ВЫЧИСЛИМЫЕ ДИСТРИБУТИВНЫЕ РЕШЕТКИ С ОТНОСИТЕЛЬНЫМИ ДОПОЛНЕНИЯМИ

Фролов А.Н.

E-mail: Andrey.Frolov@ksu.ru

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Казань

Аннотация. *Данная работа посвящена вычислимым алгебрам Ершова (дистрибутивная решетка с относительными дополнениями и минимальным элементом называется алгеброй Ершова). Мы покажем, что каждая 3-низкая алгебра Ершова имеет вычислимую копию.*

Computable Ershov algebras

A. Frolov

Abstract. *In this paper we will talk about computable Ershov algebras (Ershov algebra is a distributive lattice with relative complements and minimal element). We will show that every low3 Ershov algebra has a computable copy.*

1. Введение. В связи с развитием компьютерных технологий активно развиваются также и приложения теории алгоритмов в различных областях. Данная работа посвящена применению теории алгоритмов в области алгебры, в частности, в теории линейных порядков. Любой алгебраический объект нам будет интересен с точки зрения возможности его программирования, т.е. моделирования, на компьютере. Такие объекты будут называться *вычислимыми.* К примеру, частичный порядок, заданный на множестве натуральных чисел является *вычислимым*, если существует программа, написанная в одном из доступных языков программирования, которая для любых двух натуральных чисел (включая ноль) может указать какое из чисел больше другого, либо указать, что они несравнимы.

Для построения подобных программ мы не будем выбирать язык программирования, а ограничимся только написанием алгоритма. Любому специалисту-программисту будет понятно, как запрограммировать такой алгоритм. К тому же в теории алгоритмов является общепринятым так называемый тезис Черча. Который гласит, что класс объектов, вычислимых в одном конкретном языке (выбранном заранее произвольно), совпадает с классом объектов, вычислимых на так называемой Машине Тьюринга. Другими словами, например, если есть программа, написанная на Паскале, то можно написать точно такую же по действию программу на Бейсике. Верно и обратное.

2. Дистрибутивные решетки. Частичный порядок называется *алгеброй Ершова*, если он является дистрибутивной решеткой с относительными дополнениями и имеет наименьший элемент. В этом разделе изучаются необходимые условия конструктивизируемости алгебры Ершова. Алгебраическая структура (в частности, алгебра Ершова) называется *конструктивизируемой*, если для нее существует вычислимая изоморфная копия.

Теорема. Каждая 0'-вычислимая алгебра Ершова без наибольшего элемента с 0'-предикатом atom(x) изоморфна вычислимой алгебре Ершова.

Набросок доказательства. 0'-вычислимость означает наличие вычислимой аппроксимации конечными алгебрами и данной алгебры Ершова и данного предиката. При появлении нового элемента в аппроксимации алгебры возникают несколько случаев, когда следующая аппроксимация сохраняет наибольший элемент и когда он меняется. Пусть alphas – данная аппроксимация. У нас также есть аппроксимация предиката atom – atoms. Нам необходимо построить betas – аппроксимацию искомой алгебры Ершова, причем, она должна быть без нарушений, чтобы построенная алгебра была вычислимой.

Случай 1. Пусть alphas+1 и alphas имеют один и тот же наибольший элемент. Без ограничения общности можем предположить, что alphas+1 порождается элементами alphas и элементом c, который расщепляет некоторый атом a алгебры alphas.

Если atoms(a), то ничего не делаем. Иначе если b=ps(a)$ является атомом в betas, то построим betas+1 как алгебру, порожденную элементами betas и новым элементом d, расщепляющим b. Если b - не атом в betas, то положим betas+1=betas, выберем при этом такой ненулевой элемент d с наименьшим возможным номером, что d < b. Для определения функции вложения ps+1 достаточно определить ps+1(c)=d.

Случай 2. Пусть alphas+1 и alphas имеют разные наибольшие элементы. Без ограничения общности можем предположить, что alphas+1 порождается элементами alphas и новым наибольшим элементом c.

Пусть a - старый наибольший элемент в alphas. Если b=ps(a) — наибольший элемент в betas, то определим betas+1, положив новый наибольший элемент d > b, иначе в качестве элемента d выберем наибольший элемент в betas. Теперь определим ps+1, положив ps+1(c)=d. Непосредственной проверкой можно убедиться, что выше приведенные рассуждения приводят к построению искомой алгебры Ершова. *Что завершает доказательство теоремы.*

Развитие идей, приведенных в предыдущей теореме, позволяет доказать следующие теоремы.

Теорема. Каждая 0'- вычислимая алгебра Ершова без наибольшего элемента с 0'- предикатами atom(x), atomless(x) и inf(x) изоморфна вычислимой алгебре Ершова с вычислимым предикатом atom(x).

Теорема. Каждая 0'-вычислимая алгебра Ершова без наибольшего элемента с 0'- предикатами atom(x), atomless(x), inf(x), 1-atom(x), atomic(x) и atominf(x) изоморфна вычислимой алгебре Ершова с вычислимыми предикатами atom(x), atomless(x) и inf(x).

Следствие. Каждая 3-низкая алгебра Ершова имеет вычислимую копию.

Заметим, что все приведенные выше теоремы были ранее доказаны при условии наличии наибольшего элемента. В случае если же алгебра Ершова не имеет наибольшего элемента, ранее использованные методы не работали. Во всех приведенных теоремах такие методы были найдены.