ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПАКЕТА КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Черкасова В.В., Мантуров О.В.

E-mail: cher_vl@orel.ru, oleg@manturov.mccme.ru

Орловский государственный университет, г. Орел.[1]

Аннотация. *В данной статье построено решение задачи о качении шара в терминах мультипликативного интеграла и приведены основные способы их интегрирования (вычисления).*

Как правило, решение многих физических задач сводится к дифференциальному уравнению. Задача о качении шара без проскальзывания по произвольной поверхности относится к числу задач решаемых в механике неголономных систем. В зависимости от начальных условий и типов поверхностей качения найдены новые случаи ее разрешения в квадратурах, а также сформулировано неголономное обобщение задачи Якоби о движении по инерции точки по эллипсоиду [6]. Однако, когда шар катится по поверхности второго порядка, возможно использование бесконечномалого (инфинитезимального) исчисления матричных функций [1]. реализовывать вычисления, искать характеристики матриц и матричных функций рациональнее с применением новых информационных технологий, а именно пакета компьютерной математики Maple V Release.

Постановка задачи: По некоторой поверхности S, заданной в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнением $z = f(x, y)$ катится шар радиуса R с жестко прикрепленным к нему репером $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$. Шар катится без проскальзывания вдоль кривой $\gamma : z = f(x(t), y(t))$, причем $t \in [a, b]$. В конце пути репер примет свое новое положение относительно неподвижной системы координат $Oxyz$. Вычислите матрицу перехода от начального положения репера к конечному.
По условию задачи шар катится по поверхности без проскальзывания, то есть в точке касания шара и поверхности S в любой момент качения скорость равна нулю [4].

Решение: Обозначим искомую матрицу перехода через Y. Для ее нахождения построим разбиение $T = \{M_k\}$ кривой γ точками $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1), \ldots, M_n(x_n, y_n, z_n)$ на n частей. Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, причем $\lambda(T) = max(\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_n)$, где Δl_k - длина дуги $\breve{M_0 M_1}, k = 1, 2, ..., n$.

В виду этого качение шара по поверхности будет представлять собой композицию ортогональных преобразований: параллельного переноса на вектор перемещения и поворота на угол, величина которого зависит от модуля вектора перемещения и радиуса шара R [5]. Другими словами, движение шара вдоль кривой по поверхности можно рассматривать как композицию n линейных преобразований Y_k, каждое из которых, в свою очередь, будет суперпозицией сдвига на вектор $M_{k-1}M_k$ и поворота относительно мгновенной оси вращения на угол

$$\varphi_k = \frac{|M_{k-1}M_k|}{R}, k = 1, 2, ..., n.$$

Целесообразно в качестве оси вращения выбрать прямую, направляющим вектором которой является вектор мгновенной скорости, поскольку, во-первых, данный вектор будет проходить через точку касания шара и поверхности, перпендикулярно вектору главной нормали поверхности в данной точке.
Во-вторых, вектор мгновенной скорости в разные моменты времени будет принадлежать касательной плоскости в данной точке кривой.
Очевидно, что каждое из линейных ортогональных преобразований Y_k , будет бесконечно малым [4, 5] и представимо в виде:

$$Y_k = (E + B_k \Delta l_k)(E + A_k \Delta\varphi_k) = E + (A\Delta\varphi_k + B\Delta l_k),$$

где Δl_k–величина бесконечно малого перемещения (сдвига), $\Delta\varphi_k$– бесконечно малые углы, E –единичная матрица, $k = 1, 2, ..., n$.

В отличии от плоского случая, качение шара по поверхности обуславливает изменение положения нетолько, векторов репера, но и центра шара.В связи с этим все матрицы используемые в построении

[1] Аннотация на английском языке Автором не представлена.

решения, да и сама исходная матрица Y будет размерности $[4\times 4]$. В результате

$$E+B_k\Delta l_k=E+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\Delta x_k&\Delta y_k&\Delta z_k&0\end{pmatrix},$$

где $(\Delta x_k,\Delta y_k,\Delta z_k)$ – координаты вектора, соединяющего концы бесконечно малой дуги $M_0\breve{}M_1, k=1,2,...,n.$

$$E+A_k\Delta\varphi_k=E+P\Delta x+Q\Delta y+W\Delta z=$$

$$=E+\begin{pmatrix}0&-\frac{f'_y}{H(x_0,y_0)}&\frac{1}{H(x_0,y_0)}&0\\\frac{f'_y}{H(x_0,y_0)}&0&0&0\\-\,-\frac{1}{H(x_0,y_0)}&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Delta x+$$

$$+\begin{pmatrix}0&\frac{f'_x}{H(x_0,y_0)}&0&0\\-\frac{f'_x}{H(x_0,y_0)}&0&\frac{1}{H(x_0,y_0)}&0\\0&-\frac{1}{H(x_0,y_0)}&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Delta y+$$

$$+\begin{pmatrix}0&0&\frac{f'_x}{H(x_0,y_0)}&0\\0&0&\frac{f'_y}{H(x_0,y_0)}&0\\-\frac{f'_x}{H(x_0,y_0)}&-\frac{f'_y}{H(x_0,y_0)}&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Delta z,$$

где функция $H(x_0,y_0)=R\sqrt{(f'_x(x_0,y_0))^2+(f'_y(x_0,y_0))^2+1}.$

Согласно теореме о суперпозиции линейных преобразований [5] матрица композиции n линейных преобразований будет находиться из соотношения

$$\tilde{Y}^n=(E+P_n\Delta x_n+Q_n\Delta y_n+R_n\Delta z_n)\cdot$$

$$\cdot(E+P_{n-1}\Delta x_{n-1}+Q_{n-1}\Delta y_{n-1}+R_{n-1}\Delta z_{n-1})\cdot\ldots\cdot(E+P_1\Delta x_1+Q_1\Delta y_1+R_1\Delta z_1).$$

Следовательно, для нахождения искомой матрицы необходимо найти предел полученных интегральных сумм $\tilde{Y}^n$ при $\lambda(T)\to 0$. Если этот предел существует, то это есть криволинейный мультипликативный интеграл по кривой γ

$$Y=\overset{\cap}{\int_\gamma}E+\Gamma_1dx+\Gamma_2dy+\Gamma_3dz.$$

Кроме того, так как поверхность качения задана уравнением вида $z=f(x,y)$, и формула полного дифференциала для функции двух переменных $dz=f_x^{'}dx+f_y^{'}dy$, то полученный выше криволинейный интеграл можно записать так:

$$Y=\overset{\cap}{\int_\gamma}E+\Gamma_1^*dx+\Gamma_2^*dy=$$

$$=\overset{\cap}{\int_\gamma}E+\begin{pmatrix}0&-A_2&B_1&0\\A_2&0&C&0\\-B_1&-C&0&0\\1&0&f_x^{'}&0\end{pmatrix}dx+\begin{pmatrix}0&A_1&C&0\\-A&0&B_2&0\\-C&-B_2&0&0\\0&1&f_y^{'}&0\end{pmatrix}dy,$$

где

$$C=\frac{f'_xf'_y}{H(x,y)},H(x,y)=R\sqrt{(f'_x(x,y))^2+(f'_y(x,y))^2+1},$$

$$A_1=\frac{f'_x}{H(x,y)},A_2=\frac{f'_y}{H(x,y)},B_1=\frac{(f'_x)^2+1}{H(x,y)},B_2=\frac{(f'_y)^2+1}{H(x,y)}.$$

Таким образом в результате мы получили, что при движении шара по поверхности $z=f(x,y)$, изменение положения репера, жестко связанного с шаром, будет описываться криволинейным мультипликативным интегралом вдоль траектории, по которой движется шар.

Естественно, возникает вопрос о вычислении криволинейного мультипликативного интеграла. Его значение будет зависеть, прежде всего, от кривой γ, вдоль которой катится шар. Например, пусть шар единичного радиуса катится по поверхности эллиптического параболоида вращения, заданного уравнением $z = f(x,y) = x^2 + y^2$. Тогда, если γ – бесконечно малый параллелограмм, то его значение можно вычислить, используя геометрические параметры кривой γ и кривизну мультипликативного интеграла [7].

$$Y = \overset{\cap}{\int_{\gamma}} E + \Gamma_1^* dx + \Gamma_2^* dy =$$

$$= \overset{\cap}{\int_{\gamma}} E + \begin{pmatrix} 0 & -A_2 & B_1 & 0 \\ A_2 & 0 & C & 0 \\ -B_1 & -C & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2x & 0 \end{pmatrix} dx + \begin{pmatrix} 0 & A_1 & C & 0 \\ -A & 0 & B_2 & 0 \\ -C & -B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2y & 0 \end{pmatrix} dy = E + K\sigma + o(\sigma),$$

где

$$C = \frac{4xy}{H(x,y)}, H(x,y) = R\sqrt{4x^2+4y^2+1},$$

$$A_1 = \frac{2x}{H(x,y)}, A_2 = \frac{2y}{H(x,y)}, B_1 = \frac{4x^2+1}{H(x,y)}, B_2 = \frac{4y^2+1}{H(x,y)}.$$

При этом σ – площадь поверхности, ограниченная контуром γ, $o(\sigma)$ – бесконечно малые величины более высокого порядка малости, чем σ, $K = Q_x - P_y + [P,Q]$ – кривизна мультипликативного интеграла.

Кроме того, можно найти зависимость между связность качения, так иногда называют K и гауссовой кривизной поверхности. [2, 9]. Эта зависимость характеризуется отношением

$$Y = E + K\sigma + o(\sigma) = E + (K_\Gamma \cdot (k_g)^2 \cdot M(x,y) + k_g \cdot \frac{1}{H(x,y)^2} N(x,y))\sigma + o(\sigma),$$

где

$$M(x,y) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2x^2-2y^2 & y(H-H^3+4Hx+ax^2) \\ 2x^2-2y^2 & 0 & Hx(-1+H^2-8y^2) \\ H(x(1-2y)^2-y & (H^3-4xy)(x-y) & 0 \end{pmatrix},$$

$$N(x,y) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1+4x^2+4y^2 & 8x^2y-2y(1+4y^2) \\ -1-4x^2-4y^2 & 0 & -2x(1+4x^2)+8xy^2 \\ -8x^2y+2y(1+4y^2) & 2x(1+4x^2)-8xy^2 & 0 \end{pmatrix},$$

где σ – площадь поверхности, ограниченная контуром γ, $o(\sigma)$ – бесконечно малые величины более высокого порядка малости, чем σ.

Вычисление K и других величин можно реализовывать в Maple V Release. Опишем процедуру вычисляющую кривизну мультипликативного интеграла , в трехмерном случае

```
with(linalg):
K:=proc(P,Q)
local i,j,Qx,Py,L;
global P, Q;
for i to 3 do
for j to 3 do
Qx[i,j]:=diff(Q[i,j],x); od; od;
for i to 3 do for j to 3 do
Py[i,j]:=diff(P[i,j],y); od; od;
K:=Qx-Py+multiply(Q, P)-multiply(P, Q);
evalm(K);
end;
```

Если предварительно описать вычисление матриц P и Q в процедуре (в зависимость от поверхности качения S) или задать непосредственно

```
P:=array (1..3,1..3, [[...],[...],[...]]);

Q:=array (1..3,1..3, [[...],[...],[...]]);
```

В случае, когда кривая γ – спрямляемая и параметризуемая, можно выполнить преобразования, позволяющие перейти от криволинейному мультипликативного интеграла к интергалу вида

$$Y = \overset{b}{\underset{a}{\overset{\curvearrowright}{\int}}} E + A(t)dx(t),$$

и если $A(t) \equiv \Omega(t) \in SO(3)$, то

$$X(t) = \overset{t}{\underset{t_0}{\overset{\curvearrowright}{\int}}} E + \Omega(t)dt = P_S(t) Rot_\upsilon(\alpha) P_{B_0}^{-1}(t),$$

где $Rot_\upsilon(\alpha)$– поворот относительно направленного единичного вектора $\upsilon = \frac{\omega(0)}{|\omega(0)|}$ на совокупный угол $\alpha = \int\limits_0^t |\omega(\xi)| d\xi$, $P_S(t)$, $P_{B_0}(t)$– ортогональные матрицы операторов параллельного переноса вдоль кривых S и B_0 соответственно.

Причем пара кривых $S(t)$ и $B_0(t)$ определены на единичной сфере S^2 соотношениями

$$S(t) = \frac{\omega}{|\omega|},$$

$$B_0(t) = X^{-1}(t)S(t).$$

Кроме того, исходя из начального условия $X(0) = E$, для S и B_0 получим: $S(0) = B_0(0)$.

Вычисление матриц $P_S(t)$, $P_{B_0}(t)$, $Rot_\upsilon(\alpha)$ также оптимальнее реализовать в Maple. для этого достаточно использовать основные функции пакета линейной алгебры linalg.

В общем случае остается возможность нахождения численного значения мультипликативного интеграла. Для этого необходимо решить численными методами матричное дифференциальное уравнение качения шара по поверхности вдоль заданного контура. В задаче о качении шара, которая рассматривалась выше, достаточно численно решить систему дифференциальных уравнений, описывающих качение. В пакете Maple для этой цели используется стандартная функция *dsolve* с параметром *numeric*. Также система позволяет выбрать метод численного интегрирования в зависимости от требуемой точности. Следует отметить, что использование неявного представления дифференциальных уравнений (пакет DESol) и пакета расширений PDEtools в значительной мере расширяют возможности для решения и визуализации систем дифференциальных уравнений.

Литература

[1] *Ф.Р. Гантмахер.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.

[2] *Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.

[3] *В.П. Дьяконов.* Maple 7. Учебной курс. СПб.: Питер, 2002.

[4] *Г. Корн, Т. Корн.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978.

[5] *О.В. Мантуров.* Элементы тензорного исчисления. М.: Просвещение, 1991.

[6] *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Неголономные динамические системы. Интегрируемость и хаос./Сборник статей.: Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.

[7] *Л.Ж. Паланджянц.* Геометрия мультипликативного интеграла. Майкоп, 1997.

[8] *Прохоров Г.В., Колбеев В.В., Желнов К.И., Леденев М.А.* Математический пакет Maple СПб.: Питер, 1998.

[9] *П.К. Рашевский.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.

[10] *С. Стернберг.* Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1980.

[11] *Mark Levi.* Prallel and transports . М.: Наука, 1988.