, Γ_i (i=1,2) – границы верхнего и нижнего бьефов с напорами h_i.

Поскольку грунт слабонеоднородный, то будем считать, что фильтрационное течение в Ω есть результат возмущения "опорного" течения в однородном грунте [6].

Имеем K(x,y)=Ko+$\varepsilon\chi$(x,y), $\varepsilon <<1$, где $\varepsilon\chi$(x,y) – малое возмущение коэффициента фильтрации, Ko=Const. Вариация коэффициента фильтрации $\varepsilon\chi$(x,y) приводит к смещению $\delta y = \varepsilon N(x)\bar{j}$ кривой депрессииΓ_y опорного течения и к возмущениям $\varepsilon\varphi(x,y)$, $\varepsilon\bar{v}(x,y)$ и δQ напора h_0, скорости $\bar{U}$ и расхода Q в исходной области фильтрации Ωo.

Применение метода малых возмущений требует выполнения следующих предположений: положим, что функции h_0(x,y) и ϕ(x,y) определены в точках исходной области и в возмущенной области и дифференцируемы там. Используем разложение функций из (1) в ряд по малому параметру ε (с точностью доε^2). Приравнивания коэффициенты при ε [4], получим краевую задачу для вариации напора ϕ(x,y) в области Ωo:

$$\Delta\varphi = -K_0^{-1}(\nabla h_0\cdot\nabla\chi), . \tag{2}$$

$$\partial\varphi/\partial n = 0, \Gamma_\nu : \tag{3}$$

$\varphi = 0, \Gamma_i$ (i=1,2), Γ_P: (4)

$$\Gamma_y: \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial}{\partial S}[\frac{\varphi}{1-\partial h_0/\partial y}] + \frac{\varphi}{1-\partial h_0/\partial y}[\frac{\partial^2 h_0}{\partial x\partial y}\sin\alpha - \frac{\partial^2 h_0}{\partial y^2}\cos\alpha] \tag{4}$$

Итак, для стационарного течения получим краевую задачу (2)-(4) для вариации напора ϕ(x,y) в области Ω_0 для плотины произвольной формы.

Модельная задача. Фильтрационное стекание по наклонному водоупору в слабонеоднородном грунте

Для иллюстрации метода возмущений изучим изменение положения депрессионной кривой при фильтрации жидкости из водоёма по наклонному водоупору в зависимости от изменения поля проницаемости грунта. Рассмотрим плоскую модельную стационарную задачу о фильтрационном стекании жидкости через слабонеоднородный грунт, подстилаемый наклонным водоупором Γ_v. Движение жидкости подчиняется закону Дарси, а водоупор прямолинеен и составляет с горизонталью угол $\alpha \quad (0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2})$ (рис. 1):

$$lx'\overline{\bar{i}_1}\overline{i j_1}y'\chi = \chi(x,y)\chi = 0\Gamma'_y\Gamma_y\Gamma_2\Gamma_v\Gamma_1\bar{j}$$

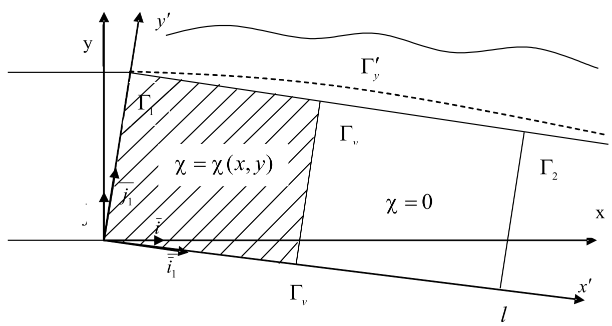

Рис.1. *Фильтрационное стекание жидкости через слабонеоднородный грунт*

Тогда задача (2)- (4) сводится к следующей [8]:

$$\Omega_0 : \Delta\varphi = K_0^{-1} \cdot \sin\alpha \cdot \frac{d\chi}{dx},$$

$$N(x) = \frac{\varphi(x,y)}{\cos^2\alpha}\Gamma_1 : \varphi = 0; \quad \Gamma_2 : \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \quad \Gamma_v : \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad , \tag{5}$$

$$\Gamma_y : \sin\alpha \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \cos\alpha \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \quad .$$

Представим решение задачи (5) в виде суммы частного решения неоднородного уравнения V(x) и общего решения краевой задачи для однородного уравнения U(x,y), то есть имеем: $\varphi(x,y) = V(x) + U(x,y)$

В качестве итерационного метода решения данной задачи выбран строчный метод Зейделя с прогонками по двум направлениям [6].

Возмущение фильтрационного стекания

Изучим изменение положения депрессионной кривой и интегральных характеристик решения стационарной задачи при различных положениях неоднородных включений в плоской области фильтрации Ω [6].

Такими характеристиками, в частности, являются вариации расхода $\frac{\delta \mathrm{Q}}{\varepsilon}$и смоченной области грунта$\frac{\delta S}{\varepsilon}$. Они, в свою очередь, определяются решениями φ краевых задач (5), зависящими от выбора функции $\chi(x,y)$.

Рассмотрим задачу о неоднородном включении для случая $\chi = \chi(x)$.

Рассмотрим семейство функций

$$\chi(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i f_i(x); \tag{6}$$

где c_i-произвольные константы,

$N-$целое число,

$f_i(x)-$линейные функции - “крышки”:

$$i = \overline{1,N} \quad , \quad 0 = x_1 < x_2 < ... < x_N = 1; \quad f_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_{i-1}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \quad h_i = x_{i+1} - x_i; \\ (x_{i+1} - x)/h_i, & x \in [x_i, x_{i+1}]; \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]; \end{cases}$$

где

Можно рассматривать $\{f_i\}$ как базисные неоднородности. В силу линейности краевой задачи (5) её решение можно представить в виде:

$$\varphi(x,y)=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x,y), \tag{7}$$

где φ_i−решение указанной задачи при $\chi=f_i(x)$. Назовем φ_iоткликом на базисные функции f_i(базисным откликом).

Использование базисных неоднородностей дает возможность, с одной стороны, получить базисные отклики для метода сплайн- аппроксимации, а с другой стороны, для случая $\chi=\chi(x)$решить задачу о неоднородном включении в виде вертикального слоя $\chi=f_i(x)$. Положение неоднородного включения варьируется по x. Форма включения неизменна. Для получения базисных откликов φ_iнеобходимо решить задачу (5) для каждой базисной функции f_i.

Численное решение. Вопросы чувствительности

Рассмотрим вопрос о чувствительности расхода Q и смоченной площади грунта S к изменению коэффициента фильтрации. Вариации $\frac{\delta Q}{\varepsilon}$ и $\frac{\delta S}{\varepsilon}$являются функционалами от решения $\varphi(x,y)$, которое определяется исходной функцией $\chi(x,y)$. Неопределенность исходной информации о коэффициенте фильтрации K(x,y) выразим условием $\chi(x,y)\in R$, где R- заданное множество. Таким образом, для $F(\chi)=\delta Q/\varepsilon$(или $\frac{\delta S}{\varepsilon}$) имеем вариационные задачи:

$$\begin{array}{ll} \sup\ F(\chi), & \inf\ F(\chi) \\ \chi\in R & \chi\in R \end{array} \tag{8}$$

Пусть множество R состоит из функции $\chi(x)$. Учитывая (7), получим, что функционалы $\frac{\delta Q}{\varepsilon}$ (или $\frac{\delta S}{\varepsilon}$) могут быть представлены в виде:

$$J(C_i)=\sum_{i=1}^{N}C_iA_i, \tag{9}$$

где $A_i=\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS+\int\limits_{\Gamma_1}f_i\frac{\partial h}{\partial n}dS$ (для $\frac{\delta Q}{\varepsilon}$)

$A_i=\cos^{-2}\alpha\int\limits_{\Gamma_y}\varphi_i(x,m)dx$ (для $\frac{\delta S}{\varepsilon}$)

Следовательно, задачи (8) сводятся к нахождению экстремумов линейной функции (9) при дополнительных ограничениях на искомые параметры C_i [7].

Пусть множество R характеризуется следующими ограничениями:

1)$\underline{D}\le C_i\le\overline{D_1}$, $\underline{D}=-\overline{D_1}=const$; (11)

2)$\max\limits_{x\in\Delta_0}\sum\limits_{i=1}^{N}C_iN_i(x)\le\varepsilon_1$, $\Delta_0\in[0,l]$ (12)

При этом задача о нижней границе интервала разброса вырождается: inf J=0 при $\chi=0$. Определение верхней границы сводится к решению задачи линейного программирования.

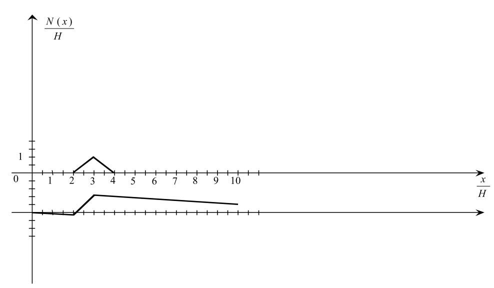

Рис.2. *Благодаря полученным результатам мы можем судить о величине отклонения свободной границы. (рис 2).*

Литература

1. Марчук Г. И. *Сопряженные уравнения и анализ сложных систем.* - М.: Наука. 1992. 336с.
2. Найфе А. *Введение в методы возмущений* – М.: Мир. 1984. 535с.
3. Вабищевич П. Н. *Численные методы решения задач со свободной границей.* - М.: Изд - во МГУ, 1987.164.

4. .Dagan G. *Second order linearized theory of free-surface flow in porous media*// La Houille Blanche. 1964. №8. P.901-910.

5. Васильев Ф. П. *Численные методы решения экстремальных задач.* – М.: Наука. 1980. 520с.

6. Широкова О. А. *Метод возмущений в задачах фильтрации со свободными границами* //Дисс. канд. Физ.-мат. наук. – Казань: КГУ, 1993. 133с.

7. Костерин А. В., Широкова О. А. *Возмущение решений краевых задач со свободными границами* // Моделирование в механике. 1992. Т.6(23). . №4. С.33-40.

8. Широкова О. А. *О вопросах чувствительности в задачах фильтрации со свободными границами* // Труды IV межд. конф. женщин-математиков. – Н. Новгород. 1997. Вып.2. Т.4. С.119-125.