ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИКИ ПРОЦЕССОВ С ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ЧАСТИЦАМИ В РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ В ПАКЕТЕ MAPLE

Зиатдинов Р. А.

E-mail: `rushanziatdinov@yandex.ru`

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Казань

Аннотация. *На основе предложенных Игнатьевым неравновесной модели Вселенной и кинетического уравнения типа Фоккера-Планка изучается эволюция сверхтепловой реликтовой компоненты.*

Research of processes kinetics with elementary particles in the early universe in computer system maple

Ziatdinov R. A.

Abstract. *Evolution of superthermal relict component is research on basis of non-equilibrium model of Universe and kinetic equation of Fokker-Planck type offered by Ignatyev.*

Интеграл упругих парных столкновений для четырехчастичных реакций для изотропных распределений $f_a(p, x^i)$, зависящих лишь от абсолютной величины импульса, можно привести к виду [1]:

$$J_{ab}(p) = \frac{2S_b+1}{(2\pi)^3 p}\int_0^\infty \frac{qdq}{\sqrt{m_b^2+q^2}}\int_0^{4pq}\frac{ds}{16\pi}\int_0^1 dx\overline{|M(s,x|^2}\times$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \;\; f_a(p')f_b(q') - f_a(p)f_b(q) \;\; , \tag{1}$$

куда необходимо подставить следующие выражения для p', q' и Δp :

$$p' = p - \Delta p; \qquad q' = q + \Delta p,$$

$$\Delta p = x(p-q) - \cos\varphi\sqrt{x(1-x)(4pq-s)}.$$

Будем предполагать, как это часто делается, что при столкновениях частицв среднем передается небольшой импульс, т.е.,

$$\overline{(p_a-p_c)^2} \ll \overline{p^2}, \tag{2}$$

чему соответствуют значения переменной $x \to 1$. Полагая

$$x = 1 - \xi^2, \tag{3}$$

разложим в ряд Тейлора интеграл столкновений по малости передаваемого импульса, т.е., по малости параметра $\xi^2 \ll 1$.

Удерживая члены порядка ξ^2 , запишем разложения функций распределения:

$$f(p') = f(q) + \frac{df}{dq}[\cos\varphi\xi\sqrt{4pq-s} + \xi^2(p-q)] + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dq^2}\xi^2(4pq-s)\cos^2\varphi; \tag{4}$$

$$f(q') = f(p) - \frac{df}{dp}[\cos\varphi\xi\sqrt{4pq-s} + \xi^2(p-q)] + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dp^2}\xi^2(4pq-s)\cos^2\varphi. \tag{5}$$

При интегрировании по угловой переменной интегралы, линейные по ξ , исчезнут, поэтому для внутреннего интеграла получим выражение:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \;\; f(p')f(q') - f(p)f(q) \;\; =$$

$$f(p)f(q) + (p-q)\xi^2 \;\; f(p)\frac{df(q)}{dq} - f(q)\frac{df(p)}{dp} \;\; + \tag{6}$$

$$\frac{1}{4}\xi^2(4pq-s) \;\; f(p)\frac{d^2f(q)}{dq^2} - 2\frac{df(p)}{dp}\frac{df(q)}{dq} + f(q)\frac{d^2f(p)}{dp^2} \;\; .$$

Проводя интегрирование по переменной x , положим:

$$A = \int_0^1 |F(s,x)|^2(1-x)ds; \; B = \int_0^1 x|F(s,x)|^2dx. \tag{7}$$

В дальнейшем будем учитывать тот факт, при сверхвысоких энергиях восстанавливается скейлинг, т.е., выполняется соотношение, согласно которому $F(s,x) \approx F(x)$, так что $A \approx \mathrm{Const}, B \approx \mathrm{Const}$. Тогда, произведя интегрирование по переменной s в полученном выражении, найдем:

$$J_{ab}(p) = A\frac{2S_b+1}{(4\pi)^3 p}\int_0^\infty dq \quad f(p)\frac{df(q)}{dq} - f(q)\frac{df(p)}{dp} \quad +$$

$$+ 2p^2q^2 \quad f(p)\frac{d^2f(q)}{dq^2} - 2\frac{df(p)}{dp}\frac{df(q)}{dq} + f(q)\frac{d^2f(p)}{dp^2} \qquad . \tag{8}$$

Произведем интегрирование по частям в части интеграла, содержащего вторые производные по переменной q , при этом:

$$\int_0^\infty q^2\frac{d^2f(q)}{dq^2}dq = q^2 \left.\frac{df(q)}{dq}\right|_0^\infty - 2\int_0^\infty q\frac{df(q)}{dq}dq =$$

$$= -\,2qf(q)|_0^\infty + 2\int_0^\infty f(q)q^2dq = 2\int_0^\infty f(q)q^2dq, \tag{9}$$

где мы учли:

$$\lim_{q\to\infty} q^n f(q) = 0, \quad (0 \le n \le 3), \tag{10}$$

условие, необходимое для сходимости выражений для плотности числа частиц и энергии.

Таким образом, проводя интегрирование по частям, получим окончательно интеграл столкновений в форме Фоккера-Планка:

$$J_{ab}(p) = A\frac{2S+1}{4(2\pi)^3 p} \times \frac{\partial}{\partial p} \quad p^2\int_0^\infty q^2 \quad f(q)\frac{\partial f(p)}{\partial p} - f(p)\frac{\partial f(q)}{\partial q} \quad dq \quad . \tag{11}$$

Подставляя полученный интеграл столкновений в форме Фоккера-Планка (11) в кинетическое уравнение

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} - \frac{\dot a}{a}p\frac{\partial f_a}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{m_a^2+p^2}}\sum_{b,c,d} J_{abcd}(t,p), \tag{12}$$

приведем его к виду при ультрарелятивистских значениях импульса p :

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} - \frac{\dot a}{a}p\frac{\partial f_a}{\partial p} = A\frac{2S+1}{4(2\pi)^3p^2} \times \frac{\partial}{\partial p} \quad p^2\int_0^\infty q^2 \quad f(q)\frac{\partial f(p)}{\partial p} - f(p)\frac{\partial f(q)}{\partial q} \quad dq \quad . \tag{13}$$

Производя еще раз интегрирование по частям в уравнении (13) и учитывая соотношения:

$$n(t) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3}\int_0^\infty q^2 f(q)dq, \tag{14}$$

- плотность числа частиц,

$$T_S(t) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3}\int_0^\infty qf(q)dq, \tag{15}$$

- след тензора энергии-импульса частиц, приведем уравнение (13) к виду:

$$\frac{\partial f_a}{\partial \eta} - \frac{a'}{a}p\frac{\partial f_a}{\partial p} = \frac{A}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}p^2 \quad n(\eta)\frac{\partial f(p)}{\partial p} + 2T_S(\eta)f(p) \tag{16}$$

С помощью некоторых введенных обозначений приведем уравнение (16) к более изящной форме относительно функции $f(\eta,P)$ (см., например, различные варианты [20], [21]):

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{An_*}{P^2}\frac{\partial}{\partial P}P^2 \quad \frac{\partial f}{\partial P} + 2\beta(\eta)f \quad , \tag{17}$$

где

$$\beta(\eta)n_* = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3}\int_0^\infty f(\eta,P)PdP. \tag{18}$$

Это и есть искомое кинетическое уравнение в диффузионном приближении.

Заметим, что $\beta(\eta)$ сама является интегралом от функции распределения. Таким образом, несмотря на внешнюю простоту, уравнение (17) остается интегро-дифференциальным.

Произведя замену переменных и переходя в дальнейшем к новой функции распределения $G(\eta, x)$, запишем окончательно диффузионное уравнение (17) относительно функции $G(\tau, x)$ в форме:

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}x^2 \quad \frac{\partial G}{\partial x} + 2b(\tau)G \quad . \tag{19}$$

Уравнение (19) должно решаться с начальными и граничными условиями вида:

$$G(0, x) = G(x); \quad \lim_{x\to\infty} G(\tau, x)x^3 = 0, \tag{20}$$

причем функция $G(x)$ должна удовлетворять интегральным условиям:

$$\int_0^\infty G(x)x^2 dx = 1, \int_0^\infty G(x)x^3 dx = 1. \tag{21}$$

В случае $b(\tau) = 0$ уравнение принимает вид трехмерного уравнения теплопроводности в сферической системе координат в случае сферической симметрии, нижеследующее решение которого на ранних стадиях расширения описывает нормированную функцию распределения в унитарном пределе:

$$G(\tau, x) = \frac{1}{2x\sqrt{\pi\tau}}\int_0^\infty G(y)(\exp(\frac{-(x-y)^2}{4\tau}) - \exp(\frac{-(x+y)^2}{4\tau}))ydy, \tag{22}$$

где $G(y)$ - предполагаемое начальное распределение, определяемое из соотношений нормировки. Предположим, что оно имеет следующий вид:

> G(0,x):=A*Heaviside(x0-x);
> assume(x0 > 0,A > 0);

$$G(0, y) := AHeaviside(x0 - x), \tag{23}$$

где A и x0 - положительные константы, Heaviside(x)-ступенчатая функция. Перепишем интегральные условия:

> Eq1:=int(G(0,x)*x^2,x=0..infinity)=1;

$$Eq1 := \frac{A(y0)^3}{3} = 1. \tag{24}$$

> Eq2:=int(G(0,x)*x^3,x=0..infinity)=1;

$$Eq2 := \frac{A(y0)^4}{4} = 1. \tag{25}$$

Решая систему двух уравнений, получим:
> fsolve({ Eq1,Eq2 });

$$A = \frac{81}{64}, y0 = \frac{4}{3}. \tag{26}$$

Таким образом, получим начальное распределение вида:

$$G(x) = \frac{81}{64}\chi(\frac{4}{3} - x). \tag{27}$$

Подставив начальное распределение в (22), получим решение, которое численно проинтегрировано и представлено следующим графиком:

```
$>$  G:=(tau,x)-
 $>$ 1/(2*x*sqrt(Pi*tau))*int(81/64*Heaviside(4/3-y)*y*(\exp(-1/4*(x-y)\^{}2/tau)-
 \exp(-1/4*(x+y)\^{}2/tau)),y =0 .. 4/3):

 $>$  plot3d(G(tau,x),x=0..10,tau=0..10,axes=boxed);
```

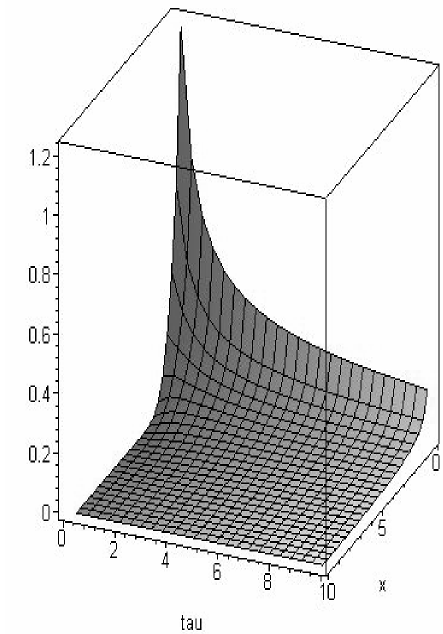

Рис.1. *Функция распределения.*

При $\tau << \tau_{eff}$, где τ_{eff} -эффективное время столкновений рассматриваемых частиц, интеграл столкновений (правая часть кинетического уравнения (12)) равен нулю. Тогда разлагая уравнение (19) в ряд $G = G_0 + G_1$, где G_0 -начальное ступенчатое распределение, получим:

> b:=(tau)- > int(G(tau,x)*x,x=0..infinity);

$$b := \tau \to \int_0^\infty G(\tau,\, x)\, x\, dx \tag{28}$$

> Eq:=diff(G(tau,x),tau)=(1/x^2)*Diff(x^2*(Diff(G(tau,x),
x)+2*b(tau)*G(tau,x)),x);

$$Eq := \frac{\partial}{\partial \tau}\, G(\tau,\, x) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}\,(x^2\,((\frac{\partial}{\partial x}\, G(\tau,\, x)) + 2\, \int_0^\infty\, G(\tau,\, x)\, x\, dx\, G(\tau,\, x)))}{x^2} \tag{29}$$

> eval(subs(G(tau,x)=G0(tau,x)+G1(tau,x),Eq)):
> subs(diff(G0(tau,x),tau)=0,lhs(%))=eval(subs({ diff(G0(tau,x),tau)=0,
G1(tau,x)=0 } ,rhs(%))):
Интегрируя обе части уравнения по переменной τ , получим
> G1:=(tau,x)- > int(1/x^2*(2*x*(diff(G0(tau,x),x)+2*int(G0(tau,x)*x,x=0..
infinity)*G0(tau,x))+x^2*(diff(G0(tau,x),'$'(x,2))+2*int(G0(tau,x)*x,x=0.. infinity)*diff(G0(tau,x),x))),tau);

$$\begin{gathered} G1(\tau,\, x) \to \int(2\, x\, (diff(G0(\tau,\, x),\, x) + 2\, \int_0^\infty\, G0(\tau,\, x)\, x\, dx\, G0(\tau,\, x)) \\ +x^2\, ((\frac{d^2}{dx^2}\, G0(\tau,\, x)) + 2\, \int_0^\infty\, G0(\tau,\, x)\, x\, dx\, diff(G0(\tau,\, x),\, x)))/x^2 d\tau \end{gathered} \tag{30}$$

> G1(tau,x);

$$\frac{729}{128}\, \frac{Heaviside(\frac{4}{3} - x)\tau}{x} \tag{31}$$

> G:=(tau,x)- > G0(tau,x)+G1(tau,x):
> plot3d(G(tau,x),tau=0..3,x=0..3,axes=boxed);

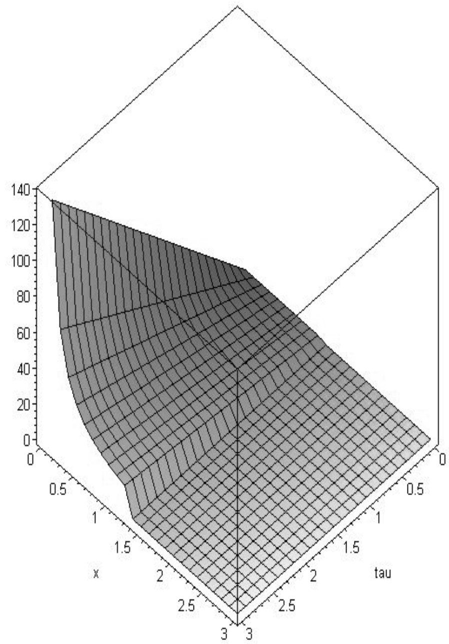

Рис.2. *Функция распределения при* $\tau << \tau_{eff}$.

Заметим также, что ультрарелятивистская равновесная функция распределения:

$$f_0 = C(\tau)e^{-2\frac{\beta(\tau)}{x}}, \tag{32}$$

где $C(\tau)$ - произвольная функция, обращает в нуль полученный интеграл столкновений. Это означает, что с течением времени $\tau \to \infty$ решение уравнения (19) стремится к равновесному распределению (32) с температурой:

$$T(\eta) = \frac{\beta(\eta)}{a(\eta)} \Rightarrow T_* = \beta(\eta), \tag{33}$$

где T_* - конформная температура.

Литература

1. R.I.Eden, *High Energy Collisions of Elementary Particles*, Cambridge At the University Press, 1967
2. Игнатьев Ю.Г. Возможность нарушения локального термодинамического равновесия в ранней вселенной. // Изв. вузов. Физика. - 1986. - Т. 29. - № 2. - С. 27.
3. Ignat'ev Yu. G., Ziatdinov R.A. Diffusion model of evolution of superthermal high-energy particles under scaling in early universe. // Gravitation & Cosmology. - 2006. - V. 12 - No. 4, - P. 1.
4. Голоскоков. Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple / Д.П. Голоскоков. – СПб.: Питер, 2004.
5. Соболев. С.Л. Уравнения математической физики. М:, Наука, 1966.