

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Кафедра робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин

М.Н. Кирсанов, Г.Р. Сайпулаев

**ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ С ЭЛЕМЕНТАМИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ**

Учебное электронное издание

для студентов, обучающихся по направлению
15.04.06 «Мехатроника и робототехника»

ISBN 978-5-7046-2757-9

© Национальный исследовательский университет «МЭИ», 2023

УДК531 (075.8)

ББК 22.21

К43

Утверждено учебным управлением НИУ «МЭИ» в качестве учебного издания

Рецензенты: профессор, доктор техн. наук В.В. Галишникова;
профессор, доктор физ.-мат. наук А.И. Кобрин

Кирсанов, М.Н.

К43 Задачи механики с элементами теории вероятности и математической статистики. [Электронный ресурс]: задачник / М.Н. Кирсанов, Г.Р. Сайпулаев. – Электрон. дан. – М.: Издательство МЭИ, 2023. – 1 электрон. опт. диск DVD-ROM.

Приведены варианты прикладных задач по механике с элементами теории вероятности и математической статистики.

Задачи снабжены ответами и примерами решений. Предназначено для инженеров, научных работников, студентов и аспирантов технических вузов, обучающихся по направлению «Мехатроника и робототехника».

Минимальные системные требования :

Тип ЭВМ: ПК на базе Pentium IV и выше.

ОС: Windows XP и выше.

Веб-браузер: Google Chrome, Internet Explorer.

Программное обеспечение: Adobe Air.

ISBN 978-5-7046-2757-9

Национальный исследовательский университет «МЭИ», 2023

Кирсанов Михаил Николаевич, Сайпулаев Гасан Русланович

Программное обеспечение скачивается по ссылкам, указанным преподавателем, и устанавливается на ЭВМ слушателя.

Редактор Политковская Е.В.

Дата подписания – 20.04.2023

Объём издания – 1,17 Мбайт.

Тираж – 10 электронных оптических дисков DVD-ROM

Издательство МЭИ

111250, Москва, Красноказарменная улица, дом 14, стр. 1

izdatmpei@gmail.com

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Глава 1. Сопротивление материалов	5
1.1. Моменты инерции составного сечения	5
1.2. Моменты инерции сечения. Пример	13
1.3. Центр тяжести	18
1.4. Площадь и координаты центра тяжести плоской фигуры. Пример. 25	
1.5. Критическая сила сжатого стержня	29
1.6. Критическая сила P центрально сжатого стержня. Пример .	33
Глава 2. Статика	38
2.1. Трение качения	39
2.2. Трение качения. Пример.	44
Глава 3. Кинематика	47
3.1. Кинематика плоского механизма	48
3.2. Угловые ускорения звеньев механизма. Пример решения . . .	53
Глава 4. Динамика	55
4.1. Теорема об изменении кинетической энергии.	56
4.2. Кинетическая энергия системы. Пример.	65
4.3. Удар по пластине	69
4.4. Удар. Пример решения	75
4.5. Общее уравнение динамики	78
4.6. Общее уравнение динамики. Пример	90
Список рекомендованной литературы	100

Предисловие

Решения задач механики с учетом случайного характера параметров, описывающих механизм или конструкцию, необходимы для более адекватного описания работоспособности исследуемого объекта. Широко известна монография [1] профессора МЭИ академика РАН В.В.Болотина (1926–2008), в которой не только заложены основы теории вероятностей и математической статистики, но и решены многие задачи теории вероятностей и математической статистики. Этими же вопросами занимался и чл. корр. АН СССР Н.С. Стрелецкий (1885–1867), который ввел три независимые оценки для учета вероятностного характера свойств материала и нагрузок. Его метод [12] был включен в «Строительные нормы и правила СССР».

В учебных курсах теоретической механики и сопротивления материалов все задачи решаются в детерминированной постановке. Для расширения кругозора студентов и выработке навыков решения вероятностных проблем в большинстве задач можно ввести простейший учет случайного характера параметров объектов исследования. В настоящем сборнике предлагаются многовариантные задачи по теоретической механике и сопротивлению материалов, в которых или нагрузки, или размеры имеют случайный характер. Математическая статистика здесь используется только для вычисления математического ожидания некоторой искомой величины и ее дисперсии. В задаче статистики (гл. 2) для расчета вероятности состояния механической системы в положении равновесия используется геометрический метод. Все задачи сборника снабжены не только ответами, но и многочисленными промежуточными результатами, что делает его удобным для самостоятельного обучения.

Задачи в сборнике создавались на основе задач и сборников автора [4–7]. Некоторые задачи из этих книг не входят в краткие учебные курсы по механике, поэтому здесь для студентов есть возможность расширить получить новые знания по механике, изучая теорию вероятностей и математическую статистику на прикладных задачах.

Все предложения и замечания автор принимает по электронной почте: c216@ya.ru.

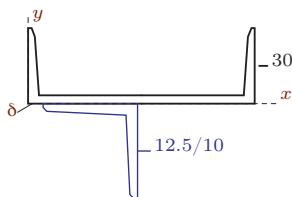
Глава 1

Сопротивление материалов

1.1. Моменты инерции составного сечения

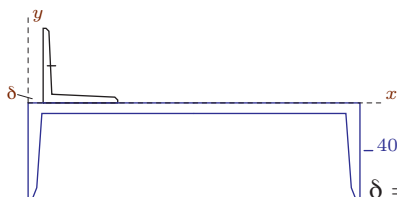
Дан ряд $p = [0.1, 0.2, 0.4, 0.3]$ распределения дискретной случайной величины δ горизонтального сдвига одной части фигуры плоского сечения относительно другой (в см). Найти математическое ожидание максимального и минимального момента инерции составной фигуры. Использованы двутавры ГОСТ 8239-89, швеллеры ГОСТ 8240-89 и уголки ГОСТ 8509-86

Задача 1.1



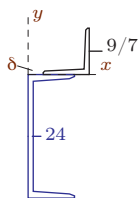
$$\delta = [0.1, 0.3, 0.4, 0.5]$$

Задача 1.2



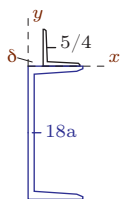
$$\delta = [0.1, 0.25, 0.35, 0.45]$$

Задача 1.3



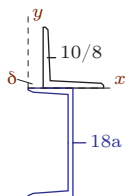
$$\delta = [0.1, 0.2, 0.25, 0.35]$$

Задача 1.4



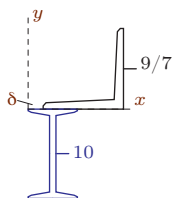
$$\delta = [0.1, 0.2, 0.25, 0.35]$$

Задача 1.5



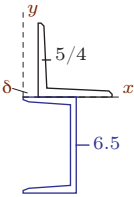
$$\delta = [0.1, 0.2, 0.3, 0.45]$$

Задача 1.6



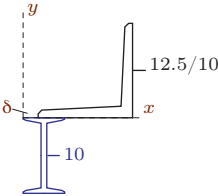
$$\delta = [0.2, 0.3, 0.4, 0.5]$$

Задача 1.7



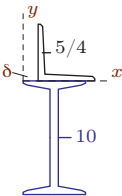
$$\delta = [0.2, 0.35, 0.45, 0.6]$$

Задача 1.8



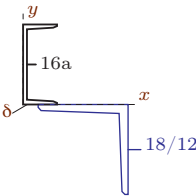
$$\delta = [0.2, 0.35, 0.5, 0.6]$$

Задача 1.9



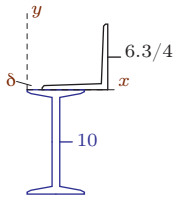
$$\delta = [0.15, 0.25, 0.35, 0.45]$$

Задача 1.10



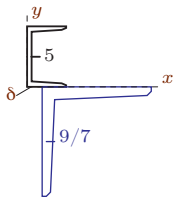
$$\delta = [0.05, 0.15, 0.2, 0.3]$$

Задача 1.11



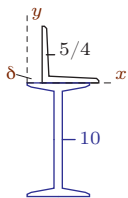
$$\delta = [0.1, 0.2, 0.25, 0.35]$$

Задача 1.12



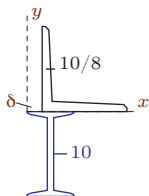
$$\delta = [0.1, 0.2, 0.25, 0.3]$$

Задача 1.13



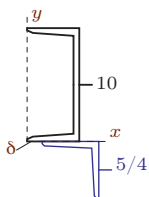
$$\delta = [0.15, 0.3, 0.45, 0.55]$$

Задача 1.14



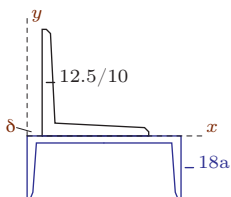
$$\delta = [0.15, 0.25, 0.35, 0.45]$$

Задача 1.15



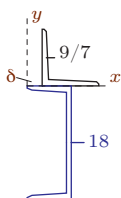
$$\delta = [0.05, 0.15, 0.2, 0.3]$$

Задача 1.16



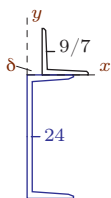
$$\delta = [0.05, 0.15, 0.2, 0.3]$$

Задача 1.17

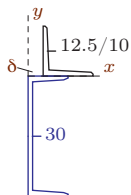


$$\delta = [0.15, 0.25, 0.4, 0.5]$$

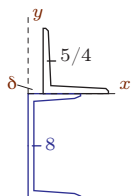
Задача 1.18



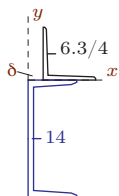
$$\delta = [0.15, 0.35, 0.45, 0.55]$$

Задача 1.19

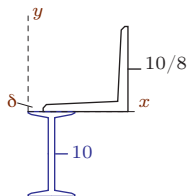
$$\delta = [0.1, 0.2, 0.25, 0.3]$$

Задача 1.20

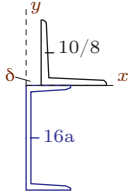
$$\delta = [0.15, 0.3, 0.35, 0.45]$$

Задача 1.21

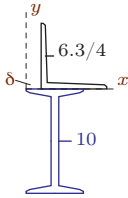
$$\delta = [0.1, 0.3, 0.4, 0.5]$$

Задача 1.22

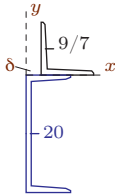
$$\delta = [0.15, 0.25, 0.4, 0.5]$$

Задача 1.23

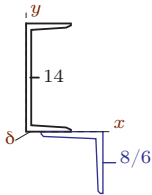
$$\delta = [0.15, 0.3, 0.4, 0.55]$$

Задача 1.24

$$\delta = [0.15, 0.3, 0.45, 0.55]$$

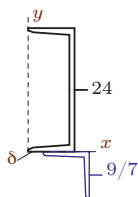
Задача 1.25

$$\delta = [0.1, 0.2, 0.35, 0.45]$$

Задача 1.26

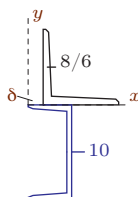
$$\delta = [0.15, 0.3, 0.4, 0.45]$$

Задача 1.27



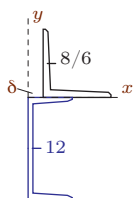
$$\delta = [0.05, 0.2, 0.3, 0.4]$$

Задача 1.28



$$\delta = [0.15, 0.3, 0.45, 0.55]$$

Задача 1.29



$$\delta = [0.15, 0.25, 0.35, 0.45]$$

Задача 1.30



$$\delta = [0.1, 0.25, 0.35, 0.45]$$

Ответы.

Моменты инерции составного сечения

	$\delta = \delta_4$									
	F	x_c	y_c	J_{x_c}	J_{y_c}	$J_{x y_c}$	J_{max}	J_{min}	$M(J_{max})$	$M(J_{min})$
	см ²	см		см ⁴						
1	64.80	12.95	0.281	1228.296	6621.107	283.148	6635.933	1213.470	6657.338	1212.356
2	73.80	17.15	-1.880	1015.596	18304.496	-969.265	18358.666	961.426	18399.741	960.865
3	42.90	3.699	-7.851	4831.288	476.817	621.604	4918.284	389.821	4914.890	385.910
4	26.09	2.070	-7.452	1555.844	114.740	-19.163	1556.099	114.485	1556.198	114.686
5	37.80	4.416	-4.151	2601.915	291.258	-309.140	2642.560	250.613	2646.862	252.121
6	24.30	4.916	-1.219	631.239	223.467	249.598	749.639	105.067	744.824	104.290
7	11.40	2.230	-1.670	112.745	18.280	-9.929	113.777	17.248	114.202	17.211
8	36.30	7.369	0.657	1131.580	760.354	679.367	1650.234	241.700	1636.628	241.156
9	15.89	2.525	-3.438	326.787	29.596	-22.663	328.505	27.878	328.845	28.195
10	61.70	9.804	-0.816	4355.990	3132.134	-2737.555	6549.175	938.948	6522.101	937.305
11	16.96	3.396	-3.043	373.969	53.940	62.887	385.882	42.027	385.043	41.444
12	18.46	2.233	-0.812	218.483	110.549	22.557	223.008	106.024	223.466	104.802
13	15.89	2.549	-3.438	326.787	29.085	-20.789	328.232	27.641	328.611	27.983
14	27.60	3.004	-0.620	752.380	166.273	-62.646	759.001	159.652	760.294	157.831
15	14.79	3.360	3.322	299.904	31.266	-19.321	301.287	29.883	301.056	29.743
16	46.50	6.256	0.786	826.222	1869.761	-550.860	2106.734	589.249	2121.108	586.618
17	33.00	4.281	-4.725	2199.352	214.002	-240.357	2228.037	185.317	2230.814	186.794
18	42.90	2.592	-7.851	4831.288	305.458	20.771	4831.383	305.363	4831.343	304.386
19	64.80	2.981	-8.081	11339.863	709.977	133.658	11341.543	708.297	11341.172	706.533
20	12.87	1.467	-2.374	177.172	22.744	2.173	177.202	22.713	177.186	22.496
21	20.56	1.795	-4.904	794.099	65.318	6.006	794.149	65.268	794.125	64.927
22	27.60	5.576	-0.620	752.380	334.465	349.126	950.304	136.542	942.761	135.801
23	35.10	2.578	-3.222	1971.542	240.447	34.817	1972.242	239.747	1971.867	237.066
24	16.96	2.601	-3.043	373.969	37.713	-22.974	375.531	36.150	376.000	36.261
25	35.70	2.363	-5.704	2867.977	213.125	30.055	2868.317	212.785	2868.142	211.478
26	24.98	3.394	3.549	1042.727	225.813	-280.495	1129.764	138.776	1127.008	137.316
27	42.90	6.680	7.851	4831.288	303.375	-99.833	4833.488	301.175	4832.931	301.238
28	20.28	2.966	-1.674	491.627	78.289	-48.624	497.270	72.646	498.457	72.174
29	22.68	1.995	-2.613	729.960	94.856	16.155	730.371	94.445	730.186	93.415
30	47.50	2.587	9.365	6578.984	358.146	-10.105	6579.001	358.129	6579.029	357.379

1.2. Моменты инерции сечения. Пример

Геометрические характеристики сечения, к которым относятся площадь, координаты центра тяжести и моменты инерции, встречаются в ряде задач механики. Существуют различные способы их вычисления, в том числе и те, в которых существенным образом задействованы возможности системы символьной математики (Maple, Mathematica, Maxima, Derive). Наиболее распространенный – метод разбиения фигуры на простейшие части, для которых моменты инерции известны. Применим этот метод для сечения, состоящего из стандартных прокатных профилей.

Моменты инерции плоской фигуры относительно произвольных осей x и y определяются интегралами по площади фигуры:

$$J_x = \iint_F y^2 dF, \quad J_y = \iint_F x^2 dF.$$

Центробежный и полярный моменты инерции равны соответственно

$$J_{xy} = \iint_F xy dF, \quad J_p = \iint_F (x^2 + y^2) dF = J_x + J_y. \quad (1.1)$$

Для большинства распространенных в технике форм сечений имеются таблицы моментов инерции (табл. П.1, П.2 и табл. 2–4, С. 95–99) ¹.

Задача. Найти моменты инерции и ориентацию главных осей сечения, составленного из швеллера 18а, ГОСТ 8240-89, и уголка 6.3/4, ГОСТ 8509-86 (рис. 1.1).

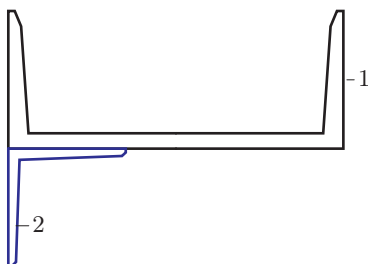


Рис. 1.1

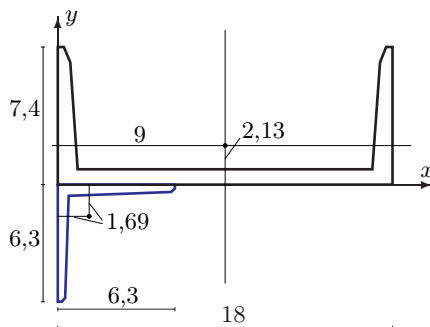


Рис. 1.2

Решение

1. Вводим произвольную систему координат. Определяем координаты центров тяжести фигур, составляющих сечение

¹В Maple, начиная с версии 13, двойной интеграл можно вычислять так: `int(x*y, y=0..x, x=0..1)`, а раньше: `int(int(x*y, y=0..x), x=0..1)`.

(рис. 1.2). Согласно табл. 3, С. 98 (строка выделена полужирным шрифтом) имеем:

Фигура 1 (швеллер 18а), $x_1 = 9$ см, $y_1 = 2,13$ см. Здесь $y_1 = z_0$, $x_1 = h/2$, где h – стандартное обозначение для высоты швеллера, z_0 – расстояние до центра тяжести согласно табл. 3, С. 98.

Фигура 2 (уголок 6.3/4), согласно табл. 4, С. 99, имеем $x_2 = 1,69$ см, $y_2 = -1,69$ см.

2. Вычисляем площадь всей фигуры. Площадь сечения швеллера $22,2$ см², уголка – $4,96$ см²: $F = \sum_i F_i = 22,2 + 4,96 = 27,16$ см².

3. Определяем координаты центра тяжести составного сечения:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_i F_i x_i}{F} = \frac{22,2 \cdot 9 + 4,96 \cdot 1,69}{27,16} = 7,67 \text{ см}, \\ y_c &= \frac{\sum_i F_i y_i}{F} = \frac{22,2 \cdot 2,13 - 4,96 \cdot 1,69}{27,16} = 1,43 \text{ см}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

4. Определяем осевые J_{xc} , J_{yc} моменты инерции сечения относительно центральных осей. Моменты инерции швеллера берем из таблицы 3: $J_{xc_1} = 105$ см⁴, $J_{yc_1} = 1190$ см⁴. Заметим, здесь при работе с таблицей надо согласовать оси. Оси в условии задачи повернуты относительно таблицы на 90° . Для симметричной фигуры $J_{xy_{c_1}} = 0$. С уголком проще, согласно таблице 4: $J_{xc_2} = J_{yc_2} = 18,9$ см⁴. Итак, вычисляем:

$$\begin{aligned} J_{xc} &= \sum_{i=1}^2 (J_{xc_i} + (y_c - y_i)^2 F_i) = 105 + 22,2 \cdot (2,13 - 1,43)^2 + \\ &\quad + 18,9 + 4,96 \cdot (1,69 + 1,43)^2 = 183,06 \text{ см}^4, \\ J_{yc} &= \sum_{i=1}^2 (J_{yc_i} + (x_c - x_i)^2 F_i) = 1190 + 22,2 \cdot (9 - 7,67)^2 + \\ &\quad + 18,9 + 4,96 \cdot (1,69 - 7,67)^2 = 1425,54 \text{ см}^4. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В таблице 4 на С. 99 указан только *модуль* центробежного момента инерции уголка. Знак определяется его поворотом относительно

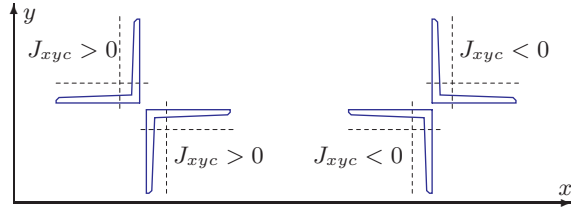


Рис. 1.3

выбранных осей. Центробежный момент инерции уголка положительный, если его биссектриса лежит в 2-й и 4-й четвертях, и отрицательный, если биссектриса лежит в 1-й и 3-й четвертях (рис. 1.3). Таким образом, $J_{xyc_2} = 11 \text{ см}^4$. Получим

$$J_{xyc} = \sum_{i=1}^2 (J_{xyc_i} + (x_c - x_i)(y_c - y_i)F_i) = 22,2 \cdot (9 - 7,67)(2,13 - 1,43) + 11 + 4,96 \cdot (1,69 - 7,67)(-1,69 - 1,43) = 124,21 \text{ см}^4.$$

5. Находим главные моменты инерции:

$$J_{\max, \min} = \frac{J_{yc} + J_{xc}}{2} \pm \sqrt{\frac{(J_{yc} - J_{xc})^2}{4} + J_{xyc}^2} = 804,3 \pm 633,54, \quad (1.4)$$

$$J_{\max} = 1437,84 \text{ см}^4, \quad J_{\min} = 170,76 \text{ см}^4.$$

6. Вычисляем главные радиусы инерции: $i_{\max} = \sqrt{J_{\max}/F} = \sqrt{1437,84/27,16} = 1,39 \text{ см}$, $i_{\min} = \sqrt{J_{\min}/F} = \sqrt{170,76/27,16} = 0,48 \text{ см}$.

7. Находим направление главных осей:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_{\max} &= \frac{J_{xyc}}{J_{yc} - J_{\max}} = \frac{124,21}{1425,54 - 1437,84} = -10,10, \\ \alpha_{\max} &= \arctg(-10,10) = -1,47 = -84^\circ. \end{aligned} \quad (1.5)$$

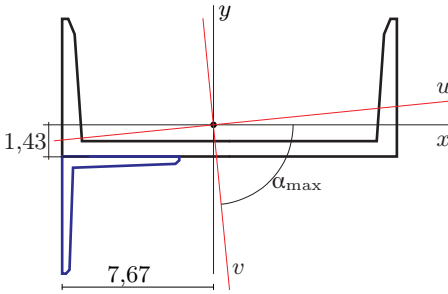


Рис. 1.4

Направление главных осей можно вычислить также по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{\max} = \frac{2J_{xyc}}{J_{yc} - J_{xc}}. \quad (1.6)$$

Угол $\alpha_{\max} < 0$ откладываем по часовой стрелке от положительного направления оси x . Относительно оси v момент инерции фигуры максимальный.

8. Выполняем проверку функций:

Находим тригонометрические

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha_{\max} &= \operatorname{tg}^2 \alpha_{\max} / (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{\max}) = 0,99, \\ \cos^2 \alpha_{\max} &= 1 / (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{\max}) = 0,01, \\ \sin 2\alpha_{\max} &= 2\operatorname{tg} \alpha_{\max} / (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{\max}) = -0,20. \end{aligned}$$

Проверяем соотношение:

$$\begin{aligned} J_{xc} \cos^2 \alpha_{\max} + J_{yc} \sin^2 \alpha_{\max} - J_{xyc} \sin 2\alpha_{\max} &= J_{\max}, \\ J_{xc} \sin^2 \alpha_{\max} + J_{yc} \cos^2 \alpha_{\max} + J_{xyc} \sin 2\alpha_{\max} &= J_{\min}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Имеем

$$\begin{aligned} J_{\max} &= 183,06 \cdot 0,01 + 1425,54 \cdot 0,99 + 124,21 \cdot 0,20 = 1437,84 \text{ см}^4, \\ J_{\min} &= 183,06 \cdot 0,99 + 1425,54 \cdot 0,01 - 124,21 \cdot 0,20 = 170,76 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Такие же значения получены в п. 5. Проверка выполнена.

Замечание 1. В качестве проверки можно сначала вычислить моменты инерции всей фигуры относительно заданных осей:

$$\begin{aligned} J_x &= \sum_i (J_{x_i} + y_i^2 F_i), \quad J_y = \sum_i (J_{y_i} + x_i^2 F_i), \\ J_{xy} &= \sum_i (J_{xy_i} + x_i y_i F_i), \end{aligned}$$

а затем уже пересчитать результаты относительно центральных осей. Центральные моменты инерции имеют вид

$$J_{xc} = J_x - y_c^2 F, \quad J_{yc} = J_y - x_c^2 F, \quad J_{xyc} = J_{xy} - x_c y_c F. \quad (1.8)$$

Замечание 2. В тех случаях, когда для уголков в сорimente не указан центробежный момент инерции J_{xy} , его легко вычислить по формуле (1.4), из которой в случае *равноплочных* уголков $J_{xc} = J_{yc}$ следует $J_{xy} = J_{\max} - J_{xc}$.

План решения задачи математической статистики:

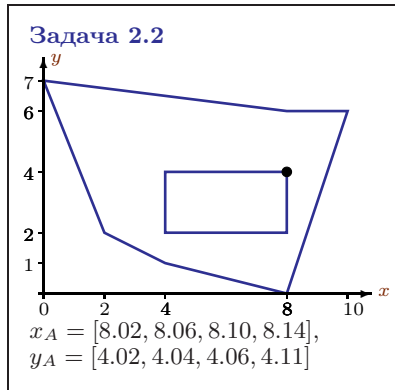
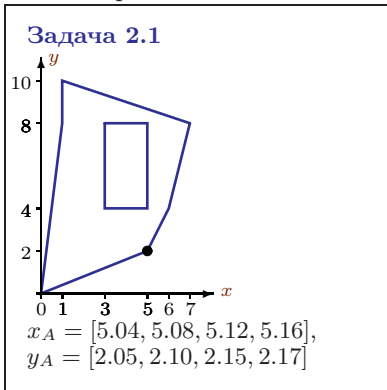
1. Решить задачу 4 раза при разных значениях δ_i , $i = 1, \dots, 4$. Решение упрощается, если заметить, что координата центра тяжести y_c и момент инерции относительно оси x от δ_i не зависят. Получить величины $J_{\max,i}$, $J_{\min,i}$.
2. Вычислить математические ожидания

$$M(J_{\max}) = \sum_{i=1}^4 J_{\max,i} p_i,$$

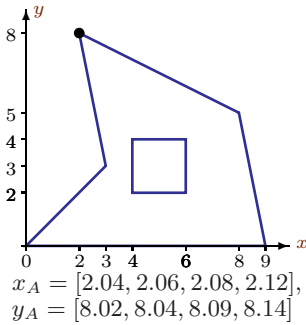
$$M(J_{\min}) = \sum_{i=1}^4 J_{\min,i} p_i.$$

1.3. Центр тяжести

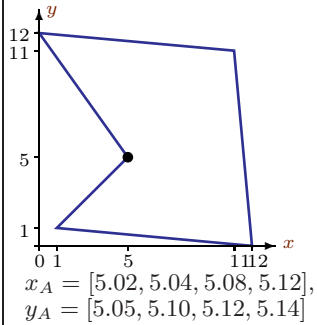
Дан ряд $p = [0.2, 0.3, 0.35, 0.15]$ распределения дискретной случайной величины координат одной из точек плоской фигуры. Найти математическое ожидание площади (в см^2) и координат центра тяжести плоской фигуры (в см). Отметки на осях даны в сантиметрах.



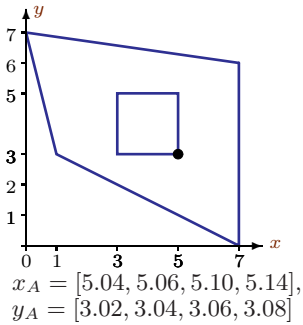
Задача 2.3



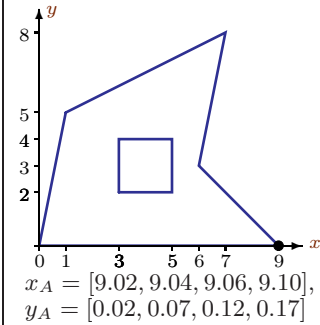
Задача 2.4



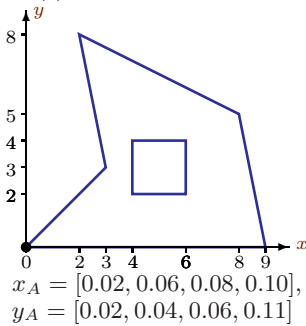
Задача 2.5



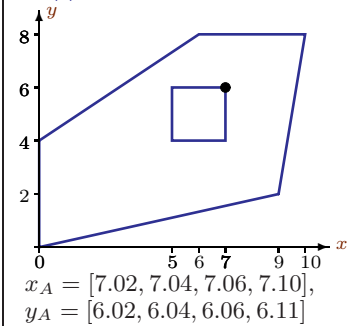
Задача 2.6



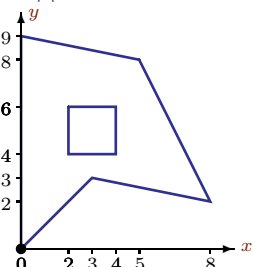
Задача 2.7



Задача 2.8



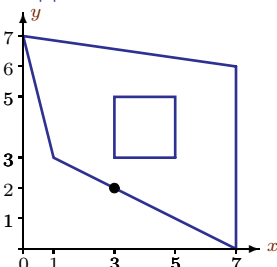
Задача 2.9



$$x_A = [0.04, 0.06, 0.10, 0.12],$$

$$y_A = [0.02, 0.04, 0.09, 0.14]$$

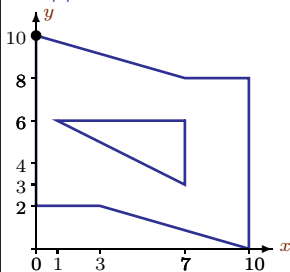
Задача 2.10



$$x_A = [3.04, 3.08, 3.10, 3.12],$$

$$y_A = [2.05, 2.10, 2.12, 2.14]$$

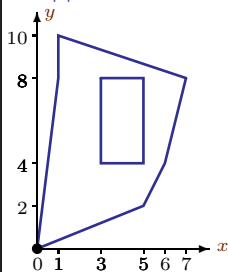
Задача 2.11



$$x_A = [0.04, 0.06, 0.10, 0.14],$$

$$y_A = [10.05, 10.10, 10.15, 10.20]$$

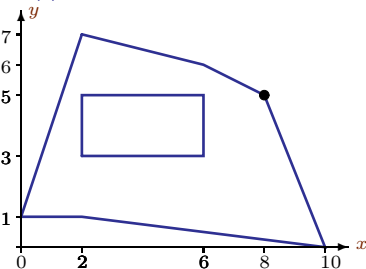
Задача 2.12



$$x_A = [0.04, 0.08, 0.12, 0.14],$$

$$y_A = [0.02, 0.04, 0.09, 0.11]$$

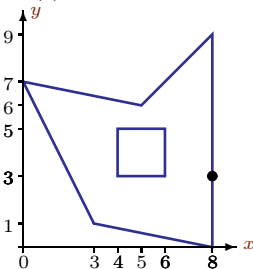
Задача 2.13



$$x_A = [8.02, 8.04, 8.08, 8.12],$$

$$y_A = [5.05, 5.07, 5.09, 5.11]$$

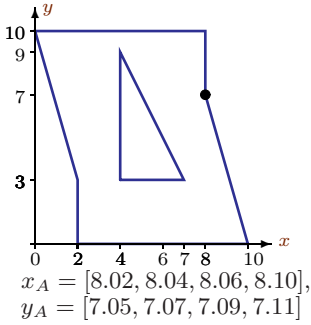
Задача 2.14



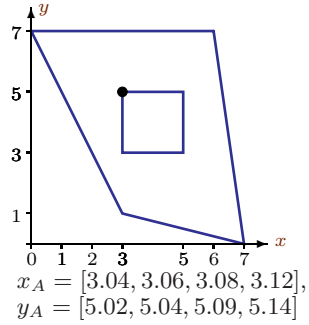
$$x_A = [8.04, 8.08, 8.12, 8.14],$$

$$y_A = [3.05, 3.10, 3.15, 3.20]$$

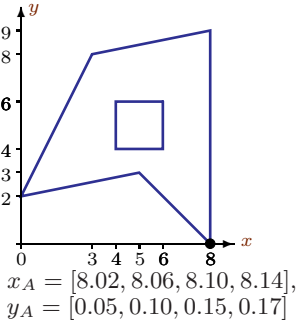
Задача 2.15



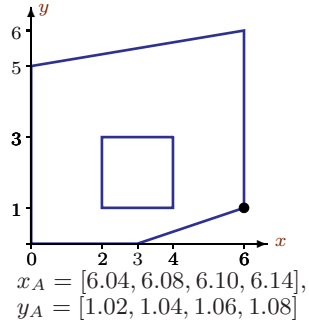
Задача 2.16



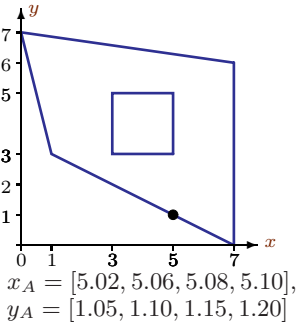
Задача 2.17



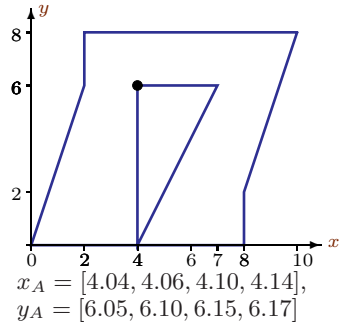
Задача 2.18



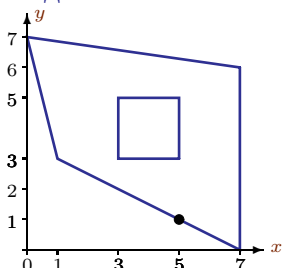
Задача 2.19



Задача 2.20



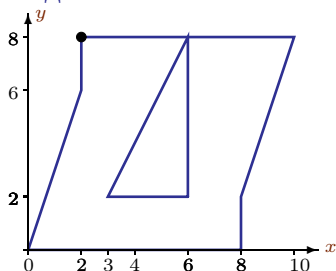
Задача 2.21



$$x_A = [5.02, 5.04, 5.06, 5.10],$$

$$y_A = [1.05, 1.10, 1.15, 1.20]$$

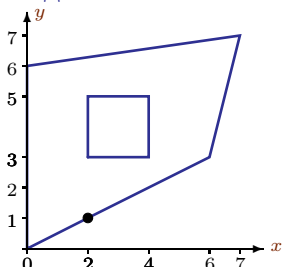
Задача 2.22



$$x_A = [2.02, 2.06, 2.10, 2.12],$$

$$y_A = [8.02, 8.07, 8.09, 8.11]$$

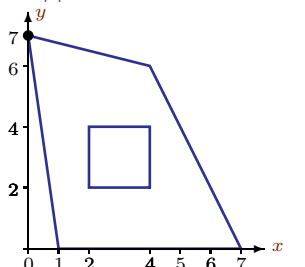
Задача 2.23



$$x_A = [2.02, 2.06, 2.08, 2.10],$$

$$y_A = [1.02, 1.07, 1.12, 1.14]$$

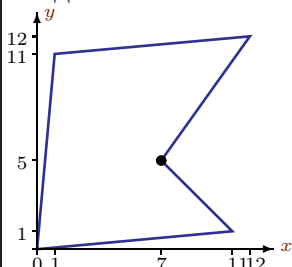
Задача 2.24



$$x_A = [0.02, 0.04, 0.06, 0.10],$$

$$y_A = [7.05, 7.07, 7.09, 7.11]$$

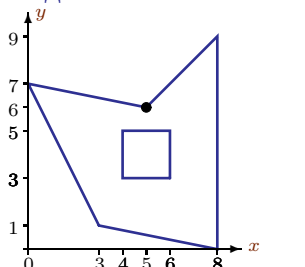
Задача 2.25



$$x_A = [7.02, 7.06, 7.08, 7.10],$$

$$y_A = [5.02, 5.04, 5.06, 5.11]$$

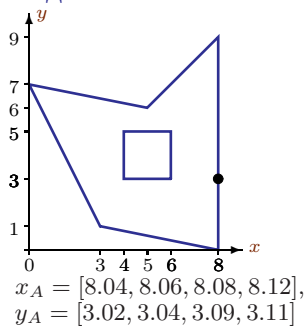
Задача 2.26



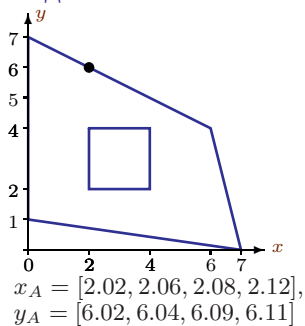
$$x_A = [5.02, 5.06, 5.10, 5.12],$$

$$y_A = [6.02, 6.07, 6.12, 6.14]$$

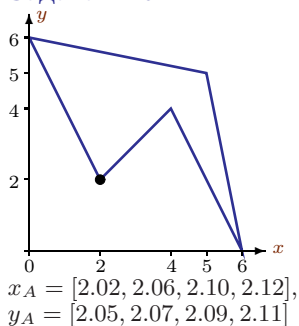
Задача 2.27



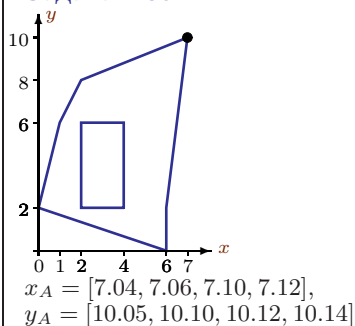
Задача 2.28



Задача 2.29



Задача 2.30



Отвѣты.
Цѣнтр тяжести

	F_1	x_{c1}	y_{c1}	$M(F)$	$M(x_c)$	$M(y_c)$
1	35.930	3.000	5.008	35.842	3.001	5.017
2	35.980	5.000	4.000	35.971	5.002	4.001
3	36.510	5.005	3.003	36.599	5.007	3.015
4	95.865	7.005	5.996	95.608	7.015	5.991
5	27.560	4.002	3.997	27.631	4.004	3.993
6	36.500	4.002	3.002	36.439	4.001	3.011
7	36.440	5.005	3.005	36.322	5.015	3.014
8	50.000	5.000	4.000	49.998	5.001	4.001
9	36.410	3.008	5.007	36.279	3.019	5.018
10	27.360	4.005	4.010	27.209	4.010	4.021
11	65.055	5.003	5.009	65.183	5.004	5.022
12	35.840	3.011	5.011	35.587	3.028	5.030
13	36.160	5.014	3.005	36.344	5.031	3.009
14	36.570	5.007	4.005	36.662	5.016	4.011
15	65.150	5.008	5.001	65.339	5.018	5.002
16	27.560	3.997	4.001	27.640	3.993	4.003
17	36.455	4.999	5.007	36.440	5.003	5.013
18	27.530	3.004	2.999	27.559	3.008	2.998
19	27.460	4.000	4.004	27.410	4.000	4.009
20	51.170	4.996	4.002	51.364	4.992	4.005
21	27.460	4.000	4.004	27.403	4.000	4.010
22	51.060	5.001	4.005	51.217	5.003	4.018
23	27.470	3.001	4.003	27.380	3.003	4.011
24	27.515	3.003	3.009	27.463	3.010	3.011
25	96.100	5.004	5.998	96.331	5.012	5.996
26	36.560	4.997	4.004	36.777	4.989	4.018
27	36.600	5.009	4.004	36.652	5.014	4.008
28	27.510	3.000	3.001	27.530	3.001	3.004
29	11.880	3.013	4.008	11.767	3.032	4.013
30	36.220	4.013	5.019	36.443	4.026	5.039

1.4. Площадь и координаты центра тяжести плоской фигуры. Пример.

Задача. Найти площадь и координаты центра тяжести плоской фигуры (рис. 1.5) и угол наклона главной оси инерции к оси x . Размеры даны в сантиметрах.

Решение

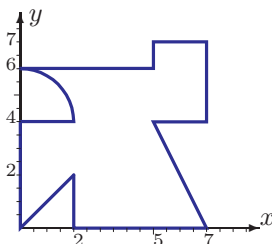


Рис. 1.5

Существует несколько алгоритмов вычисления площади, координат центра тяжести и моментов инерции плоских фигур. Самый распространенный способ состоит в ручном разбиении фигуры на простейшие с последующим вычислением сумм. Для фигур, состоящих из небольшого числа простых составляющих, этот способ удобен, однако как способ надежной проверки ручного счета он не годится, так как ошибка в какой-либо характеристике отдельной составляющей не будет замечена. Чаще всего бывают ошибки со знаком центробежных моментов инерции и путаница в осях и в значениях b и h в формулах, взятых из табл. П.1, П.2 стандартных фигур на С. 95–96.

Известен алгоритм вычисления интегрированием по площади. Обе функции, ограничивающие площадь сверху и снизу, задаются по точкам. У этого подхода есть ограничение — по оси y фигура должна быть правильной (т.е. ограничивающие функции однозначные).

Применим другой метод — метод интегрирования по контуру, основанный на замене двойного интеграла криволинейным ¹.

¹Еще один метод предложили Кристалинский Р.Е. и Шапошников Н.Н. Метод реализован в системе Mathematica и основан на интегрировании по площади некоторой логической функции, принимающей значение 1 внутри заданной фигуры и 0 — вне ее.

Для площади фигуры $F = \int_D dF$ с помощью формулы Грина

$$\int_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dF = \oint_L P dx + Q dy$$

при $P = y$, $Q = -x$ получим ¹

$$F = \int_D dF = \frac{1}{2} \oint_L y dx - x dy.$$

Вычисляем криволинейный интеграл, используя на участке от точки i до точки $i + 1$ параметрическое представление прямой

$$x = (x_{i+1} - x_i)t + x_i, \quad y = (y_{i+1} - y_i)t + y_i, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (1.9)$$

Получаем формулу для площади фигуры, вычисленную по координатам точек ее контура:

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1}). \quad (1.10)$$

Для контура, ограниченного ломаной L с угловыми точками (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$, формула дает точный результат. Если контур сечения содержит криволинейные участки, то их можно приближенно заменить ломаной. Точность вычисления при этом зависит от числа введенных угловых точек и способа приближения кривой.

Для статического момента фигуры

$$S_y = \int_D x dF$$

Функция задается, например, в виде $F[x, y] = \text{Boole}[x > y, x > 0, y > 0]$. Статический момент вычисляется интегрированием $S_x = \text{Integrate}[y * F[x, y], \{x, -2, 2\}, \{y, -3, 3\}]$. Основное достоинство метода в том, что он легко переносится и на трехмерные тела. Метод не реализуется в Maple (здесь Maple проигрывает системе Mathematica!).

¹Обход области принят по часовой стрелке. См. *Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III, СПб.: Лань, 2009.*

с помощью формулы Грина при $P = xy$, $Q = -x^2$ получим

$$S_y = \frac{1}{3} \oint_L xy dx - x^2 dy.$$

Вычисляем криволинейный интеграл, используя замену (1.9), и записываем формулу для статического момента

$$S_y = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (x_{i+1}y_i - x_iy_{i+1})(x_i + x_{i+1}).$$

Таким же образом получим

$$S_x = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (x_{i+1}y_i - x_iy_{i+1})(y_i + y_{i+1}).$$

Координаты центра тяжести имеют вид

$$x_c = \frac{S_y}{F}, \quad y_c = \frac{S_x}{F}.$$

Рассмотрим этот метод применительно к задаче 1.4 на С. 25. Принимаем обход контура по часовой стрелке. Нумеруем угловые точки контура (рис. 1.6).

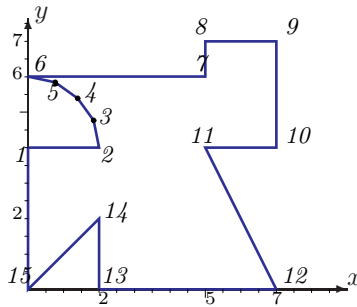


Рис. 1.6

Дугу окружности заменяем ломаной, разбивая ее на четыре части. Координаты угловых точек на дуге вычисляем по формулам

$$x_{k+2} = \rho \cos(k\pi/8), \quad y_{k+2} = 2 + \rho \sin(k\pi/8), \quad k = 1, 2, 3.$$

Если взять $\rho = R$, то получим многоугольник, вписанный в окружность, и площадь получится в данном примере с завышением. Если $\rho = R/\cos(\pi/16)$, то многоугольник будет описывать окружность и площадь будет уменьшена ¹.

Предлагаемый метод позволяет рассчитывать и двусвязные фигуры. Пусть в трапеции $ABCD$ сделан треугольный вырез MNK (рис. 1.7). Сделаем разрез KC , соединяющий внутренний и внешний контур (рис. 1.8). При обходе фигуры внутренний контур будет пройден против часовой стрелки, и его площадь станет отрицательной, а разрез, пройденный дважды в противоположных направлениях, не внесет добавки в интеграл.

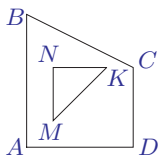


Рис. 1.7

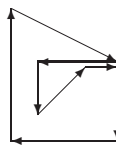


Рис. 1.8

Еще одна программа 48.mws для вычисления моментов инерции сечения, состоящего из прямоугольников, треугольников и секторов круга, здесь не приведена, но содержится в архиве <http://vuz.exponenta.ru/progr.rar>. Для ввода данных в этой программе необходимо указать положение частей сечения, размеры и знак площади (вырезанная площадь отрицательная).

План решения задачи математической статистики:

1. Решить задачу 4 раза при разных значениях координаты точки A $x_{A,i}$, $y_{A,i}$, $i = 1, \dots, 4$. Получить величины $x_{c,i}$, $y_{c,i}$, F_i .
2. Вычислить математические ожидания

$$M(x_c) = \sum_{i=1}^4 x_{c,i} p_i, \quad M(y_c) = \sum_{i=1}^4 y_{c,i} p_i, \quad M(F) = \sum_{i=1}^4 F_i p_i.$$

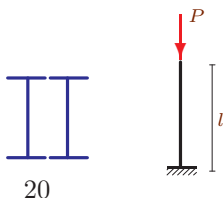
¹Для точной аппроксимации площади круга по этому методу необходимо $\rho = R\sqrt{\pi/(n \sin(\pi/n))}$, где n – число точек разбиения. При $n \rightarrow \infty$ согласно первому замечательному пределу $\rho \rightarrow R$.

1.5. Критическая сила сжатого стержня

Найти математическое ожидание и дисперсию критической силы P центрально сжатого стержня длиной l , где l – случайная величина, заданная рядом распределения $p = [0.1, 0.3, 0.5, 0.1]$. Известно симметричное поперечное сечение стержня, составленное из двух или четырех прокатных профилей (ГОСТ 8239-89, ГОСТ 8240-89, ГОСТ 8509-86), и схема закрепления. Модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. При гибкости меньшей $\lambda = \pi\sqrt{E/\sigma_{\text{пц}}}$ пользоваться формулой Ясинского $\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda$, где $a = 310$ МПа, $b = 1.14$ МПа, $\sigma_{\text{пц}} = 195$ МПа.

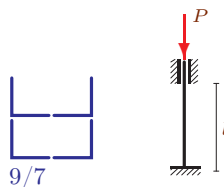
Задача 3.1

$$l = [4, 4.1, 4.2, 4.3] \text{ м.}$$



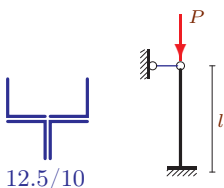
Задача 3.2

$$l = [14, 14.05, 14.1, 14.15] \text{ м.}$$



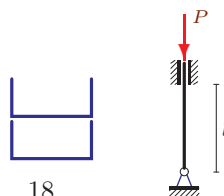
Задача 3.3

$$l = [14, 14.1, 14.2, 14.3] \text{ м.}$$



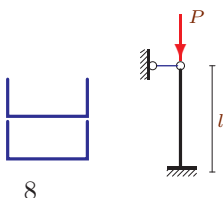
Задача 3.4

$$l = [7, 7.1, 7.2, 7.3] \text{ м.}$$



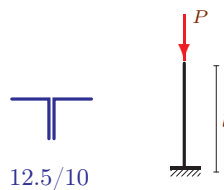
Задача 3.5

$$l = [3, 3.05, 3.1, 3.15] \text{ м.}$$



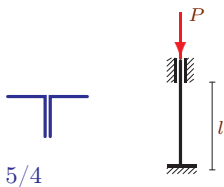
Задача 3.6

$$l = [3, 3.05, 3.1, 3.15] \text{ м.}$$



Задача 3.7

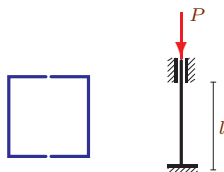
$$l = [2, 2.05, 2.1, 2.15] \text{ м.}$$



5/4

Задача 3.8

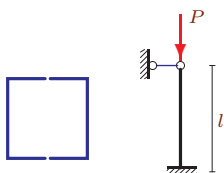
$$l = [6, 6.05, 6.1, 6.15] \text{ м.}$$



10

Задача 3.9

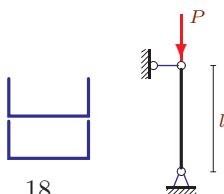
$$l = [2, 2.1, 2.2, 2.3] \text{ м.}$$



5

Задача 3.10

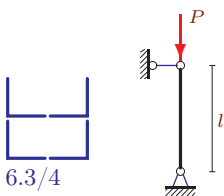
$$l = [5, 5.1, 5.2, 5.3] \text{ м.}$$



18

Задача 3.11

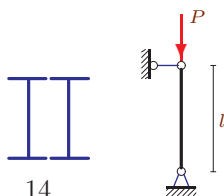
$$l = [3, 3.1, 3.2, 3.3] \text{ м.}$$



6.3/4

Задача 3.12

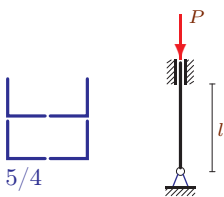
$$l = [4, 4.1, 4.2, 4.3] \text{ м.}$$



14

Задача 3.13

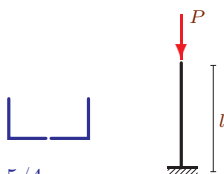
$$l = [3, 3.1, 3.2, 3.3] \text{ м.}$$



5/4

Задача 3.14

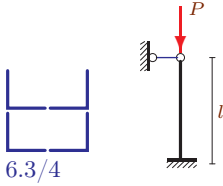
$$l = [1, 1.01, 1.02, 1.03] \text{ м.}$$



5/4

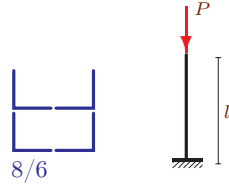
Задача 3.15

$$l = [5, 5.1, 5.2, 5.3] \text{ м.}$$



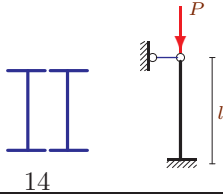
Задача 3.16

$$l = [3, 3.05, 3.1, 3.15] \text{ м.}$$



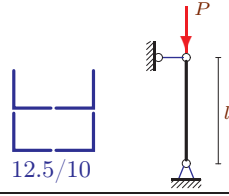
Задача 3.17

$$l = [6, 6.05, 6.1, 6.15] \text{ м.}$$



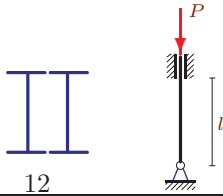
Задача 3.18

$$l = [14, 14.1, 14.2, 14.3] \text{ м.}$$



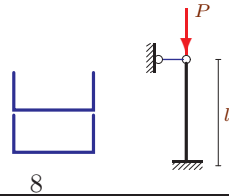
Задача 3.19

$$l = [5, 5.05, 5.1, 5.15] \text{ м.}$$



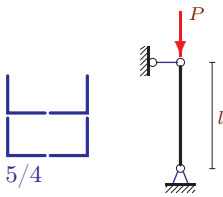
Задача 3.20

$$l = [3, 3.1, 3.2, 3.3] \text{ м.}$$



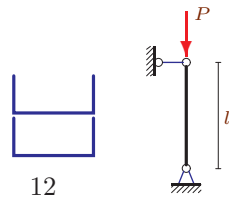
Задача 3.21

$$l = [2, 2.05, 2.1, 2.15] \text{ м.}$$



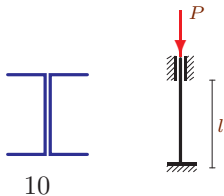
Задача 3.22

$$l = [3, 3.1, 3.2, 3.3] \text{ м.}$$



Задача 3.23

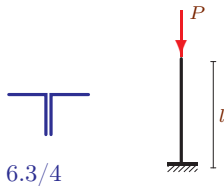
$$l = [4, 4.05, 4.1, 4.15] \text{ м.}$$



10

Задача 3.24

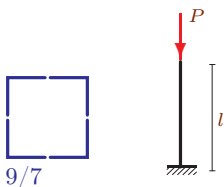
$$l = [1, 1.01, 1.02, 1.03] \text{ м.}$$



6.3/4

Задача 3.25

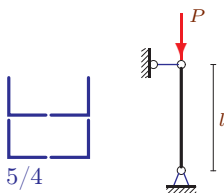
$$l = [5, 5.1, 5.2, 5.3] \text{ м.}$$



9/7

Задача 3.26

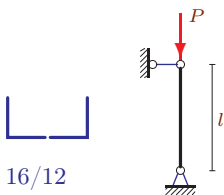
$$l = [2, 2.1, 2.2, 2.3] \text{ м.}$$



5/4

Задача 3.27

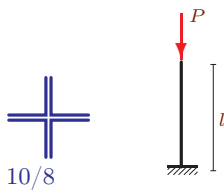
$$l = [8, 8.1, 8.2, 8.3] \text{ м.}$$



16/12

Задача 3.28

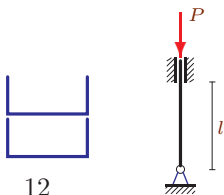
$$l = [3, 3.1, 3.2, 3.3] \text{ м.}$$



10/8

Задача 3.29

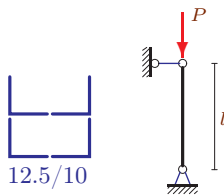
$$l = [4, 4.1, 4.2, 4.3] \text{ м.}$$



12

Задача 3.30

$$l = [14, 14.1, 14.2, 14.3] \text{ м.}$$



12.5/10

Ответы.**Критическая сила сжатого стержня**

	F	J	i	μ	λ	$P_{кр}$	$M(P_{кр})$	$D(P_{кр})$	
	см ²	см ⁴	см	—	—	кН			
1	53.60	1570.00	5.412	2.0	147.816	484.227	448.197	303.7270	
2	49.20	1373.50	5.284	0.5	132.485	553.302	547.046	9.6887	
3	97.20	2596.92	5.169	0.7	189.596	533.748	521.805	34.9667	
4	41.40	679.150	4.050	0.7	120.980	558.346	533.872	144.0433	
5	17.96	97.440	2.329	0.7	90.158	372.167	367.245	6.0577	(пл)
6	48.60	720.000	3.849	2.0	155.885	394.784	374.733	96.0846	
7	7.78	18.420	1.539	0.5	64.990	183.539	181.234	1.3290	(пл)
8	21.80	258.486	3.443	0.5	87.123	459.283	456.396	2.0835	(пл)
9	12.32	45.600	1.924	0.7	72.770	279.716	271.540	16.7129	(пл)
10	41.40	679.150	4.050	1.0	123.449	536.235	503.862	248.3233	
11	19.84	272.462	3.706	1.0	80.954	431.941	422.176	23.8401	(пл)
12	34.80	547.423	3.966	1.0	100.853	675.356	625.104	590.8131	
13	15.56	134.090	2.936	0.7	71.536	355.466	348.699	11.4503	(пл)
14	7.78	18.420	1.539	2.0	129.980	90.899	88.075	1.9397	
15	19.84	272.462	3.706	0.7	94.446	401.425	394.589	11.6816	(пл)
16	37.52	828.320	4.699	2.0	127.698	454.177	431.109	127.1701	
17	34.80	547.423	3.966	0.7	105.895	612.568	596.631	62.0506	
18	97.20	5236.87	7.340	1.0	190.733	527.407	515.605	34.1407	
19	29.40	356.856	3.484	0.7	100.460	574.697	557.128	76.4604	(пл)
20	17.96	97.440	2.329	0.7	90.158	372.167	362.322	24.2308	(пл)
21	15.56	134.090	2.936	1.0	68.130	361.509	356.675	5.8420	(пл)
22	26.60	242.216	3.018	1.0	99.417	523.128	478.927	530.3682	(пл)
23	21.80	86.004	1.986	0.5	100.693	424.415	408.053	64.6865	
24	9.92	37.800	1.952	2.0	102.457	186.536	180.740	8.1685	
25	49.20	2475.13	7.093	2.0	140.988	488.572	459.076	206.1403	
26	15.56	134.090	2.936	1.0	68.130	361.509	351.841	23.3680	(пл)
27	74.80	1826.00	4.941	1.0	161.916	563.184	541.472	113.9025	
28	62.40	1059.90	4.121	2.0	145.583	581.155	524.815	727.6183	
29	26.60	242.216	3.018	0.7	92.789	543.226	531.971	31.6685	(пл)
30	97.20	5236.87	7.340	1.0	190.733	527.407	515.605	34.1407	

1.6. Критическая сила P центрально сжатого стержня. Пример

Задача. Найти критическую силу P центрально сжатого стержня длиной $l = 3,8$ м. Известно симметричное поперечное

сечение стержня, составленное из двутавра 22, ГОСТ 8239-89, и двух уголков 10/7 ГОСТ 8509-89 (рис. 1.9), и схема закрепления (рис. 1.10). Модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. При гибкости, меньшей предельной $\lambda_{\text{пред}} = \pi \sqrt{E/\sigma_{\text{пц}}}$, пользоваться формулой Ясинского¹: $\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda$, где $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа, $\sigma_{\text{пц}} = 195$ МПа.

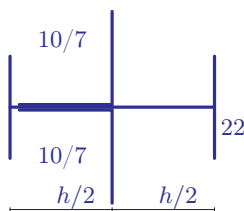


Рис. 1.9

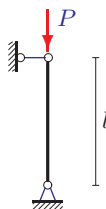


Рис. 1.10

Решение

1. Вычисляем площадь сечения. Рассмотрим уголок 10 с толщиной $t = 7$ мм, т. е. уголок 10/7 (табл. 4, С. 99). Пронумеруем части сечения. Пусть двутавр имеет номер 1, уголки 2 и 3. Площадь его сечения согласно данным сортамента равна $13,8 \text{ см}^2$. Аналогично площадь сечения двутавра 22 (табл. 2, С. 97) равна $30,6 \text{ см}^2$. Площадь всего сечения: $F = F_1 + 2F_2 = 30,6 + 2 \cdot 13,8 = 58,2 \text{ см}^2$.

2. Вычисляем координаты центра тяжести сечения. Выбираем оси координат (рис. 1.11). Начало координат помещаем на оси симметрии. В симметричном относительно оси x сечении $y_c = 0$. Центр тяжести двутавра находится в его геометрическом центре, $x_1 = 11$ см. Размер уголка $z_0 = 2,71$ см возьмем из табл. 4. Внимательно следим за единицами измерения размеров в таблицах сортамента. Одни размеры в этих таблицах обычно даны в миллиметрах, другие, в том числе и z_0 , — в сантиметрах.

По формуле (1.2) найдем координату

$$x_c = \frac{F_1 x_1 + 2F_2 x_2}{F} = \frac{2 \cdot 13,8 \cdot (11 - 2,71) + 30,6 \cdot 11}{58,2} = 9,715 \text{ см.}$$

¹ Ясинский Ф.С. (1856–1899) — русский инженер, механик, профессор Петербургского института инженерных путей сообщения.

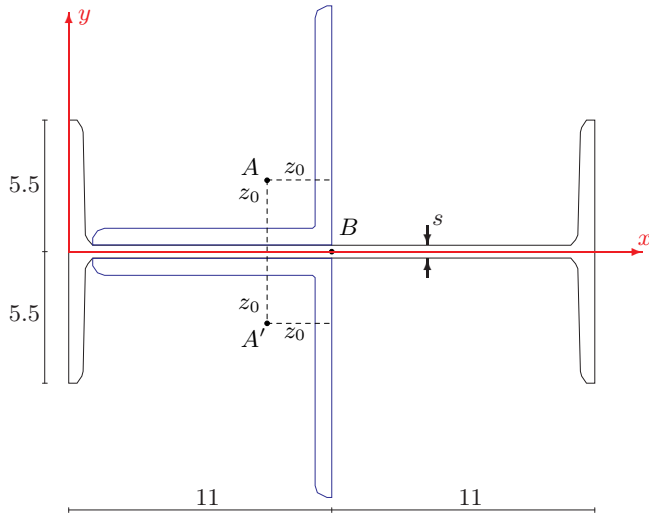


Рис. 1.11

3. Определяем моменты инерции сечения относительно центральных осей. Значения моментов инерции берем из таблиц сортамента. Особое внимание обращаем на соответствие осей в условии задачи и на рисунке сортамента. В данном случае для двутавра момент инерции J_{xc_1} относительно оси x в сортаменте обозначен как $J_y = 157 \text{ см}^4$, и, наоборот, момент инерции J_{yc_1} относительно оси y в сортаменте обозначен как $J_x = 2550 \text{ см}^4$.

$$J_{xc} = \sum_{i=1}^3 (J_{xc_i} + (y_c - y_i)^2 F_i) = J_{xc_1} + 2 (J_{xc_2} + F_2 (z_0 + s/2)^2) = 157 + 2 (131 + 13,8 (2,71 + 0,27)^2) = 664,099 \text{ см}^4;$$

$$J_{yc} = \sum_{i=1}^3 (J_{yc_i} + (x_c - x_i)^2 F_i) = 2550 + 30,6 \cdot (11 - 9,715)^2 + 2 \cdot (131 + 13,8 \cdot (11 - 2,71 - 9,715)^2) = 2918,573 \text{ см}^4.$$

4. Находим наименьший момент инерции

$$J_{\min} = J_{xc} = 664,099 \text{ см}^4$$

и соответствующий радиус инерции

$$i = \sqrt{J_{\min}/F} = 3,378 \text{ см.}$$

При потере устойчивости сечение повернется вокруг оси x .

5. Вычисляем гибкость стержня с учетом коэффициента приведения¹. Для шарнирно опертого стержня $\mu = 1$. Таким образом, получаем гибкость

$$\lambda = \mu l / i = 1 \cdot 380 / 3,378 = 112,494.$$

Гибкость – безразмерная величина, характеризующая соотношение длины и толщины стержня.

6. Если гибкость стержня больше $\lambda_{\text{пц}}$ (длинные тонкие стержни), критическое напряжение вычисляем по формуле Эйлера

$$\sigma_{\text{кр}} = \pi^2 E / \lambda^2.$$

Иначе пользуемся формулой Ясинского. Вычисляем $\lambda_{\text{пц}}$

$$\lambda_{\text{пц}} = \pi \sqrt{E / \sigma_{\text{пц}}} = 3,141 \sqrt{2 \cdot 10^5 / 195} = 100,611. \quad (1.11)$$

Так как $\lambda > \lambda_{\text{пц}}$, используем формулу Эйлера

$$\sigma_{\text{кр}} = \pi^2 E / \lambda^2 = 194,288 \cdot 10^3 \text{ МПа.} \quad (1.12)$$

7. Вычисляем критическую силу $P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} F = 1130,754 \text{ кН}$.

Для того чтобы продемонстрировать вычисления по формуле Ясинского, немного изменим условие задачи. Пусть длина стержня будет меньше: $l = 3 \text{ м}$. Гибкость при этом уменьшится:

$$\lambda = \mu l / i = 1 \cdot 300 / 3,378 = 88,81.$$

В этом случае $\lambda < \lambda_{\text{пц}}$ и стержень потеряет устойчивость в пластической области деформирования. Используем эмпирическую формулу Ясинского². Подставляя в нее заданные

¹Четыре варианта закрепления стержня см. в интерфейсе маплета на рис. 1.12, С. 38.

²Иногда эту формулу называют по имени Л. Тетмайера (*Ludwig von Tetmajer*, 1850–1905).

в условии задачи коэффициенты ¹, получаем критическое напряжение

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 88,81 = 208,757 \text{ МПа}$$

и критическую силу

$$P_{кр} = \sigma_{кр} F = 1214,963 \text{ кН.}$$

Таблица 1.1

Константы формулы Ясинского

Материал	a	b
Ст. 2, Ст.3	310	1,14
Ст.5	464	3,26
Сталь 40	321	1,16
Кремнистая сталь	589	3,82
Дерево	29,3	0,194

План решения задачи математической статистики:

1. Решить задачу 4 раза при разных значениях длины стержня l_i , $i = 1, \dots, 4$. Получить величины $P_{кр,i}$, $i = 1, \dots, 4$.
2. Вычислить математическое ожидание

$$M(P_{кр}) = \sum_{i=1}^4 P_{кр,i} p_i.$$

Maplet. Критическая нагрузка

Программа для расчета критической нагрузки продольно сжатого стержня оформлена в виде маплета и описана в [7]. Интерфейс программы (рис. 1.12) состоит из пяти полей ввода данных (константы материала, радиус инерции, длина и площадь сечения), четырех полей вывода. Внизу окна приведены рисунки четырех видов закреплений, соответствующие коэффициенты приведения и кнопки выбора. В качестве тестовой задачи

¹ Для других материалов константы даны в табл. 1.1.

использована задача 1.6 на С. 33. Для расчета достаточно указать способ закрепления и нажать кнопку Run. Программа произведет все расчеты и выдаст значение гибкости, критическое напряжение и критическую нагрузку, название примененной расчетной формулы. В данной задаче для $\mu = 1$ и $\mu = 2$ расчет производится по формуле Эйлера, для $\mu = 0,5$ и $\mu = 0,7$ — по формуле Ясинского.

Устойчивость

$a = 310.0$ МПа, $\lambda = 100.7957560$
 $b = 1.14$ МПа, $\sigma = 194.2876736$ МПа
 $i = 3.77$ см, $P = 1130.754260$ кН
 $l = 380.0$ см
 $F = 58.2$ см² Формула Эйлера

☒ 1 ☐ 0.7 ☐ 0.5 ☐ 2

Run

Рис. 1.12 Maplet для решения задачи устойчивости. Четыре варианта закрепления стержня

Глава 2

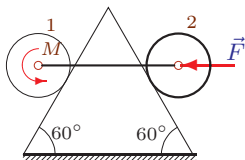
Статика

2.1. Трение качения

Система состоит из двух цилиндров весом P_1 и P_2 с одинаковыми радиусами R , соединенных однородным стержнем весом P_3 . Цилиндры могут кататься без проскальзывания, цилиндр 1 без сопротивления, а цилиндр 2 с трением качения (δ). Какова вероятность того, что система будет находиться в равновесии, если момент M есть случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[M_1, M_2]$.

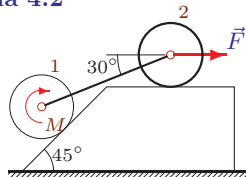
В ответах даны нормальные реакции опор и момент M для движения цилиндра 2 по часовой стрелке и против (последние три столбца).

Задача 4.1



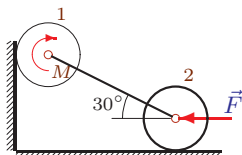
$P_1 = 10 \text{ Н}$, $P_2 = 23 \text{ Н}$, $P_3 = 20 \text{ Н}$,
 $M \in [2, 4] \text{ Нм}$, $F = 5 \text{ Н}$,
 $R = 35 \text{ см}$, $\delta = 3 \text{ мм}$.

Задача 4.2



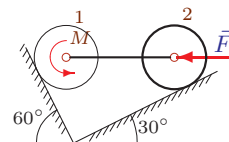
$P_1 = 22 \text{ Н}$, $P_2 = 24 \text{ Н}$, $P_3 = 40 \text{ Н}$,
 $M \in [4, 7] \text{ Нм}$, $F = 10 \text{ Н}$,
 $R = 30 \text{ см}$, $\delta = 2 \text{ мм}$.

Задача 4.3

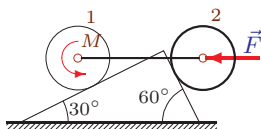


$P_1 = 5 \text{ Н}$, $P_2 = 25 \text{ Н}$, $P_3 = 10 \text{ Н}$,
 $M \in [1, 3] \text{ Нм}$, $F = 30 \text{ Н}$,
 $R = 25 \text{ см}$, $\delta = 1 \text{ мм}$.

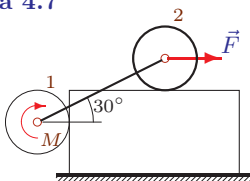
Задача 4.4



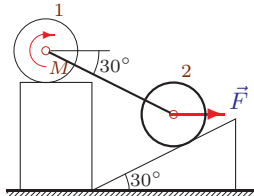
$P_1 = 21 \text{ Н}$, $P_2 = 24 \text{ Н}$, $P_3 = 50 \text{ Н}$,
 $M \in [7, 9] \text{ Нм}$, $F = 5 \text{ Н}$,
 $R = 35 \text{ см}$, $\delta = 3 \text{ мм}$.

Задача 4.5

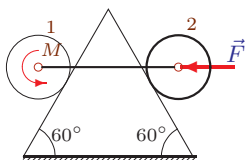
$P_1 = 22 \text{ H}, P_2 = 27 \text{ H}, P_3 = 30 \text{ H},$
 $M \in [9, 12] \text{ Hм}, F = 10 \text{ H},$
 $R = 30 \text{ см}, \delta = 2 \text{ мм}.$

Задача 4.7

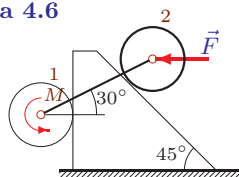
$P_1 = 21 \text{ H}, P_2 = 25 \text{ H}, P_3 = 30 \text{ H},$
 $M \in [14, 16] \text{ Hм}, F = 5 \text{ H},$
 $R = 45 \text{ см}, \delta = 4 \text{ мм}.$

Задача 4.9

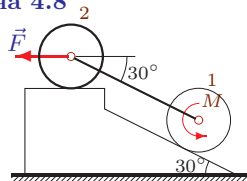
$P_1 = 23 \text{ H}, P_2 = 27 \text{ H}, P_3 = 40 \text{ H},$
 $M \in [7, 10] \text{ Hм}, F = 15 \text{ H},$
 $R = 45 \text{ см}, \delta = 3 \text{ мм}.$

Задача 4.11

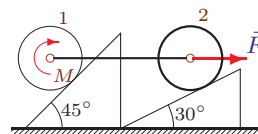
$P_1 = 11 \text{ H}, P_2 = 24 \text{ H}, P_3 = 40 \text{ H},$
 $M \in [0, 2] \text{ Hм}, F = 15 \text{ H},$
 $R = 25 \text{ см}, \delta = 1 \text{ мм}.$

Задача 4.6

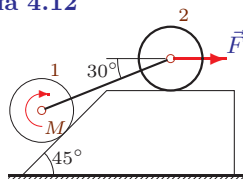
$P_1 = 23 \text{ H}, P_2 = 27 \text{ H}, P_3 = 40 \text{ H},$
 $M \in [-2, 3] \text{ Hм}, F = 15 \text{ H},$
 $R = 65 \text{ см}, \delta = 5 \text{ мм}.$

Задача 4.8

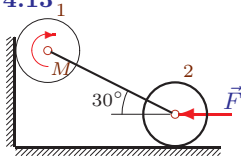
$P_1 = 22 \text{ H}, P_2 = 25 \text{ H}, P_3 = 30 \text{ H},$
 $M \in [0, 2] \text{ Hм}, F = 10 \text{ H},$
 $R = 20 \text{ см}, \delta = 1 \text{ мм}.$

Задача 4.10

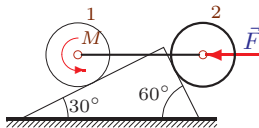
$P_1 = 21 \text{ H}, P_2 = 23 \text{ H}, P_3 = 50 \text{ H},$
 $M \in [25, 28] \text{ Hм}, F = 5 \text{ H},$
 $R = 55 \text{ см}, \delta = 5 \text{ мм}.$

Задача 4.12

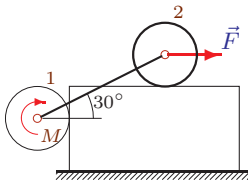
$P_1 = 24 \text{ H}, P_2 = 28 \text{ H}, P_3 = 50 \text{ H},$
 $M \in [3, 5] \text{ Hм}, F = 20 \text{ H},$
 $R = 30 \text{ см}, \delta = 1 \text{ мм}.$

Задача 4.13

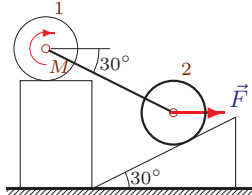
$P_1 = 6 \text{ H}$, $P_2 = 28 \text{ H}$, $P_3 = 10 \text{ H}$,
 $M \in [10, 13] \text{ Hm}$, $F = 50 \text{ H}$,
 $R = 65 \text{ cm}$, $\delta = 4 \text{ mm}$.

Задача 4.15

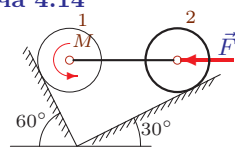
$P_1 = 24 \text{ H}$, $P_2 = 28 \text{ H}$, $P_3 = 20 \text{ H}$,
 $M \in [12, 15] \text{ Hm}$, $F = 20 \text{ H}$,
 $R = 60 \text{ cm}$, $\delta = 4 \text{ mm}$.

Задача 4.17

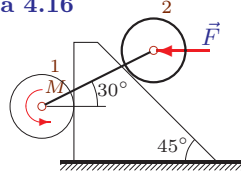
$P_1 = 23 \text{ H}$, $P_2 = 26 \text{ H}$, $P_3 = 50 \text{ H}$,
 $M \in [13, 15] \text{ Hm}$, $F = 15 \text{ H}$,
 $R = 35 \text{ cm}$, $\delta = 2 \text{ mm}$.

Задача 4.19

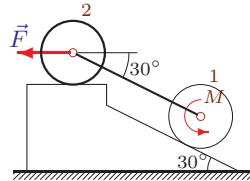
$P_1 = 25 \text{ H}$, $P_2 = 27 \text{ H}$, $P_3 = 10 \text{ H}$,
 $M \in [-9, -6] \text{ Hm}$, $F = 25 \text{ H}$,
 $R = 75 \text{ cm}$, $\delta = 5 \text{ mm}$.

Задача 4.14

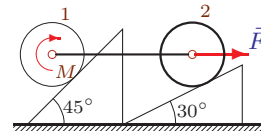
$P_1 = 23 \text{ H}$, $P_2 = 26 \text{ H}$, $P_3 = 50 \text{ H}$,
 $M \in [10, 12] \text{ Hm}$, $F = 15 \text{ H}$,
 $R = 55 \text{ cm}$, $\delta = 4 \text{ mm}$.

Задача 4.16

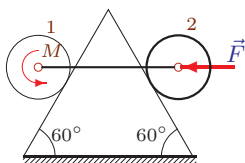
$P_1 = 25 \text{ H}$, $P_2 = 28 \text{ H}$, $P_3 = 10 \text{ H}$,
 $M \in [-12, -9] \text{ Hm}$, $F = 25 \text{ H}$,
 $R = 55 \text{ cm}$, $\delta = 3 \text{ mm}$.

Задача 4.18

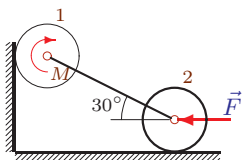
$P_1 = 24 \text{ H}$, $P_2 = 25 \text{ H}$, $P_3 = 10 \text{ H}$,
 $M \in [-7, -5] \text{ Hm}$, $F = 20 \text{ H}$,
 $R = 70 \text{ cm}$, $\delta = 5 \text{ mm}$.

Задача 4.20

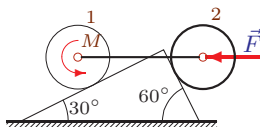
$P_1 = 23 \text{ H}$, $P_2 = 27 \text{ H}$, $P_3 = 40 \text{ H}$,
 $M \in [16, 19] \text{ Hm}$, $F = 15 \text{ H}$,
 $R = 45 \text{ cm}$, $\delta = 3 \text{ mm}$.

Задача 4.21

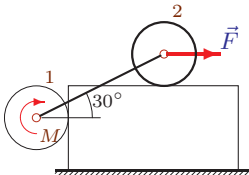
$P_1 = 12 \text{ H}$, $P_2 = 25 \text{ H}$, $P_3 = 40 \text{ H}$,
 $M \in [-1, 2] \text{ HМ}$, $F = 20 \text{ H}$,
 $R = 50 \text{ см}$, $\delta = 3 \text{ мм}$.

Задача 4.23

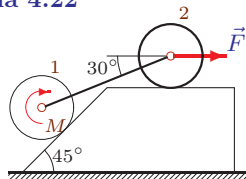
$P_1 = 5 \text{ H}$, $P_2 = 24 \text{ H}$, $P_3 = 30 \text{ H}$,
 $M \in [-2, 0] \text{ HМ}$, $F = 30 \text{ H}$,
 $R = 25 \text{ см}$, $\delta = 1 \text{ мм}$.

Задача 4.25

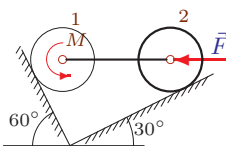
$P_1 = 25 \text{ H}$, $P_2 = 27 \text{ H}$, $P_3 = 50 \text{ H}$,
 $M \in [13, 15] \text{ HМ}$, $F = 25 \text{ H}$,
 $R = 45 \text{ см}$, $\delta = 2 \text{ мм}$.

Задача 4.27

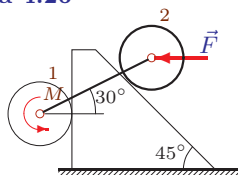
$P_1 = 24 \text{ H}$, $P_2 = 27 \text{ H}$, $P_3 = 20 \text{ H}$,
 $M \in [8, 10] \text{ HМ}$, $F = 20 \text{ H}$,
 $R = 40 \text{ см}$, $\delta = 2 \text{ мм}$.

Задача 4.22

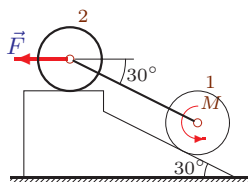
$P_1 = 25 \text{ H}$, $P_2 = 30 \text{ H}$, $P_3 = 10 \text{ H}$,
 $M \in [-5, -3] \text{ HМ}$, $F = 25 \text{ H}$,
 $R = 55 \text{ см}$, $\delta = 3 \text{ мм}$.

Задача 4.24

$P_1 = 24 \text{ H}$, $P_2 = 26 \text{ H}$, $P_3 = 30 \text{ H}$,
 $M \in [7, 9] \text{ HМ}$, $F = 20 \text{ H}$,
 $R = 70 \text{ см}$, $\delta = 5 \text{ мм}$.

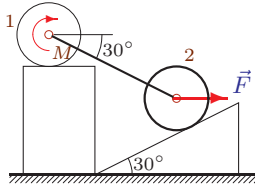
Задача 4.26

$P_1 = 23 \text{ H}$, $P_2 = 24 \text{ H}$, $P_3 = 50 \text{ H}$,
 $M \in [-3, 1] \text{ HМ}$, $F = 15 \text{ H}$,
 $R = 55 \text{ см}$, $\delta = 4 \text{ мм}$.

Задача 4.28

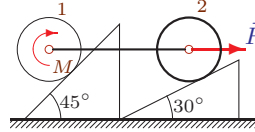
$P_1 = 25 \text{ H}$, $P_2 = 28 \text{ H}$, $P_3 = 30 \text{ H}$,
 $M \in [-4, -2] \text{ HМ}$, $F = 25 \text{ H}$,
 $R = 35 \text{ см}$, $\delta = 1 \text{ мм}$.

Задача 4.29



$P_1 = 23 \text{ Н}, P_2 = 26 \text{ Н}, P_3 = 30 \text{ Н},$
 $M \in [3, 6] \text{ Нм}, F = 15 \text{ Н},$
 $R = 35 \text{ см}, \delta = 2 \text{ мм}.$

Задача 4.30



$P_1 = 24 \text{ Н}, P_2 = 26 \text{ Н}, P_3 = 40 \text{ Н},$
 $M \in [24, 26] \text{ Нм}, F = 20 \text{ Н},$
 $R = 70 \text{ см}, \delta = 5 \text{ мм}.$

Ответы. Трение качения

	N_1	N_2	M	N_1	N_2	M	p
	Н	Н	Нм	Н	Н	Нм	%
1	54.204	65.034	2.870	56.164	66.995	3.266	19.804
2	32.588	49.583	5.674	32.787	49.966	5.452	7.402
3	30.190	47.430	1.858	29.811	47.211	1.803	2.732
4	52.318	56.862	8.019	51.348	56.302	8.215	9.800
5	62.862	83.041	10.464	63.983	84.981	11.046	19.402
6	72.503	124.707	-0.741	79.112	132.079	1.739	49.607
7	4.621	42.668	14.999	5.383	43.108	14.801	9.905
8	32.043	45.906	1.338	32.043	45.642	1.443	5.286
9	32.043	67.182	8.541	32.928	65.648	7.850	23.007
10	16.053	55.718	26.950	16.876	55.136	26.498	15.085
11	67.904	87.395	0.852	69.124	88.614	1.028	8.800
12	40.561	64.423	3.774	40.690	64.671	3.630	7.199
13	50.382	62.088	11.757	49.621	61.648	11.472	9.525
14	62.920	59.138	10.504	62.064	58.643	10.776	13.600
15	51.853	75.132	13.087	52.866	76.888	14.140	35.108
16	17.817	60.884	-10.842	20.086	63.415	-10.122	24.013
17	14.660	59.464	13.838	15.342	59.858	13.700	6.889
18	25.115	41.719	-6.257	25.115	41.376	-5.777	23.988
19	35.445	30.781	-7.074	35.851	30.078	-7.601	17.569
20	21.528	54.481	17.677	22.119	54.063	17.412	8.863
21	65.254	89.074	0.362	67.125	90.945	0.902	18.002
22	28.604	49.279	-3.504	28.766	49.590	-3.835	16.541
23	30.226	56.451	-0.637	29.775	56.191	-0.702	3.252
24	57.660	47.539	8.220	56.984	47.148	8.494	13.667
25	75.376	103.206	13.750	76.300	104.807	14.470	36.029
26	77.247	131.413	-1.871	83.821	138.745	0.217	52.190
27	19.758	48.407	9.037	20.243	48.688	8.925	5.606
28	34.641	57.529	-3.170	34.641	57.339	-3.037	6.632
29	30.167	56.574	4.748	30.807	55.465	4.360	12.937
30	26.164	53.336	25.243	26.784	52.898	24.809	21.685

2.2. Трение качения. Пример

Трение качения происходит за счет деформации цилиндра и опорной поверхности в месте контакта. В результате реакция опоры смещается в сторону возможного движения на половину длины площадки контакта и создает момент сопротивления. Плечо этого момента принимают за коэффициент трения качения. Таким образом, $M_{\text{тр}} = N\delta$, где N – реакция опоры, δ – коэффициент трения качения, имеющий размерность длины. Так в рамках теоретической механики, где изучается *твердое* тело, для объяснения явления трения качения вводят гипотезу деформируемости. Считают, что область деформаций в теле мала, а глубиной продавливания цилиндра в поверхность (или величиной смятия цилиндра) пренебрегают. Коэффициент трения качения зависит не только от свойств материала цилиндра и поверхности, но и от радиуса цилиндра.

План решения

1. Задаем направление возможного движения при достижении условия предельного равновесия. К катящемуся телу (цилиндру, колесу) прикладываем момент трения качения, направляя его в сторону, противоположную возможному движению. Не забываем о силе сцепления в точке контакта, направленную вдоль плоскости.

2. Решаем задачу о равновесии системы тел. Используем метод разбирования системы на отдельные тела. Внешние и внутренние связи заменяем их реакциями. Составляем и решаем уравнения равновесия. Оси координат для уравнения проекций для цилиндрических тел выбираем вдоль нормальной реакции, а уравнение моментов составляем относительно точки касания. Из решения системы уравнений равновесия определяем значение M^* при условии предельного равновесия.

3. Меняем направление возможного движения системы и направление момента трения качения. Решаем задачу заново, определяем второе значение момента M^{**} , соответствующее условию предельного равновесия.

4. Вероятность нахождения системы в равновесии вычисляется как отношение $p = |M^* - M^{**}| / (M_2 - M_1)$.

Пример решения. Система состоит из двух цилиндров весом $G_1 = 20$ Н и $G_2 = 30$ Н с одинаковыми радиусами $R = 50$ см, соединенных однородным стержнем весом $G_3 = 40$ Н. Цилиндры могут кататься без проскальзывания, цилиндр 1 – без сопротивления, а цилиндр 2 – с трением качения.

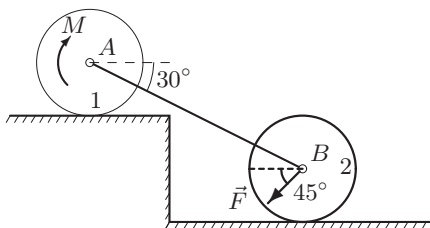


Рис. 2.1

Коэффициент трения качения $\delta = 2$ мм. К цилиндру 1 приложена пара сил с моментом M . К оси цилиндра 2 приложена сила $F = 10$ Н (рис. 2.1). Какова вероятность того, что система будет находиться в равновесии, если момент M есть случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[3, 4]$ Нм.

Решение

1. Задаем направление возможного движения при достижении условия предельного равновесия. Пусть за счет достаточно большой, по сравнению с моментом M , силы F произойдет движение системы влево. Тогда момент трения качения, приложенный к цилиндру 2, стремится повернуть его по часовой стрелке (рис. 2.3). Момент трения находим по формуле $M_{\text{тр}} = N_2 \cdot \delta$.

2. Решаем задачу о равновесии системы двух цилиндров и стержня. Разбиваем систему на три тела (рис. 2.2, 2.3, 2.4). Внешние связи заменяем реакциями $F_{\text{сц1}}$, N_1 , $F_{\text{сц2}}$, N_2 .

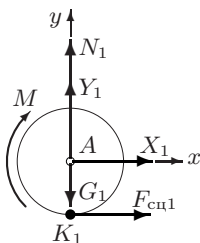


Рис. 2.2

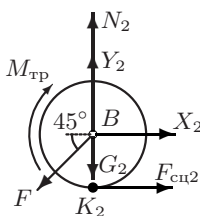


Рис. 2.3

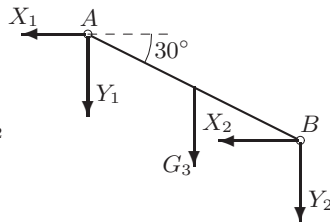


Рис. 2.4

Реакции $F_{\text{сц1}}$ и $F_{\text{сц2}}$ приложены к цилиндрам в точках их касания поверхностей, вызваны силами сцепления (трения) и обеспечивают вращения цилиндров. Реакции внутренних связей — X_1 , Y_1 , X_2 , Y_2 .

При составлении системы семи уравнений с неизвестными X_1 , Y_1 , N_1 , X_2 , Y_2 , N_2 , M избегаем уравнения, в которые входят неизвестные реакции $F_{\text{цн1}}$ и $F_{\text{цн2}}$.

Составляем уравнения равновесия для цилиндра 1 (рис. 2.2):

$$\begin{aligned}\sum Y_i^{(\text{цн1})} &= Y_1 + N_1 - G_1 = 0, \\ \sum M_{K_1}^{(\text{цн1})} &= -X_1 \cdot R - M = 0.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Уравнения равновесия цилиндра 2 (рис. 2.3) имеют вид

$$\begin{aligned}\sum Y_i^{(\text{цн2})} &= Y_2 + N_2 - G_2 - F \sin 45^\circ = 0, \\ \sum M_{K_2}^{(\text{цн2})} &= -X_2 \cdot R - M_{\text{тр}} + F \cos 45^\circ R = 0.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Уравнения равновесия стержня AB (рис. 2.4) имеют вид

$$\begin{aligned}\sum X_i^{(\text{стерж})} &= -X_1 - X_2 = 0, \\ \sum Y_i^{(\text{стерж})} &= -Y_1 - Y_2 - G_3 = 0, \\ \sum M_A^{(\text{стерж})} &= -X_2 \cdot AB \sin 30^\circ - Y_2 \cdot AB \cos 30^\circ - \\ &\quad - G_3(AB/2) \cos 30^\circ = 0.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Из решения системы уравнений (2.1)–(2.3) определяем

$$M = \frac{\sqrt{3}R}{2} \frac{FR\sqrt{2} - \delta(G_3 + 2G_2 + F\sqrt{2})}{R\sqrt{3} + \delta}.\tag{2.4}$$

Радиус и коэффициент трения качения переводим в метры

$$R = 0.5 \text{ м}, \quad \delta = 0.002 \text{ м}.$$

Получаем $M^* = 3.414 \text{ Нм}$. Вычисляем нормальные реакции опор:

$$N_1 = 36.058 \text{ Н}, \quad N_2 = 61.013 \text{ Н}.$$

Убеждаемся, что $N_1 > 0$ и $N_2 > 0$, что соответствует наличию опоры. Если реакция опоры равна нулю, то это означает отрыв тела от поверхности, отрицательной реакции опоры $N < 0$ в задаче с односторонней связью не существует (физически не реализуется).

3. Меняем направление возможного движения системы. Пусть за счет действия момента M произойдет движение системы

вправо. Момент трения качения направим против часовой стрелки (рис. 2.5). Составляя уравнения равновесия для новой системы сил, заметим,

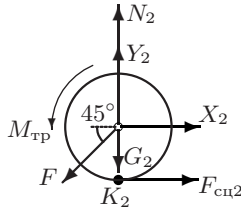


Рис. 2.5

возможного движения, записываем ответ, изменяя знаки у δ в (2.4):

$$M^{**} = \frac{\sqrt{3}R}{2} \frac{FR\sqrt{2} + \delta(G_3 + 2G_2 + F\sqrt{2})}{R\sqrt{3} - \delta} = 3.658 \text{ Нм.} \quad (2.5)$$

Точно так же находим нормальные реакции опор: $N_1 = 35.776 \text{ Н}$, $N_2 = 61.295 \text{ Н}$. При равновесии системы момент, приложенный к цилиндру 1, изменяется в пределах (в Нм).¹

$$3.414 \leq M \leq 3.658.$$

Таким образом, вероятность нахождения системы в равновесии равна

$$p = (3.658 - 3.414)/(4 - 3) = 0.244,$$

или 24.4%.

¹В задачах, где допускается проскальзывание, необходимо находить также силы $F_{сц1}$ и $F_{сц2}$ и проверять условие проскальзывания $F_{сц1} = F_{тр1} < fN_1$, $F_{сц2} = F_{тр2} < fN_2$, где f – коэффициент трения скольжения.

Глава 3

Кинематика

3.1. Кинематика плоского механизма

Многозвенный механизм приводится в движение кривошипом OA , вращающимся с известной угловой скоростью и случайным угловым ускорением с известным рядом распределения $p = [0.2, 0.3, 0.4, 0.1]$. Найти математическое ожидание угловых ускорений звеньев. Длины звеньев даны в см, угловые скорости – в рад/с, угловые ускорения – в рад/с². Стержни, положение которых не определено углом, вертикальны или горизонтальны.

Задача 5.1

$\varepsilon_{OA} = [2, 2.2, 2.6, 3.1]$,
 $\omega_{OA} = 1$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $OA = 24$,
 $AB = 57$, $BC = 25$, $BD = 25$, $DE = 28$.

Задача 5.2

$\varepsilon_{OA} = [2, 2.2, 2.6, 3.1]$,
 $\omega_{OA} = 4$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $OA = 14$,
 $AB = 11$, $BC = 33$, $BD = 49$, $DE = 23$.

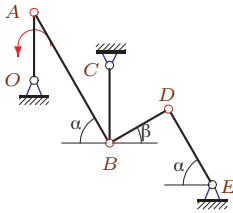
Задача 5.3

$\varepsilon_{OA} = [3, 3.3, 3.6, 4.1]$,
 $\omega_{OA} = 4$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $OA = 26$,
 $AB = 61$, $BC = 30$, $BD = 28$, $DE = 32$.

Задача 5.4

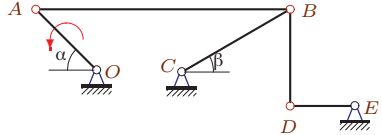
$\varepsilon_{OA} = [1, 1.2, 1.6, 2]$,
 $\omega_{OA} = 2$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $OA = 22$,
 $AB = 67$, $BC = 32$, $BD = 26$, $DE = 14$.

Задача 5.5



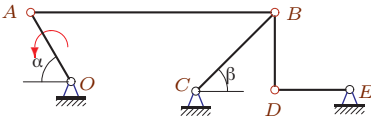
$\varepsilon_{OA} = [4, 4.3, 4.6, 5.1]$,
 $\omega_{OA} = 4$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $OA = 28$,
 $AB = 62$, $BC = 32$, $BD = 28$, $DE = 36$.

Задача 5.6



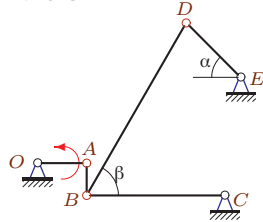
$\varepsilon_{OA} = [2, 2.2, 2.5, 2.9]$,
 $\omega_{OA} = 3$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $OA = 24$,
 $AB = 71$, $BC = 35$, $BD = 27$, $DE = 18$.

Задача 5.7



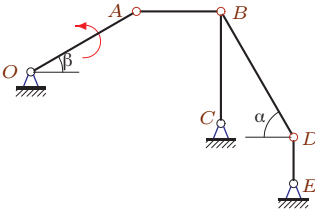
$\varepsilon_{OA} = [4, 4.3, 4.6, 5]$,
 $\omega_{OA} = 3$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $OA = 28$,
 $AB = 85$, $BC = 39$, $BD = 27$, $DE = 26$.

Задача 5.8



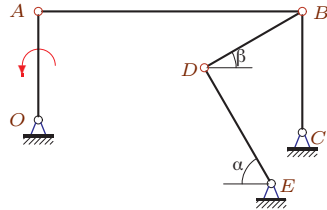
$\varepsilon_{OA} = [1, 1.2, 1.6, 2]$,
 $\omega_{OA} = 4$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $OA = 12$,
 $AB = 8$, $BC = 34$, $BD = 49$, $DE = 19$.

Задача 5.9

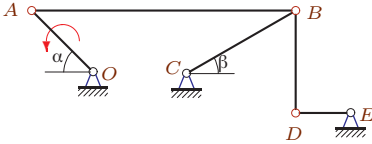


$\varepsilon_{OA} = [3, 3.2, 3.5, 3.9]$,
 $\omega_{OA} = 2$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $OA = 26$,
 $AB = 18$, $BC = 24$, $BD = 31$, $DE = 10$.

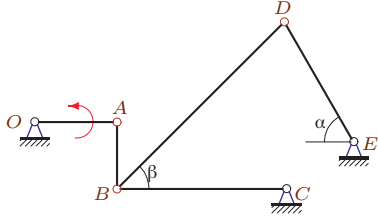
Задача 5.10



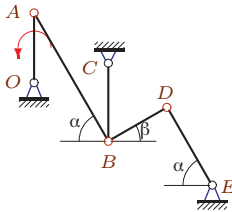
$\varepsilon_{OA} = [3, 3.3, 3.7, 4.2]$,
 $\omega_{OA} = 3$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $OA = 26$,
 $AB = 63$, $BC = 29$, $BD = 27$, $DE = 32$.

Задача 5.11

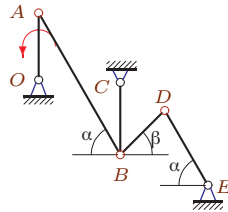
$\varepsilon_{OA} = [1, 1.3, 1.6, 2.1]$,
 $\omega_{OA} = 2$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $OA = 22$,
 $AB = 67$, $BC = 32$, $BD = 26$, $DE = 14$.

Задача 5.12

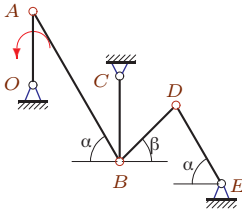
$\varepsilon_{OA} = [3, 3.3, 3.7, 4.2]$,
 $\omega_{OA} = 1$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $OA = 16$,
 $AB = 13$, $BC = 33$, $BD = 46$, $DE = 27$.

Задача 5.13

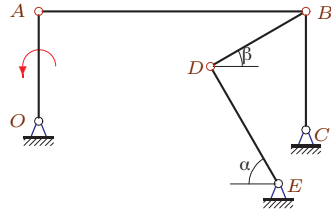
$\varepsilon_{OA} = [4, 4.2, 4.5, 4.9]$,
 $\omega_{OA} = 3$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $OA = 28$,
 $AB = 59$, $BC = 31$, $BD = 27$, $DE = 36$.

Задача 5.14

$\varepsilon_{OA} = [4, 4.2, 4.6, 5]$,
 $\omega_{OA} = 2$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $OA = 28$,
 $AB = 68$, $BC = 30$, $BD = 26$, $DE = 36$.

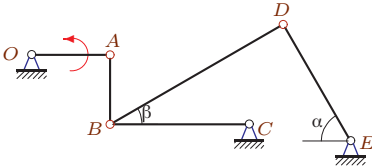
Задача 5.15

$\varepsilon_{OA} = [3, 3.2, 3.6, 4.1]$,
 $\omega_{OA} = 4$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $OA = 26$,
 $AB = 61$, $BC = 30$, $BD = 28$, $DE = 32$.

Задача 5.16

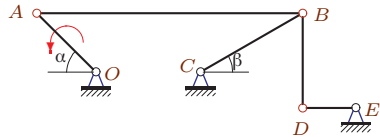
$\varepsilon_{OA} = [3, 3.3, 3.7, 4.2]$,
 $\omega_{OA} = 2$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $OA = 26$,
 $AB = 63$, $BC = 28$, $BD = 26$, $DE = 32$.

Задача 5.17



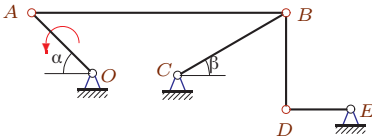
$\varepsilon_{OA} = [4, 4.2, 4.6, 5]$,
 $\omega_{OA} = 1$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $OA = 18$,
 $AB = 16$, $BC = 32$, $BD = 46$, $DE = 31$.

Задача 5.18



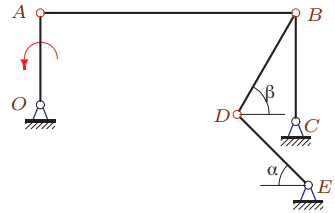
$\varepsilon_{OA} = [1, 1.2, 1.6, 2.1]$,
 $\omega_{OA} = 1$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $OA = 22$,
 $AB = 70$, $BC = 31$, $BD = 25$, $DE = 14$.

Задача 5.19



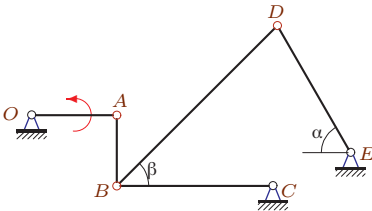
$\varepsilon_{OA} = [2, 2.3, 2.7, 3.2]$,
 $\omega_{OA} = 3$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $OA = 24$,
 $AB = 71$, $BC = 35$, $BD = 27$, $DE = 18$.

Задача 5.20



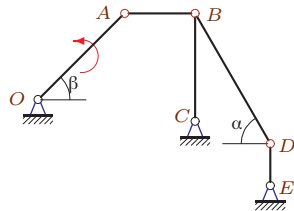
$\varepsilon_{OA} = [1, 1.2, 1.6, 2]$,
 $\omega_{OA} = 4$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $OA = 22$,
 $AB = 61$, $BC = 26$, $BD = 28$, $DE = 24$.

Задача 5.21

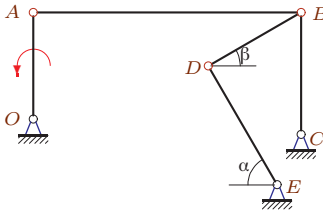


$\varepsilon_{OA} = [4, 4.3, 4.7, 5.1]$,
 $\omega_{OA} = 3$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $OA = 18$,
 $AB = 15$, $BC = 33$, $BD = 48$, $DE = 31$.

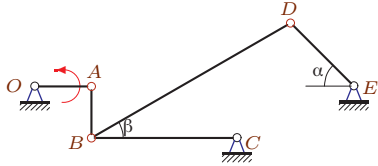
Задача 5.22



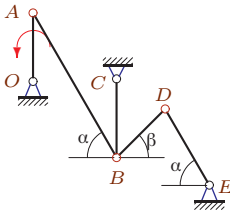
$\varepsilon_{OA} = [3, 3.3, 3.7, 4.2]$,
 $\omega_{OA} = 3$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $OA = 26$,
 $AB = 15$, $BC = 23$, $BD = 32$, $DE = 9$.

Задача 5.23

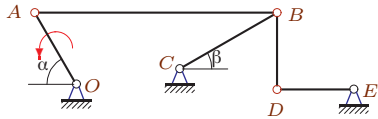
$\varepsilon_{OA} = [4, 4.2, 4.6, 5.1]$,
 $\omega_{OA} = 4$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $OA = 28$,
 $AB = 70$, $BC = 32$, $BD = 28$, $DE = 36$.

Задача 5.24

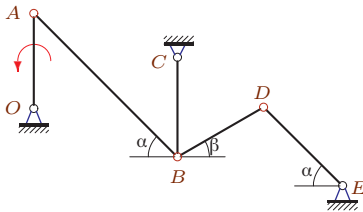
$\varepsilon_{OA} = [1, 1.3, 1.7, 2.2]$,
 $\omega_{OA} = 4$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $OA = 12$,
 $AB = 11$, $BC = 31$, $BD = 49$, $DE = 19$.

Задача 5.25

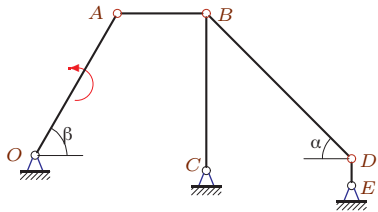
$\varepsilon_{OA} = [4, 4.2, 4.5, 4.9]$,
 $\omega_{OA} = 4$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $OA = 28$,
 $AB = 68$, $BC = 32$, $BD = 28$, $DE = 36$.

Задача 5.26

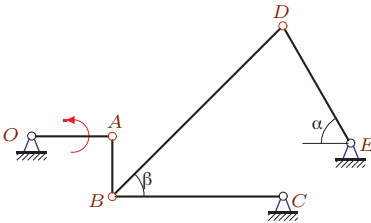
$\varepsilon_{OA} = [4, 4.2, 4.5, 5]$,
 $\omega_{OA} = 2$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $OA = 28$,
 $AB = 82$, $BC = 38$, $BD = 26$, $DE = 26$.

Задача 5.27

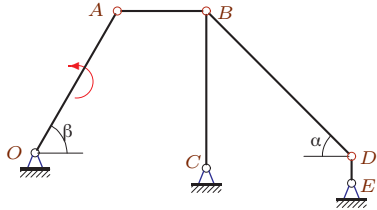
$\varepsilon_{OA} = [2, 2.2, 2.5, 3]$,
 $\omega_{OA} = 1$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $OA = 24$,
 $AB = 51$, $BC = 25$, $BD = 25$, $DE = 28$.

Задача 5.28

$\varepsilon_{OA} = [2, 2.3, 2.7, 3.2]$,
 $\omega_{OA} = 1$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $OA = 24$,
 $AB = 13$, $BC = 23$, $BD = 30$, $DE = 4$.

Задача 5.29

$\varepsilon_{OA} = [3, 3.2, 3.6, 4]$,
 $\omega_{OA} = 3$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $OA = 16$,
 $AB = 12$, $BC = 34$, $BD = 48$, $DE = 27$.

Задача 5.30

$\varepsilon_{OA} = [2, 2.3, 2.7, 3.2]$,
 $\omega_{OA} = 1$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $OA = 24$,
 $AB = 13$, $BC = 23$, $BD = 30$, $DE = 4$.

3.2. Угловые ускорения звеньев механизма. Пример решения

Задан шарнирно-стержневой механизм из четырех стержней (рис. 3.2). В указанном положении механизма известны угловые скорости двух звеньев $\omega_{OAz} = 2 \text{ с}^{-1}$, $\omega_{CDz} = -4 \text{ с}^{-1}$ и их угловые ускорения

$$\varepsilon_{OAz} = \varepsilon_{CDz} = 4 \text{ с}^{-2}.$$

Длины звеньев:

$$OA = 3 \text{ см}, AB = 2\sqrt{2} \text{ см}, BC = 1 \text{ см}, CD = 2 \text{ см}.$$

Звенья OA , BC — вертикальные, звено CD — горизонтальное (рис. 3.1). Найти угловые ускорения звеньев механизма.

Решение

Вводим систему координат с началом в точке A (рис. 3.1). Нумеруем шарниры, номера обозначаем индексом у соответствующих букв. Последовательно нумеруем стержни: OA — **1**, AB — **2**, BC — **3**, CD — **4**. Вычисляем координаты шарниров: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 2$, $x_5 = 4$, $y_1 = 3$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$, $y_4 = y_5 = 1$.

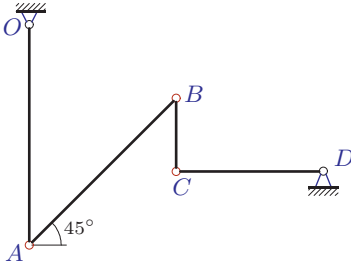


Рис. 3.1

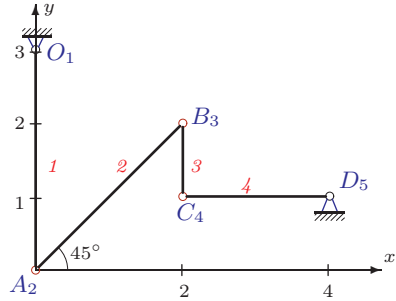


Рис. 3.2

Составляем уравнения угловых скоростей, проходя по всем звеньям от шарнира 1 до шарнира 5,

$$\sum_{k=1}^4 \omega_{kz}(x_k - x_{k+1}) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^4 \omega_{kz}(y_k - y_{k+1}) = 0.$$

Подставим исходные данные:

$$8 - 2\omega_{2z} = 0,$$

$$6 - 2\omega_{2z} + \omega_{3z} = 0.$$

Решаем систему уравнений: $\omega_2 = 4 \text{ с}^{-1}$, $\omega_3 = 2 \text{ с}^{-1}$. Составляем уравнения угловых ускорений по тому же маршруту $O_1 - D_5$

$$\sum_{k=1}^4 \epsilon_{kz}(x_k - x_{k+1}) - \omega_k^2(y_k - y_{k+1}) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^4 \epsilon_{kz}(y_k - y_{k+1}) + \omega_k^2(x_k - x_{k+1}) = 0.$$

Подставим исходные данные и найденные угловые скорости:

$$8 - 2\epsilon_{2z} = 0,$$

$$-52 - 2\epsilon_{2z} + \epsilon_{3z} = 0.$$

Решаем систему уравнений: $\epsilon_{2z} = 4 \text{ с}^{-2}$, $\epsilon_{3z} = 60 \text{ с}^{-2}$. Полученные значения угловых ускорений позволяют найти по формуле Ривальса ускорения точек механизма.

Ответы.

Кинематика плоского механизма

						Математическое ожидание				
	ω_{OA}	ω_{AB}	ω_{BC}	ω_{BD}	ω_{DE}	ε_{OA}	ε_{AB}	ε_{BC}	ε_{BD}	ε_{DE}
1	1.0	0.000	-0.960	-0.703	0.444	2.41	1.167	-0.432	-1.087	-0.134
2	4.0	0.000	-1.697	-0.837	-2.183	2.41	29.003	-1.022	-1.212	-3.187
3	4.0	0.000	-3.467	-1.923	2.379	3.44	25.460	41.852	5.960	-35.139
4	2.0	1.269	1.945	1.197	-3.849	1.40	-0.616	-2.337	10.570	6.289
5	4.0	0.000	-3.500	-2.000	2.694	4.44	27.097	41.581	2.303	-34.343
6	3.0	1.959	2.909	1.886	-4.899	2.35	-1.737	-5.537	21.913	12.220
7	3.0	1.350	2.638	2.694	-2.798	4.43	0.386	-2.015	12.587	1.980
8	4.0	0.000	-1.412	-0.717	-2.265	1.40	32.471	-0.494	-1.160	-2.641
9	2.0	-2.502	1.083	0.000	2.600	3.35	-2.867	10.262	-2.544	31.458
10	3.0	0.000	2.690	1.444	2.111	3.49	0.384	3.129	0.233	3.973
11	2.0	1.269	1.945	1.197	-3.849	1.44	-0.591	-2.298	10.594	6.212
12	1.0	0.000	-0.485	-0.312	-0.434	3.49	1.828	-1.692	-1.089	-1.603
13	3.0	0.000	-2.710	-1.556	2.021	4.35	16.258	22.868	0.383	-18.400
14	2.0	0.000	-1.867	-1.115	1.139	4.40	6.369	8.395	-0.116	-6.665
15	4.0	0.000	-3.467	-1.923	2.379	3.41	25.460	41.878	5.975	-35.157
16	2.0	0.000	1.857	1.000	1.407	3.49	0.118	3.241	0.966	3.152
17	1.0	0.000	-0.563	-0.339	-0.290	4.40	1.758	-2.475	-1.438	-1.390
18	1.0	0.607	1.004	0.622	-1.925	1.41	0.440	0.332	3.362	-0.212
19	3.0	1.959	2.909	1.886	-4.899	2.49	-1.646	-5.402	22.001	11.991
20	4.0	0.000	3.385	2.301	1.898	1.40	0.888	1.185	-2.367	4.432
21	3.0	0.000	-1.636	-1.009	-1.275	4.48	16.691	-2.444	-1.368	-2.796
22	3.0	-3.677	2.398	0.000	6.128	3.49	-2.064	18.801	-12.859	87.642
23	4.0	0.000	3.500	2.000	2.694	4.41	0.800	3.859	-0.586	5.304
24	4.0	0.000	-1.548	-0.717	-1.308	1.49	24.211	-0.577	0.019	-2.163
25	4.0	0.000	-3.500	-2.071	2.277	4.35	24.706	41.660	6.338	-33.018
26	2.0	1.366	2.552	1.865	-3.231	4.36	0.170	-0.616	18.234	2.062
27	1.0	0.000	-0.960	-0.703	0.768	2.36	1.304	-0.384	-1.773	0.496
28	1.0	-0.923	0.904	-0.000	5.196	2.49	-2.144	3.254	-4.206	41.012
29	3.0	0.000	-1.412	-0.897	-1.301	3.40	17.647	-1.600	-1.056	-2.287
30	1.0	-0.923	0.904	-0.000	5.196	2.49	-2.144	3.254	-4.206	41.012

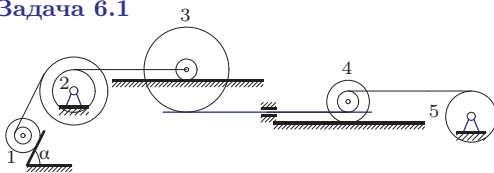
Глава 4

Динамика

4.1. Теорема об изменении кинетической энергии

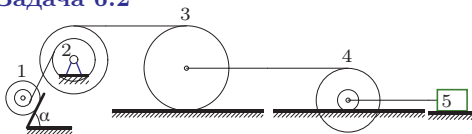
Механическая система, состоящая из пяти тел 1, 2, 3, 4 и 5, движется под действием внешних сил. Заданы радиусы цилиндров и блоков. Радиусы инерции ρ даны для блоков, цилиндры считать однородными. Горизонтальный стержень, находящийся в зацеплении с блоками, считать невесомым. Массы даны в килограммах, радиусы – в сантиметрах. Найти математическое ожидание скорости груза 1 или центра цилиндра (блока) 1, который опустится по вертикали вниз на случайную величину S с рядом распределения $p = [0.1, 0.4, 0.3, 0.2]$. Приблизительно принять $g = 9.81 \text{ м/с}^2$.

Задача 6.1

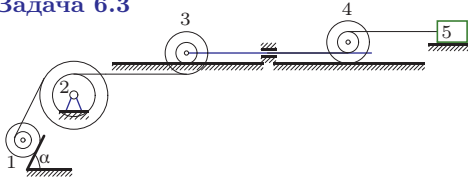


$R_1 = 2, r_1 = 1, \rho_1 = 1, R_2 = 3, r_2 = 2, \rho_2 = 3, R_3 = 4, r_3 = 1, \rho_3 = 3,$
 $R_4 = 2, r_4 = 1, \rho_4 = 1, m_1 = 4, m_2 = 4, m_3 = 4, m_4 = 3, m_5 = 4.$
 $S = [5.2, 5.4, 5.6, 5.8] \text{ м}.$

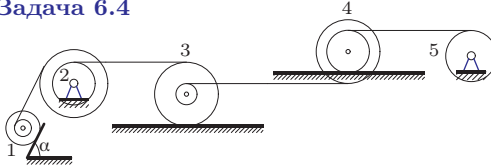
Задача 6.2



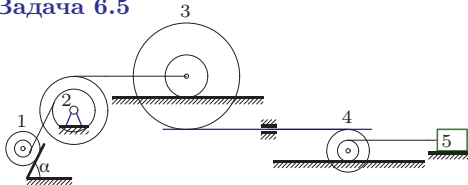
$R_1 = 2, r_1 = 1, \rho_1 = 2, R_2 = 4, r_2 = 2, \rho_2 = 2, R_3 = 4, R_4 = 3, r_4 = 1,$
 $\rho_4 = 2, m_1 = 4, m_2 = 32, m_3 = 32, m_4 = 192, m_5 = 128.$
 $S = [7.3, 7.5, 7.7, 7.8] \text{ м}.$

Задача 6.3

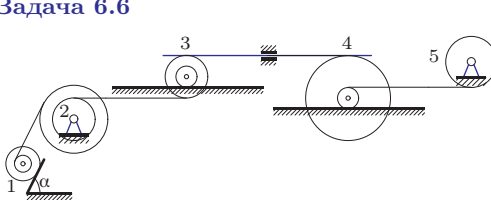
$R_1 = 2, r_1 = 1, \rho_1 = 2, R_2 = 3, r_2 = 2, \rho_2 = 3, R_3 = 2, r_3 = 1, \rho_3 = 1,$
 $R_4 = 2, r_4 = 1, \rho_4 = 1, m_1 = 4, m_2 = 24, m_3 = 4, m_4 = 3, m_5 = 2.$
 $S = [5.2, 5.5, 5.7, 5.9] \text{ М.}$

Задача 6.4

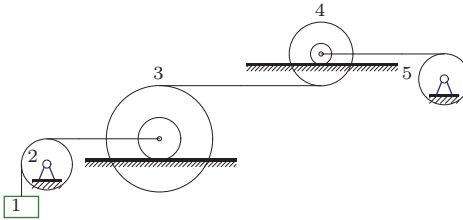
$R_1 = 2, r_1 = 1, \rho_1 = 1, R_2 = 3, r_2 = 2, \rho_2 = 2, R_3 = 3, r_3 = 1, \rho_3 = 2,$
 $R_4 = 3, r_4 = 2, \rho_4 = 2, m_1 = 4, m_2 = 4, m_3 = 144, m_4 = 27, m_5 = 36.$
 $S = [10.2, 10.4, 10.6, 10.8] \text{ М.}$

Задача 6.5

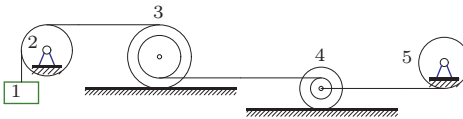
$R_1 = 2, r_1 = 1, \rho_1 = 1, R_2 = 4, r_2 = 2, \rho_2 = 2, R_3 = 5, r_3 = 2, \rho_3 = 4,$
 $R_4 = 2, r_4 = 1, \rho_4 = 1, m_1 = 4, m_2 = 96, m_3 = 4, m_4 = 6, m_5 = 2.$
 $S = [6.3, 6.5, 6.7, 6.9] \text{ М.}$

Задача 6.6

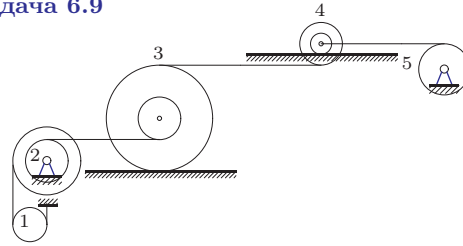
$R_1 = 2, r_1 = 1, \rho_1 = 2, R_2 = 3, r_2 = 2, \rho_2 = 2, R_3 = 2, r_3 = 1, \rho_3 = 1,$
 $R_4 = 4, r_4 = 1, \rho_4 = 3, m_1 = 4, m_2 = 12, m_3 = 4, m_4 = 15, m_5 = 100.$
 $S = [6.2, 6.4, 6.6, 6.9] \text{ М.}$

Задача 6.7

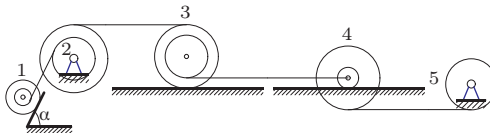
$R_3 = 5, r_3 = 2, \rho_3 = 4, R_4 = 3, r_4 = 1, \rho_4 = 2, m_1 = 20, m_2 = 4, m_3 = 7, m_4 = 16, m_5 = 160. S = [9.2, 9.4, 9.7, 9.8] \text{ М.}$

Задача 6.8

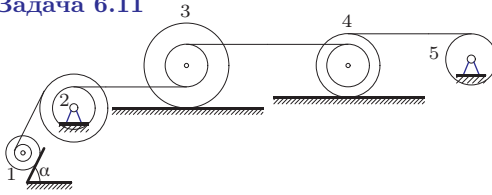
$R_3 = 3, r_3 = 2, \rho_3 = 2, R_4 = 2, r_4 = 1, \rho_4 = 1, m_1 = 7, m_2 = 2, m_3 = 144, m_4 = 324, m_5 = 162. S = [4.3, 4.4, 4.6, 4.9] \text{ М.}$

Задача 6.9

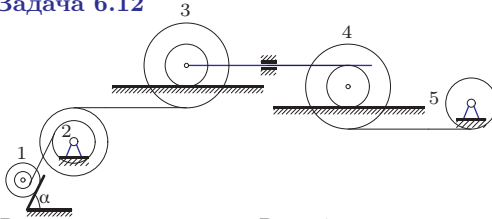
$R_2 = 4, r_2 = 2, \rho_2 = 2, R_3 = 5, r_3 = 2, \rho_3 = 4, R_4 = 2, r_4 = 1, \rho_4 = 1, m_1 = 2, m_2 = 4, m_3 = 36, m_4 = 9, m_5 = 36. S = [9.2, 9.5, 9.6, 9.9] \text{ М.}$

Задача 6.10

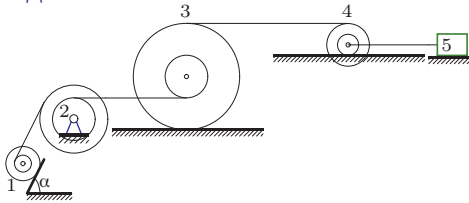
$R_1 = 2, r_1 = 1, \rho_1 = 2, R_2 = 4, r_2 = 2, \rho_2 = 2, R_3 = 3, r_3 = 2, \rho_3 = 2, R_4 = 3, r_4 = 1, \rho_4 = 2, m_1 = 16, m_2 = 80, m_3 = 252, m_4 = 216, m_5 = 90. S = [9.2, 9.4, 9.7, 9.8] \text{ М.}$

Задача 6.11

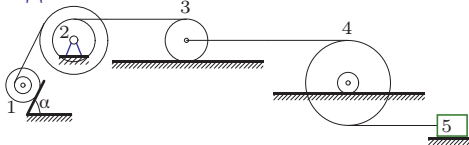
$R_1 = 2, r_1 = 1, \rho_1 = 1, R_2 = 3, r_2 = 2, \rho_2 = 3, R_3 = 4, r_3 = 2, \rho_3 = 3,$
 $R_4 = 3, r_4 = 2, \rho_4 = 2, m_1 = 4, m_2 = 24, m_3 = 16, m_4 = 75, m_5 = 50.$
 $S = [1.3, 1.4, 1.6, 1.9] \text{ М.}$

Задача 6.12

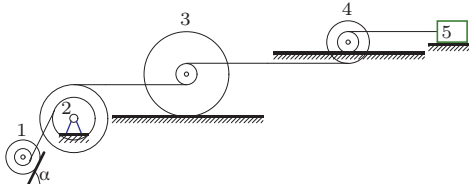
$R_1 = 2, r_1 = 1, \rho_1 = 1, R_2 = 4, r_2 = 2, \rho_2 = 2, R_3 = 4, r_3 = 2, \rho_3 = 3,$
 $R_4 = 4, r_4 = 2, \rho_4 = 3, m_1 = 8, m_2 = 80, m_3 = 20, m_4 = 64, m_5 = 24.$
 $S = [10.2, 10.5, 10.6, 10.8] \text{ М.}$

Задача 6.13

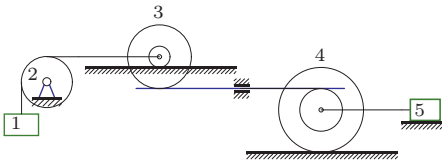
$R_1 = 2, r_1 = 1, \rho_1 = 1, R_2 = 3, r_2 = 2, \rho_2 = 2, R_3 = 5, r_3 = 2, \rho_3 = 4,$
 $R_4 = 2, r_4 = 1, \rho_4 = 1, m_1 = 4, m_2 = 4, m_3 = 36, m_4 = 81, m_5 = 162.$
 $S = [7.3, 7.5, 7.7, 7.9] \text{ М.}$

Задача 6.14

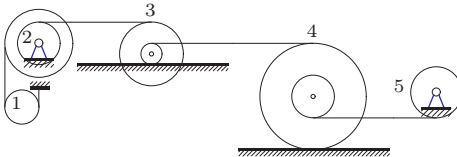
$R_1 = 2, r_1 = 1, \rho_1 = 2, R_2 = 3, r_2 = 2, \rho_2 = 2, R_3 = 2, R_4 = 4, r_4 = 1,$
 $\rho_4 = 3, m_1 = 4, m_2 = 12, m_3 = 32, m_4 = 30, m_5 = 100.$
 $S = [8.2, 8.5, 8.7, 8.9] \text{ М.}$

Задача 6.15

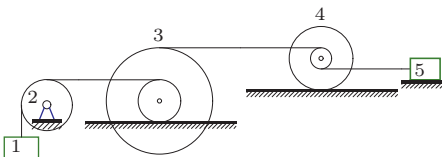
$R_1 = 2, r_1 = 1, \rho_1 = 1, R_2 = 4, r_2 = 2, \rho_2 = 2, R_3 = 4, r_3 = 1, \rho_3 = 3,$
 $R_4 = 2, r_4 = 1, \rho_4 = 1, m_1 = 4, m_2 = 16, m_3 = 36, m_4 = 27, m_5 = 18.$
 $S = [10.2, 10.5, 10.7, 10.8] \text{ М.}$

Задача 6.16

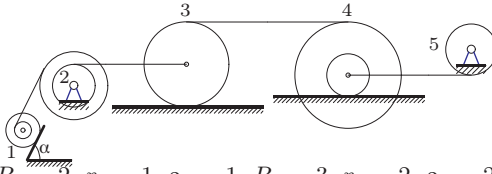
$R_3 = 3, r_3 = 1, \rho_3 = 2, R_4 = 4, r_4 = 2, \rho_4 = 3, m_1 = 14, m_2 = 4,$
 $m_3 = 4, m_4 = 27, m_5 = 18. S = [4.3, 4.4, 4.7, 4.9] \text{ М.}$

Задача 6.17

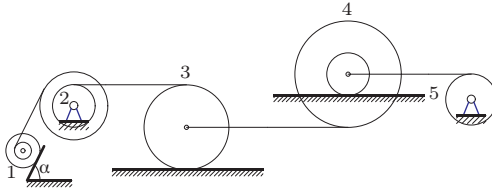
$R_2 = 4, r_2 = 2, \rho_2 = 3, R_3 = 3, r_3 = 1, \rho_3 = 2, R_4 = 5, r_4 = 2, \rho_4 = 4,$
 $m_1 = 2, m_2 = 12, m_3 = 64, m_4 = 400, m_5 = 800.$
 $S = [2.2, 2.4, 2.6, 2.8] \text{ М.}$

Задача 6.18

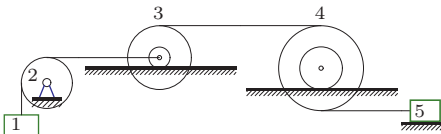
$R_3 = 5, r_3 = 2, \rho_3 = 4, R_4 = 3, r_4 = 1, \rho_4 = 2, m_1 = 12, m_2 = 10,$
 $m_3 = 16, m_4 = 256, m_5 = 128.$
 $S = [5.3, 5.5, 5.7, 5.8] \text{ М.}$

Задача 6.19

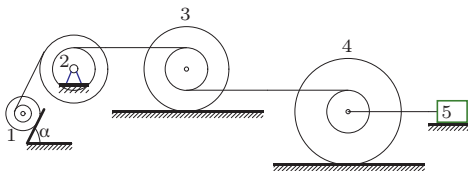
$R_1 = 2, r_1 = 1, \rho_1 = 1, R_2 = 3, r_2 = 2, \rho_2 = 2, R_3 = 4, R_4 = 5, r_4 = 2,$
 $\rho_4 = 4, m_1 = 4, m_2 = 12, m_3 = 8, m_4 = 147, m_5 = 196.$
 $S = [7.2, 7.4, 7.6, 7.9] \text{ М.}$

Задача 6.20

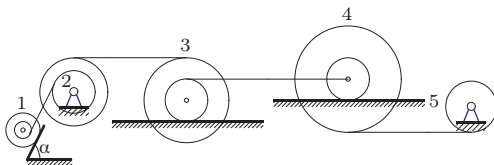
$R_1 = 2, r_1 = 1, \rho_1 = 1, R_2 = 3, r_2 = 2, \rho_2 = 2, R_3 = 4, R_4 = 5, r_4 = 2,$
 $\rho_4 = 4, m_1 = 4, m_2 = 12, m_3 = 32, m_4 = 27, m_5 = 36.$
 $S = [9.3, 9.4, 9.6, 9.8] \text{ М.}$

Задача 6.21

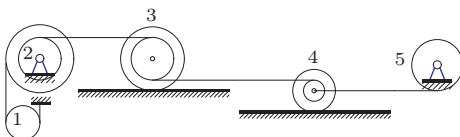
$R_3 = 3, r_3 = 1, \rho_3 = 2, R_4 = 4, r_4 = 2, \rho_4 = 3, m_1 = 16, m_2 = 4,$
 $m_3 = 4, m_4 = 27, m_5 = 18. S = [8.2, 8.5, 8.7, 8.8] \text{ М.}$

Задача 6.22

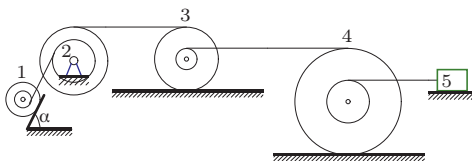
$R_1 = 2, r_1 = 1, \rho_1 = 1, R_2 = 3, r_2 = 2, \rho_2 = 3, R_3 = 4, r_3 = 2,$
 $\rho_3 = 3, R_4 = 5, r_4 = 2, \rho_4 = 4, m_1 = 4, m_2 = 12, m_3 = 144, m_4 = 441,$
 $m_5 = 441.$
 $S = [4.3, 4.5, 4.7, 4.8] \text{ М.}$

Задача 6.23

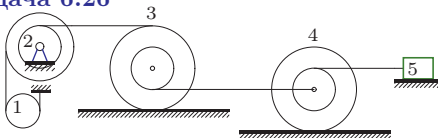
$R_1 = 2, r_1 = 1, \rho_1 = 1, R_2 = 4, r_2 = 2, \rho_2 = 2, R_3 = 4, r_3 = 2, \rho_3 = 3,$
 $R_4 = 5, r_4 = 2, \rho_4 = 4, m_1 = 4, m_2 = 64, m_3 = 144, m_4 = 27, m_5 = 4.$
 $S = [9.3, 9.4, 9.6, 9.9] \text{ М.}$

Задача 6.24

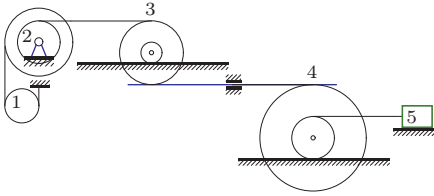
$R_2 = 4, r_2 = 2, \rho_2 = 3, R_3 = 3, r_3 = 2, \rho_3 = 2, R_4 = 2, r_4 = 1, \rho_4 = 1,$
 $m_1 = 2, m_2 = 24, m_3 = 100, m_4 = 135, m_5 = 450.$
 $S = [4.3, 4.4, 4.6, 4.9] \text{ М.}$

Задача 6.25

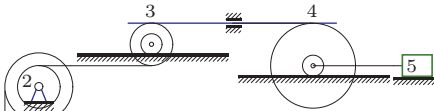
$R_1 = 2, r_1 = 1, \rho_1 = 1, R_2 = 4, r_2 = 2, \rho_2 = 3, R_3 = 3, r_3 = 1,$
 $\rho_3 = 2, R_4 = 5, r_4 = 2, \rho_4 = 4, m_1 = 4, m_2 = 64, m_3 = 144, m_4 = 225,$
 $m_5 = 225.$
 $S = [1.2, 1.5, 1.7, 1.8] \text{ М.}$

Задача 6.26

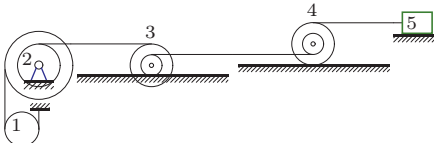
$R_2 = 4, r_2 = 2, \rho_2 = 3, R_3 = 4, r_3 = 2, \rho_3 = 3, R_4 = 4, r_4 = 2, \rho_4 = 3,$
 $m_1 = 2, m_2 = 8, m_3 = 256, m_4 = 256, m_5 = 128.$
 $S = [4.3, 4.5, 4.7, 4.8] \text{ М.}$

Задача 6.27

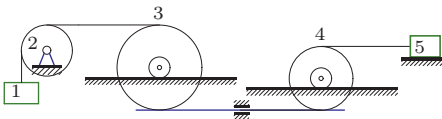
$R_2 = 4, r_2 = 2, \rho_2 = 2, R_3 = 3, r_3 = 1, \rho_3 = 2, R_4 = 5, r_4 = 2, \rho_4 = 4,$
 $m_1 = 2, m_2 = 16, m_3 = 64, m_4 = 147, m_5 = 98.$
 $S = [6.2, 6.5, 6.7, 6.8] \text{ М.}$

Задача 6.28

$R_2 = 4, r_2 = 2, \rho_2 = 2, R_3 = 2, r_3 = 1, \rho_3 = 1, R_4 = 4, r_4 = 1, \rho_4 = 3,$
 $m_1 = 2, m_2 = 12, m_3 = 4, m_4 = 15, m_5 = 50.$
 $S = [7.3, 7.5, 7.6, 7.9] \text{ М.}$

Задача 6.29

$R_2 = 4, r_2 = 2, \rho_2 = 3, R_3 = 2, r_3 = 1, \rho_3 = 1, R_4 = 2, r_4 = 1, \rho_4 = 1,$
 $m_1 = 2, m_2 = 24, m_3 = 36, m_4 = 27, m_5 = 18.$
 $S = [2.2, 2.5, 2.7, 2.9] \text{ М.}$

Задача 6.30

$R_3 = 4, r_3 = 1, \rho_3 = 3, R_4 = 3, r_4 = 1, \rho_4 = 2, m_1 = 19, m_2 = 4,$
 $m_3 = 30, m_4 = 100, m_5 = 100.$
 $S = [8.3, 8.5, 8.6, 8.8] \text{ М.}$

Ответы.**Теорема об изменении кинетической энергии**

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	$\sum \mu_k$	$M(v)$
1	5	9	40	135	162	351	1.111
2	8	8	12	15	2	45	3.640
3	8	54	8	15	18	103	2.067
4	5	4	52	96	128	285	1.702
5	5	24	20	3	2	54	3.101
6	8	12	8	54	72	154	1.825
7	20	2	35	245	245	547	2.617
8	7	1	52	5	1	66	3.076
9	3	4	164	200	200	571	0.811
10	32	20	91	30	5	178	4.104
11	5	54	100	351	324	834	0.381
12	10	20	65	52	3	150	3.324
13	5	4	164	200	200	573	1.022
14	8	12	12	3	9	44	3.919
15	5	4	100	150	200	459	1.346
16	14	2	20	75	32	143	2.965
17	3	27	20	41	9	100	0.994
18	12	5	20	637	98	772	1.307
19	5	12	12	240	32	301	1.402
20	5	12	12	15	2	46	4.032
21	16	2	20	156	32	226	3.454
22	5	27	100	41	25	198	1.350
23	5	16	52	60	2	135	2.356
24	3	54	52	3	4	116	1.240
25	5	36	52	41	49	183	0.824
26	3	18	100	25	18	164	1.049
27	3	16	20	15	8	62	2.042
28	3	12	8	54	18	95	1.770
29	3	54	8	60	128	253	0.636
30	19	2	12	45	144	222	3.793

4.2. Кинетическая энергия системы. Пример

Задача решается с использованием теоремы об изменении кинетической энергии

$$T_2 - T_1 = A_i, \quad i = 1 \dots 5.$$

По условию задачи $T_1 = 0$, $A_i = m_1 g S_i$, S_i , $i = 1 \dots 4$, – случайная величина. Кинетическую энергию T_2 удобно выразить через суммарную приведенную массу

$$T_2 = \mu v^2 / 2,$$

где

$$\mu = \sum_{k=1}^5 \mu_k.$$

Отсюда следует решение при $S = S_i$, $i = 1 \dots 4$:

$$v_i = \sqrt{2A_i / \mu}.$$

Математическое ожидание скорости груза 1 вычисляется по формуле

$$M(v) = \sum_{i=1}^4 v_i p_i.$$

При вычислении кинетической энергии системы тел потребуются формула для момента инерции цилиндра радиусом R относительно его оси $J = mR^2/2$, выражение для момента инерции тела через его радиус инерции

$$J = mi^2$$

и три основные формулы для кинетической энергии:

1. Вращательное движение:

$$T = J_z \omega^2 / 2,$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения, ω – угловая скорость.

2. Поступательное движение тела массой m :

$$T = mv^2 / 2,$$

где v – скорость какой-либо точки тела.

3. Плоское движение:

$$T = mv_C^2/2 + J_C\omega^2/2, \quad (4.1)$$

где v_C – скорость центра масс тела, J_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, m – масса.

В частном случае кинетическая энергия однородного цилиндра массой m радиусом R , катящегося без проскальзывания по какой-либо неподвижной поверхности (рис. 4.1), имеет вид

$$T = 3mv_C^2/4, \quad (4.2)$$

что следует из (4.1) при $\omega = v_C/R$, $J_C = m_C R^2/2$. К этому случаю относится и движение цилиндра, падающего вертикально с разматыванием

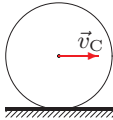


Рис. 4.1

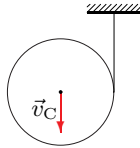


Рис. 4.2

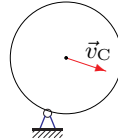


Рис. 4.3

навитой на его обод нити, один конец которой закреплен («качение по нити», рис. 4.2) и вращение цилиндра вокруг оси на его ободе («качение по точке», рис. 4.3).

Задача. Механическая система состоит из грузов A , E , блоков B , C и цилиндра D . Блок B вращается вокруг неподвижной оси, блок C и цилиндр D катятся по поверхности. Груз A движется вертикально (рис. 4.4). Нить, прикрепленная к оси цилиндра D , намотана на меньший обод блока. Нить к грузу A – вертикальная, остальные – горизонтальные. Даны радиусы ободов и радиусы инерции блоков: $R_B = 5$ см, $r_B = 4$ см, $i_B = 3$ см, $R_C = 8$ см, $r_C = 2$ см, $i_C = 6$ см. Массы тел $m_A = 7$ кг, $m_B = 25$ кг, $m_C = 8$ кг, $m_D = 16$ кг, $m_E = 50$ кг. Найти приведенную массу μ системы в формуле $T = \mu v_A^2/2$, где v_A – скорость груза.

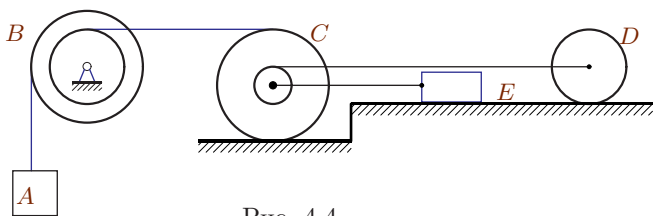


Рис. 4.4

Решение

Грузы A и E совершают поступательное движение, блок B — вращательное, блок C и цилиндр D — плоское. Предполагается, что груз A опускается и нити натянуты. Записываем выражения для соответствующих кинетических энергий:

$$\begin{aligned} T_A &= m_A v_A^2 / 2, \quad T_B = J_B \omega_B^2 / 2, \\ T_C &= m_C v_C^2 / 2 + J_C \omega_C^2 / 2, \\ T_D &= (3/4) m_D v_D^2, \quad T_E = m_E v_E^2 / 2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где v_D и v_C — скорости осей цилиндра и блока соответственно. Кинетическая энергия всей системы имеет вид

$$T = T_A + T_B + T_C + T_D + T_E. \quad (4.4)$$

Переходя от одного тела к другому, последовательно выражаем все кинематические величины, входящие в (4.3), через скорость груза A . Используем метод мгновенных центров скоростей¹. Выражаем угловую скорость блока B через v_A :

$$\omega_B = v_A / R_B.$$

Отсюда легко получить скорость точки K на внутреннем ободе блока B :

$$v_K = \omega_B r_B = v_A r_B / R_B$$

¹Метод мгновенных центров скоростей удобно применять при определении *модулей* скоростей, как, например здесь, где в кинетическую энергию входят только квадраты скоростей. Там, где требуются *знаки проекций*, например, в задачах на принцип возможных перемещений или при составлении уравнений Лагранжа 2-го рода лучше использовать метод кинематических графов.

(рис. 4.5). Нить нерастяжима, следовательно $v_N = v_K$. Мгновенный центр скоростей P_1 блока C находится в точке касания поверхности. Получаем угловую скорость блока:

$$\omega_C = v_N / (2R_C) = v_A r_B / (2R_B R_C).$$

Определяем скорость центра масс блока

$$v_C = v_N / 2 = \omega_C R_C = v_A r_B / (2R_B)$$

и скорость точки L меньшего обода блока

$$v_L = \omega_C (R_C + r_C) = v_A r_B (R_C + r_C) / (2R_B R_C).$$

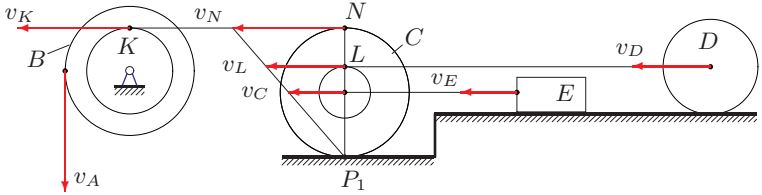


Рис. 4.5

Очевидно, опять же из-за нерастяжимости нити, $v_E = v_C$, $v_D = v_L$.

Таким образом, все кинематические величины, входящие в кинетическую энергию системы, выражены через v_A . Для моментов инерций имеем формулы

$$J_B = i_B^2 m_B, \quad J_C = i_C^2 m_C.$$

Подставляем скорости, угловые скорости и моменты инерции в (4.3). С учетом числовых данных получаем

$$T_A = 7 \frac{v_A^2}{2}, \quad T_B = \frac{m_B i_B^2 v_A^2}{2 R_B^2} = \frac{25 \cdot 9 v_A^2}{2 \cdot 25} = 9 \frac{v_A^2}{2},$$

$$T_C = \frac{m_C r_B^2 (i_C^2 + R_C^2) v_A^2}{8 R_B^2 R_C^2} = \frac{8 \cdot 16 (36 + 64) v_A^2}{8 \cdot 25 \cdot 64} = v_A^2,$$

$$T_D = \frac{3 m_D v_A^2 (R_C + r_C)^2 r_B^2}{16 R_B^2 R_C^2} = \frac{3 \cdot 16 v_A^2 (8 + 2)^2 \cdot 16}{16 \cdot 25 \cdot 64} = 3 v_A^2,$$

$$T_E = \frac{m_E v_A^2 r_B^2}{8 R_B^2} = \frac{50 \cdot v_A^2 \cdot 16}{8 \cdot 25} = 4 v_A^2.$$

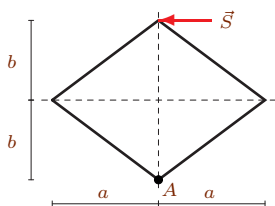
Отсюда имеем приведенные массы тел (коэффициенты при $v_A^2/2$): $\mu_A = 7$ кг, $\mu_B = 9$ кг, $\mu_C = 2$ кг, $\mu_D = 6$ кг, $\mu_E = 8$ кг. Приведенная масса всей системы, согласно (4.4), равна $\mu = 7 + 9 + 2 + 6 + 8 = 32$ кг.

Заметим, что радиус цилиндра D по условию не задан и для решения не потребовался.

4.3. Удар по пластине

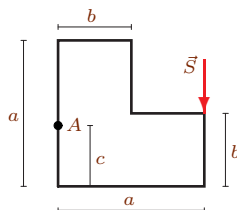
Дан ряд $p = [0.2, 0.3, 0.4, 0.1]$ распределения дискретной случайной величины импульса $S_i, i = 1, \dots, 4$, приложенной к плоскому однородному телу. Найти математическое ожидание и дисперсию угловой скорости тела после удара. Найти скорость точки A при $S = S_1$.

Задача 7.1



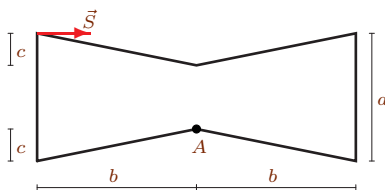
$m = 4$ кг, $a = 7$ см, $b = 3$ см,
 $S = [232, 233, 235, 238]$ кг см/с.

Задача 7.2



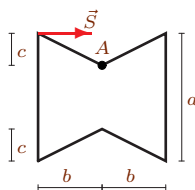
$m = 2$ кг, $a = 6$ см, $b = 3$ см, $c = 2.5$ см,
 $S = [132, 133, 135, 138]$ кг см/с.

Задача 7.3



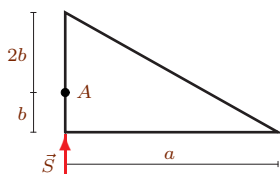
$m = 77$ кг, $a = 4$ м, $b = 5$ м, $c = 1$ м,
 $S = [285, 287, 289, 292]$ кг м/с.

Задача 7.4



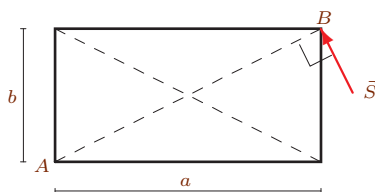
$m = 79$ кг, $a = 8$ м, $b = 4$ м,
 $c = 2$ м, $S = [43, 44, 47, 51]$ кг м/с.

Задача 7.5



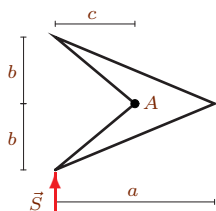
$m = 2$ кг, $a = 7$ см, $b = 2$ см,
 $S = [340, 342, 345, 349]$ кг см/с.

Задача 7.6



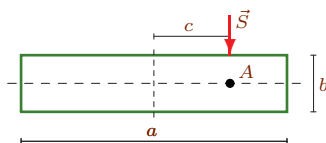
$m = 5$ кг, $a = 6$ см, $b = 3$ см,
 $\vec{S} \perp AB$, $S = [45, 46, 49, 52]$ кг см/с.

Задача 7.7



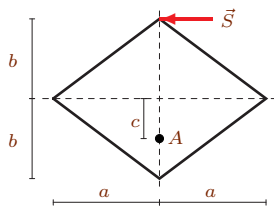
$m = 2$ кг, $a = 3$ см, $b = 1$ см,
 $c = 1$ см, $S = [40, 42, 45, 48]$ кг см/с.

Задача 7.8



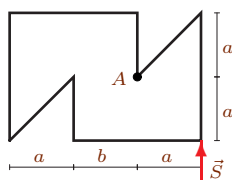
$m = 1$ кг, $a = 14$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см,
 $S = [205, 206, 209, 213]$ кг см/с.

Задача 7.9



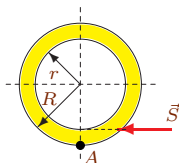
$m = 3$ кг, $a = 9$ см, $b = 6$ см, $c = 2$ см,
 $S = [702, 704, 707, 710]$ кг см/с.

Задача 7.10



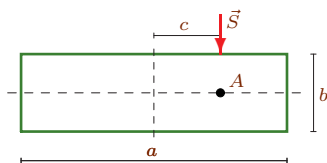
$m = 3$ кг, $a = 2$ м, $b = 2$ м,
 $S = [7, 9, 11, 15]$ кг м/с.

Задача 7.11



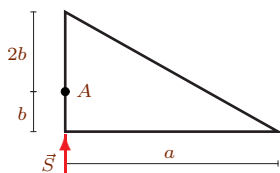
$m = 2 \text{ кг}$, $R = 5 \text{ см}$, $r = 4 \text{ см}$,
 $S = [82, 84, 86, 90] \text{ кг см/с}$.

Задача 7.12



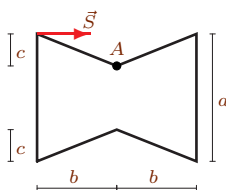
$m = 5 \text{ кг}$, $a = 24 \text{ см}$, $b = 7 \text{ см}$, $c = 6 \text{ см}$,
 $S = [12500, 12502, 12505, 12509] \text{ кг см/с}$.

Задача 7.13



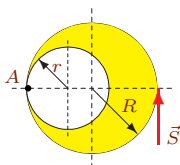
$m = 2 \text{ кг}$, $a = 4 \text{ см}$, $b = 1 \text{ см}$,
 $S = [100, 101, 104, 107] \text{ кг см/с}$.

Задача 7.14



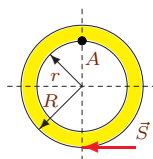
$m = 379 \text{ кг}$, $a = 8 \text{ м}$, $b = 5 \text{ м}$, $c = 2 \text{ м}$,
 $S = [940, 942, 945, 948] \text{ кг м/с}$.

Задача 7.15



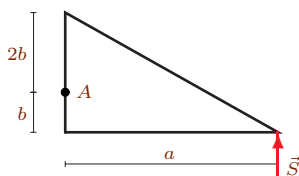
$m = 1 \text{ кг}$, $R = 3 \text{ см}$, $r = 2 \text{ см}$,
 $S = [253, 254, 257, 260] \text{ кг см/с}$.

Задача 7.16



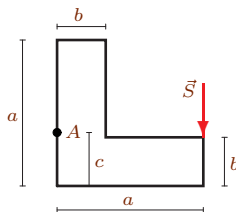
$m = 2 \text{ кг}$, $R = 7 \text{ см}$, $r = 5 \text{ см}$,
 $S = [148, 150, 152, 155] \text{ кг см/с}$.

Задача 7.17



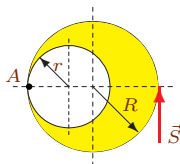
$m = 1$ кг, $a = 4$ см, $b = 1$ см,
 $S = [25, 26, 28, 32]$ кг см/с.

Задача 7.18



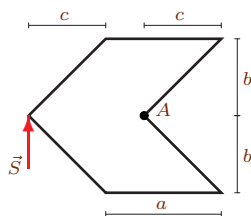
$m = 2$ кг, $a = 15$ см, $b = 5$ см, $c = 5.5$ см,
 $S = [868, 870, 873, 876]$ кг см/с.

Задача 7.19



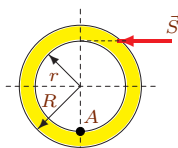
$m = 1$ кг, $R = 3$ см, $r = 1$ см,
 $S = [142, 144, 147, 151]$ кг см/с.

Задача 7.20



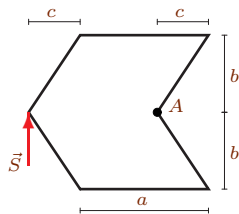
$m = 1$ кг, $a = 3$ см, $b = 2$ см,
 $c = 2$ см, $S = [58, 59, 62, 66]$ кг см/с.

Задача 7.21



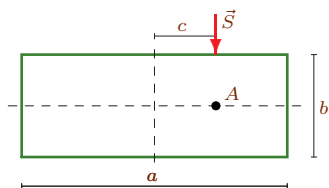
$m = 2$ кг, $R = 8$ см, $r = 7$ см,
 $S = [452, 454, 457, 460]$ кг см/с.

Задача 7.22



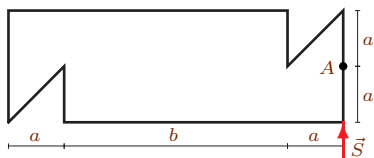
$m = 1$ кг, $a = 5$ см, $b = 3$ см,
 $c = 2$ см, $S = [65, 66, 68, 72]$ кг см/с.

Задача 7.23



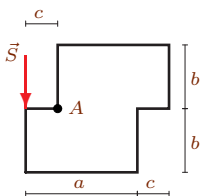
$m=2$ кг, $a=13$ см, $b=5$ см, $c=3$ см,
 $S = [1940, 1942, 1945, 1949]$ кг см/с.

Задача 7.24



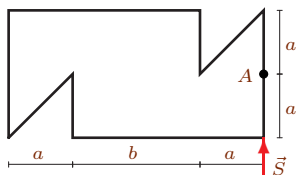
$m = 133$ кг, $a = 1$ м, $b = 4$ м,
 $S = [170, 171, 174, 178]$ кг м/с.

Задача 7.25



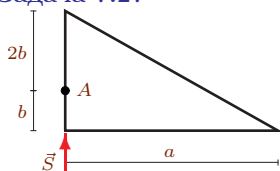
$m=1$ кг, $a=7$ см, $b=4$ см, $c=2$ см,
 $S = [250, 252, 254, 258]$ кг см/с.

Задача 7.26



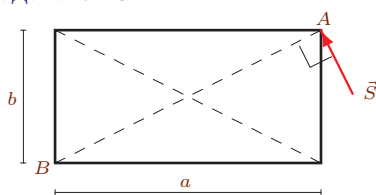
$m=39$ кг, $a=2$ м, $b=4$ м,
 $S = [55, 57, 60, 63]$ кг м/с.

Задача 7.27



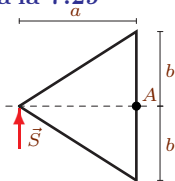
$m = 2$ кг, $a = 8$ см, $b = 2$ см,
 $S = [400, 402, 404, 407]$ кг см/с.

Задача 7.28



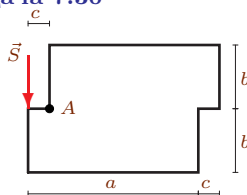
$m = 3$ кг, $a = 8$ см, $b = 4$ см,
 $\vec{S} \perp AB$, $S = [18, 19, 21, 25]$ кг см/с.

Задача 7.29



$m = 4$ кг, $a = 3$ см, $b = 3$ см,
 $S = [288, 289, 292, 295]$ кг см/с.

Задача 7.30



$m = 1$ кг, $a = 8$ см, $b = 3$ см, $c = 1$ см,
 $S = [206, 207, 210, 213]$ кг см/с.

Ответы.

Удар по пластине

	v_A	v_C	ω	J	α_2	$m(\omega)$	$D(\omega)$
	см/с		с ⁻¹	кг см ²			
	*м/с		с ⁻¹	*кг м ²			
1	4	58.0	18.466	38.667	329.911	18.163	0.019
2	39	66.0	43.909	11.000	1820.887	42.668	0.313
3*	3	3.7	0.719	812.778	0.502	0.708	0.000
4*	1	0.5	0.270	754.889	0.059	0.242	0.000
5	366	170.0	86.224	9.444	7202.449	84.865	0.430
6	18	9.0	9.302	18.750	72.659	8.515	0.155
7	36	20.0	57.600	1.111	2721.024	52.080	8.698
8	397	205.0	49.873	17.083	2365.409	48.632	0.319
9	90	234.0	72.821	58.500	5234.401	72.349	0.064
10*	4	2.3	3.571	12.600	5.952	2.381	0.283
11	81	41.0	8.780	41.000	68.816	8.293	0.048
12	4228	2500.0	288.207	260.417	82990.459	288.081	0.004
13	114	50.0	51.360	2.778	2426.481	49.248	1.115
14*	4	2.5	0.766	4948.056	0.582	0.763	0.000
15	165	253.0	113.043	5.060	12350.888	111.130	0.915
16	4	74.0	14.662	74.000	203.793	14.274	0.037
17	39	25.0	61.440	1.389	2741.944	52.224	14.598
18	193	434.0	115.051	72.333	13098.116	114.447	0.104
19	144	142.0	93.577	4.438	8133.159	90.169	2.708
20	28	58.0	68.276	2.417	3949.191	62.793	6.218
21	30	226.0	28.496	113.000	795.862	28.211	0.023
22	2	65.0	46.523	5.417	1887.083	43.422	1.653
23	1510	970.0	180.835	32.333	32517.073	180.325	0.061
24*	5	1.3	1.299	411.091	1.589	1.260	0.000
25	520	250.0	111.456	10.417	11946.549	109.296	0.933
26*	5	1.4	1.028	245.143	0.910	0.953	0.002
27	456	200.0	97.680	11.111	9350.352	96.696	0.236
28	24	6.0	5.590	20.000	20.600	4.517	0.198
29	0	72.0	73.750	8.000	5278.325	72.650	0.302
30	584	206.0	111.670	8.583	11961.619	109.363	1.330

4.4. Удар. Пример решения

К плоскому однородному телу массой 1 кг приложен

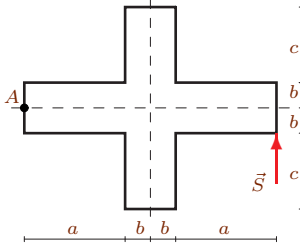


Рис. 4.6

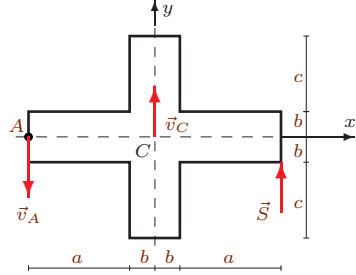


Рис. 4.7

ударный импульс $S = 0,49$ Нс (рис. 4.6). Даны размеры $a = 4$ см, $b = 1$ см, $c = 3$ см. Найти скорость точки A после удара.

Решение

Вычисляем площадь фигуры, разбивая ее на прямоугольник размером $2(a + b) \times 2b$ и два прямоугольника $c \times 2b$:

$$F = 4(a + b)b + 4bc = 32 \text{ см}^2.$$

Вычисляем *геометрические моменты инерции* фигуры относительно осей x и y (рис. 4.7), пользуясь формулой для момента инерции прямоугольника $I_u = l_1 l_2^3 / 12$, где l_1 — размер прямоугольника вдоль оси u (табл. П.1, С. 95). Имеем

$$\begin{aligned} I_x &= 4b(c + b)^3 / 3 + 4ab^3 / 3 = 272/3 \text{ см}^4, \\ I_y &= 4b(a + b)^3 / 3 + 4cb^3 / 3 = 512/3 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

В силу симметрии фигуры момент инерции относительно оси z является ее главным моментом инерции

$$I_{zC} = I_x + I_y.$$

Радиус инерции фигуры

$$\rho^2 = I_{zC} / F = 49/6 \text{ см}^2, \rho = 2,857 \text{ см}.$$

Момент инерции фигуры относительно оси z

$$J_{zC} = m\rho^2 = 49/6 \text{ кгсм}^2. \quad (4.5)$$

Учитывая, что $S_y = S$, $S_x = 0$, находим скорость центра масс фигуры

$$v_{Cy} = S_y/m = 49 \text{ см/с}, \quad v_{Cx} = 0.$$

Согласно теореме об изменении главного момента количества движения определяем угловую скорость тела в момент удара

$$\omega_z = S_y(a+b)/J_{zC} = 30 \text{ с}^{-1}.$$

Искомую скорость точки находим по формуле для скоростей точек при плоском движении в проекции на ось y (граф $C \xrightarrow[\pi]{}$ A)

$$v_{Ay} = v_{Cy} + \omega_z(a+b) \cos \pi = v_{Cy} - \omega_z(a+b) = 49 - 30 \cdot 5 = -101 \text{ см/с}.$$

Таким образом, после удара точка A будет двигаться вниз.

Замечание. Вычисление момента инерции можно поручить маплету, описанному в [7]. Маплет вычисляет осевые и центробежные геометрические моменты инерции фигуры и радиус инерции относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости фигуры. Именно этот радиус используется в формуле (4.5) для вычисления искомого момента инерции. Для ввода информации о фигуре достаточно внести в программу координаты точек ее контура при обходе по часовой стрелке. Интерфейс маплета представлен на рис. 4.8. Файл маплета¹ невелик — около 3 кБ, однако для его работы необходима установленная система компьютерной математики Maple. Маплет тестировался на версиях Maple 11–16.

¹ Расположен по адресу <http://vuz.exponenta.ru/MMin.rar>

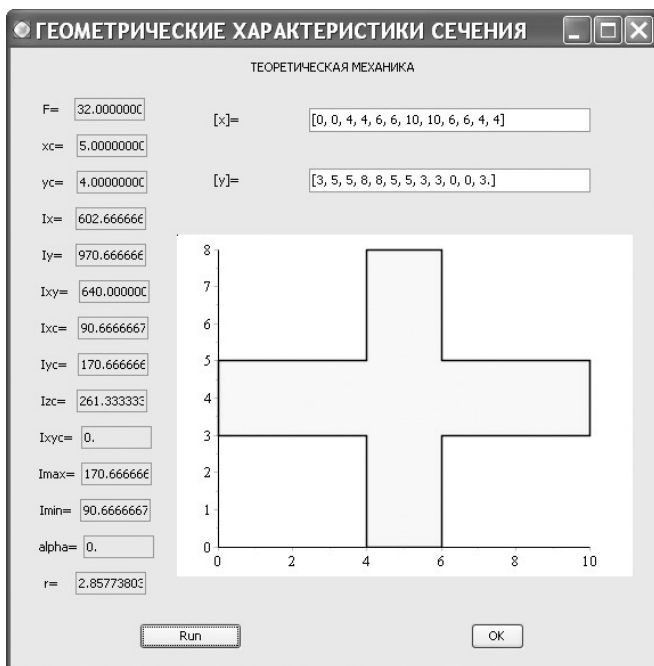


Рис. 4.8

План решения задачи математической статистики

1. Решить задачу 4 раза при разных значениях ударного импульса S_i , $i = 1, \dots, 4$. Получить угловую скорость ω_i , $i = 1, \dots, 4$.
2. Вычислить математическое ожидание

$$M(\omega) = \sum_{i=1}^4 \omega_i p_i.$$

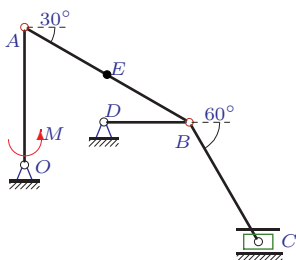
3. Найти дисперсию

$$D(\omega) = \sum_{i=1}^4 \omega_i^2 p_i - M(\omega)^2 = \sum_{i=1}^4 (\omega_i - M(\omega))^2 p_i.$$

4.5. Общее уравнение динамики

Плоский шарнирно-стержневой механизм с одной степенью свободы движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и момента $M = M_{OA}$, который вращает звено OA с постоянной угловой скоростью ω_{OA} . В узлах A , B , C и в центре E звена AB расположены материальные точки. Дан ряд $p = [0.1, 0.3, 0.5, 0.1]$ распределения дискретной случайной величины M_{fr} момента трения на осях неподвижных шарниров O и D . Сила сопротивления движению ползуна – F_{fr} , остальные связи идеальные. Пренебрегая массами стержней, определить математическое ожидание и дисперсию момента M_{OA} . В ответе указаны вспомогательные величины (мощности): N_a – сил инерции, N_p – сил тяжести, N_{fr} – сил трения в ползунах, N_M – моментов трения.

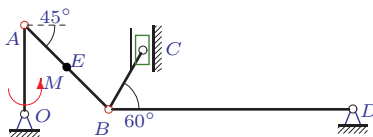
Задача 8.1



$m_A = 15$ кг,
 $m_B = 19$ кг,
 $m_C = 18$ кг,
 $m_E = 19$ кг,
 $OA = 29$ см,
 $DB = 18$ см,
 $AB = 40$ см,
 $BC = 29$ см.

$\omega_{OA} = 0.7 \frac{1}{c}$, $F_{fr} = 38$ Н, $M_{fr} = [45, 46, 47, 49]$

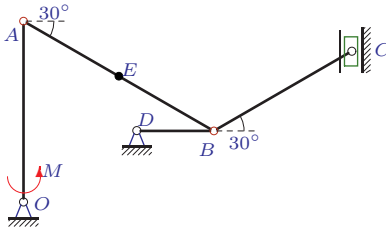
Задача 8.2



$m_A = 33$ кг,
 $m_B = 37$ кг,
 $m_C = 34$ кг,
 $m_E = 35$ кг,
 $OA = 30$ см,
 $DB = 82$ см,
 $AB = 40$ см,
 $BC = 23$ см.

$\omega_{OA} = 0.7 \frac{1}{c}$, $F_{fr} = 15$ Н, $M_{fr} = [40, 41, 42, 44]$

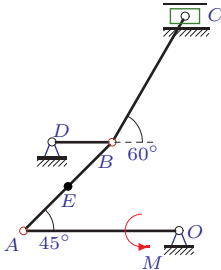
Задача 8.3



$m_A = 23$ кг,
 $m_B = 27$ кг,
 $m_C = 26$ кг,
 $m_E = 25$ кг,
 $OA = 33$ см,
 $DB = 14$ см,
 $AB = 40$ см,
 $BC = 29$ см.

$$\omega_{OA} = 0.6 \frac{1}{c}, F_{fr} = 37 \text{ Н}, M_{fr} = [52, 53, 54, 56]$$

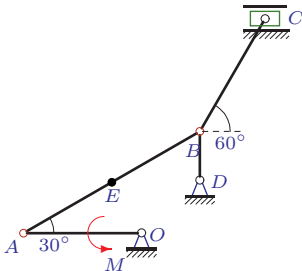
Задача 8.4



$m_A = 3$ кг,
 $m_B = 4$ кг,
 $m_C = 6$ кг,
 $m_E = 4$ кг,
 $OA = 31$ см,
 $DB = 12$ см,
 $AB = 25$ см,
 $BC = 29$ см.

$$\omega_{OA} = 0.6 \frac{1}{c}, F_{fr} = 27 \text{ Н}, M_{fr} = [22, 23, 24, 26]$$

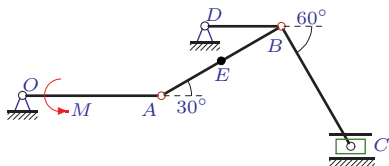
Задача 8.5



$m_A = 33$ кг,
 $m_B = 34$ кг,
 $m_C = 37$ кг,
 $m_E = 34$ кг,
 $OA = 29$ см,
 $DB = 12$ см,
 $AB = 50$ см,
 $BC = 32$ см.

$$\omega_{OA} = 0.7 \frac{1}{c}, F_{fr} = 23 \text{ Н}, M_{fr} = [48, 49, 50, 52]$$

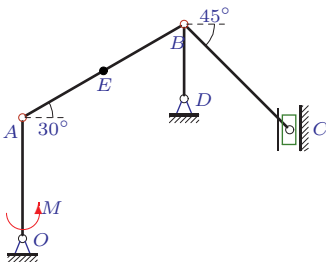
Задача 8.6



$m_A = 28$ кг,
 $m_B = 31$ кг,
 $m_C = 31$ кг,
 $m_E = 31$ кг,
 $OA = 29$ см,
 $DB = 16$ см,
 $AB = 29$ см,
 $BC = 29$ см.

$$\omega_{OA} = 0.7 \frac{1}{c}, F_{fr} = 33 \text{ Н}, M_{fr} = [53, 54, 55, 57]$$

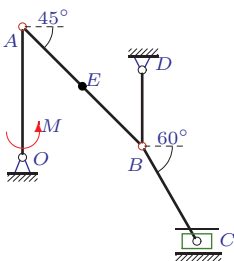
Задача 8.7



$m_A = 10$ кг,
 $m_B = 14$ кг,
 $m_C = 14$ кг,
 $m_E = 13$ кг,
 $OA = 26$ см,
 $DB = 16$ см,
 $AB = 40$ см,
 $BC = 32$ см.

$$\omega_{OA} = 0.8 \frac{1}{c}, F_{fr} = 21 \text{ Н}, M_{fr} = [23, 24, 25, 27]$$

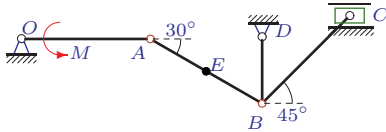
Задача 8.8



$m_A = 6$ кг,
 $m_B = 10$ кг,
 $m_C = 8$ кг,
 $m_E = 10$ кг,
 $OA = 31$ см,
 $DB = 18$ см,
 $AB = 40$ см,
 $BC = 26$ см.

$$\omega_{OA} = 0.6 \frac{1}{c}, F_{fr} = 23 \text{ Н}, M_{fr} = [21, 22, 23, 25]$$

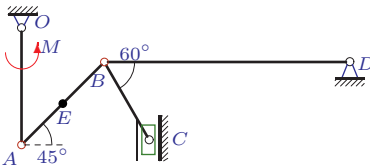
Задача 8.9



$m_A = 1$ кг,
 $m_B = 4$ кг,
 $m_C = 3$ кг,
 $m_E = 3$ кг,
 $OA = 27$ см,
 $DB = 14$ см,
 $AB = 27$ см,
 $BC = 26$ см.

$$\omega_{OA} = 0.7 \frac{1}{c}, F_{fr} = 35 \text{ Н}, M_{fr} = [28, 29, 30, 32]$$

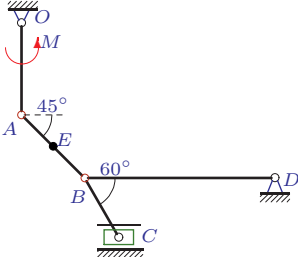
Задача 8.10



$m_A = 7$ кг,
 $m_B = 9$ кг,
 $m_C = 8$ кг,
 $m_E = 10$ кг,
 $OA = 30$ см,
 $DB = 63$ см,
 $AB = 30$ см,
 $BC = 23$ см.

$$\omega_{OA} = 0.7 \frac{1}{c}, F_{fr} = 31 \text{ Н}, M_{fr} = [30, 31, 32, 34]$$

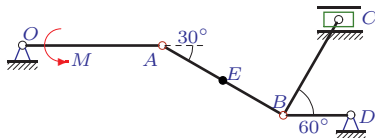
Задача 8.11



$m_A = 8$ кг,
 $m_B = 10$ кг,
 $m_C = 9$ кг,
 $m_E = 12$ кг,
 $OA = 31$ см,
 $DB = 64$ см,
 $AB = 30$ см,
 $BC = 23$ см.

$$\omega_{OA} = 0.6 \frac{1}{c}, F_{fr} = 21 \text{ Н}, M_{fr} = [21, 22, 23, 25]$$

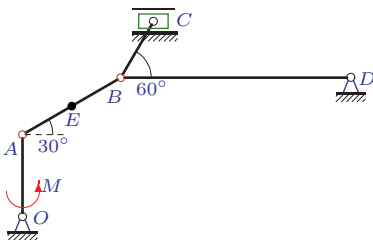
Задача 8.12



$m_A = 23$ кг,
 $m_B = 26$ кг,
 $m_C = 24$ кг,
 $m_E = 25$ кг,
 $OA = 29$ см,
 $DB = 14$ см,
 $AB = 29$ см,
 $BC = 23$ см.

$$\omega_{OA} = 0.7 \frac{1}{c}, F_{fr} = 12 \text{ Н}, M_{fr} = [27, 28, 29, 31]$$

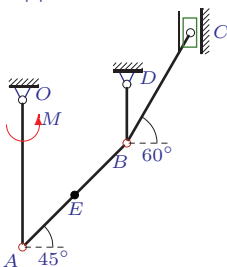
Задача 8.13



$m_A = 17$ кг,
 $m_B = 21$ кг,
 $m_C = 18$ кг,
 $m_E = 18$ кг,
 $OA = 29$ см,
 $DB = 81$ см,
 $AB = 40$ см,
 $BC = 23$ см.

$$\omega_{OA} = 0.7 \frac{1}{c}, F_{fr} = 19 \text{ Н}, M_{fr} = [28, 29, 30, 32]$$

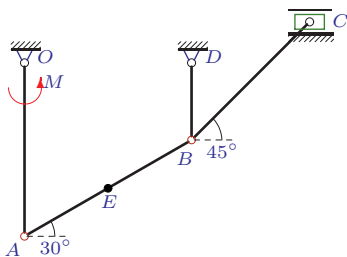
Задача 8.14



$m_A = 17$ кг,
 $m_B = 19$ кг,
 $m_C = 19$ кг,
 $m_E = 18$ кг,
 $OA = 30$ см,
 $DB = 12$ см,
 $AB = 30$ см,
 $BC = 26$ см.

$$\omega_{OA} = 0.7 \frac{1}{c}, F_{fr} = 15 \text{ Н}, M_{fr} = [24, 25, 26, 28]$$

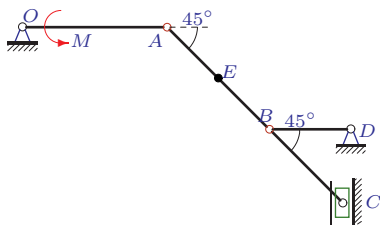
Задача 8.15



$m_A = 5 \text{ кг},$
 $m_B = 7 \text{ кг},$
 $m_C = 7 \text{ кг},$
 $m_E = 6 \text{ кг},$
 $OA = 27 \text{ см},$
 $DB = 12 \text{ см},$
 $AB = 30 \text{ см},$
 $BC = 26 \text{ см}.$

$$\omega_{OA} = 0.7 \frac{1}{c}, F_{fr} = 20 \text{ Н}, M_{fr} = [17, 18, 19, 21]$$

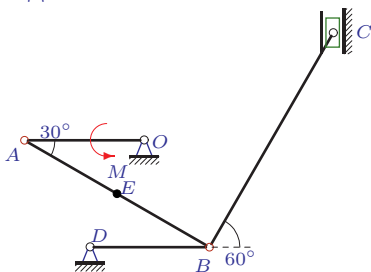
Задача 8.16



$m_A = 22 \text{ кг},$
 $m_B = 25 \text{ кг},$
 $m_C = 23 \text{ кг},$
 $m_E = 26 \text{ кг},$
 $OA = 32 \text{ см},$
 $DB = 18 \text{ см},$
 $AB = 32 \text{ см},$
 $BC = 23 \text{ см}.$

$$\omega_{OA} = 0.6 \frac{1}{c}, F_{fr} = 35 \text{ Н}, M_{fr} = [49, 50, 51, 53]$$

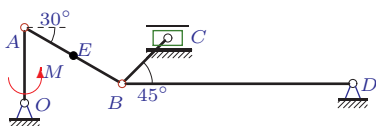
Задача 8.17



$m_A = 12 \text{ кг},$
 $m_B = 13 \text{ кг},$
 $m_C = 15 \text{ кг},$
 $m_E = 14 \text{ кг},$
 $OA = 14 \text{ см},$
 $DB = 14 \text{ см},$
 $AB = 25 \text{ см},$
 $BC = 29 \text{ см}.$

$$\omega_{OA} = 1.4 \frac{1}{c}, F_{fr} = 19 \text{ Н}, M_{fr} = [23, 24, 25, 27]$$

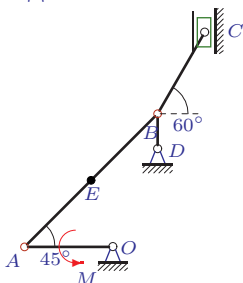
Задача 8.18



$m_A = 9$ кг,
 $m_B = 13$ кг,
 $m_C = 10$ кг,
 $m_E = 11$ кг,
 $OA = 27$ см,
 $DB = 82$ см,
 $AB = 40$ см,
 $BC = 23$ см.

$$\omega_{OA} = 0.7 \frac{1}{c}, F_{fr} = 40 \text{ Н}, M_{fr} = [41, 42, 43, 45]$$

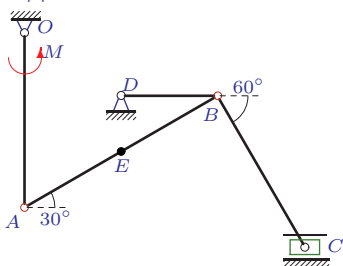
Задача 8.19



$m_A = 5$ кг,
 $m_B = 6$ кг,
 $m_C = 9$ кг,
 $m_E = 6$ кг,
 $OA = 30$ см,
 $DB = 12$ см,
 $AB = 64$ см,
 $BC = 32$ см.

$$\omega_{OA} = 0.7 \frac{1}{c}, F_{fr} = 41 \text{ Н}, M_{fr} = [38, 39, 40, 42]$$

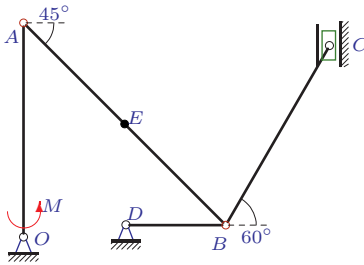
Задача 8.20



$m_A = 20$ кг,
 $m_B = 22$ кг,
 $m_C = 23$ кг,
 $m_E = 23$ кг,
 $OA = 29$ см,
 $DB = 16$ см,
 $AB = 37$ см,
 $BC = 29$ см.

$$\omega_{OA} = 0.7 \frac{1}{c}, F_{fr} = 13 \text{ Н}, M_{fr} = [25, 26, 27, 29]$$

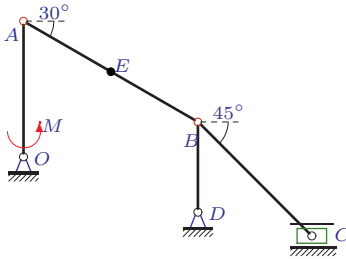
Задача 8.21



$m_A = 1 \text{ кг},$
 $m_B = 5 \text{ кг},$
 $m_C = 4 \text{ кг},$
 $m_E = 3 \text{ кг},$
 $OA = 30 \text{ см},$
 $DB = 14 \text{ см},$
 $AB = 40 \text{ см},$
 $BC = 29 \text{ см}.$

$$\omega_{OA} = 0.7 \frac{1}{c}, F_{fr} = 26 \text{ Н}, M_{fr} = [19, 20, 21, 23]$$

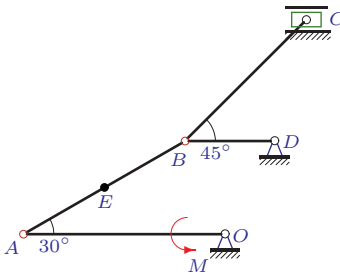
Задача 8.22



$m_A = 13 \text{ кг},$
 $m_B = 17 \text{ кг},$
 $m_C = 17 \text{ кг},$
 $m_E = 17 \text{ кг},$
 $OA = 27 \text{ см},$
 $DB = 18 \text{ см},$
 $AB = 40 \text{ см},$
 $BC = 32 \text{ см}.$

$$\omega_{OA} = 0.7 \frac{1}{c}, F_{fr} = 16 \text{ Н}, M_{fr} = [21, 22, 23, 25]$$

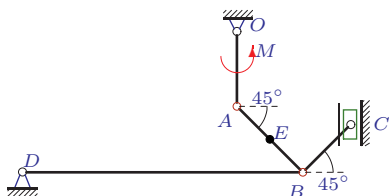
Задача 8.23



$m_A = 28 \text{ кг},$
 $m_B = 29 \text{ кг},$
 $m_C = 29 \text{ кг},$
 $m_E = 29 \text{ кг},$
 $OA = 27 \text{ см},$
 $DB = 12 \text{ см},$
 $AB = 25 \text{ см},$
 $BC = 23 \text{ см}.$

$$\omega_{OA} = 0.7 \frac{1}{c}, F_{fr} = 29 \text{ Н}, M_{fr} = [49, 50, 51, 53]$$

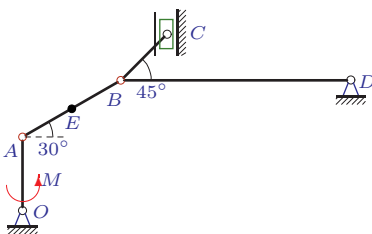
Задача 8.24



$m_A = 20$ кг,
 $m_B = 22$ кг,
 $m_C = 23$ кг,
 $m_E = 22$ кг,
 $OA = 32$ см,
 $DB = 120$ см,
 $AB = 40$ см,
 $BC = 29$ см.

$$\omega_{OA} = 0.6 \frac{1}{c}, F_{fr} = 16 \text{ Н}, M_{fr} = [28, 29, 30, 32]$$

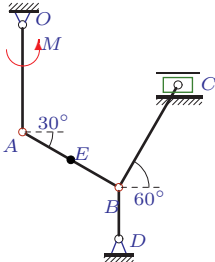
Задача 8.25



$m_A = 4$ кг,
 $m_B = 8$ кг,
 $m_C = 5$ кг,
 $m_E = 5$ кг,
 $OA = 26$ см,
 $DB = 81$ см,
 $AB = 40$ см,
 $BC = 23$ см.

$$\omega_{OA} = 0.8 \frac{1}{c}, F_{fr} = 34 \text{ Н}, M_{fr} = [30, 31, 32, 34]$$

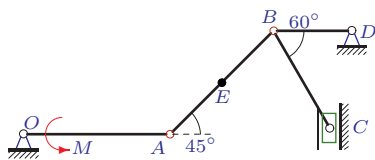
Задача 8.26



$m_A = 30$ кг,
 $m_B = 32$ кг,
 $m_C = 34$ кг,
 $m_E = 32$ кг,
 $OA = 29$ см,
 $DB = 14$ см,
 $AB = 30$ см,
 $BC = 32$ см.

$$\omega_{OA} = 0.7 \frac{1}{c}, F_{fr} = 13 \text{ Н}, M_{fr} = [35, 36, 37, 39]$$

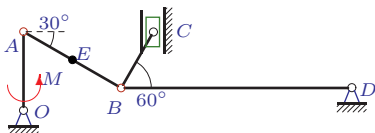
Задача 8.27



$$\omega_{OA} = 0.7 \frac{1}{c}, F_{fr} = 33 \text{ H}, M_{fr} = [44, 45, 46, 48]$$

$$\begin{aligned} m_A &= 19 \text{ кГ}, \\ m_B &= 22 \text{ кГ}, \\ m_C &= 20 \text{ кГ}, \\ m_E &= 22 \text{ кГ}, \\ OA &= 30 \text{ см}, \\ DB &= 16 \text{ см}, \\ AB &= 30 \text{ см}, \\ BC &= 23 \text{ см}. \end{aligned}$$

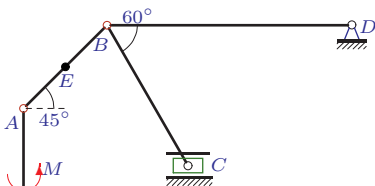
Задача 8.28



$$\omega_{OA} = 0.7 \frac{1}{c}, F_{fr} = 17 \text{ H}, M_{fr} = [29, 30, 31, 33]$$

$$\begin{aligned} m_A &= 20 \text{ кГ}, \\ m_B &= 24 \text{ кГ}, \\ m_C &= 21 \text{ кГ}, \\ m_E &= 22 \text{ кГ}, \\ OA &= 28 \text{ см}, \\ DB &= 82 \text{ см}, \\ AB &= 40 \text{ см}, \\ BC &= 23 \text{ см}. \end{aligned}$$

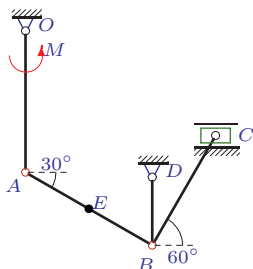
Задача 8.29



$$\omega_{OA} = 0.6 \frac{1}{c}, F_{fr} = 40 \text{ H}, M_{fr} = [60, 61, 62, 64]$$

$$\begin{aligned} m_A &= 28 \text{ кГ}, \\ m_B &= 32 \text{ кГ}, \\ m_C &= 29 \text{ кГ}, \\ m_E &= 31 \text{ кГ}, \\ OA &= 31 \text{ см}, \\ DB &= 83 \text{ см}, \\ AB &= 40 \text{ см}, \\ BC &= 55 \text{ см}. \end{aligned}$$

Задача 8.30



$m_A = 4$ кг,
 $m_B = 6$ кг,
 $m_C = 6$ кг,
 $m_E = 6$ кг,
 $OA = 29$ см,
 $DB = 14$ см,
 $AB = 30$ см,
 $BC = 26$ см.

$\omega_{OA} = 0.7 \frac{1}{c}$, $F_{fr} = 25$ Н, $M_{fr} = [21, 22, 23, 25]$

Ответы.

Рычаг Жуковского. Скорости, ускорения

	v_A	v_B	v_C	v_E	a_A	a_B	a_C	a_E	M	$\mu(M)$	$D(M)$
1	0.203	0.352	0.609	0.203	0.142	0.854	3.218	0.473	404.179	395.461	14.512
2	0.210	0.210	0.210	0.148	0.147	0.225	0.250	0.045	330.073	326.932	1.884
3	0.198	0.343	0.343	0.198	0.119	1.153	2.245	0.619	625.986	614.296	26.092
4	0.186	0.186	0.322	0.186	0.112	0.493	0.550	0.219	75.240	66.998	12.969
5	0.203	0.117	0.117	0.117	0.142	0.140	0.117	0.126	-13.614	-19.123	5.795
6	0.203	0.203	0.352	0.203	0.142	0.326	1.741	0.223	462.731	456.262	7.989
7	0.208	0.208	0.208	0.208	0.166	0.277	0.052	0.220	111.912	105.875	6.960
8	0.186	0.186	0.186	0.186	0.112	0.359	0.029	0.157	73.845	67.584	7.485
9	0.189	0.109	0.109	0.109	0.132	0.299	0.202	0.214	80.048	75.187	4.511
10	0.210	0.210	0.210	0.148	0.147	0.346	0.379	0.102	122.320	118.925	2.201
11	0.186	0.186	0.322	0.132	0.112	0.495	2.001	0.303	-11.979	-15.393	2.225
12	0.203	0.203	0.352	0.203	0.142	0.811	0.170	0.386	322.258	315.194	9.528
13	0.203	0.352	0.609	0.203	0.142	1.240	6.279	0.691	34.762	31.035	2.651
14	0.210	0.210	0.121	0.210	0.147	0.429	0.021	0.280	130.961	122.911	12.372
15	0.189	0.189	0.189	0.189	0.132	0.313	0.202	0.220	73.774	66.299	10.668
16	0.192	0.192	0.192	0.192	0.115	0.380	0.115	0.166	464.524	458.136	7.793
17	0.196	0.196	0.196	0.196	0.274	0.989	1.109	0.475	-12.513	-17.113	4.040
18	0.189	0.327	0.327	0.189	0.132	0.819	0.379	0.344	178.159	174.547	2.491
19	0.210	0.210	0.121	0.148	0.147	0.487	0.395	0.297	115.261	107.211	12.373
20	0.203	0.352	0.609	0.203	0.142	0.972	5.204	0.532	407.891	398.370	17.305
21	0.210	0.210	0.210	0.148	0.147	0.349	0.332	0.217	110.368	103.139	9.976
22	0.189	0.189	0.189	0.189	0.132	0.202	0.160	0.166	66.347	60.597	6.312
23	0.189	0.189	0.189	0.189	0.132	0.413	0.428	0.258	-40.992	-48.467	10.668
24	0.192	0.192	0.192	0.136	0.115	0.347	0.314	0.231	-135.750	-138.664	1.620
25	0.208	0.360	0.360	0.208	0.166	1.319	1.149	0.742	7.821	4.242	2.445
26	0.203	0.203	0.203	0.203	0.142	0.387	0.762	0.147	112.537	105.472	9.528
27	0.210	0.210	0.210	0.210	0.147	0.505	0.582	0.221	384.494	377.882	8.348
28	0.196	0.339	0.339	0.196	0.137	0.886	0.956	0.375	348.850	345.190	2.558
29	0.186	0.186	0.322	0.132	0.112	0.400	0.228	0.256	-26.455	-29.614	1.905
30	0.203	0.203	0.203	0.203	0.142	0.307	0.598	0.223	85.305	78.241	9.528

Ответы.

Рычаг Жуковского. Угловые скорости и ускорения

	ω_{BD}	ω_{BC}	ε_{AB}	ε_{BC}	ε_{BD}	N_p	N_a	N_{fr}	N_M
1	1.953	-2.425	-1.650	-6.684	-2.820	-98.304	-31.464	-23.142	-130.015
2	-0.256	0.000	0.741	0.270	-0.267	-182.319	-3.514	-3.150	-42.068
3	2.450	-0.000	-2.503	-5.794	-5.641	-220.362	28.238	-12.689	-170.778
4	-1.550	1.283	2.262	0.092	3.333	20.071	-0.617	-8.698	-55.900
5	0.977	-0.000	-0.137	0.715	-0.677	99.571	-0.158	-2.696	-87.188
6	1.269	-1.400	0.796	-4.774	1.250	-179.229	-20.861	-11.603	-112.219
7	1.300	0.919	-0.300	0.580	-0.375	-28.567	0.105	-4.368	-56.700
8	-1.033	0.000	1.074	-1.478	1.688	0.000	0.804	-4.278	-40.833
9	-0.779	-0.000	-0.013	-0.463	-2.049	-4.635	-0.238	-3.819	-47.342
10	-0.333	-0.000	-1.310	-0.351	0.538	-45.322	1.341	-6.510	-35.133
11	0.291	1.617	1.024	-8.808	-0.768	29.195	7.024	-6.765	-22.266
12	-1.450	-1.765	3.010	-1.176	-5.400	-147.366	-7.346	-4.219	-66.650
13	0.434	3.057	-2.548	26.892	1.519	103.478	-79.949	-11.571	-36.291
14	1.750	0.933	1.039	-1.481	-1.838	-22.599	1.345	-1.819	-68.600
15	1.575	0.000	0.637	-1.619	-0.796	0.000	-0.087	-3.780	-47.775
16	-1.067	-0.000	1.414	-1.259	-1.778	-180.818	-2.843	-6.720	-88.333
17	-1.400	-0.000	-4.390	-1.093	-6.790	103.829	-6.987	-3.724	-75.600
18	-0.399	-2.013	2.200	-0.920	-0.986	-59.410	-2.742	-13.094	-49.465
19	1.750	-0.758	-0.597	0.822	-2.663	27.185	0.003	-4.971	-102.900
20	2.198	-2.425	2.091	-14.249	3.684	-115.550	-78.028	-7.917	-84.029
21	1.500	-0.000	-0.562	-1.254	-1.073	-21.631	0.434	-5.460	-50.600
22	1.050	0.000	-0.191	0.877	0.212	0.000	0.331	-3.024	-43.750
23	1.575	1.162	-1.323	3.112	2.387	159.452	-4.701	-5.481	-120.575
24	-0.160	-0.000	0.352	-0.150	0.288	105.477	3.365	-3.072	-24.320
25	0.445	-0.000	-2.675	0.985	1.616	54.780	-6.466	-12.249	-42.322
26	-1.450	0.000	-1.680	1.840	1.800	0.000	7.713	-2.639	-83.850
27	-1.312	-0.000	-1.992	-1.384	2.641	-170.988	5.372	-6.930	-96.600
28	-0.414	0.000	2.366	0.706	-1.067	-186.498	-15.164	-5.771	-36.762
29	0.224	0.676	-0.580	0.655	0.479	86.671	-5.170	-12.886	-52.742
30	1.450	0.000	0.586	-2.264	0.628	0.000	-0.889	-5.075	-53.750

4.6. Общее уравнение динамики. Пример

Плоский шарнирно-стержневой механизм с одной степенью свободы движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и момента M . В неподвижных шарнирах и ползуне имеется трение, остальные связи идеальные. Известна угловая скорость одного из звеньев механизма. Для заданного положения механизма определить M .

План решения

1. Вычисляем угловые скорости звеньев механизма и скорости точек приложения активных сил. В число активных сил включаем силы трения.

2. Вычисляем ускорения точек, наделенных массами.

3. Вычисляем силы тяжести и силы инерции материальных точек. Силы трения (сопротивления) направлены в сторону, противоположную движению, поэтому записываем их в виде

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}\vec{v}_k/v_k,$$

где \vec{v}_k – скорость точки приложения силы, $F_{\text{тр}}$ – модуль силы. Аналогично выражаем моменты сопротивления

$$\vec{M}_{\text{тр}} = -M_{\text{тр}}\vec{\omega}_k/\omega_k.$$

4. Записываем общее уравнение динамики:

$$\sum_k \vec{F}_k \cdot \vec{v}_k + \sum_k \vec{\Psi}_k \cdot \vec{v}_k = 0, \quad (4.1)$$

где \vec{F}_k – активные силы, приложенные к механизму, $\vec{\Psi}_k$ – силы инерции. Моменты определяются парами сил, которые входят в число активных сил \vec{F}_k , однако мощности моментов удобнее вычислять в форме $\sum_k \vec{M}_k \cdot \vec{\omega}_k$, где $\vec{\omega}_k$ – угловая скорость тела, к которому приложен момент \vec{M}_k .

Из полученного уравнения находим искомый момент M .

Плоский шарнирно-стержневой механизм расположен в вертикальной плоскости и приводится в движение моментом M_{OA} , приложенным к звену OA (рис. 4.9). В узлах A , B , C и в середине звена AB сосредоточены массы $m_A = 2$ кг,

$m_B = 3$ кг, $m_C = 4$ кг, $m_E = 5$ кг. Задана постоянная сила сопротивления движению ползуна, $F_{\text{тр}} = 10$ Н. В шарнирах O и D имеется момент сил трения $M_{\text{тр}} = 15$ Нм. Угловая скорость звена OA постоянна и равна 2 рад/с.

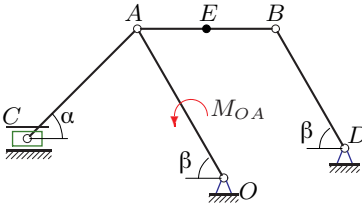


Рис. 4.9

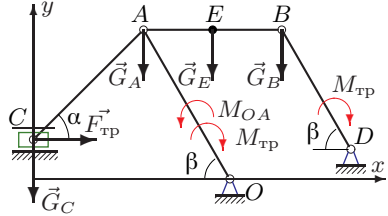


Рис. 4.10

Пренебрегая массами стержней, определить момент M_{OA} в указанном положении механизма. Даны размеры: $OA = 0.5$ м, $AB = 0.4$ м, $AC = 0.45$ м, $BD = 0.4$ м; $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

Решение

1. Вычисляем угловые скорости звеньев механизма и скорости точек A , B , C , E . Вводим систему координат xyz (рис. 4.10). Ось z перпендикулярна плоскости чертежа. Составляем кинематические уравнения:

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_{OA} \times \vec{OA} + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AB} + \vec{\omega}_{BD} \times \vec{BD} &= 0, \\ \vec{v}_A &= \vec{\omega}_{OA} \times \vec{OA}, \\ \vec{v}_B &= \vec{\omega}_{BD} \times \vec{DB}, \\ \vec{v}_C &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AC} \times \vec{AC}, \\ \vec{v}_E &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AE}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Так как скорость ползуна горизонтальна и $v_{Cy} = 0$, система пяти векторных уравнений (или десяти скалярных уравнений в проекциях на оси x, y) содержит десять неизвестных: ω_{ABz} , ω_{BDz} , ω_{ACz} , v_{Ax} , v_{Ay} , v_{Bx} , v_{By} , v_{Ex} , v_{Ey} , v_{Cx} . Решая ее, получаем проекции скоростей,

$$\begin{aligned}v_{Ax} &= v_{Bx} = v_{Ex} = -0.866 \text{ м/с}, \\ v_{Ay} &= v_{By} = v_{Ey} = -0.5 \text{ м/с}, \quad v_{Cx} = -1.366 \text{ м/с},\end{aligned}$$

и угловые скорости,

$$\omega_{BDz} = 2.5 \text{ рад/с}, \quad \omega_{ABz} = 0, \quad \omega_{ACz} = -1.571 \text{ рад/с}.$$

2. Вычисляем ускорения точек A , B , C , E . Составляем кинематические уравнения с учетом того, что, по условию, стержень OA вращается равномерно: $\varepsilon_{OAz} = 0$,

$$\begin{aligned} & \vec{\varepsilon}_{OA} \times \vec{OA} + \vec{\varepsilon}_{AB} \times \vec{AB} + \vec{\varepsilon}_{BD} \times \vec{BD} + \\ & \quad + \vec{\omega}_{OA} \times (\vec{\omega}_{OA} \times \vec{OA}) + \\ & \quad + \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{AB}) + \\ & \quad + \vec{\omega}_{BD} \times (\vec{\omega}_{BD} \times \vec{BD}) = 0, \\ & \vec{a}_A = \vec{\omega}_{OA} \times (\vec{\omega}_{OA} \times \vec{OA}), \\ & \vec{a}_B = \vec{\varepsilon}_{BD} \times \vec{DB} + \vec{\omega}_{BD} \times (\vec{\omega}_{BD} \times \vec{DB}), \\ & \vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{AC} \times \vec{AC} + \vec{\omega}_{AC} \times (\vec{\omega}_{AC} \times \vec{AC}), \\ & \vec{a}_E = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{AB} \times \vec{AE} + \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{AE}). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Первое уравнение в этой системе представляет собой векторную форму записи уравнения трех угловых ускорений четырехзвенника $OABD$. Так как вектор ускорения ползуна горизонтальный и $a_{Cy} = 0$, система пяти векторных уравнений (или десяти скалярных в проекциях на ось x и ось y) содержит десять неизвестных: ε_{ABz} , ε_{BDz} , ε_{ACz} , a_{Ax} , a_{Ay} , a_{Bx} , a_{By} , a_{Ex} , a_{Ey} , a_{Cx} . Решая систему (4.3), получаем проекции ускорений,

$$\begin{aligned} a_{Ax} &= a_{Bx} = a_{Ex} = 1 \text{ м/с}^2, \quad a_{Ay} = -1.732 \text{ м/с}^2, \\ a_{By} &= -2.309 \text{ м/с}^2, \quad a_{Ey} = -2.021 \text{ м/с}^2, \quad a_{Cx} = 0.839 \text{ м/с}^2, \end{aligned}$$

и угловые ускорения,

$$\varepsilon_{BDz} = 0.722 \text{ рад/с}^2, \quad \varepsilon_{ABz} = -1.443 \text{ рад/с}^2, \quad \varepsilon_{ACz} = -2.974 \text{ рад/с}^2.$$

Концы векторов ускорений точек неизменяемого отрезка лежат на одной прямой. Точка E лежит в центре отрезка AB . Отсюда следует простая проверка решения:

$$a_{Ex} = (a_{Ax} + a_{Bx})/2, \quad a_{Ey} = (a_{Ay} + a_{By})/2.$$

3. Вычисляем силы тяжести и силы инерции материальных точек.

Вычисляем силы тяжести:

$$\begin{aligned} G_{Ay} &= -m_A g = -19.62 \text{ Н}, & G_{By} &= -m_B g = -29.43 \text{ Н}, \\ G_{Cy} &= -m_C g = -39.24 \text{ Н}, & G_{Ey} &= -m_E g = -49.05 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Вычисляем силы инерции $\vec{\Psi} = -m\vec{a}$ по Даламберу:¹

$$\begin{aligned} \Psi_{Ax} &= -m_A a_{Ax} = -2 \text{ Н}, & \Psi_{Ay} &= -m_A a_{Ay} = 3.464 \text{ Н}, \\ \Psi_{Bx} &= -m_B a_{Bx} = -3 \text{ Н}, & \Psi_{By} &= -m_B a_{By} = 6.927 \text{ Н}, \\ \Psi_{Ex} &= -m_E a_{Ex} = -5 \text{ Н}, & \Psi_{Ey} &= -m_E a_{Ey} = 10.105 \text{ Н}, \\ \Psi_{Cx} &= -m_C a_{Cx} = -3.356 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Силу трения направляем в сторону, противоположную движению ползуна. Моменты трения вращают в сторону, противоположную вращению соответствующего кривошипа:

$$\begin{aligned} F_{\text{тр.}x} &= -F_{\text{тр}} v_{Cx} / |v_{Cx}|, \\ M_{\text{тр.}BDz} &= -M_{\text{тр}} \omega_{BDz} / |\omega_{BD}|, \quad M_{\text{тр.}OAz} = -M_{\text{тр}} \omega_{OAz} / |\omega_{OA}|. \end{aligned}$$

4. Записываем общее уравнение динамики:

$$\begin{aligned} &G_{Ay} v_{Ay} + G_{By} v_{By} + G_{Cy} v_{Cy} + G_{Ey} v_{Ey} + F_{\text{тр.}x} v_{Cx} + \\ &+ \Psi_{Ax} v_{Ax} + \Psi_{Ay} v_{Ay} + \Psi_{Bx} v_{Bx} + \Psi_{By} v_{By} + \\ &+ \Psi_{Ex} v_{Ex} + \Psi_{Ey} v_{Ey} + \Psi_{Cx} v_{Cx} + M_{OAz} \omega_{OAz} + \\ &+ M_{\text{тр.}OAz} \omega_{OAz} + M_{\text{тр.}BDz} \omega_{BDz} = 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Заметим, что слагаемые $\Psi_{Ax} v_{Ax}$ и $\Psi_{Ay} v_{Ay}$ дают в сумме мощность силы $\vec{\Psi}_A$, равную нулю, так как при равномерном вращении звена OA сила $\vec{\Psi}_A = -m_A \vec{a}$ является центробежной силой инерции и ее момент относительно O равен нулю. Отсюда равна нулю и ее мощность.

Находим из уравнения (4.4) искомый момент: $M_{OA} = 140.69 \text{ Нм}$. План решения задачи математической статистики:

¹ Даламбер Ж. Л. (1717–1783) — французский математик, механик, философ.

1. Решить задачу 4 раза при разных значениях момента трения $M_{fr,i}$, $i = 1, \dots, 4$. Получить значения момента $M_{OA,i}$, $i = 1, \dots, 4$.
2. Вычислить математическое ожидание момента

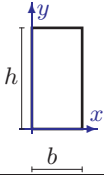
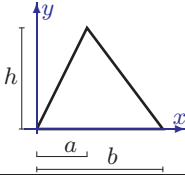
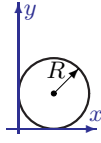
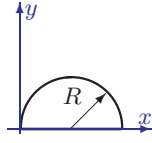
$$M(M_{OA}) = \sum_{i=1}^4 M_{OA,i} p_i.$$

3. Найти дисперсию

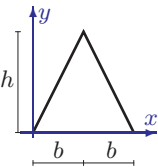
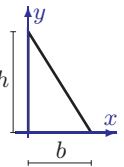
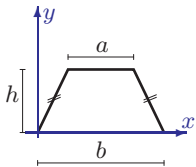
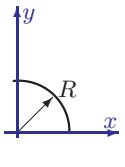
$$D(M_{OA}) = \sum_{i=1}^4 M_{OA,i}^2 p_i - M(M_{OA})^2 = \sum_{i=1}^4 (M_{OA,i} - M(M_{OA}))^2 p_i.$$

Приложение. Геометрические характеристики сечений

Таблица П.1

				
F	bh	$\frac{bh}{2}$	πR^2	$\frac{\pi R^2}{2}$
x_c	$\frac{b}{2}$	$\frac{a+b}{3}$	R	R
y_c	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{3}$	R	$\frac{4R}{3\pi}$
J_x	$\frac{bh^3}{3}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{5\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{8}$
J_y	$\frac{hb^3}{3}$	$\frac{hb(a^2 + ab + b^2)}{12}$	$\frac{5\pi R^4}{4}$	$\frac{5\pi R^4}{8}$
J_{xy}	$\frac{b^2 h^2}{4}$	$\frac{bh^2(b + 2a)}{24}$	πR^4	$\frac{2R^4}{3}$
J_{xc}	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	$R^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right)$
J_{yc}	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{hb(a^2 - ab + b^2)}{36}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{8}$
J_{xyc}	0	$\frac{h^2 b(2a - b)}{72}$	0	0

**Равнобедренный треугольник, прямоугольный
треугольник, равнобедренная трапеция и четверть круга**

				
F	bh	$\frac{bh}{2}$	$\frac{h(a+b)}{2}$	$\frac{\pi R^2}{4}$
x_c	b	$\frac{b}{3}$	$b/2$	$\frac{4R}{3\pi}$
y_c	$\frac{h}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{h(b+2a)}{3(a+b)}$	$\frac{4R}{3\pi}$
J_x	$\frac{bh^3}{6}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{h^3(3a+b)}{12}$	$\frac{\pi R^4}{16}$
J_y	$\frac{7hb^3}{6}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{h(a+b)(a^2+7b^2)}{48}$	$\frac{\pi R^4}{16}$
J_{xy}	$\frac{b^2h^2}{3}$	$\frac{b^2h^2}{24}$	$\frac{bh^2(2a+b)}{12}$	$\frac{R^4}{8}$
J_{xc}	$\frac{bh^3}{18}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{h^3((a+b)^2+2ab)}{36(a+b)}$	$R^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right)$
J_{yc}	$\frac{hb^3}{6}$	$\frac{hb^3}{36}$	$\frac{h(a+b)(a^2+b^2)}{48}$	$R^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right)$
J_{xy_c}	0	$-\frac{h^2b^2}{72}$	0	$R^4 \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi} \right)$

В таблицах П.1 и П.2 даны площадь фигуры F , координаты центра тяжести x_c, y_c , осевые (J_x, J_y) и центробежный J_{xy} моменты инерции относительно заданных осей и центральные моменты инерции J_{xc}, J_{yc}, J_{xy_c} (относительно осей, проходящих через центр тяжести фигуры параллельно заданным).

Двутавры стальные горячекатаные, ГОСТ 8239-89

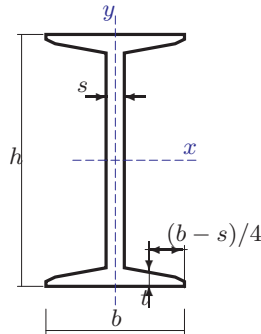


Таблица 2

	ρ	Размеры, мм				F	J_x	W_x	S_x	J_y	W_y
	кг/м	h	b	s	t	см ²	см ⁴	см ³	см ³	см ⁴	см ³
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	23	17,9	6,49
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	33,7	27,9	8,72
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	46,8	41,9	11,5
16	15,9	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	62,3	58,6	14,5
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	81,4	82,6	18,4
20	21,0	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	104	115	23,1
22	24,0	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	131	157	28,6
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	163	198	34,5
27	31,5	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	210	260	41,5
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	268	337	49,9
33	42,2	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	339	419	59,9
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	423	516	71,1
40	57,0	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	545	667	86,1
45	66,5	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	708	808	101
50	78,5	500	170	10,0	15,2	100	39727	1589	919	1043	123
55	92,6	550	180	11,0	16,5	118	55962	2035	1181	1356	151
60	108,0	600	190	12,0	17,8	138	76806	2560	1491	1725	182

Швеллеры стальные горячекатаные, ГОСТ 8240-89

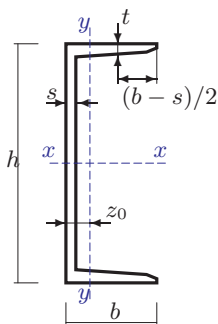


Таблица 3

	ρ	Размеры, мм				F	J_x	W_x	S_x	J_y	W_y	z_0
	кг/м	h	b	s	t	см ²	см ⁴	см ³	см ³	см ⁴	см ³	см
5	4,84	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	5,59	5,61	2,75	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	9,01	8,7	3,68	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	13,3	12,8	4,75	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	20,4	20,4	6,46	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	29,6	31,2	8,52	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	40,8	45,4	11,0	1,67
16	14,2	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	54,1	63,3	13,8	1,8
16a	15,3	160	68	5	9	19,5	823	103	59,4	78,8	16,4	2
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	69,8	86	17	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	76,1	105	20	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	87,7	113	20,5	2,07
22	21	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	110	151	25,1	2,21
24	24	240	90	5,6	10	30,6	2900	242	139	208	31,6	2,42
27	27,7	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	178	262	37,3	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	224	327	43,6	2,52
33	36,5	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	281	410	51,8	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	350	513	61,7	2,68
40	48,3	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	444	642	73,4	2,75

Уголки стальные горячекатаные, ГОСТ 8509-86

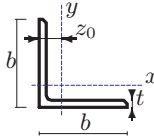


Таблица 4

	ρ	b	t	F	J_x	J_{\max}	$ J_{xy} $	z_0
	кг/м	мм		см ²	см ⁴			см
5	3,05	50	4	3,89	9,21	14,6	5,42	1,38
	3,77		5	4,80	11,2	17,8	6,57	1,42
5,6	3,44	56	4	4,38	13,1	20,8	7,69	1,52
	4,25		5	5,41	16,0	25,4	9,41	1,57
6,3	3,90	63	4	4,96	18,9	29,9	11	1,69
	4,80		5	6,13	23,1	36,8	13,7	1,74
	5,70		6	7,28	27,1	42,9	15,9	1,78
7	5,38	70	5	6,86	31,9	50,7	18,7	1,90
	6,39		6	8,15	37,6	59,6	22,1	1,94
7,5	5,80	75	5	7,39	39,5	62,6	23,1	2,02
	6,89		6	8,78	46,6	73,9	27,3	2,06
	7,96		7	10,1	53,3	84,6	31,2	2,1
8	6,78	80	5,5	8,63	52,7	83,6	30,9	2,17
	7,36		6	9,38	57,0	90,4	33,4	2,19
	8,51		7	10,8	65,3	104	38,3	2,23
9	8,33	90	6	10,6	82,1	130	48,1	2,43
	9,64		7	12,3	94,3	150	55,4	2,47
	10,9		8	13,9	106,0	168	62,3	2,51
10	10,8	100	7	13,8	131,0	207	76,4	2,71
	12,2		8	15,6	147,0	233	86,3	2,75
	15,1		10	19,2	179,0	284	110	2,83
	17,9		12	22,8	209,0	331	122	2,91
11	11,9	110	7	15,2	176,0	279	106	2,96
	13,5		8	17,2	198,0	315	116	3,00
12,5	15,5	125	8	19,7	294,0	467	172	3,36
	17,3		9	22,0	327,0	520	192	3,40
	19,1		10	24,3	360,0	571	211	3,45
	22,7		12	28,9	422,0	670	248	3,53
14	19,4	140	9	24,7	466,0	739	274	3,78
	21,5		10	27,3	512,0	814	301	3,82
	25,5		12	32,5	602,0	957	354	3,90
16	24,7	160	10	31,4	774,0	1229	455	4,30
	27,0		11	34,4	844,0	1340	496	4,35
	29,4		12	37,4	913,0	1450	537	4,39
	34,0		14	43,6	1046,0	1662	615	4,47
	38,5		16	49,1	1175,0	1866	690	4,55
18	30,5	180	11	38,8	1216,0	1933	716	4,85
	33,1		12	42,2	1317,0	2093	776	4,89

Список рекомендованной литературы

Основной

1. *Болотин, В.В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений / В.В. Болотин. – М.: Стройиздат. – 1982. – Т. 351. – С. 2.
2. *Вентцель, Е.С.* Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – «Юстиция», 2018. – 658 с.

Дополнительный

3. *Гмурман, В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / В.Е. Гмурман. – Litres, 2022. – 479 с.
4. *Кирсанов, М.Н.* Maple и Maplet. Решение задач механики / М.Н. Кирсанов. – СПб.: Лань, 2022. – 512 с.
5. *Кирсанов, М.Н.* Решебник. Теоретическая механика / М.Н. Кирсанов / Под ред. А.И. Кириллова. – М.: Физматлит, 2002. – 384 с.
6. *Кирсанов, М.Н.* Теоретическая механика. Сборник задач / М.Н. Кирсанов. – М.: ИНФРА-М, 2021. – 430 с.
7. *Кирсанов, М.Н.* Сборник экзаменционных задач по динамике / М.Н. Кирсанов. – М.: МЭИ, 2005. – 96 с.
8. *Лукашенко, В.И.* Курс лекций по дисциплине «Вероятностные методы строительной механики и теория надежности строительных конструкций»: учеб. пособие / В.И. Лукашенко. – Казань: Изд-во КГАСУ, 2016. – 219 с.
9. *Л.С. Минин* Расчетные и тестовые задания по сопротивлению материалов / Л.С. Минин, В.Е. Хроматов, Ю.П. Самсонов / Под ред. В.Е. Хроматова. – М.: Высш.шк., 2008. – 224 с.
10. Механика материалов и конструкций. Сборник задач / Ю.А. Окопный, В.П. Радин, В.Е. Хроматов и др. / Под ред. В. П. Чиркова. – М.: Машиностроение, 2004. – 416 с.
11. *Просветов, Г.И.* Теория вероятностей и математическая статистика: задачи и решения: учеб.-практ. пособие / Г.И. Просветов. – М.: Альфа-Пресс, 2009. – 268 с.

12. *Стрелецкий, Н.С.* Основы статистического учета коэффициента запаса прочности сооружений / Н.С. Стрелецкий. – М.: Стройиздат, 1947. – 95 с.
13. *Хроматов, В.Е.* Научная школа академика В.В. Болотина в МЭИ / В.Е. Хроматов / Вестник МЭИ, 2016. – № 1. – С. 84–89.
14. *В.Е. Хроматов, Л.С. Минин, Ю.П. Самсонов* Сопротивление материалов. Расчетные и тестовые задания: учеб. пособие / В.Е. Хроматов, Л.С. Минин, Ю.П. Самсонов / Москва, 2018. – Сер. 58 Бакалавр. Академический курс. – 224 с.