

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Российский фонд фундаментальных исследований  
Казанский (Приволжский) федеральный университет  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

---

**Международная школа  
«Математическое моделирование фундаментальных объектов  
и явлений в системах компьютерной математики»  
KAZCAS-18**

**Международная научно-практическая конференция  
«Информационные технологии в образовании и науке»  
ИТОН-2018**

**Сборник материалов**

*(28 октября – 3 ноября 2018 г., Казань)*

---



Казанский (Приволжский) федеральный университет

2018

**УДК 530.12+531.51+517.944+519.713+514.774+519.8**  
**ББК 22.632**  
**М43**

Печатается по решению организационного комитета международной школы  
«KAZCAS-2018»

Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук,  
*проф. Ю.Г. Игнатъева*

**М43** Международная школа «Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики» – «KAZCAS-2018» // Лекции и материалы школы / Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук, проф. Ю.Г. Игнатъева — Казань: Академия наук РТ, 2018. - 313 с.

**ISBN 978-5-9690-0466-5**

Материалы сборника предназначены для научных сотрудников, аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области физико-математических, информационно-технологических наук.

**The international school " Mathematical modeling of fundamental objects and phenomena in computer mathematics systems-KAZCAS-2018" // Lectures and Proceedings of the school. Under the general edition of Yu.G. Ignat'ev. – Kazan: Academy of science of the Republic of Tatarstan Press, 2018. – 313 p.**

The book of conference proceedings are intended for researchers, graduate students, undergraduates and senior students specializing in the field of physical and mathematical, information technology sciences.

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований – грант РФФИ – 18-31-10044\18.

**УДК**  
**530.12+531.51+517.944+519.713+514.774+519.8**  
**ББК 22.632**

**ISBN 978-5-9690-0466-5**

© Коллектив авторов, 2018  
© Лаборатория информационных технологий  
в математическом образовании  
Института математики и механики КФУ, 2018  
© Изд-во Академии наук РТ, 2018

## СОДЕРЖАНИЕ

### ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-18»

<i>Д.П. Голоскоков.</i> Решение интегральных уравнений в системе Maple. . . . .	7
<i>М.Н. Кирсанов.</i> Плоские фермы. Методы решений. . . . .	25
<i>Э.В. Чеботарева.</i> Реализация технологии STEM на примере проекта «Робот-художник». . . . .	52

### МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-18» И КОНФЕРЕНЦИИ «ИТОН-2018»

<i>М.М. Абрамский.</i> О вопросах разработки цифровых образовательных сред . . . . .	58
<i>Т.Г. Авачева, Э.А. Кадырова, М.А. Шмонова.</i> Возможности применения дистанционных образовательных технологий в условиях медицинского университета . . . . .	60
<i>Д.С. Александров.</i> Анимированный узорный рисунок на координатной плоскости . . . . .	62
<i>А.Д. Амосова, Е.Р. Садыкова.</i> Диагностика уровня развития логического мышления учащихся в процессе обучения геометрии . . . . .	64
<i>Н.А. Белянкин, А.Ю. Бойко, А.А. Плясова.</i> Формулы для прогиба многорешетчатой фермы при несимметричном нагружении. . . . .	67
<i>А.А. Васильева.</i> Уравнение эллиптического типа в Maple: краевая задача для уравнения эллиптического типа, пример в Maple . . . . .	72
<i>Д.В. Галицкова.</i> Уравнения эллиптического типа в Maple: решение уравнения Пуассона для заряда. Решение в Maple и анимация. . . . .	82
<i>К.Ф. Гайфаров.</i> Уравнение гиперболического типа в Maple: вывод уравнения колебания стержня пример Maple для ограниченного стержня. . . . .	90
<i>П.О. Гафурова.</i> Форумы в системе научных коммуникаций . . . . .	102
<i>А.И. Гибадуллина.</i> Опыт использования Maple–графики в школьных проектах . . . . .	103
<i>Т.А. Дьячкова.</i> Изучение основ компьютерного зрения в рамках курса образовательной робототехники . . . . .	105
<i>Т.А. Дьячкова.</i> Уравнения параболического типа в Maple: вывод уравнения из вариационного принципа и анимация решения для бесконечного стержня . . . . .	106
<i>Е.А. Ефремова.</i> Уравнения параболического типа в Maple: метод разделения переменных в уравнении параболического типа. Решение в Maple и анимация. . . . .	116
<i>Э.В. Завитаев, Ю.Д. Маерина.</i> Система дистанционного обучения на примере использования образовательной платформы MOODLE . . . . .	125
<i>Н.В. Зайцева.</i> Математическое моделирование задачи газовой динамики . . . . .	127
<i>Н.В. Зайцева, Ш.М. Хайдаров.</i> Плагин автоматизированного формирования метаданных документов цифровой математической библиотеки Lobachevskii DML . . . . .	129
<i>Э.Р. Ибрагимова.</i> Моделирование анимированного каскада открывающихся матрёшек в среде системы Maple . . . . .	130
<i>И.И. Иванова.</i> Использование современных интерактивных средств в образовании . . . . .	135
<i>М.А. Иорданский, Н.А. Мухин.</i> Использование тренажера «Конструктор графов» при изучении теории графов. . . . .	139
<i>A.V. Kazantsev, M.I. Kinder.</i> Generalized reduced module of a domain over the unit disc with circular and radial slits . . . . .	143
<i>М.И. Киндер.</i> Многоуровневые задачи на соревнованиях по математике и информатике . . . . .	151
<i>М.Э. Копарова.</i> Уравнения гиперболического типа в Maple: продольные колебания стержня. . . . .	158
<i>Д.М. Коростелева, Т.Ю. Гайнутдинова.</i> Эффективные способы оценки уровня сформированности алгоритмического мышления учащихся . . . . .	166
<i>И.Д. Михайлов.</i> Уравнение гиперболического типа в Maple: Колебание прямоугольной мембраны и его реализация в Maple . . . . .	170
<i>Е.С. Моисеева.</i> Создание проекта для старшеклассников на тему: «Солнечная система» . . . . .	176

<i>Ш.А. Муртазин.</i> Моделирование анимированного изображения «колба с пузырьками» в среде системы Maple . . . . .	181
<i>Л.А. Мухаметшина.</i> Моделирование простейших геометрических фракталов средствами пакета Maple . . . . .	182
<i>А.М. Нигмедзянова.</i> Графика в среде программирования OCTAVE . . . . .	186
<i>Е.Д. Ощепков.</i> Цепи Маркова и проблема Коллатца . . . . .	197
<i>И.Н. Попов.</i> Суммы квадратов матрицы: от гипотез к теоремам . . . . .	199
<i>Н.М. Попова, Н.Г. Сабитова, А.В. Рапенкова.</i> Система электронного обучения в медицинском ВУЗе . . . . .	206
<i>Н.В. Потапова, А.В. Большаков.</i> Информационные технологии в обучении студентов . . . . .	209
<i>О.В. Разумова.</i> Компьютерные обучающие программы с игровой компонентой на уроках математики . . . . .	215
<i>М.В. Рожкова.</i> Граф вложений простых чисел . . . . .	218
<i>М.В. Рожкова, И.А. Драйчиков.</i> Проблема Гольдбаха: поиск наименьшего слагаемого . . . . .	221
<i>М.В. Рожкова, Г.В. Кашкин.</i> Локальное распределение простых чисел . . . . .	225
<i>Е.Е. Романова.</i> Maple-приложение к задачку А.П. Рымкевича по физике . . . . .	230
<i>З.Ф. Сабитова.</i> Уравнение эллиптического типа в Maple: функции Бесселя второго рода . . . . .	233
<i>А.Р. Сайфуллина.</i> Уравнения гиперболического типа в Maple: метод Фурье и его реализация в Maple . . . . .	240
<i>А.Р. Самигуллина.</i> Балльно-рейтинговая система контроля в системе компьютерной математики Maple . . . . .	256
<i>Л.Р. Секаева.</i> Теоретический материал для использования в дистанционном обучении. . . . .	260
<i>Л.Р. Секаева.</i> Решение некоторых задач с использованием программы «МАХИМА» . . . . .	264
<i>Л.Р. Секаева.</i> Разработка теоретических основ процесса извлечения твердых нефтепродуктов при термическом воздействии . . . . .	269
<i>П.А. Стахурская.</i> Вычислительные аспекты экспериментальной теории чисел . . . . .	274
<i>Р.Ш. Хакова.</i> Разработка методических материалов курса по основам решения математических задач средствами робототехники . . . . .	278
<i>З.Р. Харисова.</i> Разработка методических материалов к разделу «Робот в лабиринте» для курса робототехники . . . . .	279
<i>З.Р. Харисова.</i> Уравнения параболического типа в Maple: начально-краевые условия для уравнения параболического типа, получение общего решения и его анимация в Maple . . . . .	280
<i>Ю.М. Хрисанова.</i> Уравнения параболического типа в Maple: метод Фурье решения уравнения параболического типа, анимация решения . . . . .	292
<i>Чан Куанг Куи, А.П. Кирпичников.</i> Суммарное количество заявок в системе массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания заявки в очереди. . . . .	301
<i>Э.В. Чеботарева, Р.Н. Абдрахманова.</i> Образовательный проект «Балансирующий робот» . . . . .	303
<i>Н.А. Чугунова.</i> Уравнения гиперболического типа в Maple: метод разделения переменных и его реализация в Maple. . . . .	304
<i>О.А. Широкова.</i> Объектно-ориентированный проект построения фракталов. . . . .	309

## АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ



## ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-18»

---



ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-18»

---

**Д.П. Голоскоков**

**Решение интегральных уравнений в системе Maple**

---



---

Казань, Казанский федеральный университет, 28 октября – 3 ноября 2018

УДК 530.12:531.51:519.711.3

**РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СИСТЕМЕ MAPLE**Д.П. Голоскоков<sup>1</sup><sup>1</sup> *dpg1954@mail.ru*; Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича

*Разобраны примеры решения интегральных уравнений в системе Maple с помощью команды intsolve. Рассмотрены возможности Maple для получения точного и приближенного решения уравнений в случаях, когда эти уравнения не решаются командой intsolve.*

**Ключевые слова:** интегральные уравнения, уравнения Фредгольма, уравнения Вольтерры, система символьных вычислений Maple.

**СОДЕРЖАНИЕ:**

1	Интегральные уравнения . . . . .	7
2	Классы уравнений, допускающие явное решение при помощи специальных приемов . . . . .	8
3	Приближенные методы решения интегральных уравнений . . . . .	16
	Литература . . . . .	22

**1. Интегральные уравнения**

*Интегральными уравнениями* обычно называют *уравнения, содержащие неизвестную функцию под знаком определенного интеграла*, как одномерного, так и кратного. Теория интегральных уравнений составляет сейчас внушительный раздел математического анализа и имеет большое теоретическое и прикладное значение. Отдельные интегральные уравнения встречались уже в первой половине XIX века; систематическая их теория была заложена на рубеже XIX и XX веков в работах математиков В.Вольтерры (V.Volterra, 1860-1940), Э.И.Фредгольма (E.I.Fredholm, 1866-1927), Д.Гильберта (D.Hilbert, 1862-1943) и других. Интегральные уравнения являются одним из наиболее плодотворных средств математического исследования, как в чистом, так и в прикладном анализе. Это относится, в частности, к задачам теории механических колебаний и соответствующих областей техники и теоретической физики, где интегральные уравнения не только полезны, но зачастую даже совершенно необходимы для численных расчетов.

Интегральные уравнения можно разделить на два больших класса: линейные и нелинейные интегральные уравнения. Интегральное уравнение называется линейным, если в него неизвестная функция входит линейно. Решить интегральное уравнение — найти такую функцию, которая обращает данное уравнение в верное тождество.

Интегральные уравнения подразделяются на *уравнения 1-го рода* и *уравнения 2-го рода*. В уравнения 1-го рода неизвестная функция входит только под знаком интеграла. В уравнения 2-го рода неизвестная функция входит как под знаком интеграла, так и вне интеграла. Уравнения 1-го и 2-го рода могут быть с постоянными пределами интегрирования, а могут иметь переменный верхний предел. Уравнения с постоянными пределами интегрирования называются *уравнениями Фредгольма*, а уравнения с переменным верхним пределом называются *уравнениями Вольтерры*.

Таким образом, линейное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода имеет вид

$$\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), a \leq x \leq b.$$

Линейное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода имеет вид

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), a \leq x \leq b.$$

Линейное интегральное уравнение Вольтерры 1-го рода имеет вид

$$\int_a^x K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), a \leq x.$$

Линейное интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода имеет вид

$$\varphi(x) - \int_a^x K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), a \leq x.$$

Во всех перечисленных уравнениях  $\varphi(x)$  — неизвестная искомая функция;  $f(x)$  — заданная функция, называемая свободным членом интегрального уравнения;  $K(x, y)$  — заданная функция, называемая ядром интегрального уравнения.

Уравнения 2-го рода иногда записывают с параметром  $\lambda$  так:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), a \leq x \leq b$$

или

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), a \leq x.$$

Тогда уравнения представляют собой не одно уравнение, а семейство уравнений, зависящее от числового параметра. Параметр  $\lambda$  может быть отнесен к ядру уравнения. Пределы интегрирования  $a, b$  могут быть как конечными, так и бесконечными.

Нелинейные уравнения настолько разнообразны, что даже их классификация затруднительна. Отметим только нелинейное уравнение Урысона

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, y, \varphi(y)) dy.$$

*Нелинейное уравнение Вольтерры*

$$\varphi(x) = \int_a^x K(x, y, \varphi(y)) dy.$$

Функция  $K(x, y, \varphi)$  обычно предполагается непрерывной по совокупности аргументов  $x, y, \varphi$  при  $a \leq x \leq b, a \leq y \leq b; -M \leq \varphi \leq M$ , где  $M > 0$  — достаточно большая постоянная.

Мы будем заниматься исключительно линейными уравнениями.

Цель настоящей лекции — показать на примерах как можно решать различные интегральные уравнения в системе Maple.

## 2. Классы уравнений, допускающие явное решение при помощи специальных приемов

Можно выделить некоторые классы уравнений, допускающие явное решение при помощи специальных приемов. Это — уравнения Вольтерры с ядром, зависящим от разности, уравнения Абеля, уравнения Фредгольма с ядром, зависящим от разности и пределами от  $-\infty$  до  $+\infty$ , уравнения Фредгольма с ядрами, зависящими от суммы и произведения, интегральные уравнения Фредгольма с вырожденным ядром. Рассмотрим некоторые примеры.

*Уравнения Вольтерры 2-го рода с ядром, зависящим от разности*

Уравнения вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x-y) \varphi(y) dy = f(x), a \leq x,$$

а также аналогичные уравнения 1-го рода

$$\int_a^x K(x-y)\varphi(y)dy = f(x), a \leq x$$

представляют собой важный специальный класс интегральных уравнений Вольтерры, которые обычно называются *уравнениями типа свертки*, так как операция

$$\{K, \varphi\} = \int_a^x K(x-y)\varphi(y)dy$$

представляет собой свертку двух функций  $K$  и  $\varphi$ . Заметим, что, не теряя общности, можно считать нижний предел интегрирования равным нулю:  $a = 0$ . Действительно, сделав замену переменной  $x - a = \xi, y - a = \eta$ , мы приходим к уравнению

$$\varphi(a + \xi) - \lambda \int_a^\xi K(\xi - \eta)\varphi(\eta)d\eta = f(\xi), \xi \geq 0.$$

Далее мы будем рассматривать уравнения вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x-y)\varphi(y)dy = f(x), x \geq 0. \quad (1)$$

Основным средством изучения подобных уравнений служит преобразование Лапласа, поскольку это преобразование при некоторых ограничениях преобразует свертку в обыкновенное произведение. Таким образом, решение интегрального уравнения сводится к обращению преобразования Лапласа.

Применяем преобразование Лапласа к уравнению (1). В результате получим

$$\bar{\varphi} - \lambda \bar{K} \bar{\varphi} = \bar{f} \Rightarrow \bar{\varphi}(1 - \lambda \bar{K}) = \bar{f} \Rightarrow \bar{\varphi} = \frac{\bar{f}}{1 - \lambda \bar{K}}. \quad (2)$$

Здесь, как обычно, введены обозначения преобразований Лапласа функций

$$\bar{\varphi} = \int_0^\infty \varphi(x)e^{-px}dx, \bar{K} = \int_0^\infty K(t)e^{-pt}dt, \bar{f} = \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx.$$

Таким образом, обращая уравнение (2), находим

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{f}(p)}{1 - \lambda \bar{K}(p)} e^{px} dp,$$

где прямая  $L$  расположена правее особых точек подынтегральной функции.

**Пример №1.** Решить интегральное уравнение Вольтерры

$$\varphi(x) = e^{-x} + \int_0^x \sin(x-y)\varphi(y)dy.$$

**Решение.** Ядро данного уравнения зависит от разности, поэтому решаем его с помощью преобразования Лапласа. Выполним все выкладки в Maple. Определим уравнение

```
> restart;with(inttrans,laplace,invlaplace):
> eq:=phi(x)=exp(-x)+int(sin(x-y)*phi(y),y=0..x);
```

$$eq := \phi(x) = e^{-x} + \int_0^x \sin(x-y)\phi(y)dy.$$

Применяем преобразование Лапласа и получаем уравнение для трансформанты Лапласа

```
> laplace(eq,x,p);
```

$$\text{laplace}(\phi(x),x,p) = \frac{1}{1+p} + \frac{\text{laplace}(\phi(x),x,p)}{p^2+1}$$

```
> subs(laplace(phi(x),x,p)=Phi,%);
```

$$\Phi = \frac{1}{1+p} + \frac{\Phi}{p^2+1}$$

Решаем уравнение для трансформанты

```
> solve(% ,Phi);
```

$$\frac{p^2+1}{(1+p)p^2}$$

Вычисляем обратное преобразование

```
> invlaplace(% ,p,x);
```

$$x + 2e^{-x} - 1$$

```
> phi:=unapply(% ,x);
```

$$\phi := x \rightarrow x + 2e^{-x} - 1$$

Делаем проверку

```
> simplify(lhs(eq)-rhs(eq));
```

0

Итак, решением нашего уравнения будет функция

$$\varphi(x) = 2e^{-x} + x - 1.$$

В системе Maple имеется специальная команда `intsolve`, позволяющая найти точные решения в замкнутой форме различных типов интегральных уравнений. Результат возвращается как явное уравнение с неизвестной функцией в левой части и решением в правой части. В некоторых случаях появляются произвольные постоянные в решении; они представлены как `_C1, _C2, ..., _Cn`, как и в выводе команды `dsolve`. Когда решение содержит интегралы, они представлены в инертной форме `Int`. Синтаксис команды: `intsolve(Inteqn, funcn)` или `intsolve(Inteqn, funcn, method = ..., order = ...)`. Здесь `Inteqn` — линейное интегральное уравнение в функции `funcn`; `funcn` — неизвестная функция для решения; `method = ...` — необязательная опция, правая часть может быть любой из следующих: `Neumann, Laplace, differentialequation, eigenfunction`; `order = ...` — необязательная опция, правая часть может быть положительным целым числом, указывая порядок приближения рядов при использовании метода Неймана.

Метод `Laplace` является дополнительным, используя преобразование Лапласа. Метод `Neumann` является также дополнительным и вычисляет последовательное приближение к решению. Команда `intsolve` может распознать интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерры первого и второго рода, а также однородные уравнения Фредгольма и Вольтерры.

Метод `Laplace` применим к уравнениям Вольтерры. Интегральное уравнение может содержать функции `Dirac` или `Heaviside`. Этот метод не годится, когда уравнение не обладает ядром типа свертки. Метод `Neumann` — применим к уравнениям Вольтерры и Фредгольма второго рода, и частично для уравнений Вольтерры первого рода. Порядок по умолчанию ряда Неймана в решении — `Order`. Это значение может быть переопределено, передавая дополнительный порядок `order = n`, где `n` — положительное целое число. Задание переменной `infolevel [intsolve]: = 1,2,3` или `5` дает дескриптивную информацию о продвижении вычисления, `5` может привести к чрезмерной печати.

Решим наше уравнение с помощью команды `intsolve`.

```
> phi:='phi':intsolve(eq, phi(x));
```

$$\phi(x) = x + 2e^{-x} - 1$$

Уравнения Фредгольма с ядром, зависящим от разности и пределами от  $-\infty$  до  $+\infty$

Рассмотрим уравнение следующего вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y) \varphi(y) dy = f(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (3)$$

Это уравнение также относится к уравнениям типа свертки; здесь операция

$$\{K, \varphi\} = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y) \varphi(y) dy$$

представляет собой свертку двух функций  $K$  и  $\varphi$ . Поэтому для решения уравнения (3) удобно воспользоваться преобразованием Фурье. Умножим уравнение (3) на  $e^{isx}$  и проинтегрируем по интервалу  $(-\infty, +\infty)$ . Получим

$$\tilde{\varphi} - \lambda \tilde{K} \tilde{\varphi} = \tilde{f}. \quad (4)$$

Здесь введены обозначения

$$\tilde{K}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) e^{ist} dt, \quad \tilde{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{ist} dt, \quad \tilde{\varphi}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{ist} dt.$$

Из уравнения (4) находим

$$\tilde{\varphi} = \frac{\tilde{f}}{1 - \lambda \tilde{K}}.$$

Отсюда, по формуле обращения, получим

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{f}}{1 - \lambda \tilde{K}} e^{-isx} ds.$$

Очевидно, для разрешимости уравнения (3) необходимо выполнение условия

$$1 - \lambda \tilde{K}(s) \neq 0, \quad -\infty < s < +\infty. \quad (5)$$

Такое условие не требовалось при рассмотрении уравнений Вольтерры 2-го рода (путь интегрирования в интеграле Римана-Меллина проходил правее всех особых точек подынтегральной функции, где  $1 - \lambda \tilde{K}(p) \neq 0$ ). Таким образом, из формулы (5) видно, что уравнение Фредгольма (3) разрешимо не при всех значениях параметра  $\lambda$ .

**Пример №2.** Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-\xi|} \varphi(\xi) d\xi \quad \left( \lambda < \frac{1}{2} \right),$$

где

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

**Решение.** Данное уравнение в бесконечных пределах с ядром, зависящим от разности. Поэтому для его решения применяем преобразование Фурье. Определим задачу в Maple:

```
> restart;with(inttrans,fourier,invfourier):
```

```
> f:=piecewise(x > 0,exp(-x),0 < x,0);
```

```
> convert(f,Heaviside);
```

$$f := \begin{cases} e^{-x} & 0 < x \\ 0 & 0 < x \end{cases}$$

$$e^{-x} \text{Heaviside}(x)$$

> f:=unapply(% ,x);

$$f := x \rightarrow e^{-x} \text{Heaviside}(x)$$

> assume(lambda<1/2):

eq:=y(x)=f(x)+lambda\*int(exp(-abs(x-s))\*y(s),s=-infinity..infinity);

$$eq := y(x) = e^{-x} \text{Heaviside}(x) + \lambda \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x+s|} y(s) ds \right)$$

Применяем преобразование Фурье и находим трансформанту Фурье

> fe:=fourier(eq,x,omega);

$$fe := \text{fourier}(y(x), x, \omega) = \frac{1}{i\omega + 1} + \frac{2\lambda \text{fourier}(y(x), x, \omega)}{\omega^2 + 1}$$

> subs(fourier(y(x),x,omega)=Y,fe);solve(%,{Y});assign(%)

$$Y = \frac{1}{i\omega + 1} + \frac{2\lambda Y}{\omega^2 + 1}$$

$$\left\{ Y = -\frac{\omega^2 + 1}{(i\omega + 1)(-\omega^2 + 2\lambda - 1)} \right\}$$

Вычисляем обратное преобразование

> y:=invfourier(Y,omega,x);

$$y := \frac{\frac{1}{2} e^{-\sqrt{-2\lambda+1}x} (\sqrt{-2\lambda+1} + 1) \text{Heaviside}(x) - \frac{1}{2} e^{\sqrt{-2\lambda+1}x} (\sqrt{-2\lambda+1} - 1) \text{Heaviside}(-x)}{\sqrt{-2\lambda+1}}$$

Выполним проверку решения

> y:=unapply(y,x):simplify(lhs(eq)-rhs(eq));

$$\begin{cases} \text{undefined} & x = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Итак, решением нашего уравнения является функция

$$y(x) = \frac{e^{-x\sqrt{1-2\lambda}} (1 + \sqrt{1-2\lambda}) \theta(x) + e^{x\sqrt{1-2\lambda}} (1 - \sqrt{1-2\lambda}) \theta(-x)}{2\sqrt{1-2\lambda}},$$

где  $\theta(x)$  — единичная функция Хевисайда, причем  $\theta(-x) = 1 - \theta(x)$ .

Это решение может быть записано и в другой форме

$$y(x) = \begin{cases} \frac{e^{x\sqrt{1-2\lambda}} (1 - \sqrt{1-2\lambda})}{2\sqrt{1-2\lambda}}, & x < 0, \\ \frac{e^{-x\sqrt{1-2\lambda}} (1 + \sqrt{1-2\lambda})}{2\sqrt{1-2\lambda}}, & x > 0. \end{cases}$$

Отметим, что команда `intsolve` не может решить это уравнение!

*Интегральные уравнения Фредгольма с вырожденным ядром*

Существует класс интегральных уравнений, которые легко сводятся к линейным алгебраическим уравнениям. Такими интегральными уравнениями являются уравнения с так называемыми вырожденными ядрами.

Рассмотрим уравнение общего вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (6)$$



Мы скажем, что ядро этого уравнения вырождено, если его можно представить в виде

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(x) \beta_i(y). \quad (7)$$

Здесь  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  — непрерывные функции;  $N$  — конечно. Приведем примеры вырожденных ядер. Вырожденными ядрами будут функции:  $K(x, y) = (x + y)^2$ ,  $K(x, y) = \cos(x + y)$ ,  $K(x, y) = \sin^3(x + y)$ ,  $K(x, y) = P(x, y)$  — произвольный полином. Наоборот, ядра  $K(x, y) = e^{xy}$ ,  $K(x, y) = 1/\sqrt{1 + (x + y)^2}$  — не являются вырожденными.

Уравнения с вырожденным ядром допускают явное решение. Более того, решение уравнения общего вида можно аппроксимировать решением уравнения с вырожденным ядром.

Рассмотрим уравнение (6) с вырожденным ядром (7). Будем считать, что функция непрерывна и предположим, что существует решение уравнения (6) в классе непрерывных функций. Подставим формулу (7) в уравнение (6). Получим

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[ \sum_{i=1}^N \alpha_i(x) \beta_i(y) \right] \varphi(y) dy &= f(x) \Rightarrow \\ \varphi(x) - \lambda \sum_{i=1}^N \alpha_i(x) \int_a^b \beta_i(y) \varphi(y) dy &= f(x). \end{aligned}$$

Обозначим константы

$$C_i = \int_a^b \beta_i(y) \varphi(y) dy.$$

Тогда будем иметь

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{i=1}^N \alpha_i(x) C_i = f(x). \quad (8)$$

Отметим, что в формуле (8) функция  $f(x)$  задана,  $\alpha_i(x)$  — известные функции. Таким образом, задача сводится к определению числовых коэффициентов  $C_i$ . Если константы  $C_i$  найдены, то решение нашей задачи определяется по формуле

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^N C_i \alpha_i(x).$$

Ясно, что функция  $\varphi(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Чтобы найти коэффициенты  $C_i$ , умножим уравнение (8) на функции  $\beta_k(x)$  и проинтегрируем от  $a$  до  $b$ . Получим

$$\int_a^b \varphi(x) \beta_k(x) dx - \lambda \sum_{i=1}^N C_i \int_a^b \alpha_i(x) \beta_k(x) dx = \int_a^b f(x) \beta_k(x) dx. \quad (9)$$

Обозначим числовые константы

$$C_k = \int_a^b \varphi(x) \beta_k(x) dx, \alpha_{ik} = \int_a^b \alpha_i(x) \beta_k(x) dx, f_k = \int_a^b f(x) \beta_k(x) dx.$$

Тогда из уравнения (9) получим

$$C_k - \lambda \sum_{i=1}^N \alpha_{ik} C_i = f_k, k = 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

Совокупность уравнений (10) — система  $N$  линейных уравнений относительно  $N$  неизвестных  $C_i$ . Образует определитель системы (10)

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda \alpha_{11} & -\lambda \alpha_{21} & \dots & -\lambda \alpha_{N1} \\ -\lambda \alpha_{12} & 1 - \lambda \alpha_{22} & \dots & -\lambda \alpha_{N2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda \alpha_{1N} & -\lambda \alpha_{2N} & \dots & 1 - \lambda \alpha_{NN} \end{vmatrix}.$$

Ясно, что определитель  $D(\lambda)$  — полином степени  $n \leq N$  относительно  $\lambda$ . Рассмотрим уравнение  $D(\lambda) = 0$ . Это уравнение будет иметь  $n$  корней.

Окончательно результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

**Теорема.** *Интегральное уравнение (6) с вырожденным ядром (7) имеет единственное решение, если параметр  $\lambda$  отличен от корней характеристического уравнения  $D(\lambda) = 0$ ; не имеет решений или имеет бесчисленное множество решений, если параметр совпадает с каким-нибудь из корней уравнения.*

Случай бесконечного множества решений реализуется, в частности, когда  $f_k = 0, k = 1, 2, \dots, N$ , то есть система (10) — однородная. Равенство  $f_k = 0$  означает, что, либо  $f(x) = 0$ , либо  $f(x) \neq 0$ , но  $f(x)$  ортогональна ко всем функциям  $\beta_k(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

**Пример №3.** Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = x^2 + 2 \int_0^1 (1 + 3xy) \varphi(y) dy.$$

**Решение.** Данное уравнение является уравнением с вырожденным ядром. Решим его в системе Maple с помощью команды `intsolve`. Определим уравнение

```
> eq:=phi(x)=x^2+2*int((1+3*x*y)*phi(y),y=0..1);
```

$$eq := \phi(x) = x^2 + 2 \left( \int_0^1 (1 + 3xy) \phi(y) dy \right)$$

```
> intsolve(eq, phi(x));
```

$$\phi(x) = x^2 - \frac{5}{12} - \frac{1}{4}x$$

Выполним проверку

```
> phi:=unapply(rhs(%),x);simplify(eq);
```

$$\begin{aligned} \phi &:= x \rightarrow x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{5}{12} \\ x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{5}{12} &= x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{5}{12} \end{aligned}$$

**Пример №4.** Найти собственные значения и собственные функции однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x^2 + y^2) \varphi(y) dy.$$

**Решение.** Решаем в Maple:

```
> restart;
> eq:=phi(x)=lambda*int((x^2+y^2)*phi(y),y=0..1);
phi(x)=lambda*x^2*int(phi(y),y=0..1)+
lambda*int(y^2*phi(y),y=0..1);
```

$$eq := \phi(x) = \lambda \left( \int_0^1 (x^2 + y^2) \phi(y) dy \right)$$

$$\phi(x) = \lambda x^2 \left( \int_0^1 \phi(y) dy \right) + \lambda \left( \int_0^1 y^2 \phi(y) dy \right)$$

```
> eqn:=subs(int(phi(y),y=0..1)=C1,int(y^2*phi(y),y=0..1)=C2,%);
```

$$eqn := \phi(x) = C1\lambda x^2 + C2\lambda$$

```
> eqn1:=int(lhs(eqn),x=0..1)=int(rhs(eqn),x=0..1);
eqn2:=int(x^2*lhs(eqn),x=0..1)=int(x^2*rhs(eqn),x=0..1);
```

$$eqn1 := \int_0^1 \phi(x) dx = \frac{1}{3}C1\lambda + \lambda C2$$

$$eqn2 := \int_0^1 x^2 \phi(x) dx = \frac{1}{5}C1\lambda + \frac{1}{3}\lambda C2$$

```
> eqn1:=subs(int(phi(x),x=0..1)=C1,eqn1);
eqn2:=subs(int(x^2*phi(x),x=0..1)=C2,eqn2);
```

$$eqn1 := C1 = \frac{1}{3}C1\lambda + \lambda C2$$

$$eqn2 := C2 = \frac{1}{5}C1\lambda + \frac{1}{3}\lambda C2$$

```
> A:=linalg[genmatrix]({eqn1,eqn2},{C1,C2});
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{3}\lambda & -\lambda \\ -\frac{1}{5}\lambda & 1 - \frac{1}{3}\lambda \end{bmatrix}$$

```
> Delta:=linalg[det](A);
```

$$\Delta := 1 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{4}{45}\lambda^2$$

```
> res:=solve(Delta,lambda);
```

$$res := -\frac{15}{4} - \frac{9}{4}\sqrt{5}, -\frac{15}{4} + \frac{9}{4}\sqrt{5}$$

Итак, мы нашли собственные значения интегрального уравнения. Обозначим их  $\mu_1$  и  $\mu_2$ :

```
> mu[1]:=res[1];mu[2]:=res[2];
```

$$\mu_1 := -\frac{15}{4} - \frac{9}{4}\sqrt{5}$$

$$\mu_2 := -\frac{15}{4} + \frac{9}{4}\sqrt{5}$$

Найдем теперь собственные функции:

```
> e1:=subs(lambda=mu[1],eqn1);
e2:=subs(lambda=mu[1],eqn2);
solve({e1,e2},{C1,C2});
assign(%):
```

$$e1 := C1 = \frac{1}{3}C1 \left( -\frac{15}{4} - \frac{9}{4}\sqrt{5} \right) + \left( -\frac{15}{4} - \frac{9}{4}\sqrt{5} \right) C2$$

$$e2 := C2 = \frac{1}{5}C1 \left( -\frac{15}{4} - \frac{9}{4}\sqrt{5} \right) + \frac{1}{3} \left( -\frac{15}{4} - \frac{9}{4}\sqrt{5} \right) C2$$

$$\{C1 = -C2\sqrt{5}, C2 = C2\}$$

```
> factor(eqn);
```

$$\phi(x) = \frac{1}{5}\sqrt{5}\lambda C2 (-5x^2 + \sqrt{5})$$

```
> C1:='C1':C2:='C2':
e1:=subs(lambda=mu[2],eqn1);
e2:=subs(lambda=mu[2],eqn2);
solve({e1,e2},{C1,C2});
assign(%):
```

$$e1 := C1 = \frac{1}{3}C1 \left( -\frac{15}{4} + \frac{9}{4}\sqrt{5} \right) + \left( -\frac{15}{4} + \frac{9}{4}\sqrt{5} \right) C2$$

$$e2 := C2 = \frac{1}{5}C1 \left( -\frac{15}{4} + \frac{9}{4}\sqrt{5} \right) + \frac{1}{3} \left( -\frac{15}{4} + \frac{9}{4}\sqrt{5} \right) C2$$

$$\{C1 = C2\sqrt{5}, C2 = C2\}$$

> factor(eqn);

$$\phi(x) = \frac{1}{5}\sqrt{5}\lambda C2(5x^2 + \sqrt{5})$$

Итак, собственные функции найдены (обозначим их  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$ ); они определяются с точностью до произвольного множителя):

> psi[1]:=x->5\*x^2+5^(1/2);  
> psi[2]:=x->-5\*x^2+5^(1/2);

$$\psi_1 := x \rightarrow -5x^2 + \sqrt{5}$$

$$\psi_2 := x \rightarrow 5x^2 + \sqrt{5}$$

Выполним проверку полученного результата:

> simplify  
(subs(phi(x)=psi[1](x), lhs(eq))-subs(lambda=mu[1], phi(y)=psi[1](y), rhs(eq)));

$$0$$

> simplify  
(subs(phi(x)=psi[2](x), lhs(eq))-subs(lambda=mu[2], phi(y)=psi[2](y), rhs(eq)));

$$0$$

Отметим, что команда `intsolve` не справляется с этой задачей и выдает только тривиальное решение однородного уравнения.

### 3. Приближенные методы решения интегральных уравнений

В практических проблемах физики и техники часто встречаются задачи, где точное решение либо не может быть найдено, либо имеет настолько сложное строение, что им трудно пользоваться при расчетах. В таких случаях приходится прибегать к приближенным методам решения задач математической физики. Здесь мы рассмотрим некоторые приемы приближенного исследования интегральных уравнений.

*Сведение интегрального уравнения к уравнению с вырожденным ядром*

Возможность удобного решения уравнений с вырожденным ядром приводит естественно к мысли о том, чтобы при решении уравнения с любым ядром заменить это ядро приближенно на вырожденное и решить соответствующее ему уравнение вместо данного уравнения. Пусть мы имеем интегральное уравнение (6) с произвольным (невырожденным) непрерывным ядром  $K(x, y)$  и непрерывной правой частью  $f(x)$ . Образует некоторое вырожденное ядро  $H(x, y)$

$$H(x, y) = \sum_{k=1}^N \alpha_k(x) \beta_k(y)$$

которое подберем так, чтобы  $|K(x, y) - H(x, y)| < \varepsilon, a \leq x \leq b, a \leq y \leq b$ . Тогда можно считать (с некоторым приближением)  $K(x, y) \cong H(x, y)$ . Будем иметь вместо уравнения (6)

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b H(x, y) \varphi(y) dy = f(x), a \leq x \leq b. \quad (11)$$

Таким образом, — это можно строго показать, — если построить достаточно близкое к ядру вырожденное ядро  $H(x, y)$ , то, решив уравнение с вырожденным ядром  $H(x, y)$ , мы получим решение, близкое к решению уравнения с ядром  $K(x, y)$  при той же правой части. Более того, если мы построим последовательность  $\{H_n(x, y)\}$  вырожденных ядер, равномерно сходящуюся к ядру  $K(x, y)$ , то последовательность  $\{\varphi_n(x)\}$  решений уравнений с ядрами  $H_n(x, y)$  будет равномерно сходиться к решению  $\varphi(x)$  уравнения (6) с ядром  $K(x, y)$ . Способы построения вырожденных ядер, близких к данному ядру  $K(x, y)$ , могут быть самыми различными. Если ядро  $K(x, y)$  непрерывно, то по теореме Вейерштрасса эту функцию можно аппроксимировать полиномом с заданной степенью точности. Однако, практически, этот способ мало пригоден. Обычно ядро разлагается в ряд того или иного типа и за аппроксимирующую функцию выбирают отрезок этого ряда. Например, если ядро  $K(x, y)$  разлагается в ряд

$$K(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m(x) \beta_m(y), a \leq x \leq b, a \leq y \leq b,$$

то  $H(x, y) = \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m(x) \beta_m(y)$ . Чем больше  $N$ , тем точнее аппроксимация, но сложнее решение уравнения с вырожденным ядром. На практике обычно ядро  $K(x, y)$  приближают частичными суммами степенного (ряд Тейлора) или тригонометрического (ряд Фурье) ряда, если ядро  $K(x, y)$  разлагается в равномерно сходящийся в прямоугольнике  $\{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$  степенной или тригонометрический ряд. Можно также приближать ядро  $K(x, y)$  алгебраическими или тригонометрическими интерполяционными полиномами.

**Пример №5.** Решить интегральное уравнение, заменяя его ядро на вырожденное ядро

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{-1}^1 \frac{2 + \cos(x)}{2 + \cos(t)} u(t) dt.$$

**Решение.** Решаем в Maple. Задаем ядро, свободный член и пределы интегрирования в интеграле:

```
> K:=(x,t)->(2+cos(x))/(2+cos(t)); f:=x->exp(x)*sin(x); lambda:=1:a=-1.:b:=1.:
```

$$K := (x, t) \rightarrow \frac{2 + \cos(x)}{2 + \cos(t)}$$

$$f := x \rightarrow e^x \sin(x)$$

Задаем уравнение

```
> eq:=phi(x)=f(x)+lambda*int(K(x,t)*phi(t),t=a..b);
```

$$eq := \phi(x) = e^x \sin(x) + \int_{-1.00000}^{1.00000} \frac{(2 + \cos(x)) \phi(t)}{2 + \cos(t)} dt$$

Для последующего сравнения получим точное решение уравнения стандартной функцией Maple

```
> intsolve(eq,phi(x));
```

$$\phi(x) = e^x \sin(x) - 0.48919 - 0.24459 \cos(x)$$

Определим точное решение как функцию  $u(x)$

```
> u:=unapply(rhs(%),x):
```

Теперь решим наше уравнение методом сведения ядра к вырожденному ядру. Рассмотрим два вырожденных ядра, полученных разложением в степенной ряд по степеням  $x$  и по степеням  $t$ .

```
> series(K(x,t),x,3);k1:=unapply(convert(%,polynom),x,t);
```

$$\frac{3}{2 + \cos(t)} - \frac{1}{2(2 + \cos(t))} x^2 + O(x^4)$$

$$k1 := (x, t) \rightarrow \frac{3}{2 + \cos(t)} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2 + \cos(t)}$$

```
> series(K(x,t),t,3);k2:=unapply(convert(% ,polynom),x,t);
```

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos(x) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{18} \cos(x)\right) t^2 + O(t^4)$$

$$k2 := (x, t) \rightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos(x) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{18} \cos(x)\right) t^2$$

Решаем уравнение с ядром  $k1(x, t)$ :

```
eq1:=phi(x)=f(x)+lambda*int(k1(x,t)*phi(t),t=a..b);intsolve(eq1,phi(x));
```

$$eq1 := \phi(x) = e^x \sin(x) + \int_{-1.00000}^{1.00000} \left( \frac{3}{2 + \cos(t)} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2 + \cos(t)} \right) \phi(t) dt$$

$$\phi(x) = e^x \sin(x) + 0.12305x^2 - 0.73829$$

Образуем функцию, соответствующую этому решению

```
> phi1:=unapply(rhs(%),x);
```

$$\phi1 := x \rightarrow e^x \sin(x) + 0.12305x^2 - 0.73829$$

Решаем уравнение с ядром  $k2(x, t)$ :

```
eq2:=phi(x)=f(x)+lambda*int(k2(x,t)*phi(t),t=a..b);intsolve(eq2,phi(x));
```

$$eq2 := \phi(x) = e^x \sin(x) + \int_{-1.00000}^{1.00000} \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos(x) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{18} \cos(x)\right) t^2 \right) \phi(t) dt$$

$$\phi(x) = e^x \sin(x) - 0.48896 - 0.24448 \cos(x)$$

Образуем функцию, соответствующую этому решению

```
> phi2:=unapply(rhs(%),x);
```

$$\phi2 := x \rightarrow e^x \sin(x) - 0.48896 - 0.24448 \cos(x)$$

Построим графики полученных решений (см. рис. 1)

```
> plot([u(x),phi1(x),phi2(x)],x=a..b,style=[line,point,point],gridlines=true,
font=[Times,roman,14],symbol=[circle,asterisk],numpoints=1,color=[blue,red,brown],
symbolsize=25,label font=[Times,roman,14],
legend=['u(x)', 'phi1(x)', 'phi2(x)']);
```

### Решение уравнения Фредгольма 2-го рода методом Бубнова-Галеркина

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода (6). Решение данного уравнения по методу Бубнова-Галеркина ищется так. Выбираем систему функций  $\{u_n(x)\}$ , полную в  $L_2(a, b)$  и такую, что при любом  $n$  функции  $u_n(x)$  линейно независимы, и ищем приближенное решение  $\varphi_n(x)$  в виде

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k u_k(x). \quad (12)$$

Коэффициенты  $a_k, k = 1, 2, \dots, n$  определяются из следующей линейной системы:

$$(\varphi_n(x), u_k(x)) = \lambda \left( \int_a^b K(x, t) \varphi_n(t) dt, u_k(x) \right) + (f(x), u_k(x)), \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (13)$$

где  $(f, g)$  означает  $\int_a^b f(x) g(x) dx$  и вместо  $\varphi_n(x)$  надо подставить  $\sum_{k=1}^n a_k u_k(x)$ . Если значение  $\lambda$  в (6) не является характеристическим, то при достаточно больших  $n$  система (13) однозначно разрешима и при  $n \rightarrow \infty$  приближенное решение (12) стремится в метрике  $L_2(a, b)$  к точному решению  $\varphi(x)$  уравнения (6).

Решим методом Бубнова-Галеркина уравнение из примера №5. В качестве полной системы функций на отрезке  $[-1, 1]$  выбираем систему полиномов Лежандра  $P_n(x), n = 0, 1, 2, \dots$

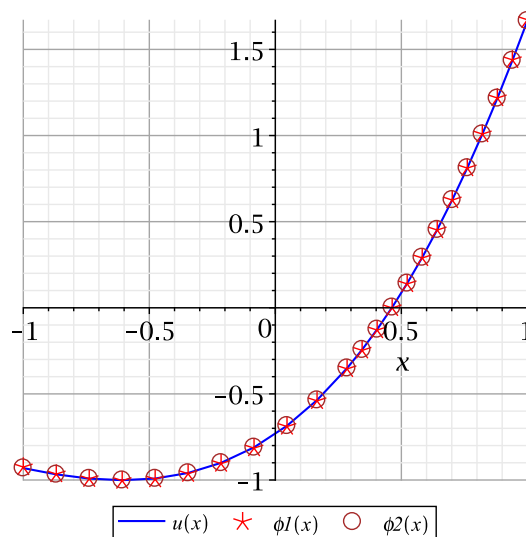


Рис. 1. Сравнение решений.

```
> with(orthopoly):
P(0,x);P(1,x);P(2,x);P(3,x);P(4,x);P(5,x);P(6,x);
```

$$\begin{aligned}
 & 1 \\
 & x \\
 & -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2 \\
 & \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \\
 & \frac{3}{8} + \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 \\
 & \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x \\
 & -\frac{5}{16} + \frac{231}{16}x^6 - \frac{315}{16}x^4 + \frac{105}{16}x^2
 \end{aligned}$$

Приближенное решение  $\phi_n(x)$  будем искать в виде

```
> Phi:=(x,n)->sum(c[k]*P(k,x),k=0..n);phi:=x->Phi(x,n);
```

$$\Phi := (x, n) \rightarrow \sum_{k=0}^n c_k P(k, x)$$

$$\phi := x \rightarrow \Phi(x, n)$$

Подставляем эту функцию  $\phi(x)$  в исходное уравнение. Получим

```
> n:=3;
with(IntegrationTools):
Expand(evalf(eq));
```

$$\begin{aligned}
 & c_0 + c_1 x + c_2 (-0.500 + 1.500x^2) + c_3 (2.500x^3 - 1.500x) = \\
 & = e^x \sin(x) + 1.411c_0 + (0.000 - 1.00010^{-52}I)c_1 + 0.032c_2 + \\
 & + (0.000 + 2.00010^{-105}I)c_3 + 0.706 \cos(x) c_0 + (0.000 - 2.20010^{-52}I) \cos(x) c_1 + \\
 & + 0.016 \cos(x) c_2 + (0.000 + 4.00010^{-52}I) \cos(x) c_3
 \end{aligned}$$

Мнимая часть последнего выражения практически равна нулю:

```
> evalc(Im(%));
```

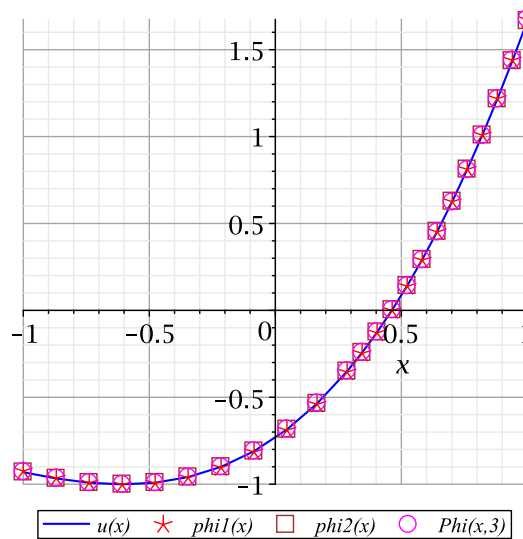


Рис. 2. Сравнение решений.

$$0 = -1.00010^{-52} c_1 + 2.00010^{-105} c_3 - 2.20010^{-52} \cos(x) c_1 + 4.00010^{-52} \cos(x) c_3$$

Таким образом, будем иметь уравнение

```
> eq1:=evalc(Re(%));
```

$$eq1 := c_0 + c_1 x - 0.500 c_2 + 1.500 c_2 x^2 + 2.500 c_3 x^3 - 1.500 c_3 x = e^x \sin(x) + 1.411 c_0 + 0.032 c_2 + 0.706 \cos(x) c_0 + 0.016 \cos(x) c_2$$

Формируем систему уравнений Бубнова-Галеркина

```
> eqns:={}:var:={}:
for i from 0 to n do
p[i]:=int(lhs(eq1)*P(i,x),x=-1..1)=int(rhs(eq1)*P(i,x),x=-1..1);
eqns:=eqns union{p[i]}:var:=var union {c[i]}:
end do:
print(eqns);
```

$$\begin{cases} 2.000 c_0 = 0.663 + 4.010 c_0 + 0.090 c_2, \\ 0.667 c_1 = 0.790, 0.400 c_2 = -0.088 c_0 - 0.002 c_2 + 0.265, 0.286 c_3 = 0.034 \end{cases}$$

Решаем полученную систему

```
> res:=solve(eqns,var);assign(%);
```

Таким образом, приближенное решение по Бубнову-Галеркину имеет вид

```
> Phi(x,n);
```

$$-0.732 + 1.008x + 1.106x^2 + 0.295x^3$$

Отобразим все полученные решения на одном графике (см. рис. 2)

```
> plot([u(x),phi1(x),phi2(x),Phi(x,n)],x=a..b,style=[line,point,point,point],
gridlines=true,font=[Times,roman,14],symbol=[circle,asterisk,box],numpoints=1,
color=[blue,red,brown,magenta],symbolsize=25,labelfont=[Times,roman,14],
legend=['u(x)', 'phi1(x)', 'phi2(x)', 'Phi(x,3)']);
```



### Сведение интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений

Пусть дано интегральное уравнение 2-го рода (6). Входящий в это равенство интеграл мы можем с помощью любой из квадратурных формул приближенно заменить некоторым простого вида выражением, не содержащим знака интеграла. Разобьем отрезок  $[a, b]$  точками  $\xi_0 = a, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N = b$  на части; тогда, например, с помощью формулы трапеций определенный интеграл представляется в виде

$$\int_a^b g(x) dx = \left[ \frac{1}{2} g(\xi_0) + \sum_{m=1}^{N-1} g(\xi_m) \frac{1}{2} g(\xi_N) \right] h, h = \frac{b-a}{N}. \quad (14)$$

В таком случае наше интегральное уравнение (6) заменяется следующим уравнением

$$\varphi(x) - \lambda h \left[ \frac{1}{2} K(x, \xi_0) \varphi(\xi_0) + \sum_{m=1}^{N-1} K(x, \xi_m) \varphi(\xi_m) + \frac{1}{2} K(x, \xi_N) \varphi(\xi_N) \right] = f(x). \quad (15)$$

В этой формуле неизвестными являются значения функции  $\varphi$  в узловых точках деления, то есть значения  $\varphi(\xi_0), \varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2), \dots, \varphi(\xi_N)$ . Равенство (15) справедливо во всех точках интервала  $[a, b]$ . Тогда, положив  $x = \xi_n, n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ , получим

$$\varphi(\xi_n) - \lambda h \left[ \frac{1}{2} K(\xi_n, \xi_0) \varphi(\xi_0) + \sum_{m=1}^{N-1} K(\xi_n, \xi_m) \varphi(\xi_m) + \frac{1}{2} K(\xi_n, \xi_N) \varphi(\xi_N) \right] = f(\xi_n). \quad (16)$$

Таким образом, мы пришли к системе  $N+1$  уравнений с  $N+1$  неизвестными — значениями искомой функции в узловых точках  $\varphi(\xi_0), \varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2), \dots, \varphi(\xi_N)$ . Очевидно, что точность результата, полученного при замене интегрального уравнения (6) системой линейных уравнений (16), будет тем выше, чем меньшую погрешность мы совершаем, заменяя интеграл суммой.

Продемонстрируем применение квадратурной формулы трапеций для решения уравнения из примера №5. Процедура, реализующая квадратурную формулу трапеций, может быть, например, такой.

```
> Trapezoid:=proc(n,phi)local k,eq,eqns,var,y;
y:=array(1..n);
eqns:={}:var:={}:
for k from 1 to n do
eq[k]:=y[k]-lambda*h/2*(K(X[k],X[1])*y[1]+K(X[k],X[n])*y[n])
-lambda*h*sum(K(X[k],X[s])*y[s],s=2..n-1)=f(X[k]);
eqns:=eqns union {eq[k]};
var:=var union {y[k]};
end do;
fsolve(eqns,var);assign(%);
phi:=x->f(x)+lambda*h/2*(K(x,X[1])*y[1]+K(x,X[n])*y[n])
+lambda*h*sum(K(x,X[s])*y[s],s=2..n-1);
end proc;
```

Формируем абсциссы квадратурной формулы и решаем задачу с помощью процедуры

```
> n:=30:h:=(b-a)/(n-1):X:=seq(a+(i-1)*h,i=1..n);
Trapezoid(n,phi);phi(x);
```

$$x \rightarrow f(x) + \frac{1}{2} \lambda h (K(x, X_1) y_1 + K(x, X_{30}) y_{30}) + \lambda h \left( \sum_{s=2}^{30-1} K(x, X_s) y_s \right) \\ e^x \sin(x) - 0.490599 - 0.245299 \cos(x)$$

Отообразим полученный результат на графике (см. рис. 3).

```
> plot(phi(x),x=a..b,gridlines=true,font=[Times,bold,14],
numpoints=5,labelfont=[Times,bold,14],legend=cat('n = ',convert(n,string)));
```

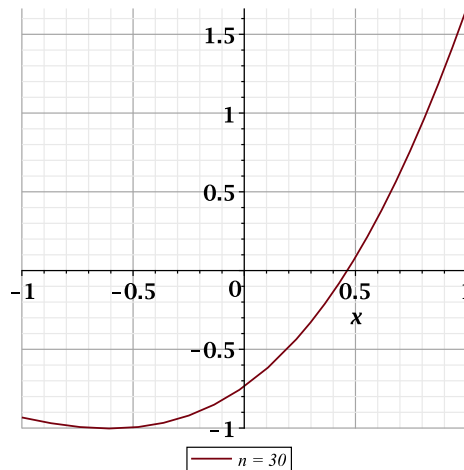


Рис. 3. Квадратурная формула трапеций.

Для более детального ознакомления с предметом лекции и использования системы Maple отсылаем читателя к списку литературы. В работах [1] – [3] изложены элементы теории интегральных уравнений, приведены примеры решения задач с текстами программ в системе Maple и подробными комментариями. Работа [4] выполнена в виде лекций по математическому и компьютерному моделированию в системе Maple задач геометрии, механики, теории поля. В работах [5] – [8] даны примеры реализации в Maple различных задач теории конформных отображений, теории теплопроводности и вариационных методов. В работах [9] – [10] изложены теоретические вопросы применения приближенных методов в математической физике, в частности, приближенные методы решения интегральных уравнений.

### Литература

1. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. Учеб. для вузов / Д.П. Голоскоков. – СПб.: Питер, 2004 – 539 с.
2. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple: учеб. пособие для вузов / Д.П. Голоскоков. – СПб.: ООО «ПаркКом», 2010 – 643 с.
3. Голоскоков Д.П. Курс математической физики с использованием пакета Maple: Учебное пособие / Д.П. Голоскоков. – СПб.: Издательство «Лань», 2015. – 2-е изд., испр.– 576 с.
4. Игнатъев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. / Ю.Г. Игнатъев. – Казань: Казанский университет, 2014. – 298 с.
5. Голоскоков Д.П. Моделирование конформных отображений вариационным методом в системе символьных вычислений Maple / Д.П. Голоскоков // Вестник государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. – 2015. – Вып. 5(33). – С.207-216.
6. Голоскоков Д.П. Примеры реализации в Maple энергетического метода для задач изгиба тонких плит. IV-й международный семинар по математическому моделированию в системах компьютерной математики KAZCAS-2014. Международная школа по математическому моделированию в системах компьютерной математики KAZCAS-SCHOOL-2014 / Д.П. Голоскоков // под общ. ред. Ю.Г. Игнатъева. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. – С.33-62.
7. Голоскоков Д.П. Моделирование температурных полей при частичном нарушении теплоизоляции / Д.П. Голоскоков // Журнал университета водных коммуникаций. – СПб.:СПГУВК, 2010. – Вып. 4(8). – С.53-56.
8. Голоскоков Д.П. Математическое моделирование нестационарных температурных полей / Д.П. Голоскоков // Журнал университета водных коммуникаций. – СПб.:СПГУВК, 2011. – Вып. 1(9). – С.79-83.
9. Канторович Л.В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М.-Л.:Гос.издат.техн.-теорит. лит., 1950. – 696 с.
10. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Гос.издат.техн.-теорит.лит., 1957. – 476 с.

## SOLUTION OF INTEGRAL EQUATIONS IN MAPLE SYSTEM

D.P. Goloskokov

*Examples of solving integral equations in the Maple system using the `intsolve` command are analyzed. The possibilities of Maple for obtaining an exact and approximate solution of equations in cases where these equations are not solved by the `intsolve` command are considered.*

Keywords: integral equations, Fredholm equations, Volterra equations, Maple symbolic computation system.

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-18»

---

**М.Н. Кирсанов**

**Плоские фермы. Методы решений**

---



---

Казань, Казанский федеральный университет, 28 октября – 3 ноября 2018

УДК 531(075.8)

**ПЛОСКИЕ ФЕРМЫ. МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ**М.Н. Кирсанов<sup>1</sup><sup>1</sup> *mpei2004@yandex.ru*; Национальный исследовательский университет «МЭИ»

*Описаны численные, графические и аналитические с привлечением системы компьютерной математики Maple алгоритмы получения решений задач статики плоских ферм. Рассмотрены случаи кинематической изменяемости некоторых схем ферм.*

**Ключевые слова:** ферма, прогиб, Maple, индукция, кинематическая изменяемость.

**СОДЕРЖАНИЕ:**

1	Предисловие . . . . .	25
2	Метод вырезания узлов . . . . .	27
3	Метод сечений . . . . .	29
4	Принцип возможных перемещений . . . . .	31
5	Метод замены стержней . . . . .	33
6	Кинематически изменяемые фермы . . . . .	37
7	Maple-программа для расчета усилий и прогиба . . . . .	40
	Литература . . . . .	45

**1. Предисловие**

Новые схемы статически определимых ферм всегда интересовали инженеров. Во-первых, этот интерес вызван желанием получить какие-то оптимальные решения по прочности, жесткости и экономии затрат на материалы и монтаж. Во-вторых, здесь проявляется интерес к архитектурной выразительности конструкций мостов, покрытий, корпусов зданий. Не все инженерные конструкции выполнены в виде простых треугольных, раскосных или решетчатых схем. Можно привести примеры известных оригинальных конструкций мостов, основой которых являются статически определимые фермы (рис. 1 – 3).



**Рис. 1.** Мост через залив Ферт-оф-Форт, Шотландия<sup>1</sup>

Целеустремленным поиском таких схем, плоских и пространственных, занялись Hutchinson R. G. и Fleck N. A., неслучайно назвав эти поиски "охотой на статически определимые схемы"[99, 100].

В чистом виде статически определимые конструкции ферм вероятно нигде не используются по крайней мере потому, что шарниры чаще всего заменяются жесткими или полужесткими соединениями или просто дополнительные стержни для обеспечения жесткости превращают исходную статически определимую ферму в статически неопределимую. Статически определимую ферму можно считать моделью реальной конструкции или основной системой при расчете методом сил.

Статически определимые фермы еще интересны простотой расчета, который в большинстве случаев выполняется численно. Современные программные средства символической математики (Maple, Mathematica, Derive, Reduce и др.) позволяют выполнить эти же расчеты и аналитически.

<sup>1</sup> Размеры моста впечатляют: пролеты по 521 м, диаметр стержней (труб) до 3,6 м, опоры высотой 100 м.



Рис. 2. Харбор-Бридж, Сидней, Австралия

Достаточно заменить при вводе данных числа на символы и будет получена конечная формула для прогиба или усилия в каком-то стержне в зависимости от нагрузки, размеров и упругих характеристик материала конструкции. В этой формуле можно менять размеры фермы, величину нагрузки и модули упругости стержней, выбирая из соображений прочности и жесткости оптимальный вариант, но область применения такой формулы все-таки ограничена конкретной конструкцией.



Рис. 3. Автомобильный мост в штате Вашингтон, Сиэтл, США

Значительно интереснее формулы, которые можно применять для целого класса конструкций. Такие формулы можно получить для регулярных систем, обладающих некоторой симметрией и периодичностью структуры. Элементом периодичности может быть панель фермы или группа стержней. В более сложных случаях в ферме могут быть выделены несколько независимых групп периодичности, например, в рамках группы панелей по длине пролета и панели по высоте. Тогда индукция проводится по двум натуральным числам и сфера применения полученных формул становится еще шире.

Методам расчета регулярных стержневых систем (в основном численным) посвящены монографии профессора Игнатъева В.А [35, 22]. Операторы системы компьютерной математики, применительно к решениям задач механики, описаны в [55, 57, 25, 24].

Методы нахождения усилий в стержнях плоских статически определимых рам описаны во множестве учебников по теоретической механике [55, 57, 31], строительной механике [76] и сопротивлению материалов [3, 59].



Рассмотрим основы некоторых методов на примере решения задач.

## 2. Метод вырезания узлов

Одним из наиболее распространенных методов определения усилий в стержнях плоских и пространственных ферм является метод вырезания узлов. Этот метод положен в основу компьютерной программы (с. 40), по которой составлялся данный справочник. Рассмотрим ферму 4.

**Задача 1.** Плоская статически определимая балочная ферма имеет две опоры, одна из которых является подвижным шарниром, другая — неподвижным (рис. 4). К узлам верхнего пояса приложены вертикальные силы  $P = 1$  кН,  $a = 3$  м,  $h = 2$  м. Найти усилия в стержнях фермы.

### Решение

1. Определяем реакции опор фермы<sup>2</sup>. Отбрасываем связи (опорные шарниры) и заменяем действие этих связей реакциями  $X_B$ ,  $Y_A$ ,  $Y_B$  (рис. 5). Выбираем систему координат с началом в точке А. Составляем три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= X_B = 0, \\ \sum M_A &= 2aY_B - aP - aP = 0, \\ \sum M_B &= -2aY_A + 2aP + aP = 0.\end{aligned}$$

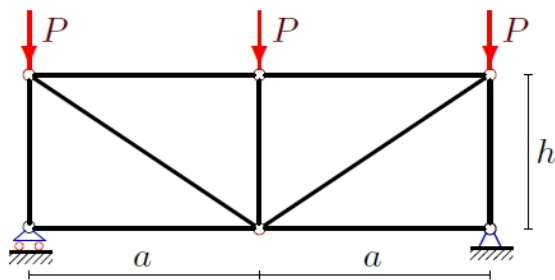


Рис. 4.

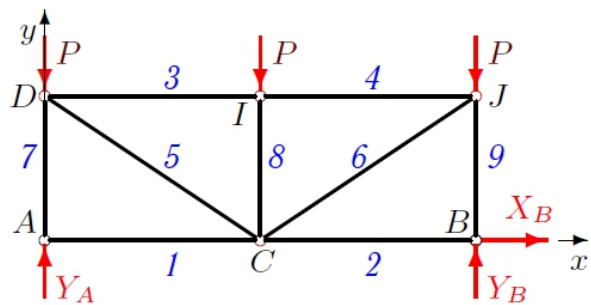


Рис. 5.

Решение системы уравнений дает реакции опор:  $X_B = 0$ ,  $Y_A = Y_B = 3P/2 = 1,5$  кН. Для проверки вертикальных реакций можно составить сумму проекций на ось  $y$  всех сил, действующих на ферму:  $\sum Y_i = Y_A + Y_B - 3P = 0$ . Уравнение удовлетворяется тождественно. Реакции  $Y_A$  и  $Y_B$  найдены верно<sup>3</sup>. Эта задача простейшая, и, безусловно, ее решить можно еще проще, исходя из симметрии конструкции и нагрузки. Ответ тут очевиден.

2. Почти во всех руководствах по методу вырезания узлов рекомендуется начать процедуру составления уравнений с узла, который соединен с двумя стержнями с неизвестными усилиями. В этом случае получится система двух уравнений с двумя неизвестными усилиями в стержнях. Для начала мы так и сделаем, однако в дальнейшем покажем, что такой упрощенный подход неудобен. Известны фермы, в которых все узлы соединены с тремя и более стержнями. Поэтому значительно лучше составить все уравнения равновесия для всех внутренних узлов фермы и далее решать эту систему. При этом в систему войдут, конечно, и реакции опор.

Итак, определяем усилия  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, 9$ , в стержнях фермы. Стержни можно пронумеровать (рис. 5)<sup>4</sup>.

<sup>2</sup> Считается, что определение усилий в стержнях фермы надо начинать с определения реакций опор. Однако это не всегда верно. В частности, если ферма внешне статически неопределима, то усилия в стержнях включаются в общую систему уравнений равновесия узлов фермы. Иногда, для консольных ферм, реакции опор можно вообще не определять и найти усилия в стержнях методом сечений, рассматривая ту часть отсеченной фермы, которая не содержит реакций опор.

<sup>3</sup> Более надежная проверка, контролирующая также и реакцию  $X_B$ , состоит в проверке выполнения уравнения моментов относительно какой-либо точки, не обязательно совпадающей с узлом и желательной не лежащей на линиях действия реакций опор. Здесь это может быть, например, средний узел верхнего пояса.

<sup>4</sup> В строительной механике в балочных фермах стержни часто обозначают с немецкой традицией. Стержни верхнего пояса

Усилия  $S_1, S_7$  найдем из условия равновесия узла  $A$  (рис. 6), а усилия  $S_2, S_6$  — из условия равновесия узла  $B$  (рис. 7). Реакции всех рассеченных стержней направляем из узла. Это соответствует принятому соглашению, согласно которому в растянутых стержнях усилия положительные, а в сжатых — отрицательные.

При этом на рисунках выделенных узлов каждая реакция (усилие) появляются дважды и направления этих векторов противоположные. Заметим, что здесь мы целенаправленно не помечаем усилия векторами. Иначе пришлось бы к одному узлу прикладывать вектор, например,  $\vec{S}_k$ , а к другому (на противоположном конце стержня)  $\vec{S}'_k$  и далее пояснять:  $\vec{S}_k = -\vec{S}'_k$ . Это внесет лишние переменные со штрихом и ненужную путаницу в решение. Проще считать, что на чертежах подписаны значения проекций усилий стержней на ось, направленную из узла.

Вырезаем последовательно узлы  $I$  (рис. 8),  $C$  (рис. 9),  $B$  (рис. 10),  $J$  (рис. 11).

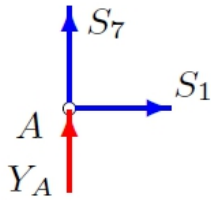


Рис. 6.

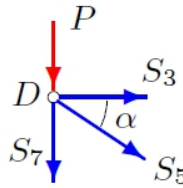


Рис. 7.

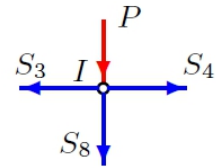


Рис. 8.

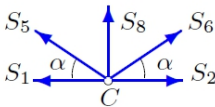


Рис. 9.

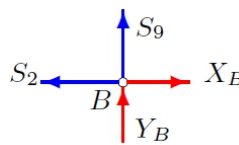


Рис. 10.

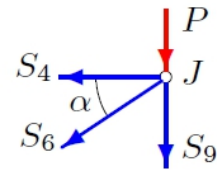


Рис. 11.

Записываем уравнения равновесия узла  $A$

$$\sum X_i = S_1 = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = S_7 + Y_A = 0. \quad (2)$$

Уравнения равновесия узла  $D$ :

$$\sum X_i = S_3 + S_5 \cos \alpha = 0, \quad (3)$$

$$\sum Y_i = -S_7 - P - S_5 \sin \alpha = 0, \quad (4)$$

где  $\sin \alpha = h/c$ ,  $\cos \alpha = a/c$ ,  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$  — длина раскосов.

Уравнения равновесия узла  $I$ :

$$\sum X_i = -S_3 + S_4 = 0, \quad (5)$$

$$\sum Y_i = -S_8 - P = 0. \quad (6)$$

Уравнения равновесия узла  $C$ :

$$\sum X_i = -S_1 + S_2 - S_5 \cos \alpha + S_6 \cos \alpha = 0, \quad (7)$$

$$\sum Y_i = S_8 + S_5 \sin \alpha + S_6 \sin \alpha = 0. \quad (8)$$

(*ober* — верхний):  $S_8 = O_1$ ,  $S_9 = O_2$ , нижнего пояса (*untere* — нижний):  $S_1 = U_1$ ,  $S_2 = U_2$ , раскосы (*diagonale* — раскос или диагональ):  $S_4 = D_1$ ,  $S_6 = D_2$ , стойки (*vertikal* — стойка или вертикаль):  $S_3 = V_1$ ,  $S_5 = V_2$ ,  $S_7 = V_3$ .



Уравнения равновесия узла  $B$ :

$$\sum X_i = -S_2 + X_B = 0, \quad (9)$$

$$\sum Y_i = S_9 + Y_B = 0. \quad (10)$$

Уравнения равновесия узла  $J$ :

$$\sum X_i = -S_4 - S_6 \cos \alpha = 0, \quad (11)$$

$$\sum Y_i = -S_9 - S_6 \sin \alpha - P = 0. \quad (12)$$

Решаем систему уравнений (1–12), в число неизвестных которой включаем и реакции опор (для проверки), и находим:  $S_1 = S_2 = 0$ ,  $S_3 = S_4 = -Pa/(2h) = -0,75$  кН,  $S_5 = S_6 = Pc/(2h) = 0,90$  кН,  $S_7 = S_9 = -3P/2 = -1,50$  кН,  $S_8 = -P = -1$  кН,  $X_B = 0$ ,  $Y_A = Y_B = 3P/2 = 1,50$  кН.

### 3. Метод сечений

Другой известный метод определения усилий в стержнях предложил в 1882 г. Август Риттер. Этот метод еще называют методом сечений, так как усилия в стержнях находятся после рассечения фермы на две части. При этом отсекаемая часть должна содержать по крайней мере один стержень, а сечение выбирается так, что оно пересекает три (не больше и не меньше) стержня фермы и делит ее на две части. По сравнению с методом вырезания узлов метод сечений имеет ограничения в применении. Не всякий стержень входит в требуемое сечение. Поэтому как правило метод сечений дополняется методом вырезания узлов.

Для определения усилий  $S_1$ ,  $S_3$ ,  $S_5$  используем метод Риттера<sup>5</sup>. Произведем сечение I–I (рис. 12).

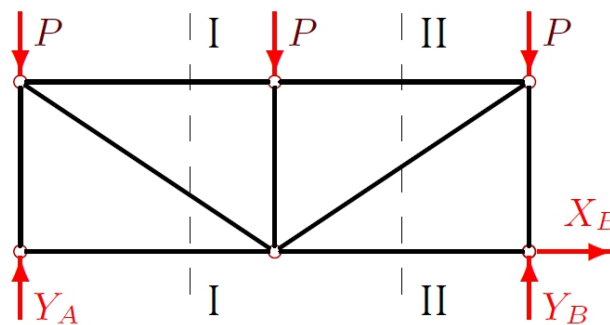


Рис. 12.

Отбрасываем правую часть фермы (рис. 13). Действие рассеченных стержней заменяем силами, направленными в сторону сечения. Выбор направлений реакций обеспечивает принятое ранее правило. Сжатые стержни имеют отрицательные усилия, растянутые — положительные.

Рассматриваем равновесие оставшейся левой части, состоящей из одного вертикального стержня. Находим моментные точки  $R_1$ ,  $R_3$  на пересечениях линий действия усилий в сечении. Обозначать эти точки можно произвольно, но для определенности лучше именовать их номером стержня, усилие которого не проходит через эту точку и подлежит определению. Точек Риттера может быть две (как в этом примере) или три. Точек Риттера не существует для диагонального стержня, входящего в сечение с параллельными стержнями. Составляем уравнения моментов относительно найденных точек:

$$\sum M_{R_3} = -hS_3 + aP - aY_A = 0,$$

$$\sum M_{R_1} = hS_1 = 0.$$

Решая уравнения, получаем  $S_1 = 0$ ,  $S_3 = -Pa/(2h) = -0,75$  кН. Результаты, как и следовало ожидать, совпали с решением системы уравнений (1–12) метода вырезания узлов, с. 29.

<sup>5</sup> August Ritter (1826–1906) — немецкий механик.

Для стержня 5 точки Риттера нет, так как стержни 1 и 3 параллельны. В этом случае усилие  $S_5$  можно найти из уравнения проекций на ось, перпендикулярную параллельным стержням<sup>6</sup>.

$$\sum Y_i = -S_5 \sin \alpha + Y_A - P = 0. \quad (13)$$

Отсюда  $S_5 = (Y_A - P) / \sin \alpha = Pc / (2h) = 0,90$  кН.

Для определения усилий  $S_2, S_6, S_4$  произведем сечение II-II (рис. 12, 14).

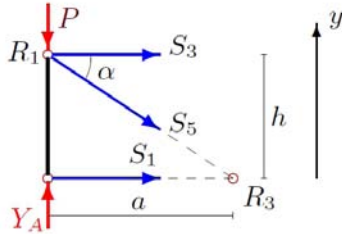


Рис. 13.

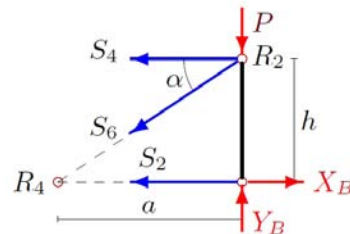


Рис. 14.

Отбрасываем левую часть фермы (рис. 14) и рассматриваем равновесие правой части фермы, фактически равновесие одного стержня (правой стойки) под действием реакций стержней  $S_2, S_4, S_6$ , силы  $P$  и найденных заранее реакций опор  $X_B$  и  $Y_B$ . Разрезанные стержни заменяем усилиями, направленными по стержням в сторону сечения. Составляем уравнения моментов относительно найденных точек Риттера:

$$\sum M_{R_2} = -hS_2 + hX_B = 0,$$

$$\sum M_{R_4} = hS_4 + aY_B - aP = 0.$$

Решая уравнения, получаем  $S_2 = 0, S_4 = -Pa / (2h) = -0,75$  кН.

Реакцию раскоса 6 находим из уравнения проекций на ось  $y$ :

$$\sum Y_i = -S_6 \sin \alpha + Y_B - P = 0. \quad (14)$$

Получаем  $S_6 = (Y_B - P) / \sin \alpha = Pc / (2h) = 0,90$  кН.

Остаются неопределенными усилия для стоек 7, 8 и 9. Но для них нет сечения Риттера. Это недостаток метода. В таком случае усилия необходимо определить иначе.

1. В полураскосной ферме (рис. 15), можно провести нестандартное сечение, пересекающее четыре, а не три, как это требуется в алгоритме Риттера, стержня, рис. 15. Сечение проходит через стержни 1-4, делит ферму на две части, но при этом усилия трех стержней 4, 3 и 2 проходят через точку  $R_1$ , которая таким образом является моментной точкой для усилия в стержне 1 верхнего пояса. Как всегда, можно рассматривать как левую часть фермы, так и правую, рис. 16. Уравнение для определения усилия  $S_1$  имеет простой вид

$$\sum M_{R_1} = -S_1 2h - Y_A a = 0.$$

2. В ферме на рисунке 17 раскосы двух соседних панелей сходятся в одном узле. Если выполнить сечение по второй панели, то, несмотря на то, что сечение пересекает четыре стержня, точка Риттера для стержня 1 существует (рис. 18). Уравнение для определения усилия  $S_1$  имеет вид

$$\sum M_{R_1} = -S_1 h - Y_A 2a + P 2a + Pa = 0.$$

Заметим, что в фермах такого типа в точке Риттера может сходиться и большее число стержней.

<sup>6</sup> В некоторых случаях используется вариант метода сечений, когда сечение проводят через несколько стержней, три из которых имеют неизвестные усилия, и составляются три произвольных уравнения равновесия. Такой вариант решения имеет право на существование, однако тут теряется основное свойство метода Риттера — каждое усилие находится независимо от других.

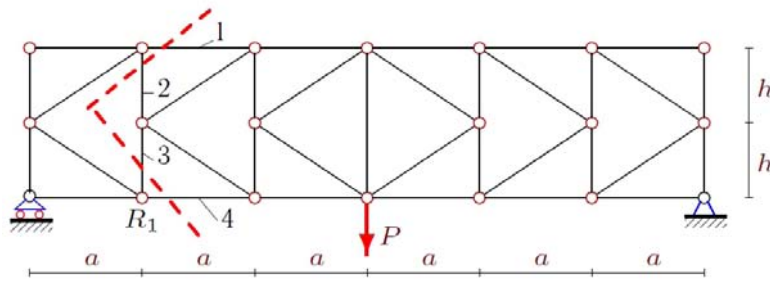


Рис. 15.

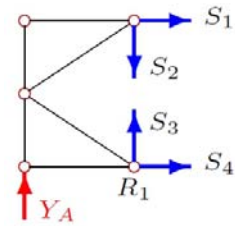


Рис. 16.

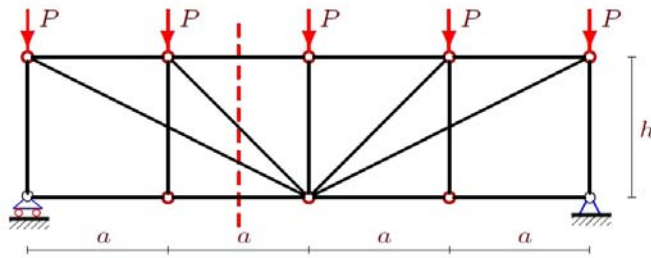


Рис. 17.

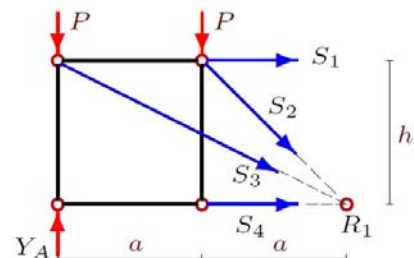


Рис. 18.

#### 4. Принцип возможных перемещений

В практике встречаются случаи, когда определение реакций опор фермы отдельно от расчета усилий в стержнях невозможно. Это так называемые внешне статически неопределимые фермы. Для решения задачи не обязательно рассматривать равновесие всех узлов, особенно если требуются усилия не во всех стержнях. Весьма эффективным в таких задачах является применение принципа возможных перемещений. Вариант этого принципа в скоростях для систем с идеальными связями имеет форму

$$\sum_k \vec{F}_k \cdot \vec{v}_k = 0, \tag{15}$$

где  $\vec{v}_k$  — возможная скорость точки приложения силы  $\vec{F}_k$ .

Если ферму освободить от связи, реакцию которой необходимо найти, то ферма превращается в механизм с одной степенью свободы, и узлы приобретают некоторые скорости. Оставшиеся опоры или неподвижны и их реакции таким образом не войдут в сумму (15), или являются идеальными связями. Работа реакций идеальных связей на любых возможных перемещениях равна нулю. В задачах о фермах это подвижные шарниры без трения. Реакции их перпендикулярны возможным перемещениям (или скоростям, применительно к форме записи (15)).

Связь, от которой освобождается конструкция, не обязательно внешняя. Это может быть и стержень, усилие в котором определяется.

Покажем сначала применение метода к простейшей задаче по определению усилия в стержне 6 фермы на рисунках 4 и 5, с. 27. Безусловно, оптимальным способом определения усилия  $S_6$  является уже описанный метод Риттера, поэтому здесь будет просто дана иллюстрация метода.

Освобождаем ферму от стержня 6, заменяя действие стержня на узлы реакциями по его концам. Придерживаясь принятого правила направлять реакции из узлов, приложим силы  $S_6$ , направленные во взаимно противоположных направлениях (рис. 21). Укажем возможные скорости узлов, начиная, например, с узла J (обозначения узлов принято то же, что и в методе вырезания узлов).

Узел B неподвижен. Скорость узла J должна быть перпендикулярна стойке. Обозначим горизонтальную скорость этого узла  $v$ . Направление и величина этой скорости произвольные (вектор скорости можно направить и влево). Аналогично, согласуясь с законами кинематики<sup>7</sup>, укажем ско-

<sup>7</sup> Здесь используется теорема о проекциях: проекции скоростей точек неизменяемого отрезка на ось отрезка равны.

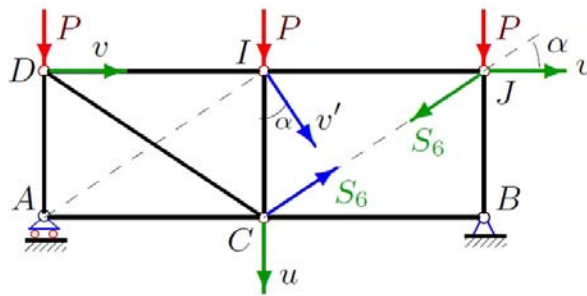


Рис. 19.

рости других узлов. Имеем при этом кинематические соотношения:

$$v' \sin \alpha = v, \quad v' \cos \alpha = u. \quad (16)$$

Опорные узлы  $A$  и  $B$  остаются неподвижными.

Принцип возможных перемещений в форме возможных мощностей имеет вид

$$-S_6 v \cos \alpha - S_6 u \sin \alpha + P v' \cos \alpha = 0. \quad (17)$$

Две силы  $P$ , приложенные к боковым стойкам работы не совершают, скорости точек их приложения перпендикулярны силам. В уравнение входит только одна внешняя сила — средняя в пролете.

Учитывая, что, согласно (16)  $v' \sin \alpha = v$ ,  $u = v' \cos \alpha = v \cos \alpha / \sin \alpha$ , и сокращая (17) на  $v \neq 0$ , получаем  $S_6 = P / (2 \sin \alpha)$ . Так как  $\sin \alpha = h/c$ , решение совпадает с полученным ранее на с. 29 и 30.

В следующей задаче с помощью принципа возможных перемещений определяются реакции опор внешне статически неопределимой фермы.

**Задача 2.** Ферма имеет три опоры, одна из которых является неподвижным шарниром, две другие — подвижные шарниры (рис. 20). Верхний пояс фермы загружен силами  $P$ . Найти реакции опор фермы.

### Решение

Для решения задачи используем принцип возможных перемещений. Освобождаем ферму от средней опоры, заменяя ее действие неизвестной вертикальной реакцией  $R_B$ . Узлы фермы приобретают некоторые скорости (рис. ??).

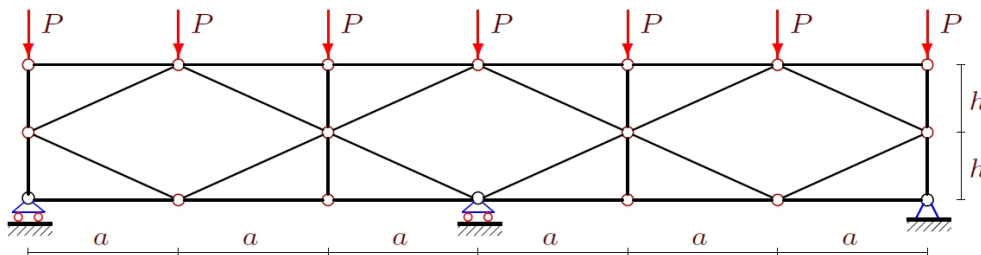


Рис. 20.

Часть узлов (нечетные по нижнему и верхнему поясу, считая от левой подвижной опоры) остаются неподвижными. Очевидна связь скоростей:  $v/h = u/a$ . Уравнение принципа возможных перемещений имеет вид:

$$-2Pu + Pu + uR_B = 0.$$

Отсюда находим  $R_B = P$ . Реакции боковых опор находим из уравнения проекций

$$\sum Y_i = Y_A + R_B + Y_C - 7P = 0.$$

Учитывая симметрию задач, получаем:  $Y_A = Y_C = 3P$ .

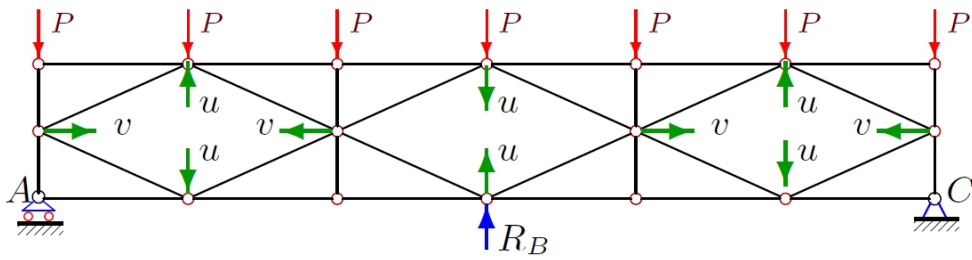


Рис. 21.

**5. Метод замены стержней**

В тех случаях, когда требуется найти усилие в каком-то одном стержне, а метод вырезания узлов и метод Риттера не дают решения или решение получается громоздким, применяют достаточно редкий метод<sup>8</sup>, берущий свое начало из метода сил строительной механики.

Метод состоит в замене одного стержня (например, стержень  $k$ ), усилие в котором надо определить, другим, фиктивным, (стержень  $n$ ), усилие которого находится проще. Вместо стержня  $k$  к шарнирам его крепления прикладываются единичные силы по направлению этого стержня и определяются усилия  $S_n$ . При этом на основании линейности задачи принято решение представлять в виде суммы

$$S_n = S_n^{(1)} S_k + S_n^{(P)} = 0. \tag{18}$$

Здесь обозначено:  $S_n^{(1)}$  — усилие в новом стержне от действия только единичных сил, приложенных вместо удаленного стержня  $k$ ;  $S_k$  — искомое усилие;  $S_n^{(P)}$  — усилие в новом стержне от действия только внешних сил, приложенных к ферме. Стержень  $n$  фиктивный, именно поэтому  $S_n = 0$ . Уравнение вида (18) называется каноническим уравнением метода сил. Решение его дает искомую величину усилия  $S_k = -S_n^{(P)} / S_n^{(1)}$ .

Таким образом фактически дважды решается задача об усилиях в ферме с другой решеткой. Один раз к ферме вместо удаленного стержня прикладываются единичные силы (никаких других внешних сил нет) и определяется усилие  $S_n^{(1)}$  в новом стержне, другой раз определяется усилие  $S_n^{(P)}$  только от внешних сил.

Основную идею метода можно показать на уже рассмотренной ферме (рис. 4, с. 27). Пусть заменяемый стержень с искомым усилием  $k = 6$ , новый стержень  $n = 10$  (рис. 22).

Найти усилие  $S_{10}^{(P)}$  проще всего, составив по методу Риттера сумму проекций всех сил, приложенных к правой части фермы, отсеченной по второй панели (рис. 23).

Соответствующее уравнение имеет вид

$$\sum Y_i = Y_B - P + S_{10}^{(P)} \sin \alpha = 0.$$

Очевидно,  $Y_B = 3P/2$ . Отсюда  $S_{10}^{(P)} = -P/(2 \sin \alpha)$ . Так же методом Риттера (рис. 24) находится и усилие  $S_{10}^{(1)} = 1$ . Реакции опор при таком нагружении всегда равны нулю (на рисунке 24 они даже не показаны). Каноническое уравнение (18) применительно к этой задаче имеет вид

$$S_{10} = S_{10}^{(1)} S_6 + S_{10}^{(P)} = 0. \tag{19}$$

Отсюда получаем усилие

$$S_6 = -S_{10}^{(P)} = P/(2 \sin \alpha).$$

**Задача 3.** Дана ферма, состоящая из девяти стержней (рис. 25), на которую действует вертикальная нагрузка  $P$ . Считать, что тонкие стержни фермы не пересекаются, располагаясь в разных плоскостях. Найти усилия в стержнях 7 и 9.

**Решение**

<sup>8</sup> Метод Геннеберга. *Ernst Lebrecht Henneberg* (1850–1933) — немецкий математик и механик.

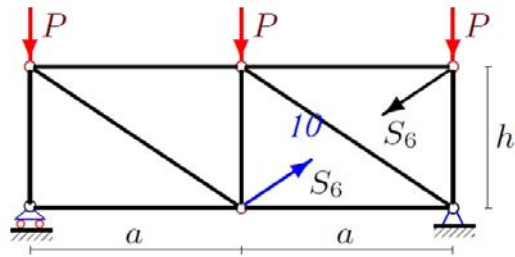


Рис. 22.

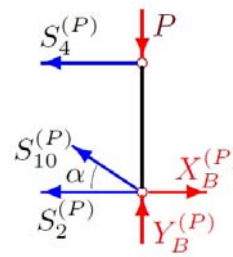


Рис. 23.

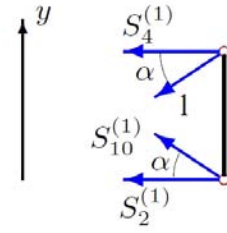


Рис. 24.

Ферма статически определимая и содержит шесть узлов и девять стержней. Необходимое соотношение выполнено: двенадцать уравнений равновесия узлов (по два уравнения в проекциях на каждый узел) дают систему для двенадцати неизвестных, включая три реакции опоры.

Метод вырезания узлов в простом варианте с последовательным рассмотрением равновесия узлов, начиная с узла, к которому прикреплены два стержня с неизвестными усилиями, здесь не проходит. В ферме нет ни одного такого начального узла.

Метод сечений также не годится для этой задачи. Сечений Риттера, пересекающего три стержня, включая стержни 7 и 9, здесь нет.

Рассмотрим метод Геннеберга применительно к замене сразу двух стержней.

Стержни 7 и 9 заменим на два фиктивных горизонтальных стержня, которые обозначим  $n$  и  $t$  (рис. 26).

Процедура замены неоднозначная, всегда есть несколько вариантов, из которых надо выбрать наиболее простые. При этом полученная ферма должна быть кинематически неизменяемой. Идея метода состоит в подборе таких усилий  $S_7$  и  $S_9$ , приложенных по концам удаленных стержней по направлению этих стержней, чтобы усилия во введенных фиктивных стержнях были равны нулю.

Число уравнений совпадает с числом замененных стержней.

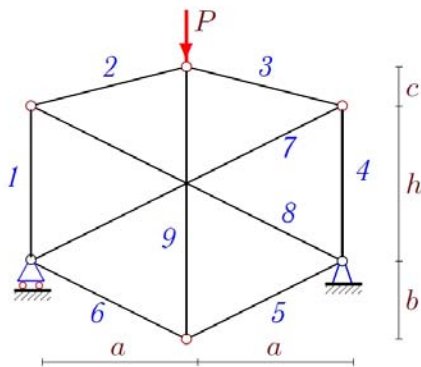


Рис. 25.

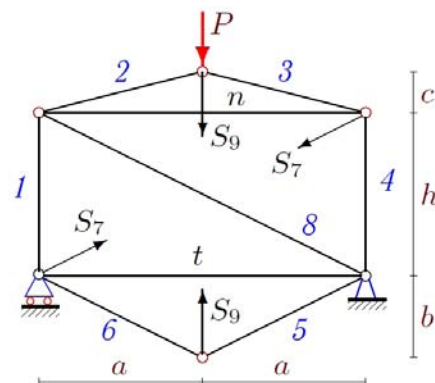


Рис. 26.

Пользуясь линейностью задачи, записываем систему уравнений

$$\begin{aligned} N^{(P)} + n^{(7)} S_7 + n^{(9)} S_9 &= 0, \\ T^{(P)} + t^{(7)} S_7 + t^{(9)} S_9 &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Каждое из уравнений этой системы означает равенство нулю усилия в одном из фиктивных стержней. Введены обозначения:  $N^{(P)}$ ,  $T^{(P)}$  — усилия в фиктивных стержнях только от действия внешней нагрузки на ферму,  $n^{(7)}$ ,  $n^{(9)}$ ,  $t^{(7)}$ ,  $t^{(9)}$  — усилия в фиктивных стержнях только от действия единичных безразмерных сил, приложенных к узлам их крепления по направлению удаленных стержней 7 и 9. При нахождении этих усилий внешние нагрузки не прикладываются.



Найдем усилия  $N^{(P)}$  и  $T^{(P)}$ . Воспользуемся тем, что для стержня  $n$  есть сечение Риттера (рис. 27). Точка Риттера  $R_1$  лежит на пересечении усилий  $S_2$  и  $S_4$  (рис. 28). Относительно этой точки составляем сумму моментов:

$$\sum M_{R_1} = -2cN^{(P)} + aP = 0, \tag{21}$$

откуда  $N^{(P)} = aP/(2c)$ .

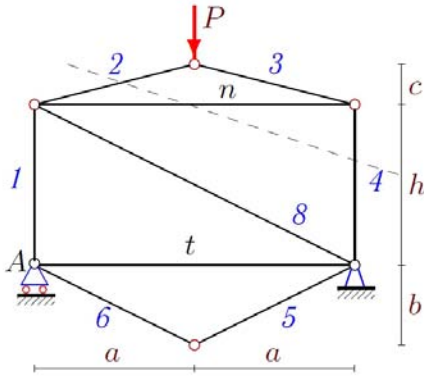


Рис. 27.

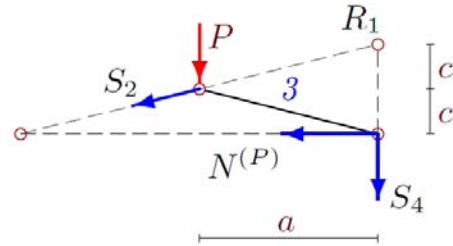


Рис. 28.

Усилие  $T^{(P)}$  можно найти из условия равновесия опорного узла А (рис. 29). Уравнение равновесия в проекции на горизонтальную ось имеет вид

$$\sum X_i = T^{(P)} + S_6 \cos \beta = 0. \tag{22}$$

Так как по лемме о нулевых стержнях<sup>9</sup>  $S_6 = 0$ , то и  $T^{(P)} = 0$ .

Для определения усилий в фиктивных стержнях от действия единичных безразмерных сил по направлению усилий в стойке 9 воспользуемся методом Риттера (рис. 30).

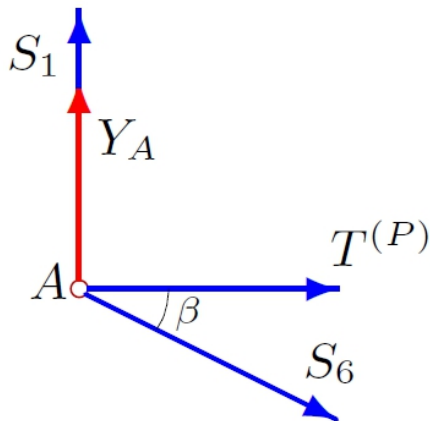


Рис. 29.

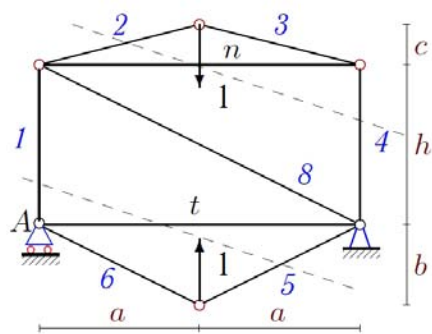


Рис. 30.

Рассмотрим сечение, пересекающее стержни 2, 4 и  $n$ . Сумма моментов относительно точки Риттера  $R_1$  (рис. 31) аналогична сумме (21) для такого же сечения

$$\sum M_{R_1} = -2cn^{(9)} + a \cdot 1 = 0, \tag{23}$$

откуда  $n^{(9)} = a/(2c)$ .

<sup>9</sup> Лемма. Если к незагруженному узлу присоединены два только стержня, то усилия в них равны нулю.

Рассмотрим сечение, пересекающее стержни 1, 5 и  $t$  (рис. 30). Точка Риттера  $R_2$  лежит на пересечении усилий  $S_1$  и  $S_5$  (рис. 32). Под действием двух единичных противоположно направленных сил ферма уравновешена, реакции опор равны нулю. Имеем уравнение

$$\sum M_{R_2} = -2bt^{(9)} + a \cdot 1 = 0, \tag{24}$$

откуда  $t^{(9)} = a/(2b)$ .

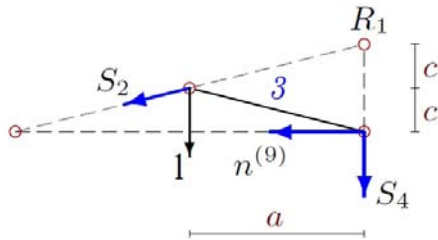


Рис. 31.

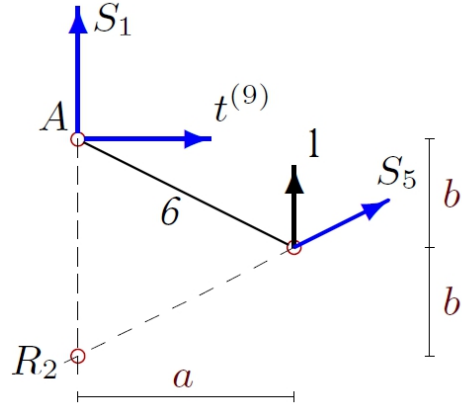


Рис. 32.

Для определения усилий в фиктивных стержнях от действия единичных сил по направлению усилия в стержне 7 (рис. 33) рассмотрим равновесия узлов  $A$  и  $C$  (рис. 34).

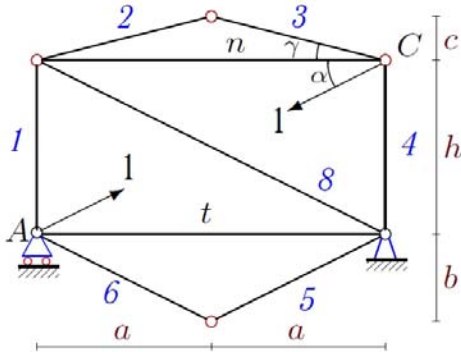


Рис. 33.

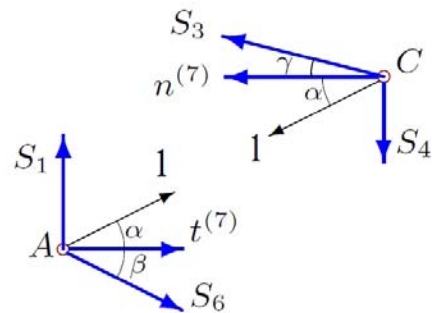


Рис. 34.

В проекции на горизонтальную ось для сил, приложенных к узлу  $A$  имеем

$$\sum X_i = t^{(7)} + S_6 \cos \beta + 1 \cdot \cos \alpha = 0. \tag{25}$$

Учитывая, что как и в случае (22)  $S_6 = 0$ , имеем решение  $t^{(7)} = -1 \cdot \cos \alpha$ , где  $\cos \alpha = 2a/\sqrt{h^2 + 4a^2}$ . Аналогично, из равновесия узла  $C$

$$\sum X_i = -n^{(7)} - S_3 \cos \gamma - 1 \cdot \cos \alpha = 0. \tag{26}$$

С учетом  $S_3 = 0$  получаем  $n^{(7)} = -1 \cdot \cos \alpha$ .

Таким образом, все коэффициенты в системе уравнений (20) найдены. Перепишем ее в виде

$$\begin{aligned} aP/(2c) - S_7 \cos \alpha + S_9 a/(2c) &= 0, \\ -S_7 \cos \alpha + S_9 a/(2b) &= 0, \end{aligned} \tag{27}$$



Решение этой системы дает искомые усилия

$$S_7 = P\sqrt{h^2 + 4a^2}/(4(c - b)), \quad S_9 = Pb/(c - b).$$

При  $c = b$  ферма становится кинематически изменяемой<sup>10</sup>, определитель обращается в ноль [55].

## 6. Кинематически изменяемые фермы

Полноценный анализ схемы фермы, особенно на этапе проектирования, предполагает помимо анализа статической определимости, исследование кинематической изменяемости конструкции.

Необходимым условием статической определимости фермы и ее кинематической неизменяемости является соотношение числа внутренних шарниров и стержней, включая опорные, один к двум. Иначе говоря, число уравнений равновесия узлов (по два уравнения на узел для плоских систем) должно быть равно числу неизвестных усилий. Это условие проверить просто<sup>11</sup>. Труднее оценить правильность структуры — достаточный признак неизменяемости конструкции.

В ферме недопустима как изменяемость, так и мгновенная изменяемость.

Существуют изменяемые фермы, не попадающие под три известных критерия<sup>12</sup>. В ферме на рисунке 35 необходимое соотношение числа стержней и узлов: шесть узлов и двенадцать стержней, включая четыре опорные (правый неподвижный опорный шарнир моделируется двумя стержнями, подвижные — одним). Однако ферма при  $h_1 = h_2 = h$  изменяема. Приведена схема возможных скоростей узлов. Мгновенные центры расколов находятся в опорах фермы. Отсюда следует соотношение скоростей:  $v/\sqrt{a^2 + h^2} = u/(2h)$ .

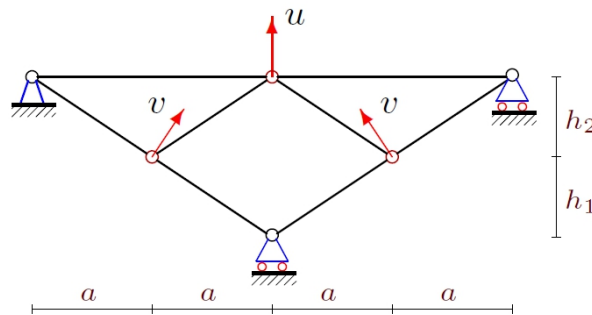


Рис. 35.

Определитель системы двенадцати (по числу стержней, включая четыре опорные) уравнений равновесия шести узлов фермы имеет вид

$$\det = \frac{4h_2^2 a^3 (h_1 - h_2)}{(a^2 + h_2^2)^2 (a^2 + h_1^2)}.$$

Как и ожидалось, при  $h_1 = h_2$  определитель обращается в ноль.

Аналогичный случай изменяемости, не попадающий под известные критерии, проявляется в ферме на рисунке 25, с. 34. Ферма изменяема при  $c = b$ . Схема возможных скоростей узлов приведена на рисунке 36.

<sup>10</sup> Доказательство на с. 38

<sup>11</sup> Однако, даже в книгах тут попадаются ошибки. В одном из лучших учебников по строительной механике Снитко Н. К. [76] в ферме с ромбической решеткой на с. 57, рис. 58(г), число шарниров 30, а число стержней вместе с тремя опорными 57. Такая же ошибка допущена в учебнике [60] на с. 237, рис. IX.7 (д), где число стержней 33, а число стержней вместе с опорными 65.

<sup>12</sup> Известны три основных критерия изменяемости: [67].

1. Если два диска соединены между собой тремя параллельными стержнями, то полученная система изменяема или мгновенно изменяема. Под диском можно понимать или отдельный стержень или неизменяемую часть фермы, например, жесткий треугольник.

2. Если два диска соединены между собой тремя стержнями, пересекающимися в одной точке, то полученная система изменяема или мгновенно изменяема.

3. Если три диска соединены тремя шарнирами, лежащими на одной прямой, то такая система мгновенно изменяема.

Стержень 3 получает вращательное движение вокруг мгновенного центра скоростей  $P$  с угловой скоростью  $u/(2b) = v/\sqrt{a^2 + b^2}$ , стержни 5 и 6 вращаются вокруг опор, стержень 7 движется поступательно.

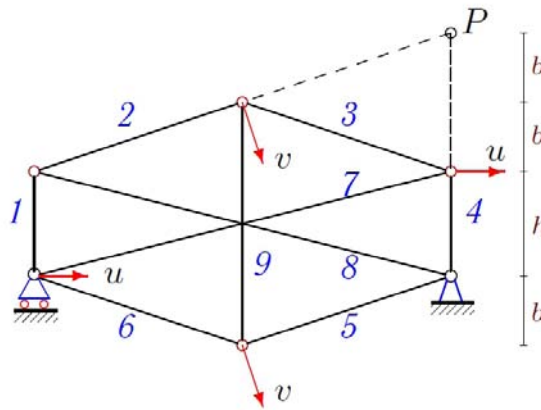


Рис. 36.

Определитель системы уравнений равновесия узлов этой фермы имеет вид

$$\det = \frac{8a^5(b-c)}{(a^2+c^2)(a^2+b^2)(4a^2+h^2)}.$$

При  $b = c$  определитель обращается в ноль.

При расчете изменяемость фермы проявляется в равенстве нулю определителя системы уравнений равновесия всех узлов. Это надежный критерий изменяемости, однако, на практике его использовать неудобно. Во-первых, при численном расчете равенство нулю определителя может быть скрыто за погрешностями счета, особенно при большом числе стержней. Во-вторых, расчет при одних размерах фермы может дать ненулевой определитель, а при других размерах, но с той же структурой, определитель обратится в ноль. Поэтому существуют еще кинематические критерии, проверяющие возможность существования допустимых скоростей узлов, свидетельствующих об изменяемости фермы. В [68] И.М. Рабинович предложил критерий изменяемости решетчатой фермы, основанный на построении плана скоростей узлов. На практике проверка изменяемости сводится к поиску замкнутой цепи из стержней, свидетельствующей о наличии скоростей узлов, находящихся в шарнирах этой цепи.

На рисунке 37 приведена ферма с решетчатой структурой, содержащая по горизонтали  $n$  ячеек периодичности (панелей длиной  $a$ ) и  $m$  панелей высотой  $h$  по вертикали.

Если закрепить эту ферму на одной неподвижной опоре и одной подвижной, то ферма будет один раз статически неопределимой, так как число узлов в ней  $2(n+m)$ , а число стержней  $4(n+m)+1$ , включая три опорные. Однако, при определенном соотношении чисел  $m$  и  $n$  эта ферма изменяема. Схема возможных скоростей узлов фермы при  $n = 6$  и  $m = 3$  приведена на рисунке. Предполагается, что опоры расположены в угловых узлах конструкции.

Очевидно, эта схема скоростей не единственная. Вторая замкнутая цепь симметрична приведенной относительно горизонтальной прямой по середине фермы. Заметим, что замкнутая цепь, свидетельствующая об изменяемости фермы, напоминает траекторию шарика, запущенного в коробке и отскакивающего от ее сторон. Здесь, правда, не выполняется правило о равенстве углов падения и отражения, но если шарик попадает в угол, то траектория обрывается, а в случае цепи стержней в ферме, это показывает, что выбранная цепь не замкнута. Для изменяемости фермы достаточно одной цепи.

В отличие от работы [68], где план скоростей строится на повернутых на  $90^\circ$  векторах скоростей, на рисунке 37 направления скоростей не изменены.

Легко показать что данная ферма неизменяема, если числа  $n$  и  $m$  взаимно просты.

В учебниках [10, 11] ошибочно приведена в качестве примера подобная же ферма при  $m = 2$ ,  $n = 8$ , т. е. кинематически изменяемая, хотя и содержащая один лишний стержень. На рисунке 38 при  $n =$

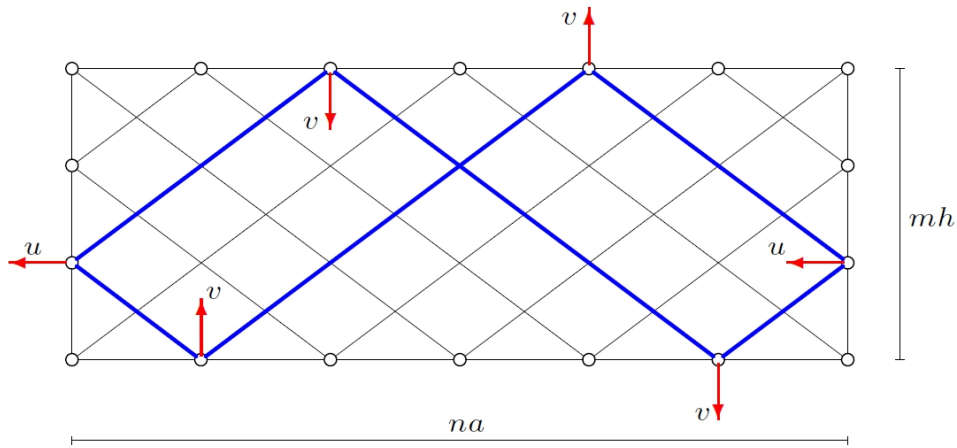


Рис. 37.

6 приведена схема возможных скоростей ее узлов. Очевидно, такая же схема скоростей будет и при любом другом четном числе панелей  $n$ . Легко обнаружить замкнутую цепь стержней, указывающую на изменяемость конструкции. Эта цепь соединяет подвижные шарниры.

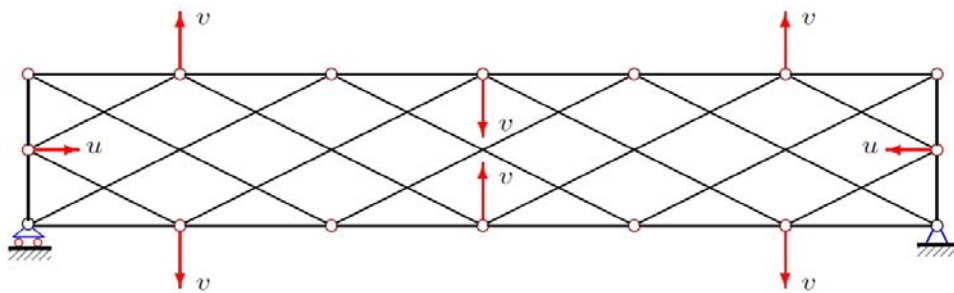


Рис. 38. Изменяемая статически неопределимая ферма,  $m = 2, n = 6$

В [?] дан аналитический расчет этой фермы для произвольного нечетного числа панелей.

Похожий критерий кинематической изменяемости обнаруживается при рассмотрении некоторых других фермах. В этих фермах при определенном числе панелей содержится *незамкнутая* цепь стержней с шарнирами, которые соединяют не более четырех стержней (два стержня в цепи и один-два на контуре). В ферме на рисунке 39 это цепь 8 - 2 - 11 - 5 - 14 - 16. Стержни 1-2, 8-1, 2-1 вращаются вокруг шарнира 1 левой опоры (сама катковая опора неподвижна), стержни 2-11, 5-11 и 5-14 движутся поступательно. Стержень 14-16 вращается вокруг мгновенного центра скоростей 15. Отсюда вытекает и соотношение между скоростями  $v/h = u/a$ . Таким образом только шесть шарниров имеют виртуальную скорость, остальные — неподвижны. Наличие указанной схемы уже само по себе является доказательством кинематической изменяемости фермы. Но для того, чтобы придать найденному случаю статус критерия, можно выполнить обобщение, высказав утверждение, что *если в ферме имеется цепь, проходящая через шарниры, к которым присоединены не принадлежащие цепи и лежащие на одной прямой стержни, то ферма кинематически изменяема*.

Статическую противоречивость фермы с такой цепью, приводящую к равенству нулю определителя системы уравнений равновесия узлов, подтверждают следующие простые рассуждения, которые можно проиллюстрировать на рассматриваемой ферме. Пусть, например, все узлы цепи, кроме узла 16 свободны от нагрузки. Если нагрузка на стержень имеет горизонтальную компоненту, то усилие в стержне 14 - 16 отлично от нуля. Исходя из леммы о нулевых стержнях<sup>13</sup>, усилие в стержне 8-2 равно нулю. Отсюда в стержне 2-11 также нет усилия. Последовательно рассматривая равновесие

13 См. примечание на с. 35.

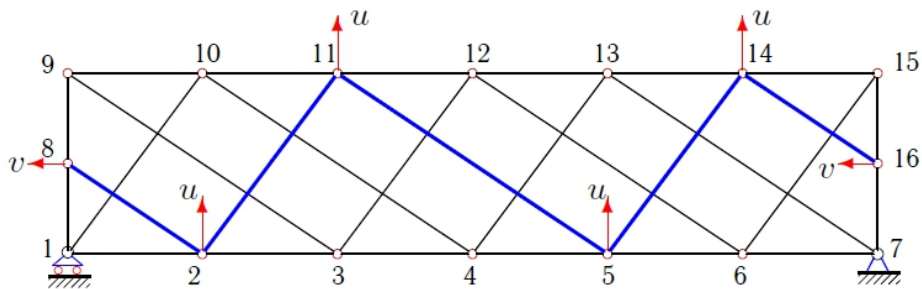


Рис. 39. Схема возможных скоростей узлов изменяемой фермы

всех незагруженных шарниров цепи, получаем, что и в стержне 14 -16 усилие также рано нулю, что противоречит условию равновесия узла 16. В более общем случае, не накладывая никаких условий на нагрузки на узлы цепи, можно просто для каждого узла, начиная с первого, составить уравнение равновесия в проекции на ось, перпендикулярную стержням поясов (узлы 2, 11, 5, 14) или стержням на боковых сторонах фермы (узел 8). При этом получится, что усилие в последнем стержне цепи можно найти как из решения задачи о равновесии узлов 8, 2, 11, 5, 15, так и из уравнения равновесия узла 16, что в силу независимости приложенных нагрузок приводит к противоречию.

## 7. Maple-программа для расчета усилий и прогиба

Все результаты в настоящем справочнике получены на основе программы, написанной на языке символьной математики Maple [55]<sup>14</sup>. В программе вычислялись усилия в стержнях фермы, рассчитывался прогиб. В блок-схеме программы условно выделим шесть основных блоков (рис. 40).

Приведем тексты кода на языке Maple на примере расчета фермы на рисунке 4, с. 27. В фермы  $n$  панелей в половине пролета,  $u$  узлов и  $m$  стержней, включая три опорные.

*Начальные данные.*

Здесь надо очистить память компьютера оператором `restart`, указать число циклов `Nmax`, объявить переменные `h`, `a` и `c` положительными. Оператор задания опций интерфейса `interface` с переменной `showassumed=0` включен в программу для того, чтобы у переменных с заранее заданными свойствами, например, `assume(h>0)`, не указывать их признак в виде волны: `h~`. Пакет `plots` загружен оператором `with` для вывода изображения фермы на экран.

### Блок 1

```
> restart:interface(showassumed=0):
> assume(h>0):assume(a>0):assume(c>0):
> with(plots):
> Nmax:=10:
```

*Ввод координат.*

Этот блок входит первым в цикл `for n to Nmax do... od`, охватывающий блоки 1 – 5. В начале цикла задается число узлов (шарниров) и всех стержней. Считаются также и опорные стержни (здесь их три) и шарниры крепления опорных стержней на земле (равновесие этих шарниров не рассматривается). Указывается также число деформируемых стержней `ns`. Размеры `# a:=2:h:=3` на время счета закомментированы, все преобразования выполняются в символьной форме.

<sup>14</sup> Сразу оговоримся — выбор именно этого математического пакета из множества других (Mathematica, MathCad, Maxima, Reduce и др.) случаен. Просто автору когда-то досталась простая версия этой продукции фирмы Waterloo Maple Inc, ввод данных и интуитивно понятный интерфейс показались удобными и изучать какие-то другие программы оказалось не нужным. В дальнейшем, конечно, автор писал некоторые программы на бесплатной и достаточно мощной системе Maxima, но всякие сопоставления всегда были в пользу Maple.

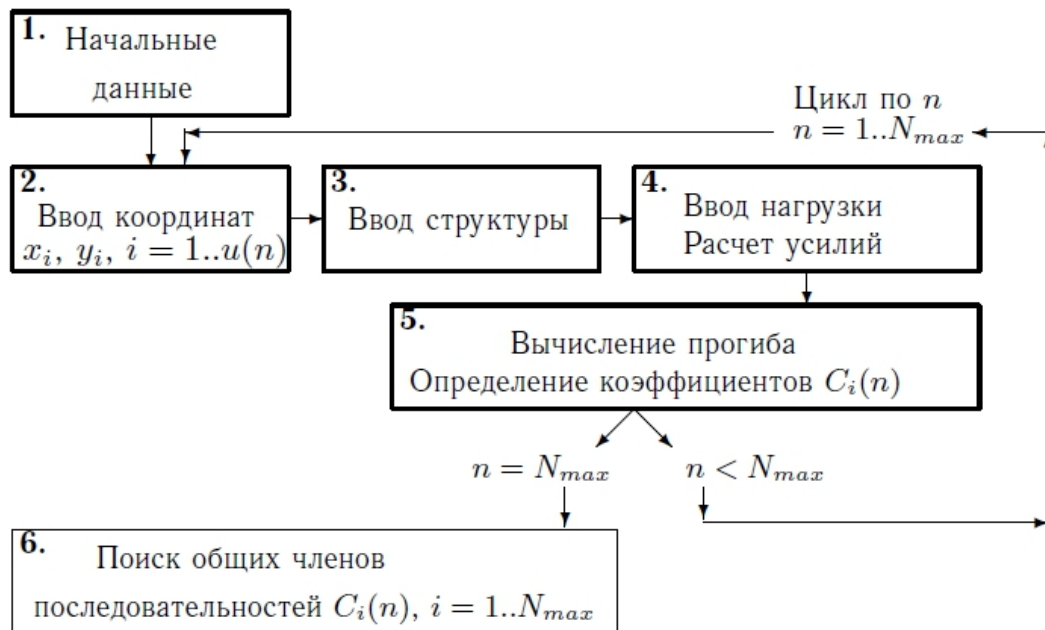


Рис. 40.

Для вывода на экран рисунка фермы требуются численные значения размеров. Координаты  $x$  и  $y$  узлов вводятся в цикле.

### Блок 2

```

> u:=4*n+5: #Number of nodes with supports
> m:= 8*n+4: #Number of rods of a truss with supports
> ns:=m-3: # Number of deformable rods
> #a:=2:h:=3:#Truss panel length and height
> for i to 2*n+1 do
>   x[i]:=a*i-a:y[i]:=0:
>   x[i+2*n+1]:=a*i-a: y[i+2*n+1]:=h:# Node coord.
> od:
> x[4*n+3]:=0: y[4*n+3]:=-1:#Support nodes
> x[4*n+4]:=x[2*n+1]: y[4*n+4]:=-1:
> x[4*n+5]:=x[2*n+1]+1: y[4*n+5]:=0:
  
```

### Ввод структуры.

Для того, чтобы указать порядок соединения стержней и узлов фермы, все стержни представляются в виде некоторых направленных векторов  $N[i]$ ,  $i = 1, \dots, n_s$ . Направление стержней-векторов выбирается условно и никак не связано ни с усилием в стержне, ни со знаком усилия. Применительно к рассматриваемой фермы (рис. 4, с. 27) направления векторов приведены на рисунке 41. Координаты  $N[i]$  содержат номера узлов по концам стержня.

### Блок 3

```

> for i to 2*n do
>   N[i]:=[i, i+1]; #lower belt
>   N[i+2*n]:=[i+2*n+1, i+2*n+2]; #upper belt
  
```

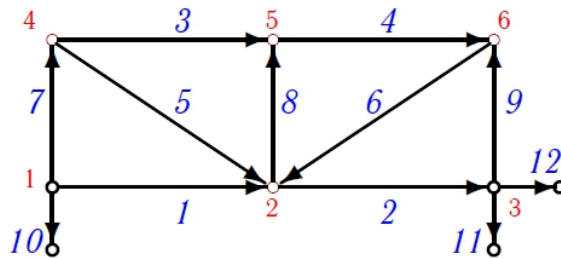


Рис. 41.

```

> od:
> for i to n do
>     N[i+4*n]:= [i+1, i+2*n+1]; #braces
>     N[i+5*n]:= [i+n, i+3*n+2]; #braces
> od:
> for i to 2*n+1 do
>     N[i+6*n]:= [i, i+2*n+1]; #pillars
> od:
> N[8*n+2]:= [1, 4*n+3]: #left support
> N[8*n+3]:= [2*n+1, 4*n+4]: #right support
> N[8*n+4]:= [2*n+1, 4*n+5]: #right support
> # Блок вывода изображения

```

#### Ввод нагрузки. Расчет усилий.

В системе Maple матричные и векторные величины лучше заранее объявить, задав их размеры, а при необходимости иногда и величины. По умолчанию объявленные величины имеют нулевые элементы. Матрица системы уравнений равновесия  $G$  квадратная размером  $m \times m$ . В матрицу вносятся направляющие косинусы стержней-векторов по координатам их концов. В нечетные строки вносятся косинусы с осью  $x$ , в четные — с осью  $y$ . Для этого вычисляются проекции стержней векторов на ось  $x$ :  $Lxy[1] := x[N[i][2]] - x[N[i][1]]$  и на  $y$ :  $Lxy[2] := y[N[i][2]] - y[N[i][1]]$ .

Подстановка  $\text{subs}(a^2+h^2=c^2, LL)$  используется для компактной записи результата. Если этого не сделать, то в ответе появятся корни  $\sqrt{a^2+h^2}$ , и выявить коэффициент при этом выражении будет затруднительно.

Условный оператор при заполнении матрицы ограничивает ввод в размеры матрицы.

Решение системы линейных уравнений удобнее всего в поставленной задаче искать методом обратной матрицы. Обратную матрицу в системе Maple можно найти просто  $G1 := 1/G$ . Есть и другие способы решения системы линейных уравнений и нахождения обратной матрицы с использованием специализированного пакета LinearAlgebra, входящего в состав Maple начиная с 6-й версии [40, 55].

В цикле `for i from 2 to 2*n do Vp[2*i]:=1: od`: в четные строки вектора правой части вводятся единичные значения нагрузки на узлы  $2, \dots, 2n$  нижнего пояса (к опорам нагрузка не прикладывается).

В этом блоке одновременно находятся усилия в стержнях фермы от действия нагрузки (вектор  $Sp$ ) и от единичной силы (вектор  $S1$ ).

#### Блок 4

```

> G:=Matrix(m,m):#Matrix of linear syst. of eq.
> for i to m do
>     Lxy[1]:=x[N[i][2]]-x[N[i][1]]:#project. on x-axis
>     Lxy[2]:=y[N[i][2]]-y[N[i][1]]:#project. on y-axis

```

---

```

> LL:=sqrt(Lxy[1]^2+Lxy[2]^2):# length of rods
> L[i]:=subs(a^2+h^2=c^2,LL): # length of rods
> for j to 2 do
>   t:=2*N[i][2]-2+j:
>   if t<=m then G[t,i]:=simplify(-Lxy[j]/L[i]):fi;
>   t:=2*N[i][1]-2+j:
>   if t<=m then G[t,i]:=simplify(Lxy[j]/L[i]):fi;od;od:
> Bp:=Vector(m); B1:=Vector(m):
> for i from 2 to 2*n do Bp[2*i]:=1: od:#Load, lower
> np:=n+1; B1[2*np]:=1:
> G1:=1/G: # Inverse matrix
> Sp:=G1.Bp: S1:=G1.B1: # Solution of the system

```

---

*Вычисление прогиба. Определение коэффициентов  $C_i(n)$ .*

Прогиб в середине пролета определяется по формуле Максвелла - Мора [76, 67]

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

При выводе жесткость стержней на растяжение-сжатие временно полагается  $EF = 1$ . Три опорные стержня полагаются жесткими и в сумму не входят. Для упрощения получения коэффициентов (чтобы избавиться от знаменателя в выражении прогиба) результат умножается на  $2 \cdot h^2$ . В каждой задаче этот множитель подбирается отдельно. Последовательность коэффициентов сохраняется в переменных C1, C2, C3.

#### Блок 5

---

```

> del:=simplify(add(Sp[i]*S1[i]*L[i],i=1..ns)*2*h^2);
> C1[n]:=coeff(del,a^3):
> C2[n]:=coeff(del,c^3):
> C3[n]:=coeff(del,h^3):#coefficients

```

---

*Поиск общих членов последовательностей  $C_i(n)$ ,  $i = 1..N_{max}$ .*

Этот блок выполняется по завершении цикла for n to Nmax do... od, охватывающий блоки 1 – 5. В цикле формируются последовательности коэффициентов при степенях размеров фермы. На это, как правило, идет основное время работы программы. В зависимости от сложности фермы это могут быть минуты или часы.

Очистка переменной n требуется для того, чтобы ее можно использовать далее как свободную. Для работы оператора rgf\_findrecur поиска рекуррентного уравнения, которому удовлетворяют члены последовательности, подгружается пакет genfunc. Этот пакет требует четное число членов анализируемой последовательности. Последовательность заносится во вспомогательную переменную S. С помощью оператора pops вычисляется длина ее половины, необходимая для учета начальных данных при решении рекуррентного уравнения. В рекуррентном уравнении n – й член анализируемой последовательности обозначен как X(n). Решение уравнения дает оператор rsolve. На этапе получения рекуррентного уравнения часто возникает проблема. Оказывается, что длина Nmax анализируемой последовательности мала. При этом уравнение содержит дробные коэффициенты:

$$Z := X(n) = \frac{750}{127} X(n-1) - \frac{1737}{127} X(n-2)$$

Этот результат получен при явно недостаточной длине последовательности Nmax=4. В процессе получения решений для ферм в настоящем справочнике минимальная величина Nmax менялась от 8 до 40.



В конце текста блока 6 приведен итоговый результат для коэффициента при  $n^3$  в выражении прогиба. Переменные X, Z и ZZ — временные для хранения промежуточных результатов.

### Блок 6

```
> n:='n':      # "Cleaning" the variable
> with(genfunc):# The package for rgf_findrecur
> S:=seq(C2[i],i=1..Nmax);# Sequence of coeff. c^3
                        S:=1,4,9,16,25,36,49,64,81,100
> NN:=nops([S])/2;    # Number of initial data
                        NN:=5
> Z:=rgf_findrecur(NN, [S], X,n);#Recursion equation

                        Z:=X(n)=3X(n-1)-3X(n-2)+X(n-3)
> ZZ:=simplify(rsolve({Z,seq(X(i)=S[i],i=1..NN)},X));
                        ZZ:=n^2
```

### Изображение фермы

Всякая работа с программой начинается с ее отладки. Ввод координат узлов, порядка соединения стержней, расположение опор должны быть проконтролированы. Лучший способ такого контроля — получение изображения фермы. Ниже представлен блок изображения, не учтенный в схеме 40. В процессе отладки его надо вставить перед блоком 4, закомментировав (значок #) оператор цикла for n to Nmax do... od, охватывающий блоки 1 – 5 и раскомментировав операторы блока 2 ввода размеров a:=2: h:=3. Значение числа панелей n при отладке лучше выбрать небольшим. Сначала в программе формируются списки стержней в переменной R[i], списки подписей узлов Nod\_[i] и списки подписей стержней Rod\_[i]. В данном случае подписи стержней ставятся не посередине, а на 1/3 длины от одного из концов оператором display из пакета plots (введен в блоке 1).

Размер шрифта для подписей задается третьим параметром непосредственно в опции FONT(TIMES,BOLD,12), цвет — в опции COLOR(HUE,0.7). На рисунке изображены также и опорные стержни (рис. 42).

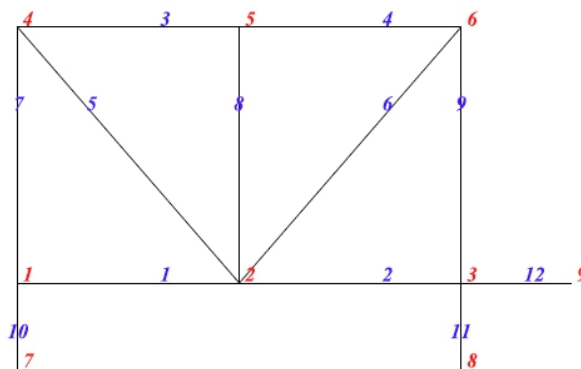


Рис. 42.

```
> font_:=FONT(TIMES,BOLD,12):
> for i to m do
>   R[i]:=PLOT(CURVES([[x[N[i][1]],y[N[i][1]]],
>                       [x[N[i][2]],y[N[i][2]]]])): od:
> for i to u do
```



```

> Nod_[i]:=PLOT(TEXT([x[i]+0.1,y[i]+0.1],
> convert(i,symbol)),font_,COLOR(HUE,1)):
> od:
> for i to m do
>   Rod_[i]:=PLOT(TEXT([(x[N[i][1]]+2*x[N[i][2]])/3,
>   (y[N[i][1]]+2*y[N[i][2]])/3+0.1],
>   convert(i,symbol)),COLOR(HUE,0.7)): od:
> display(seq(Nod_[i],i=1..u),seq(R[i],i=1..m),
> seq(Rod_[i],i=1..m),
>   scaling=unconstrained,axes=none);

```

Полный текст программы расположен по адресу  
<http://vuz.exponenta.ru/2.3.rar>

## Литература

1. Абзианидзе Г.В. Горизонтальные деформации балочной фермы с нисходящими раскосами под действием нагрузки, распределенной по верхнему поясу / Г.В. Абзианидзе // Научный альманах. – 2016. – № 4-3(18). – С. 229-231. – Access mode: DOI 10.17117/na.2016.04.03.229.
2. Агеев Е.А. К выбору сечений простой равномерно загруженной по нижнему поясу балочной фермы / Е.А. Агеев // Научный альманах. – 2016. – №6-2 (19). – С. 188-190.
3. Александров А.В. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. – М.: Высш.шк., 1995. – 560 с.
4. Андросова Д.И. О выборе сечений в плоской балочной ферме с треугольной решеткой, загруженной по нижнему поясу / Д. И. Андросова // Научный альманах. – 2016. – №6-2(19). – С. 191-193.
5. Астахов С.В. Вывод формулы для прогиба внешне статически неопределимой плоской фермы под действием нагрузки в середине пролета / С.В. Астахов // Construction and Architecture. – 2017. – Vol.5, I.2(15). – P. 50-54. – Access mode: DOI 10.12737/25110.
6. Афанасьев В.А. Прогиб составной плоской балочной фермы с параллельными поясами / В.А. Афанасьев, О.О. Бойко // Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 10. – 2014. – Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком». – С. 15-16.
7. Ахмадалиев Т. У. О зависимости прогиба составной балочной фермы с параллельными поясами от числа панелей / Т. У. Ахмадалиев // Вестник научных конференций. Перспективы развития науки и образования: по материалам международной научно-практической конференции 31 октября 2015 г. Часть 2. – 2015. – № 2-2(2). – С. 18-19.
8. Ахмедова Е. Р. Собственные частоты колебаний плоской балочной фермы регулярной структуры / Е. Р. Ахмедова, М.И. Канатова // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 11. – Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком». – 2014. – С. 17-18.
9. Ахмедова Е. Р. Аналитический расчет прогиба плоской фермы со шпренгельной решеткой / Е. Р. Ахмедова // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. – 2015. – М: Инфра-М. – Т.1. – С. 62-65.
10. Бабанов В.В. Строительная механика / В.В. Бабанов. – М.: Академия, 2011. – 204 с.
11. Бабанов В.В. Теоретическая механика для архитекторов / В.В. Бабанов. – М.: Академия, 2008. – Р. 204.
12. Бадертдинов Р.Р. Формула для прогиба плоской балочной фермы / Р.Р. Бадертдинов // Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 7. – Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком». – 2014. – С. 21-22.
13. Безобразова А.А. Прогиб плоской балочной фермы с прямоугольной решеткой / А.А. Безобразова // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 5. – Тамбов, 2015. – С. 29-30.
14. Белов В.А. Оценка жесткости плоской составной балочной фермы с треугольной решеткой / В.А. Белов // Научный альманах. – 2016. – № 4-3(18). – С. 235-237. – Режим доступа: DOI 10.17117/na.2016.04.03.235.
15. Белянкин Н.А. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с усиленной треугольной решеткой / Н.А. Белянкин, А.Ю. Бойко, М.Н. Кирсанов // Строительство и архитектура. – 2017. – Т. 5, № 2(15). – С. 42-44. – Режим доступа: DOI 10.12737/25106.

16. Белянкин Н.А. Формулы для определения деформаций внешне статически неопределимой фермы от действия сосредоточенной и распределенной нагрузки / Н.А. Белянкин, А.Ю. Бойко, А.А. Плясова // Строительство и архитектура. – 2017. – Т.5, №4. – С. 197-200.
17. Воропай Р.А. Вывод зависимости прогиба плоской шпренгельной фермы от числа панелей // Постулат. – 2017. - № 11. – 5 с.
18. Воропай Р.А. Аналитический расчет деформации балочной фермы с усиленным верхним поясом / Р.А. Воропай, Е.В. Доманов // Постулат. – 2017. – № 12. – 6 с.
19. Воропай Р.А. Индуктивный вывод зависимости прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей в системе Maple / Р.А. Воропай, Е.В. Доманов // Постулат. – 2017. – № 12. – 11 с.
20. Воронкин А.В. Аналитическое выражение для прогиба балочной фермы с нисходящими раскосами / А.В. Воронкин // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 6. – Тамбов, 2015. – С. 37-38.
21. Гавриленко А.Б. Аналитическая оценка жесткости шпренгельной фермы / А.Б. Гавриленко, М.Н. Кирсанов // Строительство и реконструкция. – 2018. - №2(76). – С. 11-17.
22. Галишникова В.В. Регулярные стержневые системы. Теория и методы расчета / В.В. Галишникова, В.А. Игнатьев – Волгоград:ВолГАСУ, 2006. – 552 с.
23. Глушенков П.В. Аналитический расчет прогиба составной балочной фермы / П.В. Глушенков // Научный альманах. – 2016. – № 4-3(18). – С.241-243. – Режим доступа: DOI 10.17117/na.2016.04.03.241.
24. Голоскоков Д. П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. / Д.П. Голоскоков. – СПб.Питер, 2004. – 539 с.
25. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple / Д.П. Голоскоков. – СПб.:ООО «ПаркКом», 2010. – 539 с.
26. Горбунова А.С. Аналитическое исследование прогиба составной фермы, нагруженной по верхнему поясу / А.С. Горбунова, В.А. Лепетюха // Материалы Всероссийской научно-практической конференции «45 лет отрасли легких металлоконструкций: от модуля Кисловодск до модуля Пятигорск» (03.04.2017-05.04.2017) / под. ред. Марутяна А.С., Файбишенко В.К., Вартумяна А.А. – Пятигорск: Издательство ПФ СКФУ, 2017. – С.15-18.
27. Горбунова А.С. Расчет прогиба симметричной фермы с решеткой "STAR" в аналитической форме / А.С. Горбунова, М.Н. Кирсанов, В.А. Лепетюха // Строительная механика и конструкции. – 2017. - №1(14). – С. 36-41.
28. Горбунова А.С. Индуктивный вывод формулы для деформации плоской стержневой модели покрытия промышленного здания [Электронный ресурс] / А.С. Горбунова, М.Н. Кирсанов, В.А. Лепетюха // Моделирование и механика конструкций. – 2017. - №5. – 7 с.
29. Грибова О.В. Расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой стержневой рамы / О.В. Грибова // Постулат. – 2017. - № 12. – 8 с.
30. Гриднев С.Ю. Статический расчет двухраскосной балочной фермы / С.Ю. Гриднев, М.Н. Кирсанов, И.Г. Овчинников // Интернет-журнал Науковедение. – 2016. – Т8, №6. – 9 с. – Режим доступа: <http://naukovedenie.ru/PDF/99TVN616.pdf>
31. Доев В.С. Сборник заданий по теоретической механике на базе Mathcad: Учебное пособие / В.С. Доев, Ф.А. Доронин – СПб.:Издательство «Лань», 2010. – 592 с.
32. Доманов Е.В. Вывод зависимости прогиба плоской фермы с дополнительной боковой опорой от числа панелей в системе Maple / Е.В. Доманов // Постулат. – 2018. - №1. – 6 с.
33. Доманов Е.В. Прогиб упругой симметричной арочной фермы под действием сосредоточенной нагрузки в середине пролета / Е.В. Доманов // Вестник научных конференций. Наука и образование в жизни современного общества: по материалам международной научно-практической конференции 31 марта 2016 г. Часть 6. – 2016. - № 3-6(7). – С. 37-38.
34. Доманов Е.В. Модельный анализ работы стержневой конструкции покрытия промышленного здания / Е.В. Доманов, М.Н. Кирсанов // Моделирование и механика конструкций. – 2017. - №5. – 7 с.
35. Игнатьев В.А. Расчет регулярных стержневых систем / В.А. Игнатьев. – Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973.– 433 с.
36. Ибрагимов Е. Р. Формула для смещения опор двухпролетной неразрезной фермы, нагруженной распределенной нагрузкой / Е. Р. Ибрагимов, М.Н. Кирсанов // Научный альманах. – 2016. - №10-3(24). – С. 368-371.
37. Канатова М.И. Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы / М.И. Канатова // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. – М: Инфра-М, 2015. – Т. 1. – С. 31-34.

38. Кирсанов М.Н. Деформации плоской фермы с усиленной решеткой / М.Н. Кирсанов, В.Г. Москвин // Строительная механика и расчет сооружений. – 2018. - №4(279). – С. 10-14.
39. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей / М.Н. Кирсанов // Строительство уникальных зданий и сооружений. – 2018. - №4 (67). – С. 86-94. – Режим доступа: DOI 10.18720/CUBS.67.7.
40. Кирсанов М.Н. Алгебра и геометрия. Сборник задач и решений с применением системы Maple / М.Н. Кирсанов, О.С. Кузнецова. – М.: Инфра-М, 2016. – 272 с.
41. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с двойными раскосами / М.Н. Кирсанов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2018. – Т.14, № 2. – С. 105–111. – Режим доступа: DOI 10.22363/1815-5235-2018-14-2-105-11.
42. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы / М.Н. Кирсанов // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2018. -№ 14(1). – С. 64-70. – Режим доступа: DOI 10.22337/2587-9618-2018-14-1-64-70.
43. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет величины прогиба решетчатой фермы / М.Н. Кирсанов, В.А. Пахомов // Постулат. – 2018. - № 3(29). – С.13.
44. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы / М.Н. Кирсанов // Строительная механика и конструкции. – 2018. - №1. – С.7-11.
45. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет деформаций и усилий в плоской вантовой ферме / М.Н. Кирсанов // Механизация строительства. – 2018. - № 1. – С. 29-33. – Режим доступа: <http://ms.enjournal.net/article/13283/>
46. Кирсанов М.Н. Вывод зависимости величины прогиба плоской фермы от числа панелей / М.Н. Кирсанов, Р.А. Воропай // Постулат. – 2018. - №2-1(28). – 15 с.
47. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы / М.Н. Кирсанов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. - № 3. – С. 23-27.
48. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях симметричной балочной фермы / М.Н. Кирсанов // Строительство и реконструкция. – 2017. - №1(69). – С.19-23.
49. Кирсанов М.Н. Индуктивный вывод формул для деформаций плоской решетчатой фермы / М.Н. Кирсанов // Строительство и реконструкция. – 2017. - №2(70). – С. 17-22.
50. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей / М.Н. Кирсанов // Механизация строительства. – 2017. - № 3 (873). – С. 26-29. – Режим доступа: <http://ms.enjournal.net/article/12885/>
51. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме / М.Н. Кирсанов // Механизация строительства. – 2017. - №4 (874). – С. 20-23. – Режим доступа: <http://ms.enjournal.net/article/12930>
52. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба двухпролетной плоской фермы / М.Н. Кирсанов // Механизация строительства. – 2017. - № 5. – С. 35-38. – Режим доступа: <http://ms.enjournal.net/article/12970/>
53. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей / М.Н. Кирсанов // Механизация строительства. – 2017. - № 10. – С. 24-27.
54. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы / М.Н. Кирсанов // Вестник МГСУ. – 2017. – Т. 12. - № 2 (101). – С. 165–171.
55. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики./ М.Н. Кирсанов. – СПб.: Лань, 2012. – 512 с.
56. Кирсанов М.Н. Практика программирования в системе Maple / М.Н. Кирсанов. – М.: Издательский дом МЭИ, 2011. – 208 с.
57. Кирсанов М.Н. Задачи по теоретической механике с решениями в Maple 11 / М.Н. Кирсанов. – М.:Физматлит, 2010. – 264 с.
58. Логвинец А.А. Анализ прогиба шпренгельной фермы под действием равномерной нагрузки по верхнему поясу / А.А. Логвинец // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 6. – Тамбов, 2015. – С. 96-97.
59. Макаров Е.Г. Соппротивление материалов на базе Mathcad / Е.Г. Макаров. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – Гост 8240-72.
60. Металлические конструкции. Учебник для вузов. Под ред. Е.И. Беленя. — М.: Стройиздат, 1976. – 600 с.
61. Михайлов А. Д. Формула для горизонтального смещения опоры арочной фермы треугольного очертания при загрузке центрального узла / А. Д. Михайлов // Вестник научных конференций. Перспективы развития науки и образования: по материалам международной научно-практической конференции 31 октября 2015 г. Часть 3. – 2015. - №2-3(2). – С. 94-96.

62. Мищенко А. В. Аналитическое выражение для прогиба балочной фермы с треугольной решёткой / А. В. Мищенко // Научный альманах. – 2016. - № 9-2(23). – С. 38-41. – Режим доступа: DOI 10.17117/na.2016.09.02.038.
63. Ниналалов И. Г. Расчет прогиба консольной фермы / И.Г. Ниналалов // Научный альманах. – 2016. – №6-2(19). – С. 271-281.
64. Осадченко Н. В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами / Н. В. Осадченко // Постулат. – 2017. - №12. – 28 с.
65. Осадченко Н. В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа / Н. В. Осадченко // Строительная механика и конструкции. – 2018. - №1. – С.12-33.
66. Пережилова Е. Д. Точное решение задачи о смещении подвижной опоры фермы с произвольным числом панелей / Е.Д. Пережилова // Строительство и архитектура. – 2017. – Т.5, №3(6). – С. 7-11.
67. Потапов В. Д. Строительная механика: Учеб. для вузов. Кн.1. Статика упругих систем / В. Д.Потапов, А.В. Александров, С.Б. Косицын, Д.Б. Долотказин // Под ред. В.Д. Потапова — М.:Выш.шк., 2007. – 863 с.
68. Рабинович И. М. Курс строительной механики стержневых систем. 2-е изд. Ч. 1. Статически определимые системы. / И. М. Рабинович. – М.-Л.: Стройиздат, 1950. – 388 с.
69. Рахматулина А. Р. Расчет величины прогиба плоской фермы с произвольным числом панелей в системе Maple / А. Р. Рахматулина, А. А. Смирнова // Молодежь и наука. – 2018. - №2. – С. 110.
70. Реутов Д. О. Индуктивный анализ прогиба фермы регулярной структуры в системе Maple / Д. О. Реутов // Международная научно-практическая конференция ИТОН-2014. IV-й международный семинар и международная школа «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики»; Материалы конференции и труды семинара. – Казань: Изд-во ООО «Фолиант», 2014. – С. 256-261.
71. Реутов Д. О. Аналитическое выражение прогиба слабо вспарушенной балочной фермы //Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 3. – Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. – С. 128-129.
72. Рыбаков Л. С. Термоупругость плоской регулярной фермы ортогональной структуры / Л. С. Рыбаков // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. - № 2. – С. 136–152. – Режим доступа: DOI 10.15593/perm.mech/2017.2.08.
73. Сметанин Д. А. Анализ решения задачи о прогибе арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу / Д.А. Сметанин // Вестник научных конференций. Вопросы образования и науки: по материалам международной научно-практической конференции 31 декабря 2015 г. Часть 1. – 2015. – №4-1(4). – С. 152-153.
74. Смирнов М. Д. Аналитическое определение горизонтального смещения опоры арочной фермы, нагруженной по нижнему поясу / М.Д. Смирнов // Вестник научных конференций. Перспективы развития науки и образования: по материалам международной научно-практической конференции 31 октября 2015 г. Часть 3. – 2015. - № 2-3(2). – С. 129-130.
75. Смирнов П.А. Прогиб составной статически определимой фермы под действием равномерной нагрузки / П.А. Смирнов // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 6. – Тамбов, 2015. – С. 129-131.
76. Снитко Н. К. Строительная механика / Н.К. Снитко. – М.: Высш.шк., 1980. – 431 с.
77. Стрелецкий Н.Н. Решетчатые комбинированные системы мостов / Н.Н. Стрелецкий – М.: Дориздат, 1953.– 220с.
78. Стрелецкий Н. С. Стальные конструкции / Н. С. Стрелецкий, А.Н. Гениев, В.А. Балдин, Е.И. Беленя, Е.Н. Лессинг. – М.: Гос. изд-во литературы по строительству и архитектуре, 1952. – 852 с.
79. Тарасюк Ю. О. Формула для горизонтального смещения опоры арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу / Ю.О. Тарасюк // Вестник научных конференций. Перспективы развития науки и образования: по материалам международной научно-практической конференции 31 октября 2015 г. Часть 6. – 2015. - №2-6(2). – С. 133-134.
80. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций / Д.В. Тиньков // Инженерно-строительный журнал. – 2015. - №5(57). – С. 66–73.
81. Тиньков Д.В. Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала / Д.В. Тиньков // Инженерно-строительный журнал. – 2016. - №1(61). – С. 25–32. – Режим доступа: DOI 10.5862/MCE.61.3.
82. Тиньков Д.В. Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами / Д.В. Тиньков // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. – М: Инфра-М, 2015. – Т. 1. – С. 52-56.
83. Тиньков Д.В. Индуктивный вывод формулы для прогиба плоской раскосной фермы / Д.В. Тиньков // Материалы Всероссийской научно-практической конференции «45 лет отрасли легких металлоконструкций: от модуля Кисловодск до модуля Пятигорск» (03.04.2017–05.04.2017) / под. ред. Марутяна А.С., Файбишенко В.К., Вартумяна А.А. – Пятигорск: Издательство ПФ СКФУ, 2017. –С. 112-117.

84. Тиньков Д.В. Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой / Д.В. Тиньков // Постулат. – 2017. - № 12. – 6 с.
85. Широков А.С. Вывод формулы для прогиба статически определимой порталной фермы в зависимости от числа панелей / А.С. Широков // Молодежь и наука. – 2018. - №5. – С.119.
86. Широков А.С. Аналитический расчет смещения опоры балочной фермы с верхними шпренгелями / А.С. Широков // Строительная механика и конструкции. – 2017. - №2(15). – С. 11-14.
87. Arutyunyan V.B. Double induction for deriving a formula for deflecting a frame truss with an arbitrary number of panels / V.B. Arutyunyan // Postulat. – 2018. – №7. – 5 с.
88. Belyankin N.A. Inductive derivation of rod cladding structures deflection in the system Maple / N.A.Belyankin, A.Y.Boyko, M.N.Kirsanov // Научный альманах. – 2017. – №4-3(30). – С. 194-197. – Access mode: DOI 10.17117/na.2017.04.03.194.
89. Belyankin N.A. Analysis of the deflection of the flat statically determinate girder / N.A.Belyankin, A.Y.Boyko // Научный альманах. – 2017. – № 2-3(28). – С.246-249.
90. Bolotina T.D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels / T.D. Bolotina// Bulletin of Scientific Conferences. – 2016. – №4-3(8). – P.7-8.
91. Domanov E.V. The dependence of the deflection of the cantilever truss on the number of panels obtained in the system Maple / E.V. Domanov // Structural mechanics and structures. – 2018. – Vol.17, №.2. – С.80-86.
92. Domanov E.V. The formula for the dependence of the deflection of an externally statically indeterminate truss on the number of panels / E.V. Domanov // Postulat. – 2018. – № 6.
93. Domanov E.V. An analytical solution of the problem of the externally statically indeterminate truss deflection with an arbitrary number of panels / E.V. Domanov // Postulat. – 2017. - № 7. – 4 p.
94. Domanov E.V. Analytical calculation of the deflection of the truss with cross-bar lattice / E.V.Domanov, M.N.Kirsanov // Science Almanac. – 2016. – № 11-2(25). – P. 312-314. – Access mode: DOI 10.17117/na.2016.11.02.312.
95. Doneva A. Energy-efficient actuation in infinite lattice structures / A.Doneva, S.Torquatob / Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2003. – Vol.51. – № 8. – P.1459-1475.
96. Dong Xiaomeng. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels / Dong Xiaomeng, M.N.Kirsanov // Science Almanac. – 2016. – № 1-4(5). – P.6-7.
97. Jiang H. An analytical expression for the influence line of the truss / H.Jiang, M.N.Kirsanov // Bulletin of Scientific Conferences. – 2016. – № 1-5(5). – P.10-11.
98. Ilin I.A. The deflection and displacement of the bearings of the truss with rhombic lattice / I.A.Ilin, M.N.Kirsanov / Science Almanac. – 2016. – №12-2(26). – P.216-219. – Access mode: DOI 10.17117/na.2016.12.02.216.
99. Hutchinson R.G. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses / R.G.Hutchinson, N. A.Fleck // ZAMM Z.Angew.Math.Mech. – 2005. – Vol.85, № 9. – P.607-617.
100. Hutchinson R.G. The structural performance of the periodic truss / R.G.Hutchinson, N.A.Fleck // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – Vol.54. – Issue 4, April 2006. – P.756-782.
101. Kirsanov M.N. Analytical calculation of the deflection of the lattice truss / M.N.Kirsanov, D.V.Tinkov // MATEC Web of Conferences. – 2018. – Vol.193. – P.03015. – Access mode: DOI.org/10.1051/mateconf/201819303015.
102. Kirsanov M.N. A Precise Solution of the Task of a Bend in a Lattice Girder with a Random Number of Panels / M.N.Kirsanov // Russian Journal of Building Construction and Architecture. – 2018. – № 1(37). – P.92-99.
103. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure / M.N.Kirsanov // Magazine of Civil Engineering. – 2017. – № 8. – P.58-66. – Access mode: DOI 10.18720/MCE.76.6.
104. Kirsanov M.N. Elastic characteristics of a stochastically inhomogeneous medium modeled by a rod grid / M.N.Kirsanov, S.E.Kollerova // Science Almanac. – 2017. – № 3-3(29). – P.258-261. – Access mode: DOI 10.17117/na.2017.03.03.258.
105. Kirsanov M.N. Analysis of the deflection of flat roof trusses / M.N Kirsanov, M.G Lafickova, A.S Nikitina // Научный альманах. – 2017. – №3-3(29). – С. 262-265. – Access mode: DOI 10.17117/na.2017.03.03.262.
106. Kirsanov M.N., Shi Kaifei The calculation of the deflection of the truss with cross bars in the system Maple / M.N.Kirsanov, Shi Kaifei // Научный альманах. – 2017. – 3-3 (29). – С.266-269. – Access mode: DOI 10.17117/na.2017.03.03.266.
107. Kirsanov M.N. The formulas for calculating girders with asymmetric triangular lattice / M.N.Kirsanov, Shi Kaifei // Science Almanac. – 2017. – №3-3(29). – P.270-273. – Access mode: DOI 10.17117/na.2017.03.03.270.
108. Kirsanov M.N. Analysis of deformations of the open hinged-rod ring / M.N.Kirsanov // Инновационная наука. – 2017. – № 02-1. – С.10-11.

109. Kirsanov M.N. An inductive derivation of the dependence of the arched truss deflection on the number of panels / M.N. Kirsanov, M.G. Lafickova, A.S. Nikitina // Science Almanac. – 2017. – № 4-3(30). – P.205-208. – Access mode: DOI 10.17117/na.2017.04.03.205.
110. Kirsanov M.N. Analysis of the deflection of flat roof trusses / M.N.Kirsanov, M.G.Lafickova, A.S.Nikitina // Научный альманах. – 2017. – № 3-3(29). – С. 262-265. – Access mode: DOI 10.17117/na.2017.03.03.262.
111. Kirsanov M.N. The formula for deflection of truss with cases of kinematic variability / M.N.Kirsanov, P.C. Razananairina // Postulat. – 2017. – № 9.
112. Kirsanov M.N. The mathematical model of dome covering industrial facility / M.N.Kirsanov, S.V.Astahov // Architecture and Engineering. – 2017. – № 2(2). – P.8-14.
113. Kirsanov M.N. The formula for determining the deflection of the truss with an arbitrary number of panels / M.N.Kirsanov // Наука в цифрах. – 2017. – № 2. – P.22-24. – ISSN 2500-1353.
114. Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the rod of a statically exterior indeterminate truss on the number of panels / M.N.Kirsanov, I.V. Orlov // Postulat. – 2017. – № 12(26). – С.75.
115. Kirsanov M.N. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. Architecture and Engineering. – 2016. – № 3. – Vol.1. –P.14-17.
116. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder / M.N.Kirsanov // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. – 2016. – № 1(29). – P.84-105.
117. Kirsanov M.N. Analytical study of the limiting properties of suspended cable system with a rigid beam // Международная школа "Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики" KAZCAS-16: лекции школы и материалы семинара. – Казань, 2016. – С.179-190.
118. Kiyko L.K. Analytical evaluation of deflection of arched trusses under wind load / L.K. Kiyko // Scientific Bulletin. – 2016. – № 1(7). – P.247-254.
119. Ponamareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load / M.A. Ponamareva // Science Almanac. – 2016. – № 4-3(18). – P.257-259. – Access mode: DOI 10.17117/na.2016.04.03.257.
120. Rakhmatulina A.R. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels / A.R.Rakhmatulina, A.A.Smirnova // Science Almanac. – 2017. – № 2-3(28). – P.268-271.
121. Tinkov D.V. Design Optimization of Truss Bridge Structures of Composite Materials / D.V.Tinkov, A.A.Safonov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2017. – Vol.46, №1. – P.46-52. – Access mode: DOI 10.3103/S1052618817010149.
122. Vasilchenko D.I. Analytical evaluation of displacement of the movable support in the truss with reinforced cross bars / D.I. Vasilchenko // Научный альманах. – 2017. – № 4-3(30). – P.198-201.

#### FLAT FARMS. METHOD OF SOLUTION

M.N. Kirsanov

*Numerical, graphical and analytical methods involving the computer algebra system Maple algorithms for obtaining solutions of problems of statics of flat trusses. The cases of kinematic variability of some truss schemes are considered.*

Keywords: tress, deflection, Maple, induction, kinematic degeneration.

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-18»

---

**Э.В. Чеботарева**

**Реализация технологии STEM на примере проекта  
«Робот-художник»**

---



---

Казань, Казанский федеральный университет, 28 октября – 3 ноября 2018

УДК 372.862

## РЕАЛИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИИ STEM НА ПРИМЕРЕ ПРОЕКТА «РОБОТ-ХУДОЖНИК»

Э.В. Чеботарева<sup>1</sup><sup>1</sup> elvchb@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В работе приводится описание образовательного проекта, для разработки которого использовалась методология STEM. Работая над проектом учащиеся получают новые и закрепляют уже имеющиеся знания и навыки из различных дисциплин. Результатом проекта является разработка действующего робота манипулятора.*

**Ключевые слова:** STEM-образование, образовательная робототехника, инженерная математика, междисциплинарный подход в образовании.

### СОДЕРЖАНИЕ:

1	Введение . . . . .	52
2	Этапы работы над проектом «Робот-художник» . . . . .	52
3	Выводы . . . . .	55
	Литература . . . . .	56

## 1. Введение

В настоящее время в школьном и вузовском образовании является востребованным практико-ориентированный междисциплинарный подход [3, 4]. Этот подход также заложен в концепцию STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) [1]. Применение методологии STEM позволяет эффективно интегрировать в процессе обучения широкий спектр дисциплин, способствует приобретению учащимися полезных практических и технических навыков, повышает интерес учащихся к новым технологиям, математическим, компьютерным и инженерным дисциплинам.

Концепция STEM подразумевает вовлечение учащихся в работу над научно-исследовательским инженерным проектом, целью которого является некая практически значимая разработка. Для достижения цели учащимся требуется применить уже имеющиеся знания умения, а также приобрести новые.

Развитие STEM-образования требует новых методических решений. В настоящей работе рассмотрены практические аспекты реализации концепции STEM на примере проекта «Робот-художник».

## 2. Этапы работы над проектом «Робот-художник»

В начале работы над проектом учащиеся объединяются в команду разработчиков. Перед командой ставится цель - создание робота, который может рисовать. В ходе разработки команда проходит несколько стадий, примеряя разные роли.

Первым этапом является формирование требований. На этом этапе учащиеся проводят анализ требований к итогу их работы - роботу-художнику. Необходимо выяснить все детали, например, что робот рисует на листе бумаги монохромное изображение, состоящее из линий.

Вторым этапом работы является проектирование. На этой стадии создается дизайн проекта, решаются вопросы с применяемыми технологиями. В результате этого этапа должен быть построен некий схематический прототип. Например, на рис. 1 представлен интерактивный прототип робота-художника, выполненный с помощью системы GeoGebra, хорошо знакомый учащимся по урокам алгебры и геометрии. Робот имеет плечо и локоть. Поворотом плеча управляет первый сервопривод (звено Servo1 на рис.1), поворотом локтя управляет второй сервопривод (звено Servo2 на рис. 1). На конце манипулятора находится карандаш или маркер (Pen на рис. 1). Управляя ползунками,



можно изменять положение маркера. На втором этапе принимается решение о выборе электронных

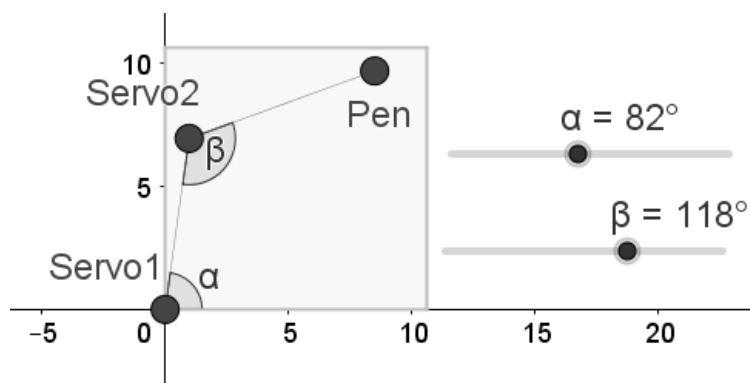


Рис. 1. Прототип робота-художника

компонентов робота - контроллера Arduino Uno [5] и микросервоприводов.

Третий этап работы - разработка робота, в свою очередь, делится на несколько этапов.

1) Проектирование частей корпуса. На этом этапе проводятся замеры, и выполняется 3D моделирование частей корпуса робота. Здесь учащиеся совершенствуют навыки в 3D моделировании. На рис. 2 представлена 3D модель одной из частей робота.

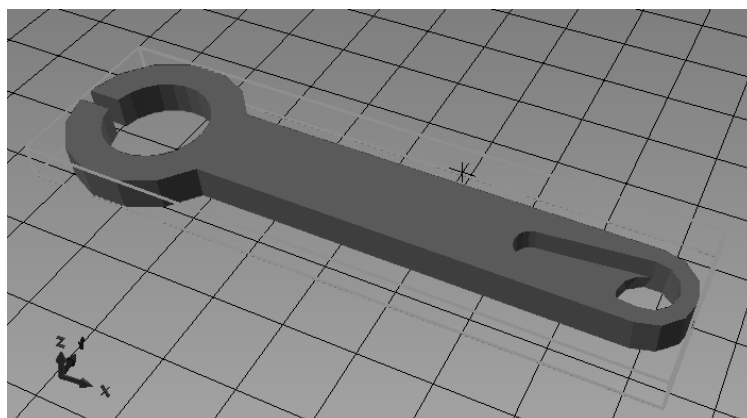


Рис. 2. 3D модель детали корпуса робота

2) 3D печать корпуса робота. На этом этапе происходит подготовка модели к печати и ее печать. Отрабатываются навыки технологии 3D-печати.

3) Сборка робота. На этом этапе создается физический прототип робота, включающий себя электронные компоненты.

4) Тестирование работоспособности конструкции. На этом этапе проверяется готовность робота к следующему этапу - программированию. Сначала на эмуляторе готовится тестовая программа, а затем ее работа проверяется на собранном роботе. В качестве эмулятора можно использовать сервис Tinkercad [6]. На рис. 3 приведен макет робота, созданный в эмуляторе Tinkercad.

При необходимости проводится доработка конструкции робота. Например, снабжение робота дополнительным сервоприводом для подъема маркера или совершенствование крепления маркера.

Четвертый этап - программирование робота. Наиболее сложный и трудоемкий этап. Здесь также выделяются подэтапы.

1) Построение математической модели. На данном этапе формулируются и решаются прямая и обратная задачи для построенного манипулятора.

Прямая задача - известны углы поворота первого и второго сервоприводов. Определить координаты маркера. Обратная задача - по заданным координатам маркера рассчитать углы поворота первого и второго сервоприводов.

Две данные задачи хорошо демонстрируют практическую значимость таких разделов как

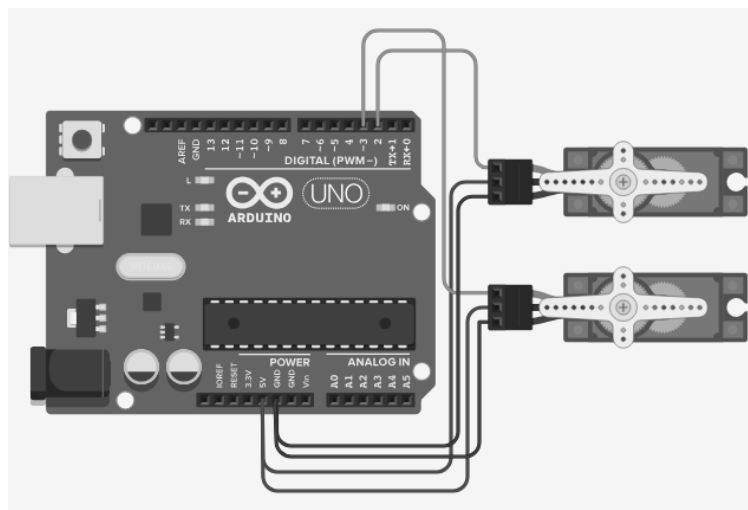


Рис. 3. Прототипирование в Tinkercad

- декартова система координат,
- тригонометрические функции,
- обратные тригонометрические функции,
- теорема косинусов,
- метод координат.

Правильность полученных формул проверяется учащимися на построенной ранее компьютерной модели (рис. 2). Эта модель позволяет не только выявить ошибки, но и упростить сам процесс вывода формул.

2) Составление алгоритма и оформление кода программы. После того, как формулы получены, разработчики переходят к составлению алгоритма. Алгоритм может быть реализован в виде блок-схемы либо псевдокода, допускается непосредственная реализация алгоритма в виде программы. Сначала рекомендуется составлять программу для эмулятора. Так каждый разработчик сможет быстрее подготовить и отладить свою программу.

Пятый этап - тестирование робота. На этом этапе команда приступает к испытаниям робота. В качестве испытания для робота разрабатывается несколько задач. Примеры таких задач:

- перевести маркер в точку с заданными координатами,
- соединить две точки,
- соединить последовательно несколько точек, например вершины многоугольника в форме звезды.

На этапе тестирования может возникнуть необходимость как доработки самой программы, так и доработки конструкции робота. Например, надление робота возможностью стирать свой рисунок с маркерной доски.

Также в ходе тестирования может обнаружиться следующая проблема. Фактически робот соединяет точки не прямыми отрезками а дугами, чем дальше две точки друг от друга, тем менее ровной выходит линия. Возникает необходимость в программном разбиении отрезка на более мелкие отрезки.

Еще одной проблемой становится неудобство в ручном определении координат точек и их введений в программу робота. Один из предлагаемых нами способов решения данной проблемы - сохранить рисунок в уже известном для учащихся по 3D печати формате stl. Затем экспортировать его в G-code и создать программу, автоматизирующую перевод команд из GCODE в команды, передаваемые роботу.

На рис. 4 приведен пример робота, созданного учащимися в ходе выполнения данного проекта

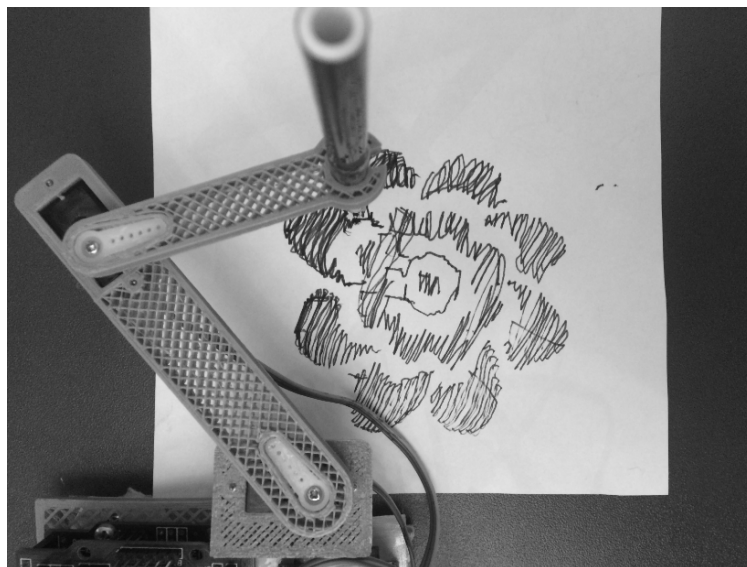


Рис. 4. Робот-художник

На рис. 5 приведено окно приложения, созданного нами в ходе работы с учащимися, приложение переводит файл G-code в команды для робота-художника. В окно приложения требуется вставить содержимое файла с расширением .gcode и нажать кнопку «Перевести».

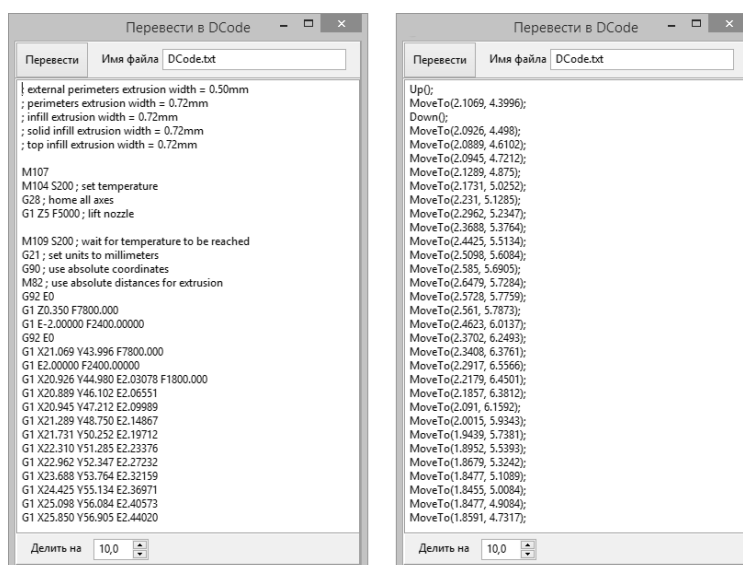


Рис. 5. Импорт G-code файла в команды для робота

На рис. 6 приведен эскиз учащегося, созданный с помощью Tinkercad и рисунок, выполненный роботом-художником.

### 3. Выводы

Рассмотренный выше проект рассчитан на учащихся средней школы, которые начали изучать робототехнику с помощью конструктора Arduino. Данный проект может быть одним из первых проектов роботов, созданных учащимися самостоятельно. В зависимости от уровня подготовки учащихся проект может быть усложнен или упрощен. Выполняя проект, учащиеся проходят все основные

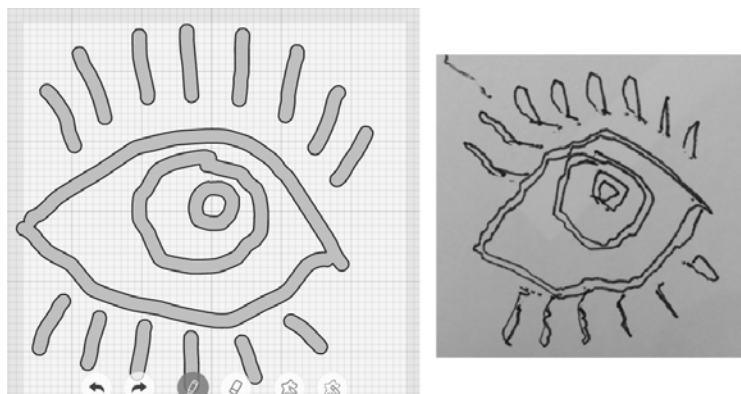


Рис. 6. Эскиз рисунка, созданный учащимся и рисунок робота-художника

этапы, с которыми сталкивается любая команда разработчиков, а навыки участия в проекте пригодятся в любой исследовательской и научной деятельности.

### Литература

1. Чеботарева Э.В. Разработка методических материалов практического курса по основам конструирования и программирования роботов /Э.В. Чеботарева, Р.Н. Абдрахманова, З.Н. Хадиева // Информационные технологии в образовании и науке – ИТОН 2017: материалы международной научно-практической конференции. – Казань: КФУ. – 2017. – С. 262-264.
2. Чеботарева Э.В. Некоторые аспекты реализации практико-ориентированного подхода при обучении программированию / Э.В. Чеботарева // Информационные технологии в образовании и науке – ИТОН 2016: материалы международной научно-практической конференции. – Казань: КФУ. – 2016. – С. 213-214.
3. Bybee R.W. The Case for STEM Education: Challenges and Opportunities / R.W. Bybee –Arlington: NSTA Press. – 2013. –189 p.
4. Аппаратная платформа Arduino [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://arduino.ru/Hardware/ArduinoBoardUno>
5. Circuits on Tinkercad [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://www.tinkercad.com/circuits>

### REALIZATION OF STEM TECHNOLOGY ON EXAMPLE OF THE ROBOT-DRAWER PROJECT

E.V. Chebotareva

*The paper describes the educational project for which the STEM methodology was used. Working on the project, students receive new and reinforce the already existing knowledge and skills from different disciplines. The result of the project is the development of an operating robot manipulator.*

Keywords: STEM-education, educational robotics, engineering mathematics, interdisciplinary approach in education.

**МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-18»  
И КОНФЕРЕНЦИИ «ИТОН-2018»**

---



УДК 004.89

## О ВОПРОСАХ РАЗРАБОТКИ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ СРЕД

М.М. Абрамский<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *ma@it.kfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Высшая школа информационных технологий и интеллектуальных систем

*Рассматриваются вопросы разработки цифровых образовательных сред (ЦОС). Выдвигается требование гибкого проектирования компонентов ЦОС для удобства работы и реализации принципа индивидуализации образования. Данная гибкость достигнута использованием в ЦОС средств онтологического моделирования для образовательных программ и цифровых портретов пользователей.*

**Ключевые слова:** цифровые образовательные среды, онтологии, цифровые портреты, образовательные программы.

*Информационные системы в образовании (ИОС) за весь период использования прошли путь от простых приложений и информационных страниц до более 400 наименований сложных программных комплексов [1]. Последние годы отмечаются два их недостатка. Первый — жесткое задание форматов работы в них, из-за чего снижается вариативность использования. Второй — отсутствие обработки всех возможных данных о студентах вопреки требованиям индивидуализации образования [2].*

*Цифровые образовательные среды (ЦОС) рассматриваются как новое поколение решений, способных исправить указанные минусы. В Указе Президента РФ № 204 от 07.05.2018 говорится о создании «современной и безопасной цифровой образовательной среды, обеспечивающей высокое качество и доступность образования всех видов и уровней» [3].*

Работы, посвященные ЦОС, объединяет вопрос о реализации индивидуальных образовательных траекторий, что ведет к задачам сбора исходных данных для их эффективной генерации. Очевидно, что такими данными являются образовательные программы, а также сведения об обучающихся и преподавателях (их *цифровые портреты*) [4].

Проблема заключается в том, что разные организации по-разному трактуют содержимое и формат образовательных программ и цифровых портретов, а их унификация может привести к проблеме гибкости, описанной выше.

Для решения проблемы предлагается ввести в рамках ЦОС следующие понятия:

- **School** — структурная единица, где реализуется образование. Экземпляры **School** могут образовывать иерархию (например, Институт – часть Университета);
- **Subschool** — регламент проектирования в **School**. Понятие введено отдельно от **School**, поскольку для одной **School** может существовать несколько **Subschool** (рис. 1). Примеры **Subschool** для **School** «Высшая школа ИТИС КФУ»:
  - «Образовательная программа «Программная инженерия»;
  - «Регламент программ дополнительного образования»;
  - «Регламент факультативного образования студентов в формате тьюторства».

Создание форматов проектирования образовательных программ и цифровых портретов может быть сделано инструментами онтологического моделирования [5]. *Онтология* — описание предметной области в виде концептуальной схемы, которая может создаваться в ЦОС экспертами.

Каждая **Subschool** определяет собственный набор онтологий. На рис. 2 приведен интерфейс создания онтологии проектирования образовательных программ. Определяются возможные компоненты программ и связи между ними.

Аналогичный подход может быть применен и для создания форматов цифровых портретов в рамках **Subschool**. Предложенный подход может быть применен как для академического, так и для корпоративного образования.

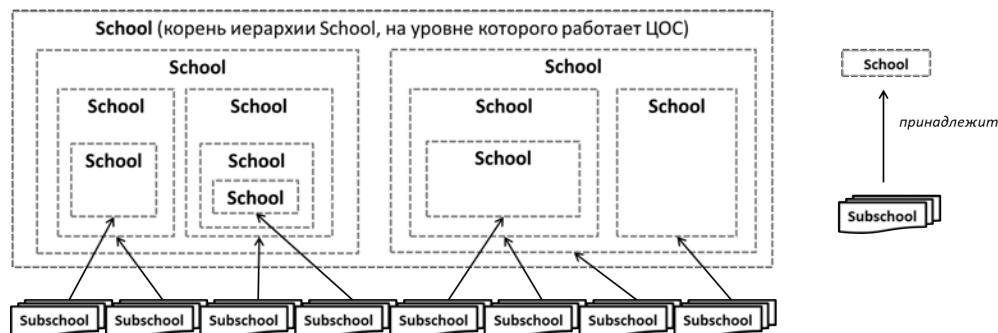


Рис. 1. Иерархия School и Subschool в ЦОС

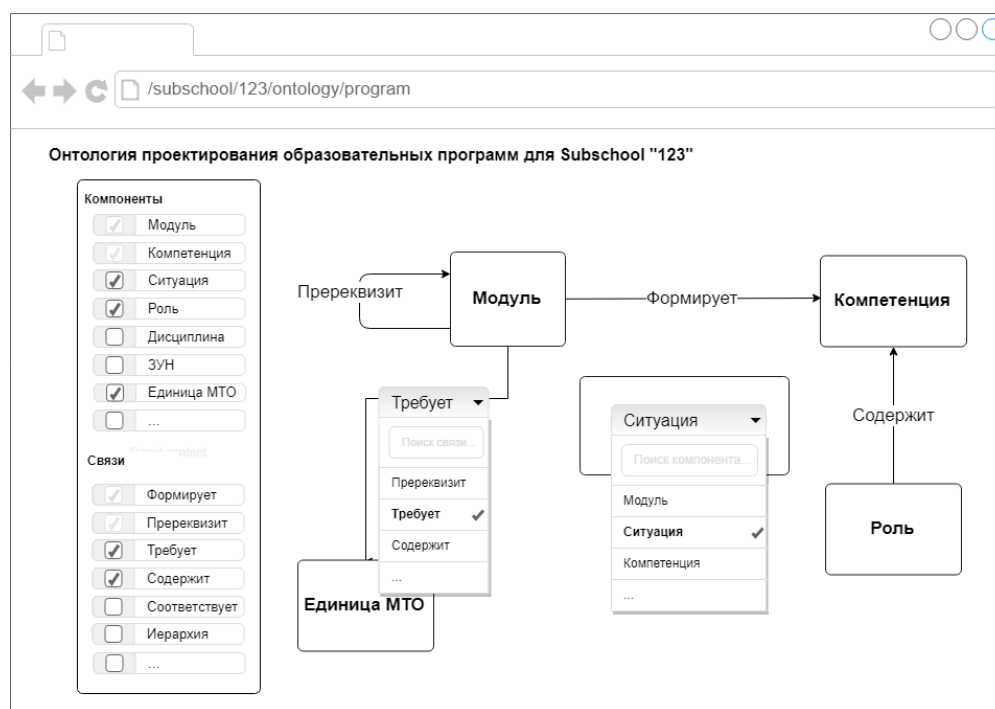


Рис. 2. Создание онтологии проектирования образовательных программ

## Литература

1. Cheng Y.C. New paradigm for re-engineering education: Globalization, localization and individualization // Education in the Asia-Pacific Region: Issues, Concerns And Prospects – Springer Science & Business Media. – 2006. – Т. 6. – Р. 19-44
2. Абрамский М.М. Генерация индивидуальных образовательных траекторий и расписания обучения в парадигме индивидуализации образования / М.М. Абрамский, Э.Ф. Батырова, А.Р. Марданова, Т.А. Ахметзянова // Электронные библиотеки. – 2018. – Т.21(3-4). – С. 129-145
3. Указ Президента Российской Федерации «О национальных целях и стратегических задачах развития Российской Федерации на период до 2024 года» от 07.05.2018 № 204. – Режим доступа: <http://kremlin.ru/events/president/news/57425> (дата обращения: 15.09.2018)
4. Higher Education Technology Landscape 2017 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://pages.nrcua.org/rs/514-WFI-660/images/Eduventures\\_HigherEd-Tech-Landscape-2017.pdf](http://pages.nrcua.org/rs/514-WFI-660/images/Eduventures_HigherEd-Tech-Landscape-2017.pdf) (дата обращения: 15.09.2018)
5. Стюарт Р. Искусственный интеллект: современный подход. 2-е изд / Стюарт Р., Норвиг П. – М.; СПб.; Киев: Вильямс, 2007. – 1408 с.

*Issues of Digital Education Environments (DEE) development are discussed. The requirement of flexible design of DEE components for usability and individualization of education purposes is given. Required flexibility is achieved by using ontology modelling for education programs and users digital portraits.*

Keywords: digital education environments, ontologies, digital portraits, education programs.

УДК 681.3:61:378-3

## ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ДИСТАНЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В УСЛОВИЯХ МЕДИЦИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Т.Г. Авачева<sup>1</sup>, Э.А. Кадырова<sup>2</sup>, М.А. Шмонова<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *avacheva\_t@mail.ru*; ФГБОУ ВО «Рязанский государственный медицинский университет имени академика И.П. Павлова» Минздрава России

<sup>2</sup> *elvira\_k2004@mail.ru*; ФГБОУ ВО «Рязанский государственный медицинский университет имени академика И.П. Павлова» Минздрава России

<sup>3</sup> *shmonova.marina2016@yandex.ru*; ФГБОУ ВО «Рязанский государственный медицинский университет имени академика И.П. Павлова» Минздрава России

*Рассматриваются возможности применения дистанционных образовательных технологий в условиях медицинского университета. Представлен опыт разработки и внедрения дистанционных учебных курсов для организации самостоятельной работы студентов в условиях очного обучения.*

**Ключевые слова:** электронного обучение, медицинский университет, самостоятельная работа студентов.

Внедрение дистанционных образовательных технологий (ДОТ) открывает новые возможности для управления самостоятельной работы студентов как на этапе подготовки к аудиторным занятиям, так и на уровне различных форм внеаудиторной деятельности. Высокий потенциал ДОТ обусловлен повышенной степенью интерактивности, способствующей развитию инновационных методов в преподавании и, как следствие, активизации учебно-познавательного процесса для обучающихся. Перед преподавателями актуализируется задача поиска средств и методов эффективного управления этим процессом. Формирование у студентов познавательных стратегий самообучения и самообразования рассматривается как неотъемлемая часть будущей профессиональной деятельности медицинских специалистов.

Одним из приоритетных условий для эффективной организации СРС является ее информационная обеспеченность, предполагающая доступность для студентов всех необходимых обучающих, методических и контролирующих материалов. В Рязанском государственном медицинском университете имени академика И.П. Павлова для организации самостоятельной работы студентов очной формы обучения активно используются дистанционные учебные курсы (ДУК). Согласно определению, ДУК представляет особую, основанную на дистанционной технологии, форму предоставления содержания учебной дисциплины. Инструментальной средой для разработки, размещения и организации доступа к ДУК служит система MOODLE, которая относится к классу систем управления учебной деятельностью (LMS, Learning Management System) и получила широкое распространение в зарубежных и отечественных образовательных учреждениях, в том числе в медицинских [1, 2, 3, 4, 5].

Для достижения поставленных целей преподаватели выполняют следующие виды методической деятельности: 1) разработка системы заданий с указанием сроков выполнения и форм текущего и итогового контроля; 2) выявление дополнительных Интернет-ресурсов, уточнение условий доступа к ним; 3) размещение в ДУК необходимых учебных, справочных и методических материалов по выполнению СРС, ссылок на внешние информационные ресурсы; 4) освоение и реализация методики дистанционного консультирования.

Содержание заданий для самостоятельной работы должно соответствовать принципу доступности (от простого к сложному), а в определяемой трудоемкости необходимо учитывать время, определяемое рабочей программой на самостоятельную работу по изучению конкретных тем (модулей).



Текст каждого задания сопровождается методическими рекомендациями и инструкциями по его выполнению. Кроме того, целесообразным видится подробное описание рациональных приемов самостоятельной работы над курсом в целом, а также описание методики ее оценивания на основе составленной карты баллов.

Самостоятельная работа студентов в СДО РязГМУ предполагает расширение информационно-образовательной среды посредством размещения в ДУК ссылок на открытые образовательные ресурсы сети Интернет, электронные библиотечные системы и учебники, а также видео- и аудиофайлы из открытых источников. Организация самостоятельной (индивидуальной или групповой) деятельности участников ДУК предполагает активное использование современных педагогических технологий (технологии группового обучения, метода проектов, обучения в сотрудничестве и др.), которые реализуются в среде MOODLE.

Настройка *группового режима* для отдельных интерактивных элементов ДУК дает возможность распределить участников по группам. Для организации *проектной работы* используются интерактивная доска на внешнем сервисе Padlet.com. Применение технологии *обучения в сотрудничестве* осуществляется с использованием встроенного в систему инструмента Wiki, позволяющего участникам добавлять и редактировать набор связанных веб-страниц в ответ на задание. В среде MOODLE преподаватель может оценивать сообщения в тематическом форуме, записи в глоссарии, результаты выполнения различных типов заданий, результаты текущего тестирования и др. За активность в работе над курсом преподаватель может выставлять бонусные баллы. Организации СРС предполагает четкую систему контроля, при этом наиболее результативным признается календарное планирование контролируемых мероприятий с их последующим поэтапным выполнением.

Среда MOODLE позволяет регулировать самостоятельную деятельность студентов, анализировать ее эффективность. Преподаватель может выводить отчеты о деятельности каждого студента в отдельности или о работе группы в целом с использованием соответствующих встроенных инструментов для анализа статистической информации. Проведенный анализ позволяет корректировать возникающие в ходе обучения вопросы, своевременно влиять на процесс оптимизации СРС и принятие управленческих решений.

Использование дистанционных образовательных технологий в медицинском вузе позволяет разработчикам сформировать в рамках ДУК контент, в котором четко определен объем заданий и другого учебного материала, ориентированный на самостоятельное освоение обучающимся, задать траекторию обучения, с четким распределением во временном контексте семестра в соответствии с учебным планом. Это позволяет рассматривать ДОТ как средство эффективного управления процессом СРС.

## Литература

1. Авачева Т.Г. Развитие дистанционных образовательных технологий для формирования информационно-образовательной среды в медицинском вузе / Т.Г. Авачева, Э.А. Кадырова // Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2018: сб. тр. междунар.науч.-техн.форума: в 10 т. Т.9 / под общ. ред. О.В.Миловзорова. – Рязань.: Рязан.гос.радиотехн. ун-т, 2018. – Рязань. – С.18-22.
2. Кадырова Э.А. Дистанционный курс как средство информационно-методической поддержки процесса обучения в медицинском университете / Э.А. Кадырова// Материалы всероссийской конференции студентов и молодых ученых с международным участием «Естественнонаучные основы медико-биологических знаний»; ред. кол.: Т.Г. Авачева, В.М. Пашенко, А.А. Кривуши. ФГБОУ ВО РязГМУ Минздрава России. – Рязань, 2017. – С.12-15.
3. Круглякова Л.В. Дистанционные технологии обучения в медицинском вузе / Л.В. Круглякова, С.В. Нарышкина, М.В. Сулима // Амурский медицинский журнал. – 2016. – №2 (14). – С.67-70.
4. Курмангулов А.А. Перспективы внедрения электронного обучения в образовательный процесс медицинского вуза / А.А. Курмангулов, О.И. Фролова, С.В. Соловьева // Высшее образование в России. – 2017. – №8/9(215). – С.116-120.
5. Симонян Р.З. К вопросу о положительных перспективах дистанционного образования в медицинских вузах России / Р.З. Симонян // Юридические науки: Международ. журнал прикладных и фундамент. исследований. – 2016. – №12. – С.1357-1359.

## THE POSSIBILITY OF USING DISTANCE LEARNING TECHNOLOGIES IN A MEDICAL UNIVERSITY

T.G. Avacheva, E.A. Kadyrova, M.A. Shmonova

*The possibilities of application of distance educational technologies in conditions of medical university are considered. The*

*experience of development and introduction of distance learning courses for the organization of independent work of students in the conditions of full-time education is presented.*

Keywords: e-learning, medical University, independent work of students.

УДК 5530.12+531.51

## АНИМИРОВАННЫЙ УЗОРНЫЙ РИСУНОК НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

Д.С. Александров<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *alsugi@mail.ru*; МБОУ «Средняя общеобразовательная русско - татарская школа №57» г. Казани

*Описывается построение узорного рисунка с анимацией средствами пакета Maple.*

**Ключевые слова:** узор, анимация, Maple.

В Казанской школе №57 более 10 лет функционирует научное общество учащихся, одно из направлений работы которого – компьютерное математическое моделирование в среде системы Maple. Автор работает с названным пакетом около года. Сначала мы знакомимся с простейшими основами Maple, такими, как работа с числовыми и буквенными выражениями, решение уравнений с проверкой и другие. Затем строили рисунки на координатной плоскости. После того, как увидели анимации в работах старших учащихся, возникло желание анимировать и свои рисунки. Один из графических проектов представлен в статье – это построение анимированного узорного рисунка.

Для получения изображений и его анимации используются библиотеки `<plots>` и `<plottools>`.

Этапы построения (Рис.1): 1) задается и строится ромб по координатам его вершин. Задается звезда как список поворотов ромба на угол  $\pi/4$ ; 2) звезда вписывается в соответствующую окружность – это центр узорного рисунка; 3) вокруг центрального узора добавляются малые звезды и кружки, которые строятся путем поворота начальных элементов по кругу с шагом  $\pi/4$ .

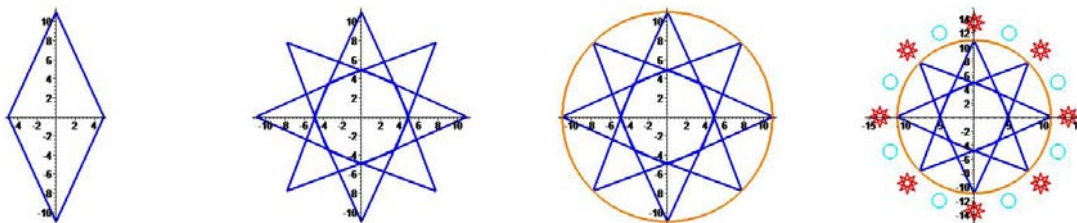


Рис. 1. Этапы построения узорного рисунка.

Программа построения:

```
p1:=plot([[0,11],[-5,0],[0,-11],[5,0],[0,11]],
color=blue,thickness=3,scaling=constrained):
plots[display](p1);
p1_i:=seq(rotate(p1,i*Pi/4),i=1..8):
display(p1_i);
p1_:=display(p1,p1_i);
c0:=circle([0,0],11,color=coral,thickness=3):
display(c0,p1_i);
p2:=plot([[0,15],[0.5,13.5],[0,12],[-0.5,13.5],[0,15]],
color=red,thickness=2,scaling=constrained):
p2_i:=seq(rotate(p2,i*Pi/4,[0,13.5]),i=1..8):
display(p2_i);
p2_:=display(p2_i):
display(c0,p1_i,p2_i);
p22_:=seq(rotate(p2_,i*(-Pi/4)),i=0..8):
p22_i:=display(p22_):
```

```

display(p22_i);
p22_ii:=display(p22_i):
display(c0,p1_i,p22_i);
c1:=circle([5,12],1,color=cyan,thickness=2):
display(c1,c0,p1_i,p22_i);
c11:=seq(rotate(c1,i*Pi/4),i=1..8):
c11_:=display(c11):
display(c11_,c1,c0,p1_i,p22_i);

```

Этапы анимации: 1) поворот списка малых звезд по часовой стрелке с шагом  $(-\pi/8)$  и визуализация поворота с помощью опции `insequence=true`; 2) аналогично – поворот списка кружков против часовой стрелке с шагом  $\pi/8$ ; 3) объединение анимированных элементов с центральным узором; 4) поворот центральной звезды по часовой стрелке с шагом  $\pi/8$ ; 5) объединение всех анимированных элементов.

Программа анимации:

```

p222_:=seq(rotate(p22_ii,i*(-Pi/8)),i=0..16):
display(p222_,insequence=true);
z1:=display(p222_,insequence=true):
f1:=seq(rotate(c11_,i*Pi/8),i=0..16):
display(f1,insequence=true);
k1:=display(f1,insequence=true):
display(k1,z1,c0,p1_i);
p11_:=seq(rotate(p1_,i*Pi/8),i=0..16):
display(p11_,insequence=true):
p111_:=display(p11_,insequence=true):
display(p111_,insequence=true);
display(k1,z1,c0,p111_);

```

На следующем этапе моделирования была добавлена игра цвета и его анимация с помощью генератора случайных чисел, в Maple – это команда `<rand>`, с каждым новым вводом командной строки меняется цвет графических объектов.

Частная цель работы – моделирование анимированного узорного изображения – реализована. В перспективе предполагается в интерактивной математической среде Maple средствами аналитической геометрии получить анимированное трёхмерное изображение. Однако это, прежде всего – сложная математическая задача. Также можно разнообразить узорные элементы и усложнить их графические преобразования.

За годы существования школьного научного общества сформировалась большая библиотека графических Maple-проектов, которые с каждым годом становятся сложнее и интереснее. Более общая цель – создание банка стандартных процедур получения анимированных изображений с использованием различных графических преобразований.

#### ANIMATED PICTURE ON THE COORDINATE PLANE

D.S. Aleksandrov

*Building a patterned image with animation using a package Maple.*

Keywords: patterned image, animation, Maple.

УДК 372.851

## ДИАГНОСТИКА УРОВНЯ РАЗВИТИЯ ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

А.Д. Амосова<sup>1</sup>, Е.Р. Садыкова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> nastya-240595@mail.ru; МБОУ «Гимназия №3» ЗМР РТ

<sup>2</sup> sadikova\_er@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В статье рассмотрены вопросы развития логического мышления при изучении планиметрии, приведены результаты диагностического обследования для выявления уровня сформированности логического мышления.*

**Ключевые слова:** логическое мышление, геометрия, скорость протекания мышления, абстрагирование, сравнение.

В условиях модернизации современного образования проблема развития логического мышления учащихся становится актуальной. Это связано и с особенностями научно-технического прогресса, и с дифференциацией, и интеграцией различных отраслей знаний. Развитие логического мышления учащихся является важнейшим фактором, обеспечивающим эффективность дальнейшего обучения, профессиональной подготовки.

Различным аспектам развития логического мышления посвящено значительное число исследований. Психологические основы исследованы в работах П.П. Блонского, А.В. Брушлинского, Л.И. Божович, Л.С. Выготского, С.Л. Рубинштейна и других. Педагогические аспекты отражены в работах Ю.К. Бабанского, П.Я. Гальперина В.В. Давыдова. Выявлением основных особенностей мышления как познавательного процесса, его форм, видов занимались такие отечественные ученые, методисты, как Н. Ф. Ефимова, С. Д. Максименко, А. Г. Маклаков, А. Д. Гетманова, В. И. Кириллов [2], [3], [4], [5].

В процессе обучения геометрии проблема развития логического мышления занимает особое место. Сравнивая геометрию с другими математическими дисциплинами, стоит отметить ее большую направленность на развитие логики мышления учащихся. Представленный в учебниках по геометрии для учащихся 7-9 классов авторов Л. С. Атанасяна и др., А. В. Погорелова, аксиоматический метод построения курса планиметрии, широко изучаемой в школах, имеет максимальную пропорциональность, последовательность и логическую строгость [1]. Это обуславливает обширное применение логики как науки в геометрии.

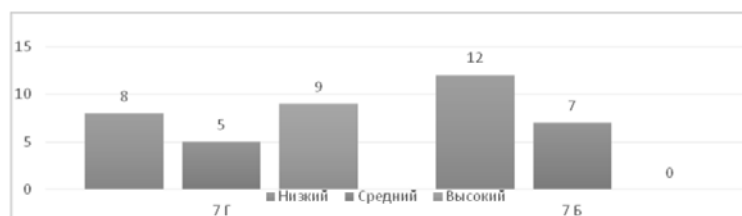
Нами предпринято диагностическое обследование реального уровня сформированности логического мышления учащихся в процессе обучения геометрии для того, чтобы определить наиболее верные стратегии педагогического руководства, а также в целях оценки эффективности построения учебного процесса с применением средств развития логического мышления. Для этого был проведен констатирующий (диагностирующий) эксперимент с учащимися 7 классов на базе МБОУ «Гимназия №3 ЗМР РТ» г. Зеленодольска. Всего экспериментальной работой было охвачено более пятидесяти учащихся. Подготовительный этап эксперимента включал: изучение успеваемости в классах, содержание учебных программ, выбор диагностического инструментария, разработка анкет. В процессе обследования был выявлен средний балл успеваемости по классам. Так, в 7 «Б»: 4,07 (процент качества: 80,77%), 7 «Г»: 3,9 (процент качества: 73,08%). В обследуемых классах уроки геометрии ведёт один учитель; обучение осуществляется по единой учебной программе, а также единому учебному пособию [1]. На следующем этапе были определены начальные уровни скорости протекания мышления, умения сравнивать, выделять черты схожести и различия понятий, способности к абстрагированию.

В качестве диагностического инструментария нами выбраны методики - методика на определение скорости протекания мышления, методика на выявление сходств и различий предложенных предметов. Целью первой предложенной методики являлось установление индивидуальных особенностей скорости протекания мыслительного процесса у учеников. В процессе выполнения заданий учащиеся одновременно заполняли пропущенные буквы в таблице геометрических понятий (20 слов) за строго установленное время 5 минут. По завершению работы фиксировалось время выполнения задания каждым учеником, учитывалось количество правильно написанных слов и затраченное время. По результатам данной методики (Таблица 1) большинство учащихся 7 «Б» класса

превысили допустимое время, показав средний результат 5 минут 45 секунд, что говорит о низкой скорости мышления и подвижности нервных процессов; учащиеся 7 «Г» в среднем обладают высокой скоростью мышления и подвижностью нервных процессов. Высоким уровнем скорости протекания мышления обладают дети, выполнившие задание менее чем за 4 минуты, и допустившие не более двух ошибок. Средний уровень протекания мышления у учащихся, выполнивших задание за 4-5 минут и допустившие не более двух ошибок. Низким уровнем скорости протекания мышления обладают ученики, превысившие допущенное время и допустившие более двух ошибок.

**Таблица 1.** Уровни развития скорости протекания мышления

Уровень скорости протекания мышления	Экспериментальная группа до начала эксперимента (чел.)	Контрольная группа до начала эксперимента (чел.)
Низкий	12	8
Средний	7	5
Высокий	0	9



**Рис. 1.** Уровни развития скорости протекания мышления

С целью установления уровня развития у школьников умения сравнивать предметы и понятия им была предложена вторая методика. В течение определённого времени (3 минуты) ученики должны были выписать на листе бумаги черты сходства, а справа – черты различия названных понятий: равнобедренный треугольник и прямоугольный треугольник [7]. По заранее составленному общему списку черт различий и сходств понятий выявили, какую часть из этого списка сумел написать ученик. Доля названных учеником черт сходства и различия из общего числа черт в процентах показала уровень развития у ученика умения сравнивать, выделять свойства предметов. При обработке данных были получены следующие результаты (Рис. 2): у учащихся 7 «Г» уровень развития умения сравнивать – 41% (записано около 5 сходств и различий из 14), в 7 «Б» – 43% (записано около 6 сходств и различий из 14). Низкий уровень развития умения сравнивать у детей, набравших не более 40% верных ответов, средний – 40% – 70%; высокий – более 70%. В целом, в обоих классах средний уровень развития умения сравнивать, выделять свойства предметов, но это очень маленький показатель, который ближе к низкому уровню развития данного умения. Контрольная и экспериментальная группы оказались на одном уровне развития умения сравнивать, выделять свойства объектов, о чем говорит анализ результатов с помощью статистического критерия Манна-Уитни.

**Таблица 2.** Уровни развития умения сравнивать объекты

Уровень развития умения сравнивать, выделять свойства объектов, проводить аналогии	Экспериментальная группа до начала эксперимента (чел.)	Контрольная группа до начала эксперимента (чел.)
Низкий	6	7
Средний	13	14
Высокий	0	0

Для определения способности выделять существенное, школьникам требовалось проанализировать ряд слов, в каждом из которых пять даются в скобках, а одно – перед ними [6]:

- Куб (углы, чертеж, сторона, камень, дерево)
- Игра (шахматы, игроки, штрафы, правила, наказание)
- Треугольник (углы, рамка, стороны, картина, забор)
- Теорема (признак, рисунок, доказательство, свойство, условие)
- Угол (слово, транспортир, дом, градус, вершина)

Ученикам предлагалось за 10–20 секунд исключить из скобок слова, или признаки, несущественные для слова перед скобками. Ученики, правильно выполнившие задание, обладают высоким уровнем умения выделять существенное, т.е. способны к абстрагированию. Учащиеся, допустившие не более трех ошибок, обладают средним уровнем умения выделять существенное, отличают существенные от несущественных признаков, но такая способность у них развита недостаточно хорошо. Низкий уровень развития способности к абстрагированию присваивается ученикам, допустившим от четырех до семи ошибок. В результате, оба класса в среднем ответили правильно по двум из пяти слов и допустили в среднем три ошибки. Три человека из 7 «Г» класса не выполнили задание правильно хотя бы для одного из указанных понятий (7 ошибок), двое справились с заданием без ошибок. В 7 «Б» классе безошибочно справился только один учащийся. Данное умение требует интенсивного развития. Классы находились на одном уровне развития умения выделять существенные свойства объектов.

**Таблица 3.** Умение выделять существенные свойства объектов

Уровень развития умения выделять существенные свойства объектов	Экспериментальная группа до начала эксперимента (чел.)	Контрольная группа до начала эксперимента (чел.)
Низкий	7	8
Средний	11	11
Высокий	1	2

На основании проведенного обследования определения качеств логического мышления выявлен общий уровень логического мышления в каждом из рассматриваемых классах: 7 «Б» класс (19 чел.):

- Низкий уровень мышления:  $(6+12+7)/3 \approx 9$  человек / 47%
- Средний уровень мышления:  $(7+13+11)/3=10$  человек / 53%
- Высокий уровень мышления:  $(0+0+1)/3 \approx 0$  человек / 0%

7 «Г» класс (21 чел.):

- Низкий уровень мышления:  $(8+7+8)/3 \approx 7$  человек / 33%
- Средний уровень мышления:  $(5+14+10)/3=10$  человек / 48%
- Высокий уровень мышления:  $(9+0+2)/3 \approx 4$  человека / 19%

Результаты исследования показали, что у учащихся данных классов преобладают низкий и средний уровни развития логического мышления. Таким образом, в результате проведения целого комплекса диагностических процедур было исследовано существующее состояние реального уровня сформированности логического мышления учащихся, выявлены основные противоречия и проблемы данного процесса. Проведенное обследование доказало необходимость организации целенаправленной, систематичной и последовательной дальнейшей работы.

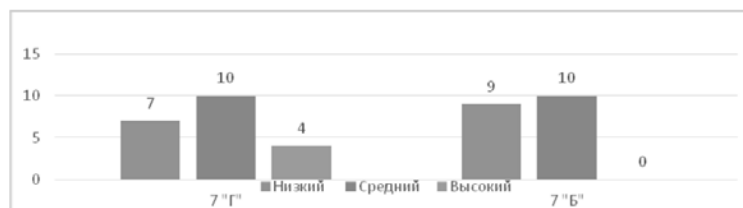


Рис. 2. Уровень развития логического мышления

## Литература

1. Атанасян Л.С. Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2015. – 383 с.
2. Байдак В.А. Теория и методика обучения математике: наука, учебная дисциплина / В.А. Байдак. – 2-е изд. – М.: Флинта, 2011. – 264 с.
3. Брушлинский А.В. Психология мышления и проблемное обучение / А.В. Брушлинский. – М.: Знание, 1983. – 96 с.
4. Кириллов В.И., Старченко А.А. Логика: учебник для юридических вузов / В.И. Кириллов, А.А. Старченко А.А. под ред. проф. В.И. Кириллова. – Изд. 6-е, перераб. и доп. – М.: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2008. – 240 с.
5. Разумова О.В. Формирование предметно-специфического мышления будущих учителей средствами информационных технологий: дис. ...канд. пед. наук. – Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет. Казань, 2008. – 182 с.
6. Подгорецкая Н.А. Изучение приемов логического мышления у взрослых / Н.А. Подгорецкая. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. – 150 с.
7. Черемискина И.И. Методические указания для практических занятий по курсу «специальный практикум по психологии» методики диагностики свойств мышления / И.И. Черемискина. – М.: МГУ, 2007. – 51 с.

### DIAGNOSTICS OF THE LEVEL OF DEVELOPMENT OF LOGICAL THINKING OF STUDENTS IN THE PROCESS OF LEARNING GEOMETRY

A.D. Amosova, E.R. Sadykova

*The article deals with the development of logical thinking in the study of plane geometry, cited results of diagnostic examinations for the level of education of logical thinking.*

Keywords: logical thinking, geometry, speed of thinking, abstraction, comparison.

УДК 531.1

### ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОГИБА МНОГОРЕШЕТЧАТОЙ ФЕРМЫ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНОМ ЗАГРУЖЕНИИ

Н.А. Белянкин<sup>1</sup>, А.Ю. Бойко<sup>2</sup>, А.А. Плясова<sup>3</sup>

<sup>1</sup> belankin2@gmail.com; National Research University MPEI, Russia

<sup>2</sup> boykoanyu@mail.ru; National Research University MPEI, Russia

<sup>3</sup> annaplyasova13@gmail.com; National Research University MPEI, Russia

*Ферма с одной неподвижной шарнирной и тремя подвижными опорами имеет двойную крестообразную решетчатую структуру. Показано, что при некоторых значениях числа панелей определитель системы уравнений равновесия узлов вырождается. Выводятся аналитические зависимости прогиба от числа панелей. Уравнения для определения усилий в стержнях решаются в символьной форме в системе компьютерной математики Maple. Применяется формула Максвелла - Мора и метод индукции для получения общего решения.*

**Ключевые слова:** ферма, прогиб, формула Максвелла-Мора, Maple.

## 1. Введение

Расчет жесткости фермы, оцениваемой, как правило по перемещению ее узлов под действием нагрузок, выполняется в большинстве случаев численно в стандартных пакетах, основанных на методе конечных элементов. С появлением и развитием систем компьютерной математики (Maple, Mathematica, Derive, Reduce и др.) стало возможным выводить аналитические зависимости с достаточно широкой областью применения таких решений.

Ценность расчетных формул для решения задач строительных конструкций определяется числом независимых параметров задачи. Формулы для расчета какой-либо определенной конструкции, содержащие только размеры, величину нагрузки конкретного вида и данные о свойстве материала, выводятся в системах символьной математики просто и практической ценности не имеют. Чем общее формула, тем больше ее значение. Самое сложное ввести в формулу некоторые целочисленные параметры, которые характеризуют число панелей или число каких-нибудь периодических структур. Методом индукции в работах [1-6] получены решения для плоских ферм. Консольные фермы проанализированы аналитически в [7-9]. Задачи о прогибе ферм решетчатого вида решены в [10-18]. Есть и решения для статически неопределимых регулярных решеток [19]. Фермы арочного вида рассчитаны аналитически в [20-27]. Применим метод индукции и в пространственных задачах [28-35], а также для внешне неопределимых ферм [35,36].

## 2. Расчет

В настоящей работе на основе программы [38], использованной в [2] и многих других работах, для нахождения усилий в стержнях статически определимых фермах и упомянутого метода индукции выводятся формулы для прогиба центрального узла плоской фермы (рис. 1). Ферма с  $n$  панелями (считаются по нижнему поясу) содержит  $m=4n+18$  стержней и  $2n+9$  сочленяющих узлов.

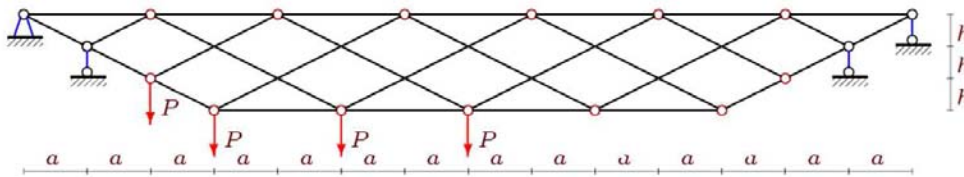


Рис. 1. Ферма при значениях  $n = 2k = 4$

Конструкция внешне статически неопределима. Из трех уравнений равновесия конструкции в целом найти пять реакций невозможно. Это вытекает из того, что в свободная от опор ферма не является жестким телом, имея две степени свободы. Поэтому для определения реакций опор требуется полный расчет фермы с вырезанием всех узлов и составлением общей системы равновесия. Фермы с похожей решеткой рассчитаны аналитически в [39,40].

1. Рассмотрим решение задачи о действии сил на половину пролета по нижнему поясу. В программу [2] вводятся координаты узлов, порядок соединения стержней и узлов. Результатом расчетов являются аналитические выражения для усилий.

Вертикальное смещение (прогиб) вычисляется по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = P \sum_{i=1}^{m-5} S_i^2 l_i / (EF),$$

где  $S_i$  — усилия в стержнях фермы от действия единичной нагрузки  $P$ ,  $l_i$  — длины стержней,  $EF$  — жесткость стержней (принята одинаковой для всех стержней). Принимается четное число панелей  $n=2k$ . Суммирование ведется по всем стержням, кроме опорных. В процессе счета было замечено, что при  $k=2,5,8\dots$  определитель системы уравнений равновесия обращается в ноль, что соответствует кинематической изменяемости конструкции [11].

Чтобы исключить недопустимые значения из метода индукции для параметра  $k$  выбирается закон изменения  $k = ((-1)^j + 6j - 1)/4$ ,  $j = 1, 2, 3\dots$

Выражение для прогиба имеет вид

$$EF\Delta = P(A_j a^3 + C_j c^3) / (2h^2), \quad (1)$$



где  $c = \sqrt{h^2 + a^2}$ .

Рассчитаем коэффициенты в (1) от нагрузки по нижнему поясу при нагрузке от 3-го узла, до узла  $(6j + 15 + (-1)^j)/4$  (рис.1). Методом индукции получены коэффициенты

$$A_j = (4j^3 + 6(1 + (-1)^j)j^2 + 2(4 + 3(-1)^j)j + (-1)^j + 5)/2,$$

$$C_j = (6j + (-1)^j + 5)/2.$$

Для нахождения этих зависимостей из решений для ферм с числом панелей от 1 до 14 были выявлены последовательности коэффициентов перед кубами линейных размеров  $a$  и  $c$ :

1. Для размера  $a$ : 5, 57, 59, 255, 257, 693, 695, 1467, 1469, 2673, 2675, 4407, 4409, 6765, 6767, 9843;
2. Для размера  $c$ : 5, 9, 11, 15, 17, 21, 23, 27, 29, 33, 35, 39, 41, 45, 47, 51.

Для последовательностей меньшей длины закономерность не определялась. Оператор **rgf\_findrecur** из пакета **genfunc** системы Maple по этим данным дал однородное линейное рекуррентное уравнение, которому удовлетворяют члены последовательностей:

$$A_j = A_{j-1} + 3A_{j-2} - 3A_{j-3} - 3A_{j-4} + 3A_{j-5} + A_{j-6} - A_{j-7}.$$

Такое же уравнение получилось и для коэффициента  $!_j$ . График зависимости безразмерного прогиба фермы  $\Delta' = \Delta EF/(P_0L)$  при в данном случае при  $a = L/(4n)$  от числа панелей представлен на рис. 2.

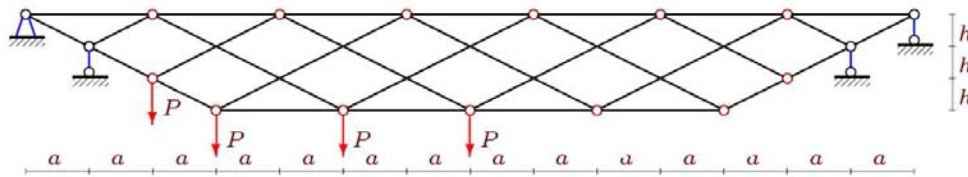


Рис. 2. Зависимость прогиба фермы от числа панелей,  $L = 100$  м

2. Аналогично, рассчитаем в (1) коэффициенты от нагрузки по верхнему поясу (рис. 3).

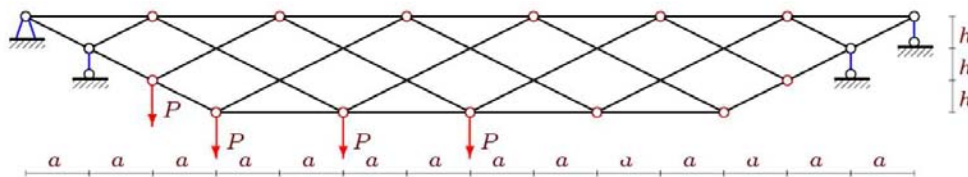


Рис. 3. Нагрузка по верхнему поясу  $n = 2k = 4$

Отметим, что расчет проводился отдельно для узлов фермы с четными и нечетными по счету порядковыми номерами соответственно.

2.1. Методом индукции при нагрузке в узлах фермы с четными порядковыми номерами (с 2-го до 20-го) получено:

$$A_j = 32j^4 + 64j^3 - 12j^2 - 44j + 15,$$

$$!_j = (4j^2 + 4j - 3)/3.$$

Для этого из решений для ферм с числом панелей от 1 до 14 были выявлены последовательно-сти коэффициентов перед кубами линейных размеров  $a$  и  $c$ :

1. Для размера  $a$ : 55, 903, 4095, 11935, 27495, 54615, 97903, 162735, 255255, 382375;
2. Для размера  $c$ : 15, 63, 135, 231, 351, 495, 663, 855, 1071, 1311.

Оператор **rgf\_findrecur** из пакета **genfunc** системы Maple по этим данным дал рекуррентные уравнения, которым удовлетворяют члены последовательностей:

$$A_j = 5A_{j-1} - 10A_{j-2} + 10A_{j-3} - 5A_{j-4} + A_{j-5};$$

$$C_j = 3C_{j-1} - 3C_{j-2} + C_{j-3}.$$

Общая формула для расчета прогиба имеет вид:

$$EF\Delta = P(A_j a^3 + C_j c^3) / ((2h^2)(j+1)).$$

2.2. Аналогично, методом индукции при нагрузке в узлах фермы с *нечетными* порядковыми номерами (с 3-го до 19-го) получено:

$$A_j = 64j^5 + 160j^4 + 40j^3 - 92j^2 - 6j + 25;$$

$$!_j = 24j^3 + 44j^2 + 2j + 1.$$

Для этого из решений для ферм с числом панелей от 1 до 14 были выявлены последовательности коэффициентов перед  $a^3$  и  $c^3$ :

1. Для параметра  $a$ : 191, 4573, 28771, 107585, 302695, 710341, 1469003, 2767081, 4850575, 8030765, 12691891, 19298833, 28404791, 40658965;
2. Для параметра  $c$ : 71, 373, 1051, 2249, 4111, 6781, 10403, 15121, 21079, 28421, 37291, 47833, 60191, 74509.

Оператор **rgf\_findrecur** из пакета **genfunc** системы Maple по этим данным дал рекуррентные уравнения, которым удовлетворяют следующие члены последовательностей:

$$A_j = 6A_{j-1} - 15A_{j-2} + 20A_{j-3} - 15A_{j-4} + 6A_{j-5} - A_{j-6};$$

$$C_j = 4C_{j-1} - 6C_{j-2} + 4C_{j-3} - C_{j-4}.$$

Формула расчета прогиба имеет следующий вид:

$$EF\Delta = P(A_j a^3 + C_j c^3) / ((2h^2)(2j+1)^2).$$

### 3. Выводы

Получены аналитические выражения для зависимости прогиба от числа панелей при несимметричном загрузении фермы. Аналогичное решение для простой балочной фермы также с использованием метода двойной индукции было получено ранее [6]. Здесь же решена несколько более сложная задача о ферме, допускающей кинематическую изменяемость. Трудности возникли из-за невозможности в отдельных случаях получить зависимости для произвольного случая. Задачу пришлось разделить на две — для четного числа  $k$ , связанного с числом панелей, и для нечетного.

Обзор работ, использующих метод индукции для вывода аналитических зависимостей для плоских ферм, дан в [41, 42, 43].

### Литература

1. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы / М.Н. Кирсанов // Инженерно-строительный журнал. – 2012. – № 5(31). – С. 38-42.
2. Кирсанов М.Н. О влиянии наклона подвижной опоры на жесткость балочной фермы / М.Н. Кирсанов // Вестник МГСУ. – 2016. – № 10. – С. 35-44.
3. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба двухпролетной плоской фермы / М.Н. Кирсанов // Механизация строительства. – 2017. – Т.78., № 5. – С. 35-38.
4. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder / M.N. Kirsanov // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. – 2016. – № 1(29). – С. 84-105.

5. Тиньков Д.В. Формулы для расчёта прогиба впарушенной балочной раскосной фермы с произвольным числом панелей / Д.В. Тиньков // Строительная механика и конструкции. – 2016. – Т.2, № 13 (13). – С. 10-14.
6. Rakhmatulina A.R. The formula for the deflection of a truss loaded at half-span by a uniform load / A.R. Rakhmatulina, A.A. Smirnova // Postulat. – 2018. – № 3. – P. 22.
7. Rakhmatulina A.R. Two-parameter derivation of the formula for deflection of the console truss / A.R. Rakhmatulina, A.A. Smirnova // Postulat. 2018. № 5.
8. Kitaev S.S. Derivation of the formula for the deflection of a cantilevered truss with a rectangular diagonal grid in the computer mathematics system Maple / S.S. Kitaev // Postulat. – 2018. – № 5.
9. Domanov E.V. The dependence of the deflection of the cantilever truss on the number of panels obtained in the system Maple / E.V. Domanov // Строительная механика и конструкции. – 2018. – №.2(17). – С. 80-86.
10. Rakhmatulina A.R. Analytical calculation and analysis of planar springel truss / A.R. Rakhmatulina, A.A. Smirnova // Строительная механика и конструкции. – 2018. – № 2(17). – С. 72-79.
11. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости / М.Н. Кирсанов // Строительная механика и конструкции. – 2017. – Т.1, № 14. – С. 27-30.
12. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы / М.Н. Кирсанов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. – № 3. – С. 23-27.
13. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме / М.Н. Кирсанов // Механизация строительства. – 2017. – Т.78, № 4. – С. 20-23.
14. Тиньков Д.В. Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой / Д.В. Тиньков // Постулат. – 2017. – № 12.
15. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой / М.Н. Кирсанов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2015. – № 3(260). – С. 7-12.
16. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа / М.Н. Кирсанов // Транспортное строительство. – 2017. – № 5. – С. 11-13.
17. Kirsanov M.N. A precise solution of the task of a bend in a lattice girder with a random number of panels / M.N. Kirsanov // Russian Journal of Building Construction and Architecture. – 2018. – № 1(37). – С. 92-99.
18. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей / М.Н. Кирсанов // Механизация строительства. – 2017. – Т.78, № 10. – С. 24-27.
19. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы / М.Н. Кирсанов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2014. – № 6 (257). – С. 2-6.
20. Kazmiruk I.Yu. On the arch truss deformation under the action of lateral load // I.Yu. Kazmiruk // Science Almanac. – 2016. – No.3-3(17). – P. 75-78. – Access mode:DOI: 10.17117/na.2016.03.03.075.
21. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels / A.R. Rakhmatulina, A.A. Smirnova // Научный альманах. – 2017. – №2-3(28). – С. 268-271. – Access mode: [https://elibrary.ru/download/elibrary\\_28913798\\_61471993.pdf](https://elibrary.ru/download/elibrary_28913798_61471993.pdf).
22. Кирсанов М.Н. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей / М.Н. Кирсанов, А.С. Степанов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2017. – №5(274). – С. 9-14.
23. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы / М.Н. Кирсанов // Строительная механика и конструкции. – 2018. – Т.1., № 16. – С. 7-11.
24. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа / М.Н. Кирсанов // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. – 2015. – №3(31). – С. 42-48.
25. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы / М.Н. Кирсанов // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2018. – Т.14., № 1. – С. 64-70.
26. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. № 9. С. 8-10.
27. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы / М.Н. Кирсанов // Строительство уникальных зданий и сооружений. – 2015. – №9(36). – С. 44-55.
28. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы / М.Н. Кирсанов // Инженерно-строительный журнал. – 2011. – № 6(24). – С. 28-34.

29. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5-8.
30. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы / М.Н. Кирсанов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2012. – № 1. – С. 49-53.
31. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость / М.Н. Кирсанов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2012. – № 3(242). – С. 48-51.
32. Леонов П.Г. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе maple / П.Г. Леонов, М.Н. Кирсанов // В сборнике: Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014 Труды международной научно-методической конференции. – 2014. – С. 239-242.
33. Ларичев С.А. Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы / С.А. Ларичев // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. – 2015. – Т.1. – С. 4-8.
34. Доманов Е. В. Аналитическая зависимость прогиба пространственной консоли треугольного профиля от числа панелей / Е.В. Доманов // Научный альманах. – 2016. – №6-2(19). – С. 214-217. Режим доступа: DOI: 10.17117/na.2016.06.02.214
35. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы / М.Н. Кирсанов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2016. – №5(268). – С. 19-22.
36. Domanov E.V. The formula for the dependence of the deflection of an externally statically indeterminate truss on the number of panels / E.V. Domanov // Postulat. – 2018. – № 6.
37. Arutyunyan V.B. Calculation of the deflection of a statically indeterminate beam truss / V.B. Arutyunyan // Postulat – 2018. – № 6.
38. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. / М.Н. Кирсанов. СПб.: Изд-во Лань, 2012. – 512 с.
39. Voropay R.A. Derivation of the formula for the deflection of the truss with additional horizontal struts / R.A. Voropay // Postulat. – 2018. №6.
40. Domanov E.V. An analytical solution of the problem of the externally statically indeterminate truss deflection with an arbitrary number of panels / E.V. Domanov // Postulat. – 2017. – №7.
41. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа / Н.В. Осадченко // Строительная механика и конструкции. – 2018. – Т.1, № 16. – С. 12–33.
42. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами / Н.В. Осадченко // Постулат. – 2017. – № 12(26). – С. 28.
43. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций / Д.В. Тиньков // Инженерно-строительный журнал. – 2015. – №5(57). – С. 66–73. – Access mode:DOI: 10.5862/MCE.57.6

#### FORMULAS FOR DEFLECTION OF MULTI-LATTICE TRUSS WITH ASYMMETRIC LOADING

N.A. Belyankin, A.Yu. Boyko, A.A. Plyasova

*A truss has one fixed hinged and three movable supports and a double cross-shaped lattice structure. Analytical dependences of the deflection on the number of panels are derived. It is shown that for some values of the number of panels, the determinant of the system of equilibrium equations for nodes degenerates. Equations for determining the forces in rods are solved in symbolic form in the system of computer mathematics Maple. The Maxwell-Mohr formula and the method of induction are used to obtain a general solution.*

Keywords: truss, deflection, Maxwell-Mohr formula, Maple.

УДК 517.958

#### УРАВНЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА В MAPLE: КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА, ПРИМЕР В MAPLE

А.А. Васильева<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [alfya1120@mail.ru](mailto:alfya1120@mail.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В статье рассматривается преобразование уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными. Рассматриваются виды уравнений эллиптического типа — уравнения Лапласа, Пуассона. Сформулированы основные типы краевых задач для уравнений эллиптического типа. С помощью СКМ Maple показано решение и визуализация задачи Дирихле для круга.

**Ключевые слова:** уравнения математической физики, уравнение эллиптического типа, краевая задача, СКМ Maple.

### 1. Преобразование уравнений второго порядка с помощью замены переменных

Всякое линейное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными может быть записано в виде:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0, \quad (1)$$

где  $A, B, C, D, E, F, G$  — заданные функции от  $x$  и  $y$  (или, в частном случае, постоянные). Упростим это уравнение с помощью замены переменных

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $\xi$  и  $\eta$  — новые независимые переменные. Функции  $\varphi$  и  $\psi$ , связывающие новые переменные со старыми переменными, будут подобраны позднее. Пока будем считать, что отображение (2) является взаимно однозначным. сделаем требуемую замену переменных:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]; \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right]; \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] \quad (6)$$

Правые части формул (3)-(6) представляют собой линейные функции относительно частных производных  $u'_\xi, u'_\eta, u''_{\xi\xi}, u''_{\xi\eta}, u''_{\eta\eta}$ . Подставляя  $u'_x, u'_y, u''_{xx}, \dots$  из этих формул в уравнение (1), мы получим снова линейное уравнение второго порядка с неизвестной функцией  $u$  и независимыми переменными  $\xi$  и  $\eta$ .

$$\bar{A} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\bar{B} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{C} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi \left( \xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (7)$$

где

$$\bar{A} = A \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2;$$

$$\bar{B} = A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x};$$

$$\bar{C} = A \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2,$$

а функция  $\Phi$  линейна относительно  $u, u'_\xi, u'_\eta$ .

Уравнение (7) становится особенно простым, если в нем коэффициенты  $\bar{A}$  и  $\bar{C}$  окажутся равными нулю. Для того, чтобы первоначально заданное уравнение (1) можно было привести и к такому простому виду, надо в нем сделать замену переменных (2), подобрав функции  $\varphi$  и  $\psi$  так, чтобы они являлись решениями уравнения

$$A \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + C \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (8)$$

Это уравнение является нелинейным уравнением в частных производных первого порядка. Следующая теорема показывает, как связаны его решения с общим решением некоторого обыкновенного уравнения.

**Теорема.** Для того, чтобы функция  $z = f(x, y)$  во всех точках области  $\Omega$  удовлетворяла уравнению (8), необходимо и достаточно, чтобы и семейство  $f(x, y) = \text{const}$  было общим интегралом уравнения

$$A(dy)^2 - 2Bdx dy + C(dx)^2 = 0 \quad (9)$$

в той же области  $\Omega$ .

Уравнение (9) называется характеристическим уравнением для данного уравнения (1). Характеристическое уравнение есть обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, но второй степени. Разрешая его относительно производной  $y'$ , получим два уравнения

$$y' = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}; \quad (10)$$

$$y' = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}; \quad (11)$$

Если общий интеграл уравнения (10) имеет вид  $\varphi(x, y) = \text{const}$ , то, полагая  $\xi = \varphi(x, y)$ , мы обращаем в нуль коэффициент при производной  $u''_{\xi\xi}$ . Если  $\Psi(x, y) = \text{const}$  является общим интегралом уравнения (11), независимым от интеграла  $\varphi(x, y) = \text{const}$ , то, полагая  $\eta = \psi(x, y)$ , мы обратим в нуль также и коэффициент при производной  $u''_{\eta\eta}$ .

## 2. Уравнение эллиптического типа

Правые части уравнений (10) и (11) комплексно сопряжены. Пусть  $\varphi(x, y)$  — комплексный интеграл уравнения (10). Тогда  $\varphi'(x, y) = \text{const}$  — интеграл уравнения (11), где  $\varphi'(x, y) = \text{const}$  — функция, комплексно сопряженная с функцией  $\varphi(x, y)$ . Если теперь перейти к комплексным переменным  $\xi = \varphi(x, y)$ ,  $\eta = \psi(x, y)$ , то, согласно общей теории, уравнение (1) приведет к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi \left( \xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

то есть точно к такому же виду, как и гиперболическое уравнение. Чтобы остаться в действительной области, сделаем еще одну замену переменных:

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi'}{2}, \beta = \frac{\varphi - \varphi'}{2i}, i = \sqrt{-1},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — новые переменные. Тогда  $\xi = \alpha + i\beta$ ,  $\eta = \alpha - i\beta$ . Нетрудно показать, что при такой замене переменных. Таким образом, уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Theta \left( \alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right),$$

который называется каноническим видом уравнения эллиптического типа.

## 3. Краевые задачи для уравнения эллиптического типа

Ранее было отмечено, что линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$-\nabla \cdot (p(x)\nabla u) + q(x)u = F(x) \quad (12)$$

описывает соответствующие стационарные процессы.

Пусть  $G \in R^n$  — область, где происходит процесс, и  $S$  — её граница, которую считаем кусочно-гладкой поверхностью. Таким образом,  $G$  есть область изменения аргументов  $x$  в уравнении (12) — область задания уравнения (12). Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (12) не зависят от времени. В соответствии с их физическим смыслом, будем считать, что  $p(x) > 0$ ,  $q(x) \geq 0$ ,  $x \in \bar{G}$ .

В соответствии с математическим смыслом уравнения (12), необходимо считать, что  $p \in C^{(1)}(\bar{G})$ ,  $q \in C(\bar{G})$ . При этих предположениях стационарное уравнение (12) — эллиптического типа.

Чтобы полностью описать тот или иной процесс, необходимо, кроме самого уравнения, задать начальное состояние этого процесса (начальные условия) и режим на границе области, в которой происходит процесс (граничные условия). Математически это связана с не единственностью решения дифференциальных уравнений. Поэтому, чтобы выделить решение, описывающее реальный процесс, необходимо знать дополнительные условия. Такими дополнительными условиями и являются краевые условия — начальные и граничные условия. Соответствующая задача называется краевой задачей. Краевая задача для уравнений эллиптического типа: задаются граничные условия на границе  $S$ ; начальные условия, естественно, отсутствуют.

Краевая задача для уравнения (12) эллиптического типа ставится следующим образом: найти функцию  $u(x) \in C^{(2)}(G) \cap C^{(1)}(\bar{G})$ , удовлетворяющую уравнению (12) в области  $G$  и граничному условию на  $S$  вида

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = v, \tag{13}$$

где  $\alpha, \beta, v$  — заданные непрерывные функции на  $S$ , причем  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0$ . Выделяют следующие три типа граничных условий (13): Граничное условие первого рода ( $\alpha = 1, \beta = 0$ )

$$u|_S = u_0. \tag{14}$$

Граничное условие второго рода ( $\alpha = 0, \beta = 1$ )

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = u_1. \tag{15}$$

Граничное условие третьего рода ( $\alpha \geq 0, \beta = 1$ )

$$\alpha u + \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = u_2. \tag{16}$$

Соответствующие краевые задачи называются краевыми задачами первого, второго и третьего рода. Для уравнений Лапласа и Пуассона краевая задача первого рода называется задачей Дирихле: найти функцию  $u \in C^{(2)}(G) \cap C(\bar{G})$ , удовлетворяющую в области  $G$  уравнению

$$\Delta u = -f$$

и граничному условию (14) на поверхности  $S$ . Функция  $u_0$  непрерывна на  $S$ . Точный смысл граничного условия (14) таков:

$$\lim_{M \rightarrow P} u(M) = u_0(P), M \in G, P \in S.$$

Краевая задача второго рода

$$\Delta u = -f, \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = u_1,$$

называется задачей Неймана: найти функцию  $u \in C^{(2)}(G) \cap C(\bar{G})$ , удовлетворяющую в области  $G$  уравнению Пуассона (или Лапласа) и граничному условию (15) на поверхности  $S$ . Функция  $u_1$  непрерывна на  $S$ . Точный смысл граничного условия (15) таков:

$$\lim_{M \rightarrow P} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_M = u_1(P), M \in G, P \in S.$$

Функция  $u_1(P)$  должна также удовлетворять дополнительному условию разрешимости задачи Неймана. Действительно, воспользуемся равенством

$$\int_G \Delta u d\tau = \int_S \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \rightarrow - \int_G f d\tau = \int_S u_1 d\sigma.$$

В случае уравнения Лапласа условие разрешимости принимает вид

$$\int_S u_1 d\sigma = 0;$$

последнее обычно пишут в виде

$$\overline{u_1}|_S = \frac{1}{S} \int_S u_1 d\sigma = 0$$

то есть среднее значение функции  $u_1(P)$  на поверхности должно быть равно нулю.

Краевые задачи первого, второго и третьего рода для уравнения Лапласа носят названия гармонических краевых задач. Аналогично ставятся краевые задачи для уравнения (12) и во внешности ограниченной области  $G$  (внешние краевые задачи). Отличие состоит в том, что, помимо граничного условия (13) на  $S$ , задаются еще условия на бесконечности. Такими условиями, например, могут быть условия вида  $u(x) = O(1)$  или  $u(x) = o(1)$  при  $|x| \rightarrow \infty$  для уравнения Пуассона.

#### 4. Единственность решения задачи Дирихле

Решение задачи Дирихле ищется в классе функций  $u(x) \in C^{(2)}(G) \cap C(\overline{G})$ . Утверждается, что решение задачи Дирихле в этом классе функций единственно. Докажем эту теорему в случае, когда  $u(x) \in C^{(2)}(G) \cap C^{(1)}(\overline{G})$ . Допустим, что существует два решения задачи  $u_1$  и  $u_2$ . Пусть  $\Psi = u_1 - u_2$ . Очевидно, что

$$\Delta\Psi = 0, \Psi \in C^{(2)}(G), \Psi|_S = 0, \Psi \in C^{(1)}(S). \quad (17)$$

Доказательство теоремы сводится к доказательству того, что в данном классе функций нет другого решения задачи (17), кроме как решения  $\Psi \equiv 0$ . Это последнее решение очевидно в силу однородности задачи (17). Воспользуемся тождеством

$$\int_G [\Psi_\Delta\Psi + (\nabla\Psi)^2] d\tau = \int_S \Psi \frac{\partial\Psi}{\partial n} d\sigma, \Psi \in C^{(2)}(G) \cap C^{(1)}(\overline{G}). \quad (18)$$

В силу (17), из тождества (18) находим

$$\int_G (\nabla\Psi)^2 d\tau = 0 \Rightarrow \Psi = \text{const}, x \in G$$

Так как функция  $\Psi$  предполагается непрерывной и  $\Psi = 0$  на  $S$ , то  $\Psi = 0$  в  $G$ , следовательно,  $u_1 = u_2$  в  $G$ . Утверждение доказано.

#### 5. Единственность решения задачи Неймана

Решение задачи Неймана ищется в классе функций  $u(x) \in C^{(2)}(G) \cap C^{(1)}(\overline{G})$ . Утверждается, что в этом классе функций задача Неймана имеет единственное решение, определяемое с точностью до аддитивной постоянной. Допустим, что существует два решения задачи  $u_1$  и  $u_2$ . Пусть  $\Psi = u_1 - u_2$ . Очевидно, что

$$\Delta\Psi = 0, \Psi \in C^{(2)}(G),$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n}\Big|_S = 0, \Psi \in C^{(1)}(S).$$

Применяем тождество (18). Будем иметь

$$\int_G (\nabla\Psi)^2 d\tau = 0 \Rightarrow \nabla\Psi \Rightarrow \Psi = \text{const} - u_1 = u_2 + \text{const}, x \in G.$$

Таким образом, решение задачи Неймана определяется с точностью до аддитивной постоянной.

#### 6. Единственность решения третьей краевой задачи

Третья краевая задача формулируется следующим образом: найти функцию  $u(x) \in C^{(2)}(G) \cap C^{(1)}(\overline{G})$ , удовлетворяющую в области  $G$  уравнению Пуассона (или Лапласа) и граничному условию (16) на поверхности  $S$

$$\Delta u = -f, x \in G, \quad \alpha u + \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = u_2, x \in S. \quad (19)$$



Утверждается, что задача (19) в рассматриваемом классе функций имеет единственное решение. Допустим, что существует два решения задачи  $u_1$  и  $u_2$ . Пусть  $\Psi = u_1 - u_2$ . Очевидно, что

$$\begin{aligned} \Delta\Psi &= 0, \Psi \in C^{(2)}(G) \\ \frac{\partial\Psi}{\partial n} + \alpha\Psi|_S &= 0, \Psi \in C^{(1)}(S) \end{aligned} \quad (20)$$

Задача (20) всегда имеет тривиальное решение  $\Psi = 0$ . Покажем, что другого решения не существует. Воспользуемся тождеством (18). С учетом (20), будем иметь

$$\int_G (\nabla\Psi)^2 d\tau = - \int_S \alpha\Psi^2 d\sigma - \int_G (\nabla\Psi)^2 d\tau + \int_S \alpha\Psi^2 d\sigma = 0 (\alpha \geq 0),$$

Последнее равенство возможно лишь, если каждый из интегралов будет равен нулю. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \nabla\Psi &= 0, x \in G \\ \Psi &= 0, x \in S \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Psi = 0, x \in \bar{G} \Rightarrow u_1 = u_2, x \in \bar{G}$$

Таким образом, единственность решений третьей краевой задачи доказана.

### 7. Разделение переменных в полярной системе координат и решение задачи Дирихле

Введем полярную систему координат:

$$\begin{aligned} r &= \begin{cases} x = r \cdot \cos(\varphi) \\ y = r \cdot \sin(\varphi) \end{cases} \\ \Delta u &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{g} g^{ik} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} u \right) \right), \end{aligned}$$

где  $g^{ik}$  — обратный метрический тензор,  $g$  — определитель его матрицы. Вычислим метрику:  $g_{ik} = (\partial_i r \cdot \partial_k r) : r_r = (\cos(\varphi), \sin(\varphi)); r_\varphi = r(-\sin(\varphi), \cos(\varphi))$ .

$$\|g\| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}; \quad \sqrt{g} = r. \quad \|g^{-1}\| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{bmatrix}$$

Таким образом:

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (21)$$

Представим частные решения уравнения (21) в виде:

$$u = R(r)\Phi(\varphi). \quad (22)$$

Тогда получим из (22):

$$\Phi \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{\Phi}{r} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{R}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0. \quad (23)$$

Разделяя переменные в (23) с помощью постоянной разделения  $\lambda$ , получим:

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0; \quad (24)$$

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0. \quad (25)$$

Очевидно, что решение должно быть периодически по угловой переменной  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ . Таким образом, частные решения уравнения (24) есть:

$$\Phi_n = A_n \cdot \cos(n\varphi) + B_n \cdot \sin(n\varphi). \quad (26)$$

Таким образом, для уравнения (25) имеем:

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0. \quad (27)$$

Будем искать частные решения уравнения (27) в виде:  $R = r^s$ . Подставляя эти решения в (27), получим:

$$s(s-1) \cdot r^s + sr^s - n^2 r^s = 0.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $r$ , получим характеристическое уравнение:

$$s(s-1) + s - n^2 = 0 \Rightarrow s^2 - n^2 = 0 \Rightarrow s = \pm n.$$

Таким образом, частные решения уравнения (27) будут

$$\begin{aligned} R_n(r) &= C_n \cdot r^n + D_n \cdot r^{-n}; \quad (n \neq 0) \\ R_0(r) &= C_0 + D_0 \cdot \ln(r) \end{aligned}$$

Таким образом, частные решения уравнения (23) есть:

$$\begin{aligned} u_n &= (c_n \cdot r^n + D_n \cdot r^{-n}) \cdot (A_n \cdot \cos(n\varphi) + B_n \cdot \sin(n\varphi)), \quad n \neq 0; \\ u_0 &= (C_0 + D_0 \cdot \ln(r)) \cdot A_0. \end{aligned} \quad (28)$$

Заметим, что для уравнения Лапласа (правая часть равна нулю) должно быть  $D_0 = 0$  конечности решения в начале координат. Однако, в случае сингулярного уравнения Пуассона с сингулярным зарядом  $q$ :

$$F = 2 \cdot \pi \cdot q \delta(r) = 2 \cdot \pi \cdot q \frac{\delta(r)}{r},$$

так что

$$\begin{aligned} 2 \cdot \pi \cdot \int_0^a q \frac{\delta(r)}{r} r dr &= q, \\ D_0 &= q. \end{aligned}$$

Далее, в решениях (28) мы должны занулить все коэффициенты  $D_n$ ,  $n \neq 0$ , которые приводят к расходимости в начале координат. Итак, общее решение уравнения Лапласа (21) будет иметь вид (мы переобозначили константы):

$$u = P\tilde{Y}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot \sin(n \cdot \varphi) + B_n \cdot \cos(n \cdot \varphi)) \cdot r^n. \quad (29)$$

Из граничного условия (B) найдем:

$$u(a, \varphi) = f(\varphi) = P\tilde{Y}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot \sin(n \cdot \varphi) + B_n \cdot \cos(n \cdot \varphi)) \cdot a^n. \quad (30)$$

Условие (30) имеет вид формулы разложения функции в ряд Фурье, где коэффициентами ряда служат  $\alpha_n = A_n a^n$  и  $\beta_n = B_n a^n$ . Поэтому согласно теории рядов Фурье коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  будут находиться по формулам:

$$A_n a^n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi) \cdot \sin(n \cdot \varphi) d\varphi; B_n a^n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi) \cdot \cos(n \cdot \varphi) d\varphi; C_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi) d\varphi. \quad (31)$$

Тем самым, мы нашли формальное решение задачи Дирихле для круга.

## 8. Формула Пуассона — интегральное представление задачи Дирихле

Подставляя коэффициенты (31) в формулу (29), мы получим ряд Тейлора по радиальной переменной

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\varphi) \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^n; \quad \rho = \frac{r}{a} \leq 1,$$

где

$$p_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi') d\varphi,$$

$$p_n(\varphi) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi') \cdot (\sin(n \cdot \varphi') \cdot \sin(n \cdot \varphi) + \cos \cdot \cos(n \cdot \varphi)) d\varphi \equiv$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi') \cos(n \cdot (\varphi - \varphi')) d\varphi'.$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi') \cdot \left( 1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cdot \cos(n(\varphi - \varphi')) \right) d\varphi' \equiv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi') \cdot \left( 1 + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cdot e^{in(\varphi - \varphi')} \right) d\varphi' = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi') \cdot \left( 1 + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \rho \cdot e^{i(\varphi - \varphi')} \right)^n \right) d\varphi' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi') \cdot \left( 1 + \operatorname{Re} \left( \frac{\rho \cdot e^{i(\varphi - \varphi')}}{1 - \rho \cdot e^{i(\varphi - \varphi')}} \right) \right) d\varphi' \end{aligned}$$

Здесь была учтена формула для суммы членов геометрической прогрессии.

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi') \cdot \frac{(1 - \rho^2)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cdot \cos(\varphi - \varphi')} d\varphi' \Rightarrow \\ u &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi') \cdot \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar \cdot \cos(\varphi - \varphi')} d\varphi' \end{aligned}$$

Это и есть формула Пуассона. Преобразуем этот интеграл следующим образом:

$$\begin{aligned} 1 + \rho^2 - 2\rho \cdot \cos(\varphi - \varphi') &\equiv (1 - \rho \cdot \cos(\varphi - \varphi'))^2 + \rho^2 \cdot (1 - \cos^2(\varphi - \varphi')) \equiv \\ &= (1 - \rho \cdot \cos(\varphi - \varphi'))^2 + \rho^2 \cdot \sin^2(\varphi - \varphi'). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi') \cdot \frac{1 - \rho^2}{(1 - \rho \cdot \cos(\varphi - \varphi'))^2 + \rho^2 \cdot \sin^2(\varphi - \varphi')} d\varphi'.$$

### 9. Условие задачи и начально-граничные условия

Решим первую краевую задачу для уравнения Лапласа в круге: найти функцию  $u$ , удовлетворяющую уравнению Лапласа  $\Delta(u) = 0$  (А) внутри круга радиуса  $a$  и граничному условию на границе круга  $u|_{r=a} = f$  (В), где  $f$  — заданная функция.

### 10. Программа (1 способ решения задачи)

Запишем уравнение (А) в полярных координатах, для вычисления оператора Лапласа используем библиотеку `linalg`:

```
> restart;
```

Запишем также начальные и граничные (В) условия:

```
> f := (t) -> 1;
```

В этом случае получим ( $r = 1$ ):

$$u(r, \varphi) = (-r^2 + 1) \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - t)} dt \right).$$

```
> u1 := (r, varphi) -> (1 - r^2) / (2 * Pi) * int(1 / (1 + r^2 - 2 * r * cos(varphi - t)), t = -Pi .. Pi);
```

```
> simplify(u1(r, varphi));
```

Так как мы ищем решение задачи в единичном круге, то получим:

$$u(r, \varphi) = 1, \quad r \leq 1.$$

Запишем программу вычисления интеграла Пуассона по заданной функции  $f(\varphi)$ . Программа численного вычисления определенного интеграла методом Симпсона ( $ff = [x, f(x)], LL = [x1, x2]$ ).

```

> IntegralS:=proc(ff,LL,N)
  local n,a,b,h,FF,x0,i,Eq,Fa,Fb,x:
  n:=2*N:
  a:=LL[1]:
  b:=LL[2]:
  h:=evalf((b-a)/n):
  x:=(i)->a+h*i:
  FF:=(x0)->evalf(subs(ff[1]=x0,ff[2]]):
  Fa:=sum(FF(x(i)),i=0..0):
  Fb:=sum(FF(x(i)),i=n..n):
  evalf(h/3*(Fa+2*sum(FF(x(2*i)),i=1..N-1)+4*sum(FF(x(2*i-1)),i=1..N)+Fb)):
end proc:

> IntegralS([t,sin(t)^2],[0,Pi],100);

> IntegralS([t,sin(t)/((1-0.9*cos(Pi/4-t)^2)+0.9^2*sin(Pi/4-t)^2)],
[-Pi,Pi],100);

> IntPuasson:=proc(rho,varphi,f) local t,F:
  F:=(t)->subs(varphi=t,f):
  evalf((1-rho^2)/(2*Pi)*
  IntegralS([t,F(t)/((1-rho*cos(varphi-t)^2)+rho^2*sin(varphi-t)^2)],
[-Pi,Pi],100)):
end proc:

```

Положим  $f(t) = 9 \cdot \cos(2t) + 4 \cdot \sin(2t) \cdot \sin(6t)$ :

```

> U:=(rho,varphi)->IntPuasson(rho,varphi,9*cos(2*varphi)+
4*sin(2*varphi)*sin(6*varphi));
> U(0.9,Pi/2);
> U(0.9,Pi/4);
> [seq([0.9*cos(i*2*Pi/10),0.9*sin(i*2*Pi/10),U(0.9,i*2*Pi/10)],i=0..10)];

```

## 11. Программа (2 способ решения задачи)

Воспользуемся готовым решением задачи Дирихле для круга. Для этого разработаем процедуру, реализующую известное решение рассматриваемой задачи в рядах:

```

> restart:
> Dirichlet:=proc(f,R)
  local a,b,c;
  a:=n->1/Pi*int(f*cos(n*phi),phi=-Pi..Pi);
  b:=n->1/Pi*int(f*sin(n*phi),phi=-Pi..Pi);
  c:=1/(2*Pi)*int(f,phi=-Pi..Pi);
  c+add(r^n/R^n*(a(n)*cos(n*phi) +b(n)*sin(n*phi)),n=1..Order);
  RETURN(map(simplify,value(%)));
end proc:

```

Эта процедура-функция строит отрезок ряда до порядка Order или точное решение в виде сравнительно простой формулы, если это возможно. Применим нашу программу для решения поставленных задачи: найти функцию  $u$ , удовлетворяющую уравнению Лапласа  $\Delta(u) = 0$ , внутри круга радиуса 1 и граничному условию на границе круга  $u|_{r=1} = 9 \cdot \cos(2t) + 4 \sin(2t) \cdot \sin(6t)$ .

```

> f:=9*cos(2*phi)+4*sin(2*phi)*sin(6*phi);
  R:=1;
  sol:=Dirichlet(f,R);

```

## 12. Визуализация

```
> plot3d([rho*cos(phi), rho*sin(phi),U(rho,phi)],phi=0..2*Pi,rho=0..1,
labels=[x,y,u],label font=[TIMES,ROMAN,16]);
```

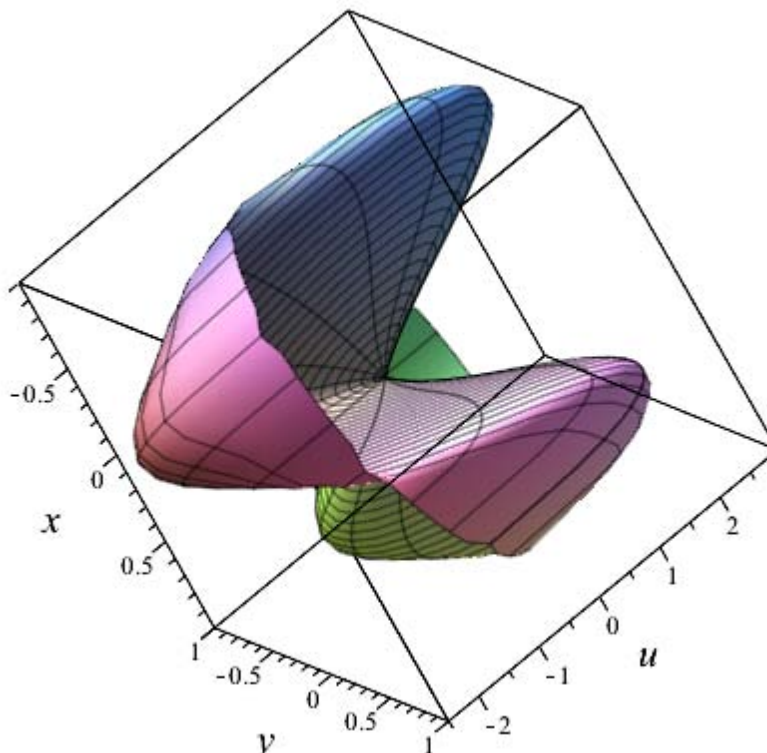


Рис. 1.

## Литература

1. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. Учебник для вузов. / Д.П. Голоскоков. – СПб.: Питер, 2004. – 539 с.
2. Горюнов А.Ф. Уравнения математической физики в примерах и задачах: Учебное пособие. / Д.П. Голоскоков. – Часть 1. – М.: МИФИ, 2008. – 616 с.
3. Свешников А.Г. Лекции по математической физике: Учеб. пособие / А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов. – М.: Изд-во МГУ, 1993. – 352 с.
4. Сочнева В.А. Введение в математическую физику: Методическое пособие. / В.А. Сочнева. – Казань: Казанский университет. – 2014. – 75 с.
5. Тихоненко А.В. Применение пакета Maple в курсе «Уравнения математической физики». Режим доступа: [http://old.exponenta.ru/EDUCAT/SYSTEMAT/tikhonenko/pde/02\\_04.asp](http://old.exponenta.ru/EDUCAT/SYSTEMAT/tikhonenko/pde/02_04.asp)
6. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.

THE EQUATION OF ELLIPTIC TYPE IN MAPLE: A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ELLIPTIC EQUATION,  
EXAMPLE IN MAPLE

A.A. Vasilyeva

*The article deals with the transformation of partial differential equations of the second order with two independent variables. Types of equations of elliptic type — Laplace, Poisson equations are considered. The basic types of boundary value problems*

for elliptic equations are formulated. Using Maple shows the solution and visualization of the Dirichlet problem for the circle.  
Keywords: equations of mathematical physics, elliptic equation, boundary value problem, Maple.

УДК 517.958

## УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА В MAPLE: РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА ДЛЯ ЗАРЯДА. РЕШЕНИЕ В MAPLE И АНИМАЦИЯ.

Д.В. Галицкова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *daya.moon@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В статье рассматривается реализация решения уравнения Пуассона для заряда с помощью программного пакета Maple, а также визуализация данной задачи.

**Ключевые слова:** СКМ Maple, уравнения математической физики.

### 1. Уравнение эллиптического типа в Maple.

Всякое линейное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными может быть записано в виде:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0, \quad (1)$$

где  $A, B, C, D, E, F, G$  — заданные функции от  $x$  и  $y$  (или, в частном случае, постоянные). Упростим это уравнение с помощью замены переменных

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $\xi$  и  $\eta$  — новые независимые переменные. Функции  $\varphi$  и  $\psi$ , связывающие новые переменные со старыми переменными, будут подобраны позднее. Пока будем считать, что отображение (2) является взаимно однозначным. сделаем требуемую замену переменных:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]; \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right]; \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] \quad (6)$$

Правые части формул (3)-(6) представляют собой линейные функции относительно частных производных  $u'_\xi, u'_\eta, u''_{\xi\xi}, u''_{\xi\eta}, u''_{\eta\eta}$ . Подставляя  $u'_x, u'_y, u''_{xx}, \dots$  из этих формул в уравнение (1), мы получим снова линейное уравнение второго порядка с неизвестной функцией  $u$  и независимыми переменными  $\xi$  и  $\eta$ .

$$\bar{A} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\bar{B} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{C} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi \left( \xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (7)$$

где

$$\bar{A} = A \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2;$$

$$\bar{B} = A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x};$$

$$\bar{C} = A \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2,$$

а функция  $\Phi$  линейна относительно  $u, u'_\xi, u'_\eta$ .

Уравнение (7) становится особенно простым, если в нем коэффициенты  $\bar{A}$  и  $\bar{C}$  окажутся равными нулю. Для того, чтобы первоначально заданное уравнение (1) можно было привести и к такому простому виду, надо в нем сделать замену переменных (2), подобрав функции  $\varphi$  и  $\psi$  так, чтобы они являлись решениями уравнения

$$A \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + C \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (8)$$

Это уравнение является нелинейным уравнением в частных производных первого порядка. Следующая теорема показывает, как связаны его решения с общим решением некоторого обыкновенного уравнения.

**Теорема.** Для того, чтобы функция  $z = f(x, y)$  во всех точках области  $\Omega$  удовлетворяла уравнению (8), необходимо и достаточно, чтобы и семейство  $f(x, y) = const$  было общим интегралом уравнения

$$A(dy)^2 - 2Bdx dy + C(dx)^2 = 0 \quad (9)$$

в той же области  $\Omega$ .

Уравнение (9) называется характеристическим уравнением для данного уравнения (1). Характеристическое уравнение есть обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, но второй степени. Разрешая его относительно производной  $y'$ , получим два уравнения

$$y' = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}; \quad (10)$$

$$y' = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}; \quad (11)$$

Если общий интеграл уравнения (10) имеет вид  $\varphi(x, y) = const$ , то, полагая  $\xi = \varphi(x, y)$ , мы обращаем в нуль коэффициент при производной  $u''_{\xi\xi}$ . Если  $\Psi(x, y) = const$  является общим интегралом уравнения (11), независимым от интеграла  $\varphi(x, y) = const$ , то, полагая  $\eta = \psi(x, y)$ , мы обратим в нуль также и коэффициент при производной  $u''_{\eta\eta}$ .

## 2. Уравнение эллиптического типа

Правые части уравнений (10) и (11) комплексно сопряжены. Пусть  $\varphi(x, y)$  — комплексный интеграл уравнения (10). Тогда  $\varphi'(x, y) = const$  — интеграл уравнения (11), где  $\varphi'(x, y) = const$  — функция, комплексно сопряженная с функцией  $\varphi(x, y)$ . Если теперь перейти к комплексным переменным  $\xi = \varphi(x, y)$ ,  $\eta = \psi(x, y)$ , то, согласно общей теории, уравнение (1) приведет к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi \left( \xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

то есть точно к такому же виду, как и гиперболическое уравнение. Чтобы остаться в действительной области, сделаем еще одну замену переменных:

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi'}{2}, \beta = \frac{\varphi - \varphi'}{2i}, i = \sqrt{-1},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — новые переменные. Тогда  $\xi = \alpha + i\beta$ ,  $\eta = \alpha - i\beta$ . Нетрудно показать, что при такой замене переменных. Таким образом, уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Theta \left( \alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right),$$

который называется каноническим видом уравнения эллиптического типа.

### 3. Общие формулы уравнения Лапласа и Пуассона.

Целый ряд вопросов математической физики сводится к решению тех или иных уравнений эллиптического типа. Простейшими такими уравнениями являются: уравнение Лапласа

$$\Delta u(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

и уравнение Пуассона

$$\Delta u(x, y, z) = -4\pi\rho(x, y, z) \quad (2)$$

Всякая функция, имеющая непрерывные вторые производные и удовлетворяющая в некоторой области уравнению Лапласа, называется гармонической функцией в этой области.

Рассмотрим некоторые общие свойства, которыми обладают решения этих уравнений.

Лемма 1. Если функция  $\rho(x, y, z)$  положительна в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ , лежащей внутри области, где определено уравнение (2), то решение этого уравнения не может достигать минимума в этой точке.

Следствие. Если  $\rho(x, y, z)$  отрицательна в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ , то и  $(x, y, z)$  в этой точке не может достигать минимума.

Теорема 1. Гармоническая функция, заданная в некоторой области  $\Omega$  и непрерывная вплоть до границы  $S$ , нигде внутри  $\Omega$  не может принимать значений больших, чем наибольшее ее значение на границе, или меньших, чем наименьшее ее значение на границе.

Следствие 1. Гармоническая функция, равная нулю на границе некоторой конечной области, тождественно равна нулю во всей области.

Следствие 2. Если последовательность функции  $u_n$ , гармонических в области  $\Omega$  и непрерывных вплоть до границы, сходится равномерно на границе  $S$  этой области то она сходится равномерно во всей замкнутой области.

*Фундаментальное решение.*

Для того чтобы исследовать более глубоко свойства гармонических функции, приведем еще несколько вспомогательных лемм.

Лемма 2. Функция

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \quad (3)$$

удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \frac{1}{r} = 0 \quad (4)$$

везде, кроме точки  $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ , где  $1/r$  обращается в бесконечность.

Лемма 3. Если функция и непрерывна, имеет непрерывные производные 1-го и 2-го порядков везде в области  $\Omega$ , причем первые производные непрерывны вплоть до границы, а вторые производные непрерывны внутри области, то имеет место формула:

$$\iiint_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u d\Omega = \iint_S u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} dS - 4\pi u(x_0, y_0, z_0) \quad (5)$$

Здесь  $\frac{\partial}{\partial n}$ , как обычно, обозначает производную по внутренней нормали к поверхности  $S$ . Граница  $S$  области  $\Omega$  удовлетворяет условиям, то есть является кусочно-гладкой и пересекается с любой прямой, параллельной какой-либо из осей координат, или в конечном числе точек или по конечному числу целых отрезков. Формула (4) называется формулой Грина. Легко заметить аналогию между формулой Грина (4) и сходной формулой, выведенной для уравнения теплопроводности. Роль рассмотренного там фундаментального решения уравнения теплопередачи играет здесь функция  $\frac{1}{r}$ , которую называют фундаментальным решением уравнения Лапласа.

*Потенциалы объема, простого слоя и двойного слоя.*

Если бы нам были известны, из каких-либо соображений, значения  $u$ ,  $\Delta u$  и  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , входящие в формулу Грина(4):  $\Delta u = -4\pi\rho$  и  $|_S = f_1, \frac{\partial u}{\partial n}|_S = f_2$  то формула Грина дала бы нам явное представление для



неизвестной функции  $u$ :

$$u = (x_0, y_0, z_0) = \iiint_{\Omega} \frac{\rho}{r} dx dy dz + \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\partial^{\frac{1}{r}}}{\partial n} f_1 dS - \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{r^2} f_2 dS \quad (6)$$

Однако мы не можем задать произвольно  $f_1$  и  $f_2$ , и поэтому формула (5) не дает возможности строить решение уравнения (2) по произвольным предельным значениям на границе его самого и его нормальной производной, подобно тому, как происходит это при решении задачи о колебании струны. Мы дадим особые названия интегралам, стоящим в правой части этой формулы.

Интеграл

$$\iiint_{\Omega} \frac{\rho}{r} dx dy dz \quad (7)$$

мы будем называть ньютоновым потенциалом, а функцию  $\rho$  — плотностью этого потенциала. Аналогично

$$\iint_S \frac{1}{r} f_2 ds \quad (8)$$

мы назовем потенциалом простого слоя плотностью  $f_2$ , а

$$\iint_S \frac{\partial^{\frac{1}{r}}}{\partial n} f_1 dS \quad (9)$$

— потенциалом двойного слоя плотностью  $f_1$ .

Ньютонов потенциал имеет очень простой физический смысл.

Представим себе некоторую массу, распределенную в объеме  $\Omega$  с плотностью  $\rho$ . Подсчитаем притяжение этой массой материальной точки. По закону Ньютона масса  $m$ , расположенная в точке  $(\bar{o}, \bar{b}, z)$ , притягивает единичную массу, расположенную в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  с силой  $F$ , направленной к точке  $(\bar{o}, \bar{b}, z)$  и равной  $\frac{m}{r^2}$ . Иначе говоря,  $F = grad_0 U$ , где  $U = \frac{m}{r} = \frac{m}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$

Функция  $U$ , градиент которой равен притягивающей силе, называется потенциалом силы тягести. Поэтому  $\frac{m}{r}$  можно назвать ньютоновым потенциалом материальной точки  $(x, y, z)$  с массой  $m$ .

Таким образом,  $U$  оказывается потенциалом тяготения массы, распределенной с плотностью  $\rho$  в объеме  $\Omega$ . Ту же интерпретацию допускает и потенциал простого слоя. Это есть потенциал тяготения масс, распределенных на поверхности  $S$ , создаваемый в точках вне поверхности.

Переходим к исследованию уравнения Пуассона в неограниченной среде.

Лемма 1. Функция, гармоническая во всем пространстве и стремящаяся к нулю на бесконечности, есть тождественный нуль. В самом деле, применяя теорему 1 к сколь угодно большому шару, видим, что в любой точке пространства значение нашей гармонической функции сколь угодно мало. Отсюда и вытекает справедливость леммы.

Следствие 1. Решение уравнения Пуассона

$$\Delta v = -4\pi\rho(x, y, z) \quad (10)$$

в неограниченном, пространстве, стремящееся к нулю на бесконечности, единственно.

Следствие 2. (Теорема Лиувилля.) Гармоническая функция, ограниченная во всем пространстве, равна постоянной.

Переходим теперь к решению уравнения Пуассона (6) в неограниченном пространстве.

Пусть функция  $\rho(x, y, z)$  интегрируема и удовлетворяет неравенствам  $|\rho(x, y, z)| < \frac{A}{R^{2+a}}$ , если  $R \geq 1$ ,  $|\rho(x, y, z)| < A$ , если  $R < 1$ , где  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  и  $a > 0$ . Без ограничения общности можно считать  $a < 1$ , ибо в противном случае замена  $a$  на  $a_1 < a$  только ослабит неравенство (7).

При выполнении условий (7) решение уравнения (6) легко построить с помощью формулы Грина (9). Пусть  $u(x_0, y_0, z_0)$  — решение (6), стремящееся к нулю на бесконечности. Взяв произвольный объем  $\Omega$ , ограниченный поверхностью  $S$ , мы имеем на основании этой формулы:

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, z_0) &= -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} (-4\pi\rho) \frac{1}{r} dx dy dz + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\partial^{\frac{1}{r}}}{\partial n} u dS - \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \\ &= \iiint_{\Omega} \frac{\rho}{r} dx dy dz + \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\partial^{\frac{1}{r}}}{\partial n} u dS - \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} dS \end{aligned} \quad (11)$$

где  $r$  как обычно, - расстояние между точкой  $(\delta, \delta, z)$  и точкой  $(x_0, y_0, z_0)$  А функция

$$u(x_0, y_0, z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p}{r} dx dy dz \quad (12)$$

где тройной интеграл распространен на все пространство, удовлетворяет уравнению (6) и поставленным условиям. Данная функция (9) называется ньютоновым потенциалом, а  $p(x, y, z)$  - его плотностью.

Ньютонов потенциал определяется как свертка обобщенной функции  $p$  (плотности) с функцией  $|x|^{-1}$ :

$$V = \frac{1}{|x|} \cdot p = -4\pi\delta_3 \cdot p \quad (13)$$

Потенциал  $V$  удовлетворяет уравнению Пуассона.

$$\Delta V = -4\pi p \quad (14)$$

Объемный потенциал. Если  $\delta$ —(абсолютно) интегрируемая функция на  $G$  и  $p(x) = 0, x \in G_1 = R^3 \setminus G$  то ньютонов потенциал  $V$ , называемый объемным потенциалом, выражается интегралом

$$V(x) = \int_G \frac{p(y)}{|x-y|} dy \quad (15)$$

и представляет собой локально интегрируемую функцию в  $R^n$ . Если  $p \in C(G)$  и  $G$  — ограниченная область, то объемный потенциал  $V$  принадлежит классу  $C^1(R^3)$ , гармоничен в  $G_1$  и  $V(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), |x| \rightarrow \infty$  Действительно, так как  $G$  — ограниченная область и  $p \in C(G)$ , то по теореме интеграл (3) принадлежит  $C^1(R^3)$ , и по формуле  $V(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), |x| \rightarrow \infty$  При  $x \in G$  потенциал  $V(x)$  допускает непрерывное дифференцирование под знаком интеграла в (3) бесконечное число раз, так что  $V \in C^\infty(G_1)$ . Отсюда и из уравнения (2) вытекает, что  $\Delta V = 0, x \in G_1$  т. е. потенциал  $V$ — гармоническая функция в области  $G_1$ .

#### 4. Начально-граничные условия.

Рассмотрим неоднородное уравнение эллиптического типа ( $F = 0, k = 0$  - уравнение Лапласа,  $F \neq 0, k = 0$  - уравнение Пуассона,  $F \neq 0, k = \text{Const} \neq 0$  - уравнение Гелмгольца):

$$\Delta(u) + = F(r) \quad (16)$$

Пусть  $G \in \mathbb{R}^n$  есть область, ограниченная кусочно гладкой поверхностью  $S$  - границей области  $G$ . Найти функцию  $u(r)$  класса  $C^2$ , удовлетворяющую уравнению (1) в области  $G$  и граничному условию на  $S$

$$\left( \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_S = v \quad (17)$$

где  $\alpha(r_S) \geq 0, \beta(r_S) \geq 0, V(r_S)$  - заданные непрерывные функции на  $S$ , причем  $\alpha(r_S) + \beta(r_S) > 0$   
Граничное условие I-го рода ( $\alpha = 1, \beta = 0$ ):

$$u|_S = u_0 \quad (18)$$

Граничное условие II-го рода ( $\alpha = 0, \beta = 1$ ):

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = v \quad (19)$$

Граничное условие III-го рода ( $\alpha \geq 0, \beta = 1$ ):

$$\left( \alpha u + \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_S = v \quad (20)$$

Уравнение Пуассона является линейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка. В общем случае уравнение может иметь бесчисленное множество решений.

Единственное решение получается, если на границе области, в которой рассматривается это уравнение, заданы граничные условия первого рода (задача Дирихле), второго рода (задача Неймана) или третьего рода. В первом случае на границе области считается известной искомая функция, во втором - ее нормальная производная, в третьем - линейная комбинация функции и ее нормальной производной. Современная математика располагает многими методами решения так называемых краевых задач, как аналитическими, так и численными, а современное математическое обеспечение персональных компьютеров содержит в своем составе "решатели" краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона.

## 5. Программа.

Решим задачу для уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta^2 u = xye^t, u'|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, -\infty < x, y, z < \infty, t > 0 \quad (21)$$

Продemonстрируем решение задачи в Maple с помощью преобразования Фурье. Переменные  $x, y, z$  меняются в бесконечных пределах, поэтому последовательно применяем преобразование Фурье по этим переменным. Определим задачу:

```
> restart;
> with(inttrans, fourier, invfourier);
> with(linalg, laplacian):
> eq:=diff(u(x,y,z,t),t$2)=laplacian(laplacian(u(x,y,z,t),[x,y,z]),
[x,y,z])+6*x^2*y^2*z^2;
> ic:=u(x,y,z,0)=0;
> ict:=D[4](u)(x,y,z,0)=0;
```

Применяем преобразование Фурье:

```
> fourier(eq,x,w1);
> fourier(%,y,w2);
> fourier(%,z,w3);
```

Решаем полученное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно трансформанты Фурье:

```
> subs(fourier(fourier(fourier(u(x,y,z,t),x,w1),y,w2),z,w3)=S(t),%);
> dsolve({%,S(0)=0,D(S)(0)=0},S(t));
```

Последовательно вычисляем обратное преобразование

```
> invfourier(rhs(%),w3,z);
> invfourier(%,w2,y);
> invfourier(%,w1,x);
```

Итак, мы получили решение

```
> u(x,y,z,t)=collect(%,t);
> subs(t=1,u(x,y,z,t) = (2*x^2+2*y^2+2*z^2)*t^4+3*x^2*y^2*z^2*t^2);
```

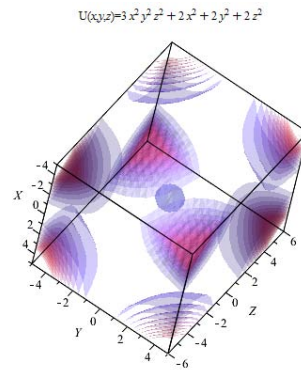
Получили ответ:  $u(x, y, z, 1) = 3x^2y^2z^2 + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$ , который далее визуализируем.

## 6. Визуализация.

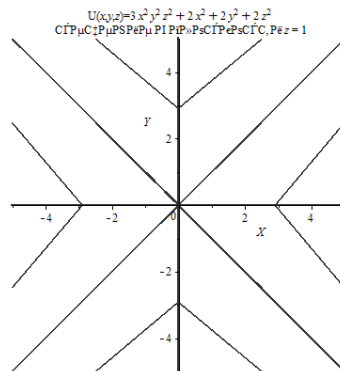
```
> restart;
```

```
> read 'potential.m';
```

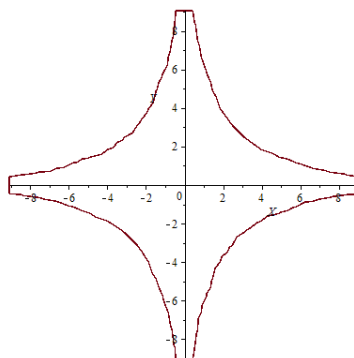
```
> eqpot[equipotential]([x,y,z],3*x^2*y^2*z^2+2*x^2+2*y^2+2*z^2,
[[-5,5],[[-5,5],[[-6,6]],10,withTitle=true);
```

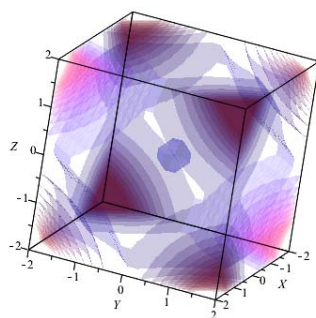


```
> eqpot[equipotential]([x,y,z],3*x^2*y^2*z^2+2*x^2+2*y^2+2*z^2,
[[-5,5],[[-5,5],[[-6,6]],10,withTitle=true,Surfaces=false,Plane=[z=1]);
```



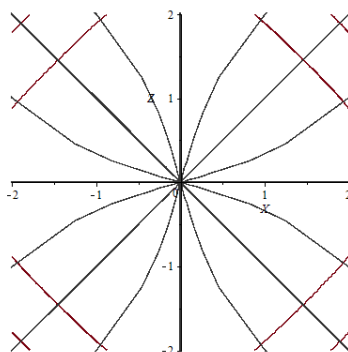
```
> eqpot[equipotential]([x,y,z],3*x^2*y^2*z^2+2*x^2+2*y^2+2*z^2,
[[-20,20],[[-20,20],[[-20,20]],10,withLines=false,Surfaces=false,Plane=[z=1]);
```





```
> eqpot[equipotential]([x,y,z],3*x^2*y^2*z^2+2*x^2+2*y^2+2*z^2,
[[-2,2],[ -2,2],[ -2,2]],10);
```

```
> eqpot[equipotential]([x,y,z],3*x^2*y^2*z^2+2*x^2+2*y^2+2*z^2,
[[-2,2],[ -2,2],[ -2,2]],10,Surfaces=false,Plane=[y=.5]);
```



## Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
2. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. Учебник для вузов. / Д.П. Голоскоков. – СПб.: Питер, 2004. – 539 с.
3. Соболев С.Л. Уравнения математической физики / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1966. – 444 с.
4. Тихоненко А.В. Применение пакета Maple в курсе «Уравнения математической физики». Режим доступа: [http://old.exponenta.ru/EDUCAT/SYSTEMAT/tikhonenko/pde/02\\_04.asp](http://old.exponenta.ru/EDUCAT/SYSTEMAT/tikhonenko/pde/02_04.asp)

ELLIPTIC EQUATIONS IN MAPLE: SOLVING THE POISSON EQUATION FOR A CHARGE. SOLUTION IN MAPLE AND ANIMATION.

D.V. Galickova

*The article deals with the implementation of the Poisson's equation for the initiation with the help of the Maple Programm as well as for the visualisation of the given task.*

Keywords: Maple program, equations of mathematical physics.

УДК 517.958

## УРАВНЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В MARLE: ВЫВОД УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ ПРИМЕР MARLE ДЛЯ ОГРАНИЧЕННОГО СТЕРЖНЯ

К.Ф. Гайфаров<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *gayfarov@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*В статье излагаются основные принципы колебаний стержня, алгоритм решения задачи для ограниченного стержня. Приведены примеры решения.*

**Ключевые слова:** СКМ Marle, уравнения математической физики.

### 1. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

Всякое линейное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными может быть записано в виде.

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0 \quad (1)$$

где  $A, B, C, D, E, F, G$ -заданные функции от  $x$  и  $y$  (или, в частном случае, постоянные).

Упростим это уравнение с помощью замены переменных

$$\begin{cases} \zeta = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $\zeta$  и  $\eta$ - новые независимые переменные.

Функции  $\varphi$  и  $\psi$ , связывающие новые переменные со старыми переменными, будут подобраны позднее. Пока будем считать, что отображение (2) является взаимно однозначным. Сделаем требуемую замену переменных.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]; \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right]; \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right]. \quad (6)$$

Правые части формул (3)-(6) представляют собой линейные функции относительно частных производных  $u'_\zeta, u'_\eta, u''_{\zeta\zeta}, u''_{\zeta\eta}, u''_{\eta\eta}$ . Подставляя  $u'_x, u'_y, u''_{xx}, \dots$  из этих формул в уравнение (1), мы получим снова линейное уравнение второго порядка с неизвестной функцией  $u$  и независимыми переменными  $u$  и независимыми переменными  $\zeta$  и  $\eta$ .

$$\bar{A} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2\bar{B} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \zeta \partial \eta} + \bar{C} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi \left( \zeta, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (7)$$

где

$$\bar{A} = A \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2;$$

$$\bar{B} = A \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + C \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x};$$

$$\bar{C} = A \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2,$$

а функция  $\Phi$  линейна относительно  $u, u'_\zeta, u'_\eta$ .

Уравнение (7) становится особенно простым, если в нем коэффициенты  $\bar{A}$  и  $\bar{C}$  окажутся равными нулю. Для того, чтобы первоначально заданное уравнение (1) можно было привести и к такому простому виду, надо в нем сделать замену переменных (2), подобрав функции  $\varphi$  и  $\psi$  так, чтобы они являлись решениями уравнения

$$A \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + C \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (8)$$

Это уравнение является нелинейным уравнением в частных производных первого порядка. Следующая теорема показывает, как связаны его решения с общим решением некоторого обыкновенного уравнения.

**Теорема.** Для того, чтобы функция  $z = f(x, y)$  во всех точках области  $\Omega$  удовлетворяла уравнению (8), необходимо и достаточно, чтобы семейство  $f(x, y) = \text{const}$  было общим интегралом уравнения

$$A(\partial y)^2 - 2B\partial x \partial y + C(\partial x)^2 = 0 \quad (9)$$

в той же области  $\Omega$ .

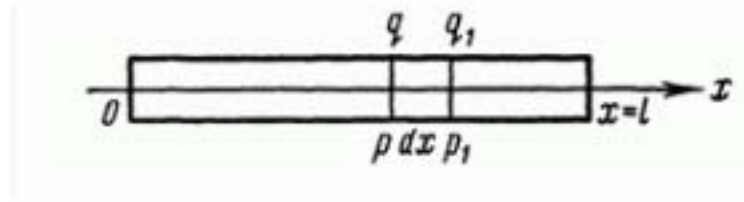
Уравнение (9) называется характеристическим уравнением для данного уравнения (1). Характеристическое уравнение есть обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, но второй степени. Разрешая его относительно производной  $y'$ , получим два уравнения

$$y' = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}; \quad (10)$$

$$y' = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}; \quad (11)$$

Если общий интеграл уравнения (10) имеет вид  $\varphi(x, y) = \text{const}$ , то, полагая  $\zeta = \varphi(x, y)$ , мы обращаем в нуль коэффициент при производной  $u''_{\zeta\zeta}$ .

Если  $\Psi(x, y) = \text{const}$  является общим интегралом уравнения (11), независимым от интеграла  $\varphi(x, y) = \text{const}$ , то, полагая  $\eta = \Psi(x, y)$  мы обратим в нуль также и коэффициент при производной  $u''_{\eta\eta}$ .



## 2. Вывод уравнения колебания стержня

Рассмотрим однородный стержень длины  $l$ , т. е. тело цилиндрической или какой-либо иной формы, для растяжения или изгибающего которого надо приложить известное усилие. Последнее обстоятельство и отличает даже самый тонкий стержень от струны, которая, как мы знаем, гнется свободно.

Далее мы займемся применением метода характеристик к изучению продольных колебаний стержня, причем ограничимся исследованием только таких колебаний при которых поперечные сечения  $pq$  перемещаясь вдоль оси стержня, остаются плоскими и параллельными друг другу. Подобное допущение оправдано, если поперечные размеры стержня будут невелики по сравнению с его длиной.

Если несколько растянуть или сжать стержень вдоль продольной оси, а затем предоставить самому себе, то в нем возникнут продольные колебания. Направим ось  $Ox$  вдоль оси стержня и будем считать, что в состоянии покоя концы стержня находятся в точках  $x = 0$  и  $x = l$ . Пусть  $x$ -абсцисса некоторого сечения стержня, когда последний находится в покое. Обозначим через  $u(x, t)$  смещение этого сечения в момент времени  $t$ , тогда смещение сечения с абсциссой  $x + dx$  будет равно.

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

Отсюда ясно, что относительное удлинение стержня в сечении с абсциссой  $x$  выражается производной

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

Считая теперь, что стержень совершает малые колебания, можно вычислить в этом сечении натяжение  $T$ . Действительно, применяя закон Гука, найдем, что

$$T = ES \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.1)$$

где  $E$ -модуль упругости материала стержня,  $S$ -площадь его поперечного сечения. Возьмем элемент стержня, заключенный между двумя сечениями, абсциссы которых в состоянии покоя соответственно равны  $x$  и  $x + dx$ . На этот элемент действуют силы натяжения  $T_x$  и  $T_{x+dx}$  приложенные в этих сечениях, и направленные вдоль оси  $Ox$ . Результирующая этих сил имеет величину

$$T_{x+dx} - T_x = ES \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+dx} - ES \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x \approx ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \quad (2.2)$$

и направлена также вдоль  $Ox$ . С другой стороны, ускорение элемента равно  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  вследствие чего мы можем написать равенство

$$pS dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = ES \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx \quad (2.3)$$



где  $p$ -объемная плотность стержня. Положив

$$a = \sqrt{\frac{E}{p}} \quad (2.4)$$

и сократив на  $Sdx$  получим дифференциальное уравнение продольных колебаний однородного стержня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.5)$$

Форма этого уравнения показывает, что продольные колебания стержня носят волновой характер, причем скорость  $a$  распространения продольных волн определяется формулой (2.4). Если на стержень действует еще внешняя сила  $F(x, t)$ , рассчитанная на единицу его объема, то вместо (2.3) получим

$$pSdx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + F(x, t)Sdx,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{p} F(x, t) \quad (2.6)$$

Это есть уравнение вынужденных продольных колебаний стержня под действием внешней распределительной нагрузки  $F(x, t)$ .

### 3. Начально-граничные условия

Одного уравнения движения (2.5) или (2.6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{p} F(x, t) \quad (2.6)$$

недостаточно для полного определения движения стержня. Нужно задать начальные условия, т. е. задать смещения сечений стержня и их скорости  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$  в начальный момент времени

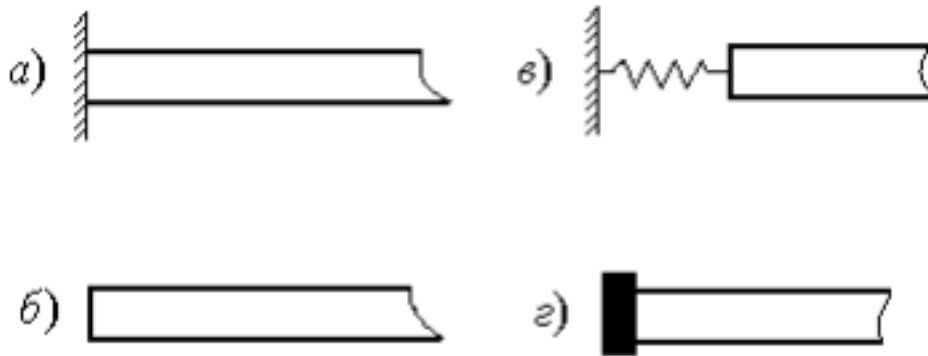
$$u|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x) \quad (2.7)$$

где  $f(x)$  и  $F(x)$ -заданные функции в интервале  $(0, l)$ .

Кроме того, в случае стержня конечной длины, надо задать граничные условия на его концах. Рассмотрим разные варианты граничных условий на конце стержня, который будем обозначать координатой  $x_k$ .

1) Если конец закреплен ( $a$ ), о перемещение его равно нулю т. е.

$$u(x_k, t) = 0 \quad (2.8)$$



в любой момент времени  $t$ .

2) Если конец свободен, то усилие  $F(x, t)$  на этом конце равно нулю (нет внешних сил), т.е.  $F(x_k, t) = 0$  в любой момент времени  $t$ , а, следовательно учитывая (2.1)

$$\frac{du(x_k, t)}{dx} = 0 \quad (2.9)$$

3) Если конец стержня соединен с неподвижной опорой пружиной с жесткостью  $c_k$  (упругое закрепление конца) (в), то сила, передаваемая пружиной концу стержня при его колебаниях, будет равна  $\pm c_k u(x_k, t)$ . Тогда граничное условие на этом конце примет вид

$$SE \frac{du(x_k, t)}{dx} = \pm c_k u(x_k, t) \quad (2.10)$$

(знак "+" для левого конца стержня, "-" для правого конца)

4) Если к концу стержня прикреплен груз массой  $m_g$  (случай сосредоточенной массы) (г), то сила, передаваемая от сосредоточенной массы к концу стержня при колебаниях равна  $\pm m_g \frac{du(x_k, t)}{dt}$ . Т.е. граничное условие на этом конце имеет вид

$$SE \frac{du(x_k, t)}{dx} = \pm \frac{d^2 u(x_k, t)}{dt^2} \quad (2.11)$$

(знак "+" для левого конца стержня, "-" для правого конца)

Таким образом, математическая модель, описывающая продольные колебания упругого однородного ограниченного стержня включает в себя уравнение  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  (2.5), в случае свободных колебаний, или уравнение  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{p} F(x, t)$  (2.6), в случае вынужденных колебаний, начальные условия  $u|_{t=0} = f(x)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = F(x)$  (2.7) и два граничных условия на концах  $x = 0$  и  $x = l$ , каждое из которых, в зависимости от варианта закрепления, может иметь один из видов (2.8) – (2.11).

#### 4. Алгоритм решения уравнений свободных колебаний методом Фурье

Решение уравнения  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  (2.5) будем искать методом Фурье (методом разделения переменных). Согласно этому методу, мы ищем частные решения  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  (2.5), удовлетворяющие граничным условиям, и имеющие вид

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (2.12)$$

Таким образом, перемещение  $u(x, t)$  мы представляем в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от аргумента  $x$ , а вторая – только от аргумента  $t$ . Тогда вместо определения функции двух переменных  $u(x, t)$  приходим к задаче определения двух функций  $X(x)$  и  $T(t)$ , каждая из которых зависит только от одной переменной.

Подставив (2.12) в уравнение (2.5), получим

$$X''(x)T(t) = \frac{1}{a^2}X(x)T''(t)$$

Разделив обе части равенства на произведение  $X(x)T(t)$  и умножив на  $a^2$ , получим уравнение

$$\frac{a^2 X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}$$

Здесь левая часть зависит только от  $x$ , правая – только от  $t$ . Для тождественного выполнения этого равенства (при любых  $x$  и  $t$ ) необходимо, чтобы каждая из частей была равна постоянной, которую обозначим через  $-p^2$  (можно показать, что случай  $-p^2$ , также как и случай  $p = 0$ , приводит к единственному тривиальному решению):

$$a^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -p^2, \quad \frac{T''(t)}{T(t)} = -p^2$$

Отсюда следует два уравнения

$$T''(t) + p^2 T(t) = 0, \quad (2.13)$$

$$X''(x) + \frac{p^2}{a^2} X(x) = 0. \quad (2.14)$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение уравнения (13) имеет вид

$$T(t) = A \cos(pt) + B \sin(pt). \quad (2.15)$$

Где  $A$  и  $B$  - произвольные постоянные.

Положим что  $A = I \sin \alpha$ ,  $B = I \cos \alpha$ , тогда функция (15) можно представить следующим образом:

$$T(t) = I \sin(pt + \alpha) \quad (2.16)$$

где  $I = \sqrt{A^2 + B^2}$ ,  $\tan \alpha = \frac{A}{B}$ .

Вид решения (2.16) указывает на колебательный характер процесса. Из него видно, что неизвестная величина  $p$  имеет смысл круговой частоты свободных колебаний,  $I$  - амплитуды колебаний, а  $\alpha$  - начальной фазы. Так как искомые частные решения должны удовлетворять кроме уравнения соответствующим однородным граничным условиям, то подставляя в последние функцию (2.12) и исключая  $T(t)$ , получим два дополнительных условия относительно  $X(0)$ ,  $X(l)$  или их производных. Следовательно, для нахождения функций  $X(x)$  мы приходим к задаче о собственных значениях (задаче Штурма-Лиувилля): найти те значения параметра  $p$ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения (2.14), удовлетворяющие соответствующим дополнительным условиям, а также

найти эти нетривиальные решения. Такие значения параметра  $p$  называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения – собственными функциями поставленной задачи. Как было показано выше, собственные значения имеют смысл круговой частоты свободных колебаний, поэтому их чаще называют собственными частотами.

Уравнение (2.14 имеет общее решение)

$$X(x) = C_1 \cos\left(\frac{p}{a}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{p}{a}x\right) \quad (2.17)$$

где  $C_1$  и  $C_2$ - произвольные постоянные. Подставляя (2.17) в условия, полученные для функций  $X(0)$ ,  $X(l)$  или их производных из граничных условий, получаем систему линейных однородных уравнений относительно постоянных  $C_1$  и  $C_2$ . Такая система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Раскрывая определитель указанной системы, мы получим уравнение для определения  $p$ . Данное уравнение называется уравнение частот или частотным уравнением.

Частотное уравнение, всегда трансцендентное и имеет бесконечное число корней. Перенумерованные в порядке возрастания они вместе с порядковым номером растут до бесконечности. Наименьшая положительная частота, отличная от нуля, называется частотой основного тона или основной частотой. Остальные частоты называются частотами высших порядков.

Для частоты  $p_k$  находим  $C_{1k}$  и  $C_{2k}$ . Таким образом каждому значению  $p_k$  соответствует своя собственная функция  $X_k(x)$  вида (2.17), определенная с точностью до произвольного постоянного множителя. Эта функция определяет собственную форму колебаний, т.е. задает распределение амплитуд колебаний о длине стержня, соответствующих собственной частоте  $p_k$ . Очевидно, что она не зависит от начальных условий.

Таким образом, число собственных частот бесконечно, причем каждому значению частоты  $p_k$  соответствует своя функция  $T_k(x)$ , определяемая зависимостью (2.15), и своя функция  $X_k(x)$ , определяемая зависимостью (2.17). Следовательно, каждому  $k$  соответствует решение вида (2.12)

$$u_k(x, t) = X_k(x)T_k(x)$$

которое удовлетворяет уравнению (2.5) и граничным условиям, но является лишь частным и не дает полного описания движения.

Полное решение получим путем наложения всех частных решений:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)T_k(x) \quad (2.18)$$

Поскольку мы составили бесконечный ряд, то нужно, чтобы он был сходящимся. Кроме того, он должен быть дважды непрерывно дифференцируем по обоим переменным на интервале  $[0, l]$ . Тогда в силу линейности и однородности уравнения свободных колебаний, ряд (2.18), также как и частные решения  $u_k(x, t)$ , будет являться решением уравнения (2.5). Ясно также, что функция (2.18) будет удовлетворять граничным условиям, так как им удовлетворяет каждая из функций  $u_k(x, t)$ .

## 5. Колебания конечного стержня (программа)

Задача:

Рассмотреть продольные колебания стержня, оба конца которого  $x = 0$  и  $x = l$  жестко закреплены, который получает в начальный момент времени  $t = 0$  продольный ударный импульс  $P$ . До удара стержень находился в состоянии покоя.

Таким образом, необходимо найти решение уравнения колебаний:

$$c^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) - \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} u \right) = 0, 0 < x < l, t > 0 \quad (A)$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 \quad (B)$$

и начальным условиям, которые можно записать в виде:

$$u(x, 0) = 0, \left( \frac{\partial}{\partial t} u \right)_{t=0} = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < x < 1 - \epsilon, \\ v_0 = \frac{P}{\rho \epsilon S}, & \text{если } 1 - \epsilon < x < 1 \end{cases} \quad (C)$$

где  $S$  - площадь поперечного сечения стержня,  $\rho$  - его плотность. После решения сформулированной задачи необходимо перейти к пределу  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Переходя к пределу  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\partial}{\partial t} u \right)_{t=0}$ , можно сформулировать второе из начальных условий (C) с помощью  $\delta$ -функции Дирака:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} u \right)_{t=0} = v(x)_0 = \frac{P \delta(x-l)}{\rho S} \quad (C2)$$

так что:

$$\int_0^l \left( \frac{\partial}{\partial t} u \right)_{t=0} \rho S dx = P$$

- скорость изменения деформации \* масса стержня = импульс.

Итак, введем уравнение колебаний (A):

```
> restart;
> assume(c, positive);
> eq:=c^2*diff(u(x,t),x$2)-diff(u(x,t),t$2)=0;
0<x,x<l,t>0;
```

И введем начальные условия  $PS \cdot D[2](u)(x, y) = \text{subs}(y=0, \text{diff}(u(x, y), y))$  - производная от функции  $u(x, y)$  по второму аргументу, вычисленная при  $y=0$

```
> init_c:=u(x,0)=0,D[2](u)(x,0)=phi(x);
```

Функцию  $\phi(x)$  определим двумя способами:

1. Как кусочную функцию с помощью команды `piecewise`:

```
> phi1:=piecewise(0<x and x<l-epsilon,0,
l-epsilon<x and x<l,P/(rho*epsilon*S));
```

2. Как обобщенную сингулярную функцию Дирака:

```
> phi2:=(x)->P/(rho*S)*Dirac(x-l);
> phi3:=sin(x*(l-x));
```

Надо заметить, что предел первой функции как раз и является определением второй.

Введем теперь граничные условия:

```
> bound_c:=u(0,t)=0,u(l,t)=0;
```

Произведем разделение переменных в уравнении (A), представляя функцию  $u(x, t)$  в виде произведения:

```
> U:=u(x,t)=X(x)*T(t);
```

и подставляя эту функцию в уравнение (A):

```
> Eq_1:=subs(U,eq);
```

Раскроем скобки в левой части уравнения, поделим результат на  $u(x, t)$ :

```
> Eq_2:=expand(lhs(Eq_1)/(X(x)*T(t)))=0;
```

Вводя константу разделения  $\lambda$ , сформируем два обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка:

```
> Eq_x0:=op(1,lhs(Eq_2))=-lambda:
> Eq_x:=lhs(Eq_x0)*X(x)-rhs(Eq_x0)*X(x)=0:
> Eq_t0:=op(2,lhs(Eq_2))=lambda:
> Eq_t:=lhs(Eq_t0)*T(t)-rhs(Eq_t0)*T(t)=0:
```

Как известно, требование ограниченности решения приводит к условию положительности константы разделения, при этом нулевое ее значение также исключается, так как оно противоречит граничным условиям.

Итак:

```
> assume(lambda>0):
> Sol_x:=dsolve(Eq_x,X(x)):
```

Решим теперь задачу Штурма-Лиувилля, т.е., найдем все нетривиальные собственные функции  $X(x)$  и собственные значения  $\lambda$ , удовлетворяющие граничным условиям задачи. Введем упрощенную пользовательскую функцию  $X(x)$  с помощью команды `unapply` (выражение, аргумент):

```
> X:=unapply(rhs(Sol_x),x):
> X(x):
```

и перепишем граничные условия  $bound_c$ , которые фактически определяют лишь функцию  $X(x)$ :

```
> bound_cx:={X(0)=0,X(l)=0}:
```

Решаем эту систему, как систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно постоянных  $C1, C2$ , - как мы знаем, для существования нетривиального решения этой системы необходимо и достаточно равенство нулю ее определителя, что дает условия на постоянную разделения  $\lambda$ . Основную матрицу системы вычисляем с помощью команды `genmatrix` ((система уравнений),(переменные системы)):

```
> A:=linalg[genmatrix](bound_cx,{_C1,_C2});
```

Вычислим определитель этой матрицы:

```
> Delta:=linalg[det](A):
> op(-1,Delta):
```

Поскольку  $\lambda$  строго больше нуля, так как решения с нулевым значением  $\lambda$  не удовлетворяют граничным условиям, то в уравнении  $\Delta = 0$  необходимо приравнять нулю лишь  $\cos$ :

Для определения всех корней этого уравнения используем команду:

```
EnvAllSolutions:=true:
```

```
> _EnvAllSolutions:=true:
> Lambda0:=solve(op(-1,Delta),lambda):
```

Здесь  $-Z1$  ~-множество целых положительных чисел  $1,2,\dots,N,\dots$

Для удобства пользования произведем здесь замену  $Z1 \rightarrow k$ :

```
> Lambda:=subs(_Z1='k',Lambda0):
```

и введем пользовательскую функцию:

```
> ev:=unapply(Lambda,k):
```

Мы видим, что подстановка полученного значения константы разделения  $\lambda$  и равенства  $C_2=0$  в граничные условия  $bound_c x$  превращает эти соотношения в тождества.

```
> assume(k, posint):
> Xi0:=(x,k)->subs({_C2=0, lambda=ev(k)}, X(x)):
> Xi0(x,k):
```

Полученная система собственных функций автоматически ортогональна на отрезке  $[0, l]$ . Нормируем теперь эти функции:

```
> Coef2:=(k)->simplify(int(Xi0(x,k)^2, x=0..l), symbolic):
assume(l>0):
> Coef:=(k)->simplify(sqrt(Coef2(k)), radical, symbolic):
> Coef(k):
> Xi:=(x,k)->simplify(Xi0(x,k)/Coef(k), radical, symbolic):
> Xi(x,k):
```

Таким образом, собственные значения,  $k$ , и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля найдены, это:  $\Xi(x, k)$ . Найдем теперь общее решение временного дифференциального уравнения, куда необходимо подставить найденные константы разделения.

```
> EQ_t:=subs(lambda=ev(k), Eq_t):
```

Итак, решим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка сразу с учетом первого начального условия,  $unit.c$ , согласно которому:

$$T(0) = 0$$

```
> Tau:=(t,k)->simplify(subs(_C1=C(k), dsolve({EQ_t, T(0)=0}, T(t)))):
> Tau(t,k):
```

Общее решение задачи примет следующий вид:

```
> Gen_U:=sum(Xi(x,k)*rhs(Tau(t,k)), k=0..infinity):
```

Коэффициенты  $C(k)$  являются коэффициентами Фурье и определяются начальными условиями по формуле:

$$C(k) = \int_0^l \phi(x) \Xi(x, k) dx$$

Подставляя сюда  $\phi(x) = \phi_2(x)$

$\phi_3(x) = \sin(x*(l-x))$ , а также вводя массу стержня:  $M = \rho l S$ , найдем:

```
> C2:=(k)->subs(rho=M/(l*S), int(Xi(x,k)*phi3, x=0..l)):
> C2(k):
```

Подставляя эти коэффициенты в выражение  $Gen U$ , получим решение нашей задачи:

```
> U_0:=(x,t)->subs(C(k)=C2(k), Gen_U):
> U_0(x,t):
```

Это и есть точное решение поставленной задачи для функции  $\phi_3(x)$ .

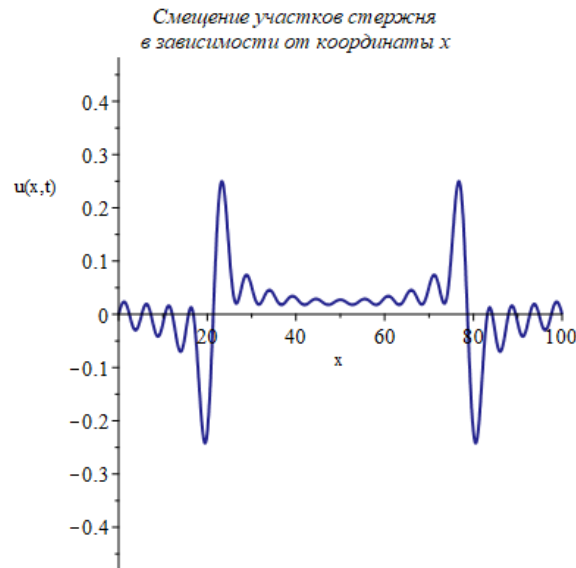
## 6. Анимационные модели колебаний

Построим теперь анимационную модель решений. Для этого заменим точное решение приближенным, ограничиваясь первыми сорока членами ряда:

```
> U:=(x,t,l,c,M,P)->
sum(-sin(Pi*k*x/l)*sqrt(2)*sqrt(Pi)*sin((1/2)*Pi*k)*
*(cos((1/4)*Pi^2*k^2/l^2)*cos((1/4)*l^2)*FresnelS((1/2)*Z)*
*(Pi*k+l^2)*sqrt(2)/(l*sqrt(Pi))-cos((1/4)*Pi^2*k^2/l^2)*
*cos((1/4)*l^2)*FresnelS((1/2)*(Pi*k-l^2)*sqrt(2)/(l*sqrt(Pi)))-
-cos((1/4)*Pi^2*k^2/l^2)*sin((1/4)*l^2)*FresnelC((1/2)*(Pi*k+l^2)*
*sqrt(2)/(l*sqrt(Pi)))+cos((1/4)*Pi^2*k^2/l^2)*sin((1/4)*
*l^2)*FresnelC((1/2)*(Pi*k-l^2)*sqrt(2)/(l*sqrt(Pi)))-
-cos((1/4)*l^2)*sin((1/4)*Pi^2*k^2/l^2)*FresnelC((1/2)*
*(Pi*k+l^2)*sqrt(2)/(l*sqrt(Pi)))+cos((1/4)*l^2)*sin((1/4)*
*Pi^2*k^2/l^2)*FresnelC((1/2)*(Pi*k-l^2)*sqrt(2)/(l*sqrt(Pi)))-
-sin((1/4)*l^2)*sin((1/4)*Pi^2*k^2/l^2)*FresnelS((1/2)*
*(Pi*k+l^2)*sqrt(2)/(l*sqrt(Pi)))+sin((1/4)*l^2)*
*sin((1/4)*Pi^2*k^2/l^2)*FresnelS((1/2)*(Pi*k-l^2)*
*sqrt(2)/(l*sqrt(Pi))))*sin(Pi*k*c*t/l)/l, k = 0 .. 40):
U(x,t,100,10,1,1);
> evalf(U(1,1,100,10,1,1));
```

Анимлируем теперь полученное решение:

```
> plots[animate](U(x,t,100,10,1,0.1),x=0..100,t=0..40,
color=navy,thickness=2,numpoints=1000,
frames=64, labels=[x,'u(x,t)']);
```

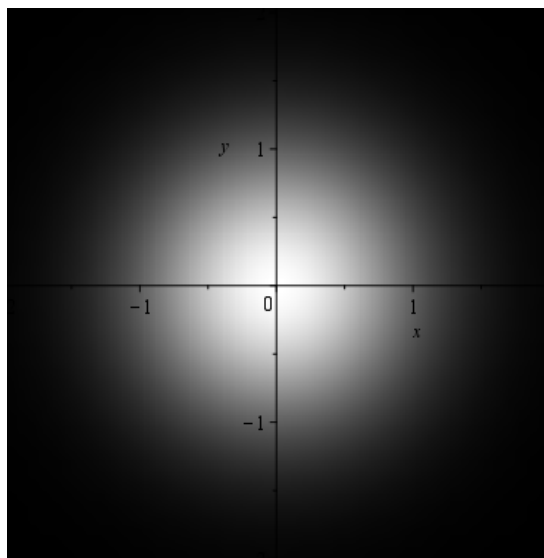
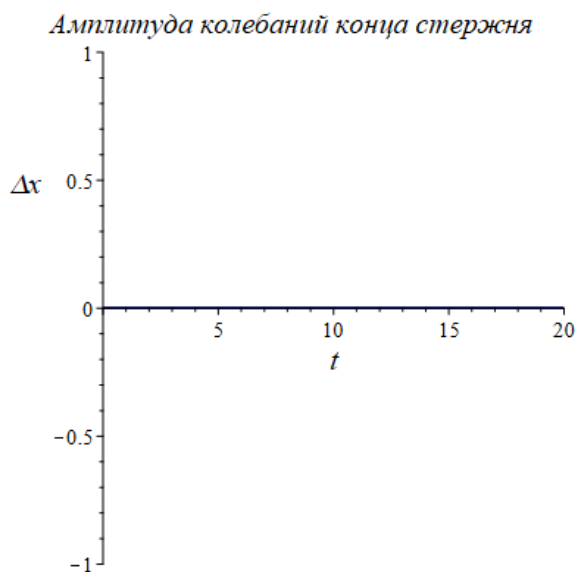


Покажем теперь, как колеблется конец стержня  $x=l$ :

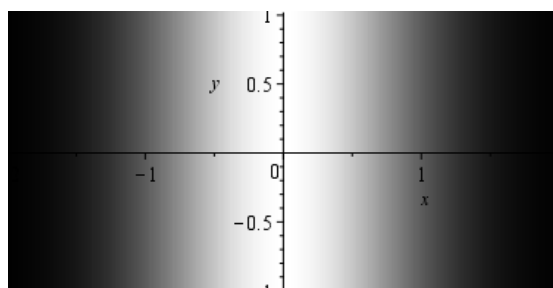
```
> plot(U(10,t,10,1,1,0.1),t=0..20,color=navy,thickness=2,numpoints=2000,
titlefont=[TIMES,ROMAN,16],
labels=[t,x], labelfont=[TIMES,ROMAN,16]);
```

```
> plots[densityplot](exp(-x^2-y^2),x=-2..2,y=-2..2,grid=[50,50],
scaling=CONSTRAINED,style=PATCHNOGRID);
```





```
> plots[densityplot](exp(-x^2),x=-2..2,y=-1..1,grid=[50,50],
scaling=CONSTRAINED,style=PATCHNOGRID);
```



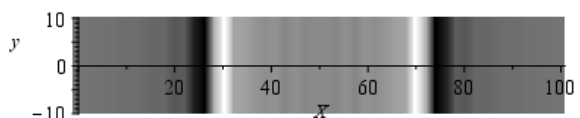
Построим анимационную процедуру, изображающую колебания стержня - смещение вдоль стержня цветом, а конец стержня колеблющимся.

```
> Anim_Osc:=proc(l,c,M,P,T,N) local i,cadr,X,TT,t,dt,u:
dt:=evalf(T/N,3):
```

```

t:=(i)->evalf(dt*i):
u:=(X,TT)->U(X,TT,l,c,M,P):
cadr:=(i)->plots[densityplot](u(X,t(i)),X=0..l,y=-10..10,grid=[50,50],
style=PATCHNOGRID,scaling=CONSTRAINED):
plots[display](seq(cadr(i),i=0..N),insequence=true):
end proc:
> Anim_Osc(100,10,1,1,40,72);

```



## Литература

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
2. Араманович И.Г. Уравнения математической физики / И.Г. Араманович, В.И. Левин. – М.: Наука, 1964. – 288 с.
3. Арсенин В.Я. Математическая физика / В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1966. – 367 с.
4. Конеев Р.В. Уравнения математической физики: Методические указания / Р.В. Конеев, А.Н. Хоперский, В.Л. Заволженская, С.К. Балашов. – Ростов-на-Дону: Рост. гос. ун-т путей сообщения, 2004. – 28 с.
5. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. Учебник для вузов. / Д.П. Голоскоков. – СПб.: Питер, 2004. – 539 с.

## HYPERBOLIC TYPE EQUATION IN MAPLE: DERIVATION OF ROD OSCILLATION EQUATIONS EXAMPLE MAPLE FOR A BOUNDED ROD

K.F. Gayfarov

*The article presents the basic principles of oscillations of the rod, the algorithm for solving the problem for a limited rod. Examples of solutions are given.*

Keywords: Maple, equations of mathematical physics.

УДК 004.4

## ФОРУМЫ В СИСТЕМЕ НАУЧНЫХ КОММУНИКАЦИЙ

П.О. Гафурова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> paulina.mannshtern@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*Рассмотрена возможность использования технологии форумов в научных коммуникациях в области математики. Описан форум по семантическому представлению математических знаний, созданный для цифровой библиотеки Lobachevskii DML.*

**Ключевые слова:** цифровая библиотека Lobachevskii DML, форум, научные коммуникации.

В настоящее время возникает все больше возможностей для развития коммуникаций через сеть интернет. В сети интернет можно выделить несколько видов коммуникационных платформ. Это такие платформы как: форумы, блоги и социальные сети. Если в сфере личного проведения времени эти платформы используются довольно часто, то в научной системе коммуникаций они используются реже и не только невозможно определить насколько представленная информация верна, но и не предоставляет автору авторских прав на копирование данных, что затрудняет внедрение подобных структур в научную сферу. Таким образом при создании научного форума, блога или социальной сети необходимо придерживаться некоторых стандартов.

Приведены примеры работающих форумов, ориентированных на научный контент [1]. Описаны решения для организации научных форумов. Выделены требования, каким должен быть форум, чтобы его можно было назвать научным, а также условия, позволяющие пользователям точно определить, что форум научный и информации в нем можно доверять.

Для форума по математике необходимо использовать технологии, позволяющие отображать математические формулы. Для отображения формул используются несколько технологий [2]. Для форума РНРbb существует расширение на основе MathJax. Оно позволяет писать в сообщениях форума математический код в формате  $\LaTeX$ .

Приведен пример форума по семантическому представлению математических знаний, созданный нами цифровой библиотеки Lobachvskii Digital Mathematical Library [3, 4].

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, проект 1.2368.2017/ПЧ, и при частичной финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-47-160012.

## Литература

1. Kohlhasе M. eMath 3.0: building blocks for a social and semantic Web for online mathematics & elearning / C. David , D. Ginev, M. Kohlhasе, J. Corneli // 1st International Workshop on Mathematics and ICT: Education, Research and Applications. – 2010. – Bucharest, Romania. – URL: <http://civile.utcb.ro/malog/wp.pdf>.
2. Елизаров А.М. Веб-технологии для математика: основы MathML. Практическое руководство / А.М. Елизаров, Е.К. Липачев, М.А. Малахальцев. – М.: Физматлит, 2010. – 192 с.
3. Elizarov A.M. Lobachevskii DML: Towards a Semantic Digital Mathematical Library of Kazan University / A.M. Elizarov, E.K. Lipachev // CEUR Workshop Proceedings. – 2017. – Vol. — 2022. – P. 326-333.
4. Елизаров А.М. Семантические методы и инструменты электронной математической библиотеки Lobachevskii-DML / А.М. Елизаров, Е.К. Липачев // Научный сервис в сети Интернет: труды XIX Всероссийской научной конференции (Новороссийск, 18-23 сентября 2017г.). –М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2017. – С.130-136. – Режим доступа: <http://keldysh.ru/abrau/2017/73.pdf>. – Режим доступа: <https://doi.org/10.20948/abrau-2017-73>.

## FORUMS IN THE SYSTEM OF SCIENTIFIC COMMUNICATIONS

P.O. Gafurova

*We are considering the possibility of using technology forums in scientific communications in the field of mathematics. We describe the semantic math knowledge forum we created for the Lobachvskii DML digital library.*

Keywords: Lobachevskii Digital Mathematical Library, forum, scientific communications.

УДК 514.822

## ОПЫТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ MAPLE-ГРАФИКИ В ШКОЛЬНЫХ ПРОЕКТАХ

А.И. Гибадуллина<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [alsugi@mail.ru](mailto:alsugi@mail.ru); МБОУ «Средняя общеобразовательная русско-татарская школа №57» Кировского района г.Казани

*Описывается опыт использования Maple-программирования в графических проектах школьников.*

**Ключевые слова:** Maple-проект, графические команды.

Ни одна область в современном мире не обходится без моделирования процессов. Компьютерное математическое моделирование – незаменимый инструмент, или даже метод, изучения окружающего мира. Некоторые специалисты утверждают, что для людей будущего принципиально важно иметь хорошее пространственное мышление, навыки которого должны быть своевременно развиты в системе образования. С этой целью предлагаются новые принципы изучения геометрии, химии, физики и биологии, в которых пространственные представления об изучаемых объектах и процессах их взаимодействия являются исключительно важными. Отвечающими новым принципам являются компьютерные средства, имеющие возможность построения и исследования математических моделей, численного анализа, визуализации получаемых результатов, а также вставки текстовых и иных комментариев. Универсальными средами, обладающими всеми перечисленными возможностями, являются системы символьной (компьютерной) математики (СКМ, ССМ), что позволяет рассматривать их в качестве эффективного учебно-методического средства современного образования, как высшего, так и среднего.

Из всех СКМ Maple является одним из самых мощных пакетов и применяется не только в научных разработках. Его численный инструментарий используется в финансовых и статистических расчетах, для генерации и анализа данных, разработки эффективных бизнес-стратегий. Замечательная графическая среда дает возможность получать качественные изображения, что, конечно, используется в дизайне. Некоторые компании создания анимационных фильмов уже давно применяют этот пакет для технического решения многих сцен. Понятный интерфейс, интерактивный режим работы, мощные графические возможности, естественный для математика язык и удобная справочная система делают Maple доступным для широкого круга пользователей, не являющихся профессиональными программистами.

Мощные средства системы дают принципиально новые возможности использования компьютера в сфере образования.

В казанской школе 57 пакет более 10 лет используется Автором в преподавании математики, а также для организации внеурочной деятельности. В первое время работал кружок по изучению основ компьютерной математики (Maple), который, расширяясь, перерос в исследовательскую лабораторию по использованию компьютерных технологий. Позже на ее основе было создано школьное научное общество (НОУ) «ГЕОДРОМчик», которое функционирует и по сей день. Главная идея НОУ – научно-исследовательская деятельность учащихся с применением компьютерного математического моделирования. Первый этап обучения – знакомство с основами Maple. Особенно притягивает графика, возможность ее форматировать, изменять, анимировать – это занятие может занимать много времени и приносит непередаваемое эстетическое удовлетворение. Поэтому естественно, что большое количество проектов – работа с изображением.

Постепенно выявились команды и сложились определенные программные шаблоны, которые используются почти во всех графических проектах.

Основные библиотеки – `<plots>` и `<plottools>`. Графические примитивы: `<polygon>`, `<curve>`, `<line>`, `<circle>`, `<disk>`, `<arc>`, `<cone>`, `<cylinder>`, `<sphere>`, команды преобразований `<rotate>`, `<translate>`, `<reflect>`, `<homothety>`, а также – `<plot>`, `<plot3d>`, `<implicitplot>`, `<seq>`, `<display>`.

Опции – `<thickness>`, `<color>`, `<rand>`, `<COLOR(RGB,rand())>`, `<insequence=true>`, `<scaling=constrained>`.

Поворот объекта (`<rotate>`) выполняется как относительно точки, так и относительно прямой. Для анимирования изображений используется прием комбинирования команды `<seq>`(список) с опцией `<insequence=true>`(показывать последовательно). Сложная анимация реализуется поэтапно путем комбинирования элементарных.

Все перечисленные средства используют в своем Maple-программировании учащиеся, начиная с 5-го класса. За годы существования НОУ сформировалась большая библиотека графических Maple-проектов. При всем этом особенно ценным является то, что учащиеся занимаются компьютерным математическим моделированием и приобретают опыт программирования.

#### THE EXPERIENCE OF USING MAPLE GRAPHICS IN SCHOOL PROJECTS

A.I. Gibadullina

*The experience of Maple-programming in school graphical projects is described.*

Keywords: Maple project, graphical commands.

УДК 372.862

## ИЗУЧЕНИЕ ОСНОВ КОМПЬЮТЕРНОГО ЗРЕНИЯ В РАМКАХ КУРСА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ РОБОТОТЕХНИКИ

Т.А. Дьячкова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> taantipova@bk.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*Автором разработан комплекс учебно-методических материалов «Введение в компьютерное зрение» для учащихся 5-7 классов, изучающих робототехнику.*

**Ключевые слова:** компьютерное зрение, библиотека OpenCV, образовательная робототехника.

Интенсивное развитие технологий компьютерного зрения не только оказало значительное влияние на робототехнику в целом, но и привело к тому, что эти технологии стали доступными и для сферы образовательной робототехники. Использование компьютерного зрения в образовательных робототехнических проектах значительно расширяет спектр решаемых задач и открывает новые возможности. Поэтому становится актуальной проблема встраивания изучения основ компьютерного зрения в курсы образовательной робототехники.

Целью настоящей работы является разработка комплекса учебно-методических материалов «Введение в компьютерное зрение» для учащихся 5-7 классов, изучающих робототехнику. Особенностью данного комплекса является то, что все рассматриваемые в нем примеры и задачи интегрированы с робототехническими задачами.

Среди задач, для которых используется компьютерное зрение в образовательной робототехнике особую роль играют следующие задачи:

- определение местоположения работа и ориентирование в пространстве,
- поиск и распознавание объектов.

Приведем примеры таких задач.

1. Робот, оснащенный камерой должен двигаться по заданной черной линией траектории, также ориентируясь на указатели, встречающиеся на его пути.
2. Робот оснащенный камерой и манипулятором должен обнаружить и захватить неподвижный предмет заданной формы.
3. Робот должен распознать движущийся объект - домашнее животное и отпугнуть его [1].

Для реализации компьютерного зрения в настоящем комплексе используется библиотека OpenCV, для написания программ используется язык Python [2].

Комплекс может быть использован на занятиях кружков робототехники, а также как основа для элективного курса.

### Литература

1. Bond B. Chasing Cats [Электронный ресурс] / B. Bond. – Режим доступа: <http://myplace.frontier.com/r.bond/cats/cats.htm>
2. Rosebrock A. Practical Python and OpenCV / A. Rosebrock. – Pyimagesearch, 2016. – 293 p.

LEARNING THE BASICS OF COMPUTER VISION IN THE COURSE OF EDUCATIONAL ROBOTICS

T.A. D'iachkova

*The author has developed a set of teaching materials "Introduction to computer vision" for 5-7th grades students, studying robotics.*

Keywords: computer vision, OpenCV library, educational robotics.

УДК 517.958

## УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В MAPLE: ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ИЗ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА И АНИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО СТЕРЖНЯ

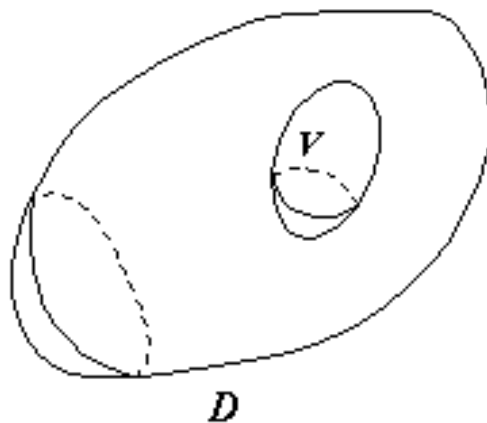
Т.А. Дьячкова<sup>1</sup><sup>1</sup> taantipova@bk.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В статье рассматривается вывод параболического уравнения из вариационного принципа, его анимация и применение в СКМ Maple.*

**Ключевые слова:** уравнения, параболический тип, вывод, СКМ Maple.

### 1. Общие формулы

*Вывод уравнения распространения тепла в твердом изотропном теле*



Рассмотрим  $D$  — трёхмерное изотропное тело, температура которого в точке  $(x, y, z)$  момент времени  $t$  определяется функцией  $u(x, y, z, t)$ . Если различные части тела находятся при различной температуре, то в теле будет происходить движение тепла от более нагретых частей к менее нагретым.

Для вывода уравнения распространения тепла выделим внутри тела произвольный объём  $V$ , ограниченный гладкой замкнутой поверхностью  $\Sigma$ . Рассмотрим изменение количества тепла в этом объёме за произвольный промежуток времени  $[t_1, t_2]$ .

$$Q_1 + Q_2 + Q_3, \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) называют уравнением теплового баланса. Здесь:  $Q[1]$  - количество тепла, входящего в объём  $V$  через его поверхность  $\Sigma$  за время  $[t_1, t_2]$ ,  $Q[2]$  - количество тепла, которое вырабатывается объёмом  $V$  за промежуток времени  $[t_1, t_2]$ ,  $Q[3]$  - количество тепла, затраченное на нагревание объёма  $V$ .

Вычислим величины  $Q_1, Q_2, Q_3$ .

Возьмём на поверхности  $\Sigma$  внутри тела малый элемент  $\Delta S$  в окрестности точки  $M(x, y, z)$ ,  $n[i]$  - внутренняя нормаль,  $n[l]$  - внешняя нормаль.

В данном случае имеет место закон Фурье:

количество тепла, проходящее через площадку  $\Delta S$  за время  $\Delta t$  пропорционально  $\Delta S \Delta t$  и изменению температуры вдоль нормали:

$$Q = -k \Delta S \Delta t \frac{\partial u}{\partial n_i}$$

Здесь  $k$  - коэффициент теплопроводности. Будем считать, что тело изотропно в отношении теплопроводности, если коэффициент теплопроводности  $k$  зависит только от точки  $(x, y, z)$  тела и не зависит от направления нормали к поверхности  $\Sigma$  в этой точке.

Покажем, что в том случае, когда тепло идёт внутрь тела, приток тепла  $\Delta Q$  положителен. Имеем:

$$k > 0;$$

$$\Delta S > 0;$$

$$\Delta t > 0;$$

$\frac{\partial u}{\partial n_i} < 0$  (тепло идёт внутрь тела) - температура вдоль нормали уменьшается следовательно  $\Delta Q_1 < 0$

В противном случае  $\frac{\partial u}{\partial n_i} > 0$  (тепло выходит из тела) - температура вдоль нормали увеличивается и имеем:

$$\Delta Q_1 > 0$$

Таким образом получаем:

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} (-k) \frac{\partial u}{\partial n_i} ds = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} k \frac{\partial u}{\partial n_i} ds$$

Найдём  $Q_2$ . Пусть  $p(x, y, z, t)$  - объёмная плотность распределения внутренних источников тепла.

Тогда количество тепла, вырабатываемого объёмом за единицу времени определится как:

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \int \int p(x, y, z, t) dV,$$

$$dV = dx dy dz$$

Рассмотрим элемент объёма  $\Delta V$ . Для изменения температуры этого объёма на  $\Delta u$  за промежуток времени  $[t_1, t_2]$  нужно затратить количество тепла:

$$\Delta Q_3 = c \Delta m \Delta u,$$

где  $c$  - теплоёмкость вещества, которая зависит от  $x, y, z$ ;  $\Delta u$  - разность температур:

$$\Delta u = u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt;$$

$\Delta m$  - масса вещества:

$$\Delta m = \rho \Delta V$$

где  $\rho(x, y, z)$  - плотность вещества, которую считаем не зависящей от времени  $t$ .

Тогда количество тепла, потраченное на нагревание объёма  $\Delta V$ :

$$\Delta Q_3 = c \rho \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt \Delta V$$

Таким образом, количество тепла, необходимое для изменения температуры объёма  $V$  на  $\Delta u$ , равно:

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} \int \int \int c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV$$

Подставим  $Q_1, Q_2, Q_3$  в формулу (1.1), но прежде по формуле Гаусса-Остроградского преобразуем  $Q_1$ :

$$\int_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds = \int \int \int \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

где  $\cos(\alpha), \cos(\beta)$  и  $\cos(\gamma)$  - направляющие косинусы внешней нормали.

Учитывая, что производная по направлению вектора  $l$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(l, Ox) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(l, Oy) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(l, Oz),$$

имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \int k \frac{\partial u}{\partial n_i} ds &= \int \int_{\Sigma} \left( k \frac{\partial P}{\partial x} \cos \alpha + k \frac{\partial Q}{\partial y} \cos \beta + k \frac{\partial R}{\partial z} \cos \gamma \right) ds = \\ &= \int \int \int \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) dV = \\ &= \int \int \int \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) dV \end{aligned}$$

Здесь определены дивергенция вектора  $a$ :

$$\operatorname{div} a = \frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z,$$

и градиент функции  $u$  :

$$\operatorname{grad} u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

Таким образом, формула (1.1) примет вид:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int \int \int \left( \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + p(x, y, z, t) - c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right) dV = 0. \quad (1.2)$$

Выражение (1.2) представляет собой интегральное уравнение распространения тепла.

Так как в (1.2) подынтегральная функция непрерывна, объём  $V$  и промежуток времени  $[t_1, t_2]$  произвольны, то для любой точки  $(x, y, z)$  рассматриваемого тела и для любого момента времени  $t$  должно выполняться равенство:

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + p(x, y, z, t) - c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (1.3)$$

Выражение (1.3) называется уравнением теплопроводности неоднородного изотропного тела.

Пусть тело однородное, тогда  $k$ ,  $c$  и  $\rho$  - постоянные. В этом случае справедливо равенство:

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = k \operatorname{div} \operatorname{grad} u = k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = k \Delta u$$

и уравнение (1.3) принимает вид:  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t)$  - уравнение распространения тепла в однородном теле, где обозначено

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f = \frac{p}{c\rho}.$$

Если в рассматриваемом однородном теле нет источников тепла, т. е.  $f(x, y, z, t) = 0$ , то получаем однородное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u.$$

*Постановка задачи для бесконечного стержня*

Пусть  $u(x, t)$  - температура - температура одномерного стержня в точке  $x$  в момент времени  $t$ . И пусть в начальный момент времени  $t = 0$  температура распределена по закону:

$$u(x, 0) = f(x).$$

Необходимо исследовать процесс остывания стержня, т.е., зависимость  $u(x, t)$ . Процессы переноса тепла описываются так называемым уравнением теплопроводности, которое является уравнением параболического типа и в одномерном случае имеет вид:

$$\frac{d}{dt} u - c^2 \frac{d^2}{dx^2} u = 0$$



где  $c^2 > 0$  - коэффициент теплопроводности. С математической точки зрения исследование процесса остывания бесконечно длинного стержня сводится к решению первой краевой задачи для уравнения параболического типа с нулевыми условиями на бесконечности (полагаем, что температура на бесконечности равна нулю), т.е., к решению уравнения теплопроводности с начальным условием:

$$u(x, 0) = f(x)$$

и нулевыми граничными условиями на бесконечности:

$$u(-\infty, t) = 0, u(\infty, t) = 0, \text{ in } (x, -\infty, \infty), 0 < t,$$

где  $f(x)$  - любая интегрируемая на бесконечном интервале заданная функция, удовлетворяющая условиям

$$f(-\infty) = f(\infty) = 0.$$

### Распространение тепла в бесконечном стержне

Рассмотрим процесс распространения тепла в бесконечном стержне.

Для этого решается однородное уравнение

```
> diff(u(t,x),t)=a^2*diff(u(t,x),$(x,2));
```

$u(0, x) = f(x)$ .

Однородное уравнение и его решение методом разделения переменных :

```
> restart;
```

```
> PDE:=diff(u(t,x),t)=a^2*diff(u(t,x),x,x);
```

```
> struc:=pdsolve(PDE,HINT=T(t)*X(x));
```

```
> dsolve(diff(T(t),t)=-c[1]*T(t));
```

```
> dsolve(diff(X(x),$(x,2))=-c[1]*X(x)/a^2);
```

Сделаем замену постоянной разделения переменных:  $_c[1] == -\lambda^2$

```
> dsolve(diff(T(t),t)=-lambda^2*T(t)*a^2);
```

```
> dsolve(diff(X(x),$(x,2))=-lambda^2*X(x));
```

В результате общее решение имеет вид:

```
> u(t,x):=(C1*sin(lambda*x)+C2*cos(lambda*x))*exp(-lambda^2*a^2*t);
```

Функция  $u(t, x)$  - есть решение уравнения для любого  $\lambda$ ,

где  $\lambda$  - непрерывно меняющийся параметр со значениями в интервале от  $-\infty$  до  $+\infty$ ,

причем для каждого  $\lambda$  будут соответствующие коэффициенты  $C1(\lambda)$  и  $C2(\lambda)$

.

Поэтому имеем:

```
> u[lambda](t,x):=(C1(lambda)*sin(lambda*x)+C2(lambda)*cos(lambda*x))*exp(-lambda^2*a^2*t);
```

В результате решение линейного однородного уравнения можно представить в виде суперпозиции решений, зависящих от параметра  $\lambda$  :

```
> u(t,x):=int(u[lambda](t,x), lambda=-infinity..infinity);
```

Это выражение соответствует разложению функции  $f(x)$  в интеграл Фурье:

```
> f(x)=(1/(2*Pi))*int(int(f(xi)*cos(lambda*(xi-x)),xi=-infinity..infinity),lambda=-infinity..infinity);
```

Значит, коэффициенты  $C1(\lambda)$  и  $C2(\lambda)$  выражаются:

```

> C1(lambda):=(1/(2*Pi))*int(f(xi)*sin(lambda*xi),xi=-infinity..infinity);
> C2(lambda):=(1/(2*Pi))*int(f(xi)*cos(lambda*xi),xi=-infinity..infinity);
> u(t,x):=int((C1(lambda)*sin(lambda*x)+C2(lambda)*cos(lambda*x))*
exp(-lambda^2*a^2*t),lambda = -infinity .. infinity);
> u(t,x):=combine(int((C1(lambda)*sin(lambda*x)+C2(lambda)*cos(lambda*x))*
exp(-lambda^2*a^2*t),lambda = -infinity .. infinity));

```

Полученное выражение можно преобразовать.

Для этого рассмотрим интеграл:

```

> int(exp(-lambda^2*a^2*t)*cos(-lambda*x+lambda*xi), lambda = -infinity .. infinity);

```

Сделаем замену переменной и преобразование подынтегральной функции:

```

> simplify(subs({xi=-v*a*t^(1/2)+x,lambda=w/(a*sqrt(t))},
exp(-lambda^2*a^2*t)*cos(-lambda*x+lambda*xi)));
> Int(exp(-lambda^2*a^2*t)*cos(-lambda*x+lambda*xi),
lambda=-infinity..infinity)= subs(v=(x-xi)/a/t^(1/2),
1/a/t^(1/2)*Pi^(1/2)*exp(-1/4*v^2));

```

В результате решение примет вид:

```

> u(t,x):=(1/(2*a*sqrt(Pi*t)))*int(f(xi)*exp(-1/4*(x-xi)^2/a^2/t),
xi = -infinity .. infinity);

```

## 2. Начально-граничные условия

Чтобы найти температуру внутри тела в любой момент времени недостаточно одного уравнения. Необходимо, как это следует из физических соображений, знать еще распределение температуры внутри тела в начальный момент времени, то есть  $u(x, t) = f$ , где  $t = 0$  (начальные условия) и тепловой режим на границе  $S$  тела (граничные условия).

```

> init_c:=u(x,0)=f:

```

Граничные условия получим для одномерного случая, когда тело  $V$  — теплоизолированный с боковой поверхности тонкий стержень длины  $l$ .

Первый тип граничных условий — на концах стержня поддерживается определенная температура:

$$u(0, t) = \alpha(t); u(l, t) = \beta(t);$$

```

> init:=u(0,t)=?(t),u(l,t)=?(t):

```

где  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  — известные функции. Эти условия неоднородные. Если же температура все время поддерживается равной нулю, то получаем однородные граничные условия

$$u(0, t) = 0; u(l, t) = 0$$

Второй тип граничных условий — через концы стержня во внешнюю среду подается определенный тепловой поток. Тепловой поток  $q$  — это количество тепла, которое проходит через единицу площади за единицу времени, по закону Фурье равен

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial n_i}, \quad (1)$$

где  $k$  — коэффициент теплопроводности,  $n_i$  — нормаль направлена куда течет тепло, в данном случае это внешняя нормаль к стержню. Пусть

$$q \Big|_{x=0} = \alpha(t), q \Big|_{x=l} = \beta(t), \quad (2)$$

где  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  заданные величины тепловых потоков. В точке  $x = 0$  направление внешней нормали  $n_i$  к сечению стержня совпадает с отрицательным направлением оси  $Ox$ , а в точке  $x = l$  - с положительным направлением, поэтому

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n_i} \right|_{x=0} = - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n_i} \right|_{x=l} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l}. \quad (3)$$

Тогда для тепловых потоков через концы стержня из (1) и (3) получаем формулы

$$q \Big|_{x=0} = k_1 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad q \Big|_{x=l} = -k_2 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l}$$

Подставляя (4) в (2), имеем неоднородные граничные условия

$$\frac{\partial(u(0, t))}{\partial(x)} = a(t), \quad a(t) = \frac{\alpha(t)}{k_1}$$

$$\frac{\partial(u(l, t))}{\partial(x)} = b(t), \quad b(t) = \frac{\beta(t)}{k_2}$$

В частности, если тепловые потоки через концы стержня равны нулю, т. е. концы стержня теплоизолированные, то граничные условия однородные

$$\frac{\partial(u(0, t))}{\partial(x)} = 0, \quad \frac{\partial(u(l, t))}{\partial(x)} = 0$$

Третий тип граничных условий — происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой известна. Считаем, что теплообмен происходит по закону Ньютона: тепловой поток, получаемый телом из внешней среды пропорционален разности температур

$$q = \lambda(u - u_0),$$

где  $u_0$  — температура внешней среды,  $\lambda > 0$  — коэффициент теплообмена. Используя формулы (4), имеем неоднородные граничные условия:

$$k_1 \left. \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \lambda_1 (u(0, t) - u_0)$$

$$-k_2 \left. \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = \lambda_2 (u(l, t) - u_0)$$

Если температура окружающей среды равна нулю, то получаем однородные граничные условия

$$u(0, t) - h_1 \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad u(l, t) + h_2 \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0,$$

где  $h_i = k_i / \lambda_i > 0, i = 1, 2$ . Таким образом, любые граничные условия для задачи о распространении тепла в стержне можно записать в виде

$$\alpha u(0, t) - \beta \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = A(t),$$

$$\gamma u(l, t) - \delta \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = B(t),$$

где  $A(t), B(t)$  — заданные функции;  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — неотрицательные постоянные, причем  $\alpha + \beta > 0, \gamma + \delta > 0$ . Заметим, что формально граничные условия записываются в том же виде, как и в задачах о колебаниях струны.

### 3. Программа

```
> restart;
```

Решить однородное уравнение

```
> diff(u(t,x),t)=a^2*diff(u(t,x),'$(x,2));
```

с начальным условием  $u(0,x) = f(x)$ , где функция  $f(x)$  задана в виде:

```
> a:=1;L:=1;alpha:=1;l:=L/3;
> f(xi):=u0*exp(gamma^2*xi^2);
>u0:=1;
  gamma1:=0.5;
> plot(f(xi), xi=-15..15, color=red,thickness=3);
```

Для решения воспользуемся формулой:

```
> u(t,x):=1/2*1/a/(Pi*t)^(1/2)*int(f(xi)*exp(-1/4*(x-xi)^2/a^2/t),
xi = -infinity .. infinity);
>u0:=1; beta:=0.5; a:=1;
```

Решение уравнения:

```
> with(plots):
> assume(t>=0):
> u(t,x):=simplify((1/(2*a*sqrt(Pi*t)))*exp(1/(-4*beta^2*a^2*t-1)*
x^2*beta^2)*u0/((4*beta^2*a^2*t+1)/a^2/t)^(1/2));
```

Представим полученные решения в виде двумерных анимированных графиков:

```
> animate(plot,[u(t,x),x=-15..15], t=0..570, frames=30,thickness=3,
title='Остывание стержня');
```

Представим полученное решение в виде двумерных графиков для нескольких моментов времени:

```
> tau:=60:
> u_1(x):=subs(t=tau*0.000001,u(t,x)):
> u_2(x):=subs(t=tau*(1/8),u(t,x)):
> u_3(x):=subs(t=tau*(2/8),u(t,x)):
> u_4(x):=subs(t=tau*(3/8),u(t,x)):
> u_5(x):=subs(t=tau*(4/8),u(t,x)):
> u_6(x):=subs(t=tau*(5/8),u(t,x)):
> u_7(x):=subs(t=tau*(6/8),u(t,x)):
> u_8(x):=subs(t=tau*(7/8),u(t,x)):
> ris:= plot(u_1(x),x=-15..15,y=-0.02..0.3,title="t = 0",
color=red,thickness=3):
> ris1:= plot(u_2(x),x=-15..15,y=-0.02..0.3,title="t = 1/8*tau",
color=red,thickness=3):
> ris2:= plot(u_3(x),x=-15..15,y=-0.02..0.3,title="t = 2/8*tau",
color=red,thickness=3):
> ris3:= plot(u_4(x),x=-15..15,y=-0.02..0.3,title="t = 3/8*tau",
color=red,thickness=3):
> ris4:= plot(u_5(x),x=-15..15,y=-0.02..0.3,title="t = 4/8*tau",
color=red,thickness=3):
> ris5:= plot(u_6(x),x=-15..15,y=-0.02..0.3,title="t = 5/8*tau",
color=red,thickness=3):
>ris6:= plot(u_7(x),x=-15..15,y=-0.02..0.3,title="t = 6/8*tau",
```

```
color=red,thickness=3):
> ris7:= plot(u_8(x),x=-15..15,y=-0.02..0.3,title="t = 7/8*tau",
color=red,thickness=3):
> display(ris7,ris6,ris5,ris4,ris3,ris2,ris1,ris);
```

#### 4. Визуализация

Сформулируем задачу об остывании ограниченного стержня длиной  $l$ :

Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  температура стержня была распределена по закону:  $u(x, 0) = \phi(x)$  Концы стержня приложены к термостату и на них поддерживается постоянная, например, нулевая, температура. Требуется найти распределение температуры по стержню в каждый момент времени, т.е., решить уравнение теплопроводности:

```
> restart:
> assume(l>0);
> eq:=diff(u(x,t),t)-a^2*diff(u(x,t),x$2)=0;
```

с начальными условиями и граничными условиями

```
> init_c:=u(x,0)=phi(x);
> bound_c:=u(0,t)=0,u(l,t)=0;
```

Будем решать задачу методом разделения переменных

```
> sol:=pdsolve(eq,u(x,t));
```

Решение ( $sol$ ) равно  $_F1(x) * _F2(t)$ , где функции  $_F1(x)$  и  $_F2(t)$  удовлетворяют уравнениям:

$$diff(_F2(t),t) = a^2 * _c[1] * _F2(t) \frac{d}{dt} _F2(t) = a^2 * _c1 * _F2(t)$$

$$diff(_F1(x),x,x) = _c[1] * _F1(x) \frac{d^2}{dx^2} _F1(x) = _c1 * _F1(x)$$

где  $_c1$  - константа разделения. Выпишем эти уравнения отдельно, извлекая их из полученной системы с помощью команды *op*:

```
> Eq_0:=op(1,sol);
Eq_1:=op(2,sol);
```

Таким образом, мы получили два обыкновенных дифференциальных

уравнения. Сформулируем теперь для них соответствующую задачу Штурма-Лиувилля:

Чтобы привести уравнения к стандартной форме, заменим в них константу разделения  $_c1$  на  $+\lambda$ , находим общее решение этих уравнений и сформируем систему линейных однородных алгебраических уравнений по граничным условиям:

```
> r_:=subs(_c[1]=-lambda,Eq_x);
Eq_x:=lhs(r_)-rhs(r_);
```

Поскольку, как известно, для обеспечения ограниченности решений, необходимо, чтобы константа разделения была положительной ( $\lambda > 0$ ), полагаем:

```
> assume(lambda>0);
> sol_x:=dsolve(Eq_x,_F1(x));
```

Для задания граничных условий используем команду *unapply(expr,x,y,..)* - задания функции пользователя:

```
> _F1:=unapply(rhs(sol_x),x);
e1:=_F1(0)=0;
e2:=_F1(l)=0;
bound_s:={e1,e2};
```

Решим систему граничных условий относительно констант  $_C1, _C2$ .

Поскольку - это система однородных алгебраических уравнений, для ее нетривиального решения необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы обращался в нуль, что дает условие на константу разделения. Итак, матрица системы равна:

```
> A:=linalg[genmatrix](bound_s,{_C1,_C2});
```

Определитель этой матрицы равен:

```
> Delta:=linalg[det](A);
```

Для нахождения всех решений уравнения  $\Delta(\lambda) = 0$  используем опцию: `EnvAllSolutions:=true;`

```
> _EnvAllSolutions:=true;
Lambda0:=solve(Delta=0,lambda);
```

С помощью  $_Z$  в Maple обозначаются произвольные целые числа. Для удобства пользования произведем здесь замену  $_Z1 \rightarrow k$ :

```
> Lambda:=subs(_Z1='k',Lambda0);
```

и введем пользовательскую функцию:

```
> ev:=unapply(Lambda, 'k');
```

Хотя можно и непосредственно определить константы  $_C1$  и  $_C2$  и затем подставить их и найденные значения  $\lambda$  в полученное решение, методически проще найти его заново из уравнения  $EQ_x$ , куда необходимо подставить найденные константы разделения (учли, что  $k$ -положительное число) :

```
> _F1:='_F1':
assume(k, posint);
> EQ_X:=subs(lambda=ev(k),EQ_x)=0;
```

Решаем полученное уравнение с граничными условиями:

```
> X_k:=dsolve({EQ_X,_F1(0)=0,_F1(l)=0},_F1(x));
> X:=(K,C,X)->subs({k=K,_C1=C,x=X},rhs(X_k));
```

Это и есть система собственных функций уравнения теплопроводности с данными граничными условиями. По теории эта система функций автоматически ортогональна на заданном отрезке. Но ее необходимо сделать ортонормированной, чтобы по этой системе функций можно было разложить произвольную функцию. Нормируем эти функции: сначала найдем нормировочный множитель, он равен:

```
> Xi:=(x,k)->X(k,C,x)/Coef;
> simplify(int(Xi(x,k)*Xi(x,2),x=0..l));
```

Найдем теперь общее решение временного дифференциального уравнения, куда необходимо подставить найденные константы разделения.

```
> EQ_t:=subs(_c[1]=-Lambda,Eq_t);
> T:=(t,k)->subs(_C1=C(k),dsolve(EQ_t,_F2(t)));
```

Общее решение исходной задачи ищем в виде ряда частных решений, значение  $k = 0$ , исключаем, так как решению с  $k = 0$  соответствует  $\Xi(x, 0) = Const$ , которое не удовлетворяет граничным условиям.

```
> Gen_u:=sum(Xi(x,k)*rhs(T(t,k)),k=0..infinity);
```

Согласно общей теории коэффициенты  $C(k)$  этого ряда определяются по формуле:

$$C(k) = \text{Int}(\phi(x), (Xi(x, k))), x = 0..l).$$

Таким образом:

```
> C0:=(k)->Int(phi(x)*Xi(x,k),x=0..l);
C:=(k)->value(C0(k));
```

Зададим конкретную функцию  $\phi(x)$  в виде параболы:

```
> phi1:=(x)->cos(Pi*x/l1);
l1:=5;
G0:=plot(subs(l=l1,phi1(x)),x=-l1/2..l1/2,color=navy,thickness=2);
> C01:=(k)->subs(phi(x)=phi1(x),C0(k));
> C1(k):=value(C01(k));
```

Подставим найденные значения коэффициентов в общую формулу:

```
> u1:=(x,t)->subs(C(k)=C1(k),Gen_u);
```

Таким образом, мы получили решение поставленной задачи. Преобразуем несколько полученное решение, учитывая, что вклад в сумму дают лишь нечетные значения  $k$ . Поэтому положим  $k = 2j + 1$  (где  $j$  - целое число):

```
> um:=(x,t)->subs(k=2*j+1,op(1,u1(x,t)));
assume(j,integer):
```

Упростим это выражение:

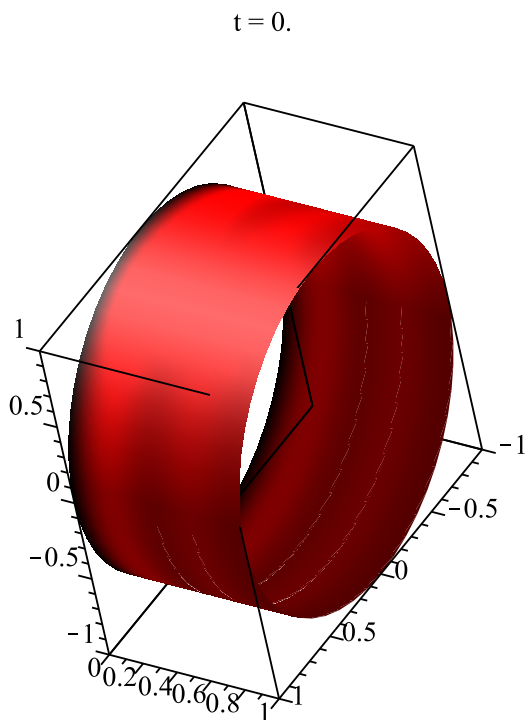
```
> uj:=(X,T,j,A,L)->subs({a=A,l=L,t=T,x=X},simplify(subs(
((-1)^(2*j+1)-1)=-2,um(x,t)),trig));
```

Ограничим суммирование в точном решении до  $j = 20$ :

```
> U1_p:=(x,t,a,l)->evalf(sum(uj(x,t,j,a,l),j = 0 .. 20),6);
> GG:=proc(a,l,T,N)
local k,FF,dt,UU,UP,tt:
UP:=(X,T)->evalf(subs({x=X,t=T},U1_p(x,t,a,l)),3):
dt:=T/N:
tt:=(k)->evalf(k*dt,3):
UU:=(y,k)->evalf(UP(y,tt(k),a,l),3):
FF:=(k)->plot3d([cos(phi),y,sin(phi)],y=0..1, phi = 0..2*Pi,
color=COLOR(RGB,UU(y,k),0,0),scaling=CONSTRAINED,
style=patchnogrid,title=convert(t=tt(k),string)):
plots[display](seq(FF(k),k=0..N),insequence=true);
end proc:
> GG(0.5,10,8,24);
```

## Литература

1. Араманович И.Г. Уравнения математической физики / И.Г.Араманович, В.И. Левин. –М. Наука,1964.
2. Арсенин В.Я. Математическая физика / В.Я. Арсенин. –М. Наука,1966.
3. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А.Самарский. – М.Наука, 1977.
4. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики / Д.П. Голоскоков. – 2004.



**Рис. 1.** Подпись рисунка

5. Голоскоков Д.П. Параболическое уравнение: задача об остывании одномерного стержня. Методическое пособие для студентов. / Д.П. Голоскоков. – 2005.
6. Конеев Р.В. Уравнения математической физики / Р.В. Конеев, А.Н. Хопёрский, В.Л. Заволженская, С.К. Балашов. – 2005.
7. Костецкая Г.С. Методы матфизики. Уравнение теплопроводности / Г.С. Костецкая, Т.Н. Радченко. – 2016.
8. Сочнева В.А. Введение в математическую физику: методическое пособие / В.А. Сочнева. – 2014.

EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE IN MAPLE: DERIVING AN EQUATION FROM A VARIATIONAL PRINCIPLE AND ANIMATING A SOLUTION FOR AN INFINITE ROD

T.A. D'iachkova

*The article deals with the derivation of the parabolic equation from the variational principle, its animation and its application in SKM Maple.*

Keywords: equations, parabolic type, output, SCM Maple.

УДК 517.958

**УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В MAPLE:  
МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ  
В УРАВНЕНИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА. РЕШЕНИЕ В MAPLE И АНИМАЦИЯ.**

Е.А. Ефремова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *shyba.liz@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*В статье рассматриваются уравнения параболического типа в Maple методом разделения переменных и их анимация и применение в СКМ Maple.*

**Ключевые слова:** СКМ Maple, уравнения математической физики.



## 1. Уравнения параболического типа в Maple.

*Уравнения математической физики. Классификация по типам.*

Уравнение, связывающее независимые переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и неизвестная функция  $U = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , и частные производные этой функции, называются дифференциальными уравнениями с частными производными.

Уравнение имеет вид:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, U, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^n U}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0 \quad (1)$$

где  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$

Порядок старшей частной производной входящей в уравнение (1), называется порядком уравнения с частными производными.

Решением уравнения (1) называется всякая функция  $U = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , которая, будучи подставленной в уравнение вместо неизвестной функции  $U$  и ее частных производных, обращает это уравнение в тождество по независимым переменным.

Уравнения с частными производными называются линейным, если оно линейно относительно неизвестной функции и ее частных производных.

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка с двумя неизвестными:

$$A(x, y) \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) + 2B(x, y) \left( \frac{\partial U}{\partial x \partial y} \right) + C(x, y) \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + D(x, y) \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) + E(x, y) \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) + G(x, y)U = F(x, y) \quad (2)$$

Такие уравнения (2) принято называть уравнениям математической физики.

При исследовании физических задач выделяют следующие моменты:

1. Строится модель (идеальный процесс), который сохраняет основные черты физического явления, который поддается изучению математическим методам.
2. Вводится некоторая функция  $U = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , характеризующая физический процесс.
3. На основе законов физики выводятся уравнения в частных производных.
4. Дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений, поэтому вводятся дополнительные условия (граничные, начальные).

Совокупность дифференциального уравнения и дополнительных условий - это математическая формулировка физической задачи, называемая задачей математической физики.

Задача корректно поставлена, если решение, во-первых, существует, во-вторых, единственно, в третьих устойчиво.

5. Исследование корректности и решения поставленной задачи. Классификация по типам:

1. Волновые уравнения (уравнения гиперболического типа).

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z)$$

2. Уравнения теплопроводности (уравнения параболического типа).

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t} = b^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t} = b^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t} = b^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t} = b^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z)$$

3. Уравнение установившихся процессов (уравнения эллиптического типа).

$$\left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = 0$$

$$\left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z)$$

Рассмотрим уравнение второго порядка с двумя переменными

$$a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = F(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y})$$

Для этого уравнения составляют характеристическое уравнение:

$$ady^2 - 2bdxdy + cdx^2$$

В зависимости от  $\Delta = b^2 - ac$ , можно рассмотреть 3 случая:

Если  $\Delta > 0$ , уравнение имеет 2 решения, следовательно, это уравнение гиперболического типа.

Если  $\Delta = 0$ , уравнение имеет 1 решение, следовательно, это уравнение параболического типа.

Если  $\Delta < 0$ , уравнение не имеет решения, следовательно, это уравнение эллиптического типа.

*Начально-граничные условия.*

Чтобы найти температуру внутри тела в любой момент времени недостаточно одного уравнения. Необходимо, как это следует из физических соображений, знать еще распределение температуры внутри тела в начальный момент времени, то есть  $u(x, t) = f$ , где  $t = 0$  (начальные условия) и тепловой режим на границе  $S$  тела (граничные условия).

> `init_c:=u(x,0)=f;`

Граничные условия получим для одномерного случая, когда тело  $V$  — теплоизолированный с боковой поверхности тонкий стержень длины  $l$ .

Первый тип граничных условий — на концах стержня поддерживается определенная температура:

$$u(0, t) = \alpha(t);$$

$$u(l, t) = \beta(t);$$

> `init:=u(0,t)=alpha(t),u(l,t)=beta(t);`

где  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  — известные функции. Эти условия неоднородные. Если же температура все время поддерживается равной нулю, то получаем однородные граничные условия:

$$u(0, t) = 0; u(l, t) = 0;$$

Второй тип граничных условий - через концы стержня во внешнюю среду подается определенный тепловой поток. Тепловой поток  $q$  — это количество тепла, которое проходит через единицу площади за единицу времени, по закону Фурье равен

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

где  $k$  — коэффициент теплопроводности,  $x_i$  — нормаль направлена куда течет тепло, в данном случае это внешняя нормаль к стержню. Пусть

$$q|_{x=0} = \alpha(t), \quad q|_{x=l} = \beta(t)$$

где  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  заданные величины тепловых потоков. В точке  $x = 0$  направление внешней нормали  $n_i$  к сечению стержня совпадает с отрицательным направлением оси  $Ox$ , а в точке  $x = l$  — с положительным направлением, поэтому

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n_i} \right|_{x=0} = - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n_i} \right|_{x=l} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l}$$

*Процесс распространения тела в бесконечном стержне*

Рассмотрим процесс распространения тепла в бесконечном стержне. Для этого решается однородное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = a^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right)$$

с начальным условием

$$u(0, x) = f(x)$$

> restart;

Однородное уравнение и его решение методом разделения переменных

> PDE:=diff(u(t,x),t)=a^2\*diff(u(t,x),x,x);

> struc:=pdsolve(PDE,HINT=T(t)\*X(x));

> dsolve(diff(T(t),t)=-c[1]\*T(t));

> dsolve(diff(X(x), 'x'(x,2))=-c[1]\*X(x)/a^2);

Сделаем замену  $c[1] = -\lambda^2$ ;

> dsolve(diff(T(t),t)=-lambda^2\*T(t)\*a^2);

> dsolve(diff(X(x), 'x'(x,2))=-lambda^2\*X(x));

В результате общее решение имеет вид:

> u(t,x):=(C1\*sin(lambda\*x)+C2\*cos(lambda\*x))\*exp(-lambda^2\*a^2\*t);

Функция  $u(t, x)$  — есть решение уравнения для любого  $\lambda$  (где  $\lambda$  — непрерывно меняющейся параметр со значениями в интервале от  $-\infty$  до  $\infty$ ), причем для каждого  $\lambda$  будут соответствующие коэффициенты  $C1(\lambda)$  и  $C2(\lambda)$

Поэтому имеем:

> u[lambda](t,x):=(C1(lambda)\*sin(lambda\*x)+C2(lambda)\*cos(lambda\*x))\*exp(-lambda^2\*a^2\*t);

В результате решение линейного однородного уравнения можно представить в виде суперпозиции решений, зависящих от параметра  $\lambda$ :

u(t,x):=int(u[lambda](t,x), lambda=-infinity..infinity);

Для определения коэффициентов  $C1(\lambda)$  и  $C2(\lambda)$  воспользуемся начальными условиями:

> u\_0(t,x):=eval(subs(t=0, u(t,x)))=f(x);

Это выражение соответствует разложению функции  $f(x)$  в интеграл Фурье:

```
>(x)=(1/(2*Pi))*int(int(f(xi)*cos(lambda*(xi-x)),xi=-infinity..infinity)
,lambda=-infinity..infinity);
```

Значит, коэффициенты  $C1(\lambda)$  и  $C2(\lambda)$  выражаются:

```
>C1(lambda):=(1/(2*Pi))*int(f(xi)*sin(lambda*xi),xi=-infinity..infinity);
```

```
>C2(lambda):=(1/(2*Pi))*int(f(xi)*cos(lambda*xi),xi=-infinity..infinity);
```

```
>u(t,x):=int((C1(lambda)*sin(lambda*x)+C2(lambda)*cos(lambda*x))
*exp(-lambda^2*a^2*t),lambda = -infinity .. infinity);
```

```
>u(t,x):=combine(int((C1(lambda)*sin(lambda*x)+C2(lambda)*cos(lambda*x))
*exp(-lambda^2*a^2*t),lambda = -infinity .. infinity));
```

Полученное выражение можно преобразовать.

Для этого рассмотрим интеграл:

```
>int(exp(-lambda^2*a^2*t)*cos(-lambda*x+lambda*xi),
lambda = -infinity .. infinity);
```

Сделаем замену переменной и преобразование подинтегральной функции:

```
>simplify(subs({xi=-v*a*t^(1/2)+x,lambda=w/(a*sqrt(t))}
,exp(-lambda^2*a^2*t)*cos(-lambda*x+lambda*xi)));
```

```
>Int(exp(-lambda^2*a^2*t)*cos(-lambda*x+lambda*xi),
lambda = -infinity .. infinity)=(1/(a*sqrt(t)))*int(exp(-w^2)*cos(w*v),
w = -infinity .. infinity);
```

```
>Int(exp(-lambda^2*a^2*t)*cos(-lambda*x+lambda*xi),
lambda=-infinity..infinity)= subs(v=(x-xi)/a/t^(1/2),
1/a/t^(1/2)*Pi^(1/2)*exp(-1/4*v^2));
```

В результате решение примет вид:

```
>u(t,x):=(1/(2*a*sqrt(Pi*t)))*int(f(xi)*exp(-1/4*(x-xi)^2/a^2/t),
xi = -infinity .. infinity);
```

*Общее решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности*

Введем некоторое целое число  $n$ :

```
>restart;
with(plots):
with(plottools):
with(inttrans):

>assume(n,integer):
```

Введем с помощью команды `alias` сокращенные обозначения для образа ( $U$ ) и прообраза ( $u$ ) искомой функции температуры:

```
>alias(u=u(x,t),U=U(k,t)):
```

Запишем уравнение теплопроводности:

```
>Eq0:=diff(u,t)-c^2*diff(u,x$2)=0;
```

Выделим левую часть уравнения теплопроводности:

```
>Eq:=lhs(Eq0);
```

и найдем фурье-образ по переменной  $x$  этого выражения:

```
>Eq_F:=subs(fourier(u,x,k)=U,fourier(Eq,x,k));
```

Решим это уравнение относительно фурье-образа  $U$ :

```
>UU:=dsolve(Eq_F,U);
```

Здесь  $f_1(k)$  - произвольная пока функция. Так как при  $t = 0$   $U(k, 0) = f_1(k)$ , - отсюда следует, что  $f_1(k)$  - фурье образ начального распределения температуры,  $F(k)$ :

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-I k x} dx$$

Поэтому подставим в полученный фурье-образ эту величину:

```
>SU:=subs(_F1(k)=F(k),UU);
```

и определим обратное преобразование Фурье:

```
>Su:=u=invfourier(rhs(SU),k,x);
```

конвертируя полученное выражение в интеграл для получения явной записи:

```
>convert(Su,int);
```

Запишем теперь выражение для Фурье-образа функции  $u(x, 0)$ :

```
>assume(c>0):assume(k>0):assume(t>0):
```

```
>F1(k):=int(f(xi)*exp(-I*xi*k),xi=-infinity..infinity);
```

Подставим теперь это значение в интеграл  $Su$ :

```
>SSu:=convert(subs(F(k)=F1(k),Su),int);
```

Вычислим интеграл по переменной  $k$ :

```
>Int_k:=int(exp(-I*xi*k)*exp(-c^2*k^2*t)*exp(k*x*I),
k = -infinity .. infinity);
```

Таким образом, получим окончательно:

```
>SSSu:=u=simplify(1/(2*Pi)*
int(f(xi)*Int_k,xi=-infinity..infinity));
```

*Постановка задачи для бесконечного стержня*

Пусть  $u(x, t)$  - температура одномерного стержня в точке  $x$  в момент времени  $t$ . И пусть в начальный момент времени  $t = 0$  температура распределена по закону:

$$u(x, 0) = f(x)$$

Необходимо исследовать процесс остывания стержня, т.е., зависимость  $u(x, t)$ . Процессы переноса тепла описываются так называемым уравнением теплопроводности, которое является уравнением параболического типа и в одномерном случае имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} u - c^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) = 0$$

где  $c^2 > 0$  - коэффициент теплопроводности. С математической точки зрения исследование процесса остывания бесконечно длинного стержня сводится к решению первой краевой задачи для уравнения параболического типа с нулевыми условиями на бесконечности (полагаем, что температура на бесконечности равна нулю), т.е., к решению уравнения теплопроводности с начальным условием:

$$u(x, 0) = f(x)$$

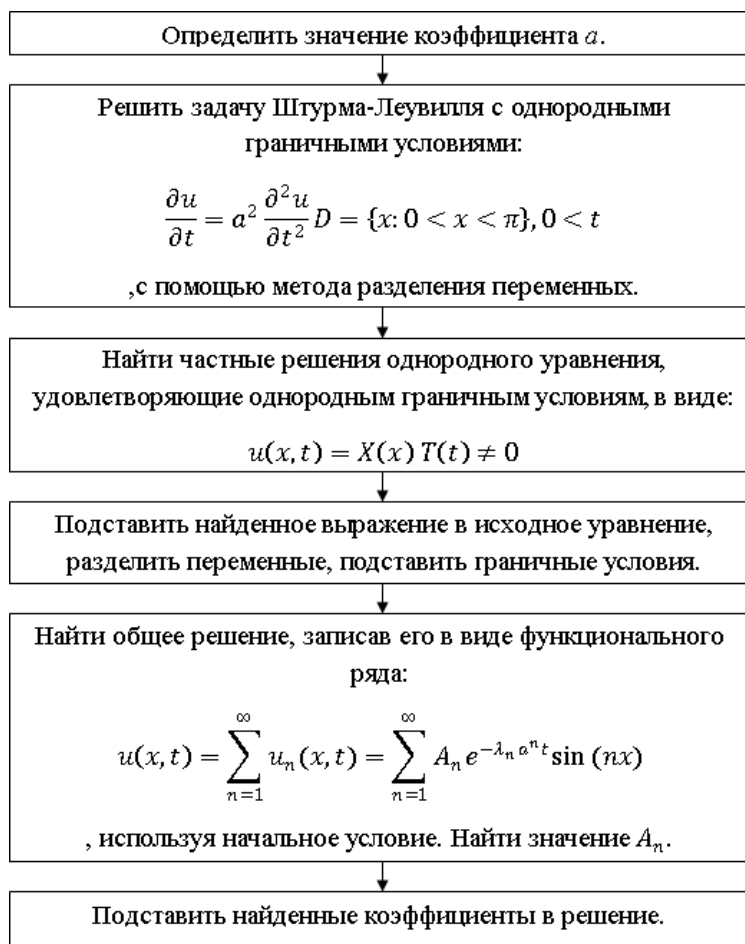
и нулевыми граничными условиями на бесконечности:

$$u(-\infty, t) = 0, u(\infty, t) = 0, \text{ и } n(x, -\infty, \infty), 0 < t$$

, где  $f(x)$ - любая интегрируемая на бесконечном интервале заданная функция, удовлетворяющая условиям:

$$f(-\infty) = f(\infty) = 0$$

*Алгоритм решения*



## 2. Программа

### Задача 1

Решить однородное уравнение

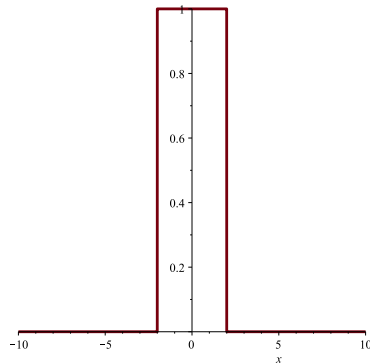
$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = a^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right)$$

с начальными условиями  $u(0, x) = f(x)$

```
>restart;
with(plots):
```

```
>a:=1;
L:=2;
alpha:=1;
```

```
>f(xi):=piecewise(x<-L,0, x<L,alpha, x>L,0);
>plot(f(xi),thickness=3);
```



Для решения воспользуемся формулой:

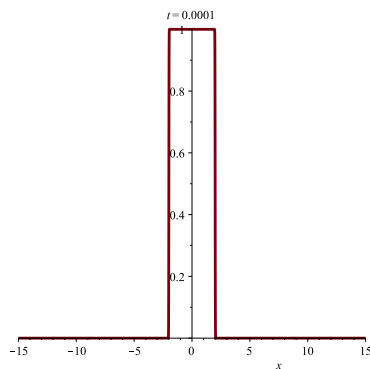
```
>u(t,x):=simplify(1/2*1/a/(Pi*t)^(1/2)*int(f(xi)*exp(-1/4*(x-xi)^2/a^2/t)
,xi = -L .. L));
```

Решение уравнения:

```
>f_1:=1/2*(erf(1/2*(L+x)/a/t^(1/2))+erf(1/2*(L-x)/a/t^(1/2)));
```

Представим полученное решение в виде двумерного анимированного графика:

```
>animate(plot,[f_1,x=-15..15],t=0.0001..400,
frames=40,thickness=3,color=green);
```

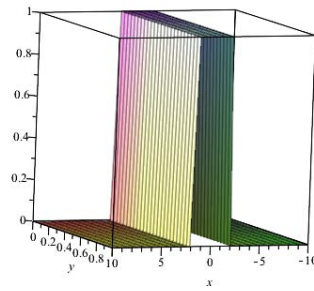


```
>a1:=maximize(f_1,x,x=-10..10);
>t:=0.0001:
>plot3d(f,x=-10..10,y=0..1);
```

### 3. Визуализация

```
>restart;
a:=1:
L:=2:
```

Решение уравнения:



```
>f_1:=1/2*(erf(1/2*(L+x)/a/t^(1/2))+erf(1/2*(L-x)/a/t^(1/2)));
```

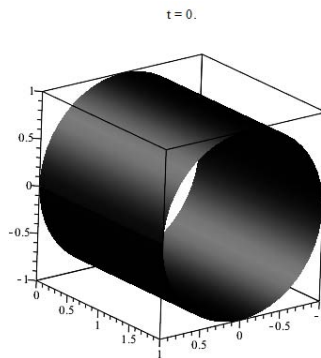
Найдем максимум функции

```
>a1:=maximize(f_1,x,x=-10..10,t=0.0001..200);
```

Построим анимированную модель процесса остывания ограниченного стержня:

```
>GG:=proc(a,l,T,N) local k,FF,dt,UU,UP,tt:
UP:=(X,T)->evalf(subs({x=X,t=T},f_1(x,t,a,l)))/a1,3):
dt:=T/N:tt:=(k)->evalf(k*dt,3):
UU:=(y,k)->evalf(UP(y,tt(k),a,l),3):
FF:=(k)->plot3d([cos(phi),y,sin(phi)],y=0..l,phi=0..2*Pi,
color=COLOR(RGB,UU(y,k),0,0),scaling=CONSTRAINED,style=patchnograd,
title=convert(t=tt(k),string)):
plots[display](seq(FF(k),k=0..N),insequence=true):
end proc:

>GG(1,2,10,50);
```



```
> init:=u(0,t)=alpha(t),u(l,t)=alpha(t);
> dsolve(diff(T(t),t)=-_c[1]*T(t));
> dsolve(diff(X(x),$(x,2))=-_c[1]*X(x)/a^2);
```

## Литература

1. Горюнов А.Ф. Уравнения математической физики в примерах и задачах: Учебное пособие / А.Ф. Горюнов – Часть 1. – М.: МИФИ, 2008. – 616 с.



2. Свешников А.Г. Лекции по математической физике: Учеб. пособие / А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов. – М.: Изд-во МГУ, 1993. – 352 с.
3. Сочнева В.А. Введение в математическую физику: Методическое пособие / В.А. Сочнева – Казань: Казанский университет. – 2014. – 75 с.
4. Тихоненко А.В. Применение пакета Maple в курсе «Уравнения математической физики». Режим доступа: [http://old.exponenta.ru/EDUCAT/SYSTEMAT/tikhonenko/pde/02\\_04.asp](http://old.exponenta.ru/EDUCAT/SYSTEMAT/tikhonenko/pde/02_04.asp)
5. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
6. Чупров И.Ф. Уравнения параболического типа и некоторые методы их решения: Учеб. пособие / И.Ф. Чупров, Е.А. Канева. – Ухта: УГТУ, 2012. – 103 с.

PARABOLIC EQUATIONS IN MAPLE: A METHOD OF SEPARATING VARIABLES IN A PARABOLIC EQUATION.  
SOLUTION IN MAPLE AND ANIMATION

E.A. Efremova

*The article examines the equations of parabolic type in Maple by the method of partitioning and its animation and application in CKM Maple.*

Keywords: Maple program, equations of mathematical physics.

УДК 37.018.43

**СИСТЕМА ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ НА ПРИМЕРЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПЛАТФОРМЫ MOODLE**

Э.В. Завитаев<sup>1</sup>, Ю.Д. Маерина<sup>2</sup>

<sup>1</sup> [eduardzavitaev@yandex.ru](mailto:eduardzavitaev@yandex.ru); Государственный гуманитарно-технологический университет

<sup>2</sup> [maerina.july@yandex.ru](mailto:maerina.july@yandex.ru); Государственный гуманитарно-технологический университет

*В статье обсуждаются функциональные возможности образовательной платформы MOODLE. Акцентируется внимание на основных преимуществах данной платформы. Дана рекомендация по её практическому применению для организации дистанционного обучения.*

**Ключевые слова:** дистанционное обучение, образовательная платформа.

Дистанционное обучение (ДО) – это взаимодействие учителя и учащихся между собой на расстоянии, отражающее все присущие учебному процессу компоненты (цели, содержание, методы, организационные формы, средства обучения) и реализуемое специфичными средствами Интернет-технологий или другими средствами, предусматривающими интерактивность.

Официальное внедрение ДО в России по сути началось с момента выхода приказа Минобрнауки России №1050 от 30 мая 1997 года, который позволяет проводить дистанционные эксперименты в сфере образования. После этого дистанционное обучение стало играть всё более значительную роль в модернизации отечественного образования.

Дистанционное обучение охватывает как стандартные программы по повышению квалификации, изучение отдельных тем по какой-либо дисциплине или школьному предмету, так и полноценные курсы высшего образования. Образовательные учреждения могут самостоятельно использовать и задействовать широкий выбор всевозможных инструментариев обучения, такие как: специально подобранные и разработанные под обучающихся компьютерные программы, мессенджеры, мобильные гаджеты, различные образовательные сервисы и платформы.

Одна из наиболее популярных систем дистанционного обучения в России – это образовательная платформа MOODLE, представляющая собой свободное веб-приложение, которое позволяет создавать сайты для онлайн-обучения. Аббревиатура MOODLE («Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment») в русскоязычной среде переводится как «Модульная объектно-ориентированная динамическая управляющая образовательная среда».

Автором и разработчиком данной платформы является австралийский преподаватель Мартин Дугиамос. Изначально MOODLE предполагался как инструментальный расширения возможностей преподавания, а позже, приобрел широкую мировую известность и популярность благодаря простоте использования и общедоступности.

MOODLE предлагает широкий спектр возможностей для полноценной поддержки процесса обучения в дистанционной среде и разнообразные способы представления учебного материала, проверки знаний и контроля успеваемости.

В настоящее время, платформа имеет около 2 млн. зарегистрированных пользователей, 46 тыс. образовательных порталов на 70 языках в 200 странах мира и объединяет более 300 программистов-разработчиков.

MOODLE распространяется как открытое бесплатное программное обеспечение, последнюю обновленную программную версию которого можно скачать на официальном мировом сайте: <https://moodle.org/>.

К главному преимуществу данной образовательной программы относят то, что MOODLE подходит для организации дистанционного обучения любого уровня, от персонального дистанционного обучения до системы электронного обучения крупного образовательного учреждения.

Следует выделить такие основные преимущества дистанционной образовательной платформы MOODLE:

- полностью бесплатная система;
- позволяет создавать качественные образовательные дистанционные курсы;
- широкие возможности создания и управления курсами, сайтом, блогом;
- позволяет реализовать дистанционное обучение в полном объеме;
- налажена система отслеживания результатов обучения, посредством непрерывного взаимодействия «учитель-ученик» или «преподаватель-студент»;
- возможность публикации учебного материала с помощью различных форматов: аудио, видео, текст и т.д.;
- поддерживает разнообразные педагогические сценарии и образовательные стратегии (модульное, групповое, индивидуальное, социальное обучение).

Учебные элементы в MOODLE можно размещать как в виде папки, файла, текста, так и используя современные способы передачи информации:

- лекции с техникой обратной связи;
- гlossарии;
- задания с использованием взаимопроверки и много другое.

Среди многочисленных преимуществ в использовании данной образовательной платформы, следует также отметить, что быстрое внедрение MOODLE в систему дистанционно-го образования сразу вряд ли получится, так как нужна последовательная смена определенных этапов, постепенное включение данного дистанционного контента в образовательный процесс. Перед началом работы с MOODLE необходимо подробно изучить все особенности данной образовательной платформы, приобрести навыки работы с ней. Но, в целом, образовательную платформу MOODLE можно порекомендовать как отличное средство для реализации принципа дистанционного обучения.

## Литература

1. Андреев А.А. Введение в дистанционное обучение: учебно-методическое пособие / А.А. Андреев. – М.: ВУ, 1997. – 85 с.
2. Анисимов А.М. Работа в системе дистанционного обучения MOODLE: учебное пособие / А.М. Анисимов. – Харьков: ХНАГХ, 2009. – 292 с.
3. Хусяинов Т.М. Основные характеристики массовых открытых онлайн-курсов (МООС) как образовательной технологии / Т.М. Хусяинов // Наука. Мысль. – 2015. – № 2. – С.21-29.

## DISTANCE TRAINING SYSTEM ON THE EXAMPLE OF USE OF MOODLE EDUCATIONAL PLATFORM

E.V. Zavitaev, Y.D. Maerina

*The article discusses the functionality of MOODLE educational platform. Attention is focused on the main ad-vantages of this platform. The recommendation on its practical application for the organization of distance learning is given.*

Keywords: distance learning, educational platform.

УДК 517.95, 004.942

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ**Н.В. Зайцева<sup>1</sup><sup>1</sup> n.v.zaiceva@yandex.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В работе рассматривается построение математической модели малых колебаний газа в цилиндрической трубе. Решение задачи получено с помощью системы компьютерной математики Maple.*

**Ключевые слова:** идеальный газ, начально-граничная задача, программа Maple.

Состояние газа, как известно [1], определяют три величины: скорость  $v$ , давление  $p$  и плотность  $\rho$ . Уравнения, описывающие малые колебания газа, выводятся из общих уравнений гидродинамики: уравнения неразрывности и уравнения движения в форме Эйлера:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} = F - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \quad (2)$$

где  $\frac{dv}{dt}$  – субстанциональная производная, то есть скорость частицы в данной точке,  $F$  – действующие внешние силы. Связь между давлением  $p$  и плотностью  $\rho$  зададим в форме адиабаты Пуассона

$$p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (3)$$

Звук в газе описывается малыми колебаниями величин  $v$ ,  $p$ ,  $\rho$ . При этом скорость  $v$  – малая величина, а давление  $p$  и плотность  $\rho$  незначительно отклоняются от начальных значений  $p_0$  и  $\rho_0$ , которые в общем случае могут зависеть от пространственных координат. В силу малости колебаний в уравнениях можно пренебречь величинами второго порядка малости, в результате чего уравнения становятся линейными.

Для линеаризации уравнений введем новые величины:  $\sigma = (\rho - \rho_0)/\rho_0$  – относительное изменение плотности (конденсация газа) и  $q = p/p_0$  – относительное давление. Тогда уравнение (3) сводится к равенству

$$q = (1 + \sigma)^\gamma \approx 1 + \gamma \sigma.$$

Подставляя  $\rho = \rho_0(1 + \sigma)$  в уравнение (1), получим

$$\rho_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0(1 + \sigma)v) = 0.$$

Так как  $\sigma v$  – малая величина, то

$$\rho_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} v + (\operatorname{grad} \rho_0, v) = 0.$$

Теперь перейдем в последнем равенстве от  $\sigma$  к  $q$  с учетом  $\sigma = (q - 1)/\gamma$ :

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} v + \frac{1}{\rho_0} (\operatorname{grad} \rho_0, v) = 0. \quad (4)$$

В уравнении Эйлера (2) заменим  $dv/dt$  на  $\partial v/\partial t$ , пренебрегая малыми величинами. И пусть внешние силы отсутствуют. Наконец, подставляя  $p_0 q$  вместо  $p$  в уравнение (2), будем иметь

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad}(p_0 q). \quad (5)$$

В цилиндрической системе координат  $(r, \alpha, z)$  уравнения (4) и (5) принимают вид:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} v_r + \frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial \rho_0}{\partial \alpha} v_\alpha + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} v_z = 0,$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial r} (p_0 q), \quad \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} (p_0 q), \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (p_0 q). \quad (6)$$

Рассмотрим частный случай. Предположим, что газ радиально неоднороден, то есть  $\rho_0 = \rho_0(r)$ . К тому же, пусть имеет место степенная зависимость плотности от радиальной координаты  $\rho_0(r) = r^\beta$ . И кроме того, в силу закона Бойля-Мариотта, при постоянной температуре справедливо равенство  $p_0(r) = k\rho_0(r)$ . Пусть также искомые функции не зависят от координаты  $z$ . Представим функцию  $q(r, \alpha, t)$  в виде ряда Фурье

$$q(r, \alpha, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} q_m(r, t) e^{im\alpha}.$$

Тогда из (6) для коэффициентов ряда с номером  $m$  получим уравнения

$$\frac{\partial v_{r,m}}{\partial t} = -\frac{k}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_0 q_m), \quad \frac{\partial v_{\alpha,m}}{\partial t} = -\frac{imk}{r} q_m, \quad \frac{1}{\gamma} \frac{\partial q_m}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_{r,m}) + \frac{im}{r} v_{\alpha,m} + \frac{\rho'}{\rho_0} v_{r,m} = 0.$$

Исключая из этих уравнений  $v_{r,m}$  и  $v_{\alpha,m}$ , получим

$$\frac{1}{\gamma k} \frac{\partial^2 q_m}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 q_m}{\partial r^2} + \frac{2\beta+1}{r} \frac{\partial q_m}{\partial r} + \frac{\beta^2 - m^2}{r^2} q_m.$$

Переходя теперь в последнем уравнении от относительного давления  $q$  к давлению  $p$ , с учетом  $q = \frac{p}{p_0} = \frac{1}{k} r^{-\beta} p$ , будем иметь

$$\frac{1}{\gamma k} \frac{\partial^2 p_m}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_m}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} p_m. \quad (7)$$

Пусть газ совершает малые колебания в цилиндрической трубе радиуса  $R$ . Исследуем малые колебания газа в цилиндре радиуса  $R$ , ограничиваясь пределами одного поперечного сечения. Найдем решение уравнения (7), удовлетворяющее классическим начальным условиям

$$p_m|_{t=0} = \varphi_m(r), \quad p_{m,t}|_{t=0} = \psi_m(r) \quad (8)$$

и граничному условию

$$p_m|_{r=R} = 0. \quad (9)$$

Граничное условие (9) означает, что конденсация газа на стенках цилиндрической трубы равна нулю. Данная физическая модель носит название "мягкая стенка". Потребуем, чтобы величина  $p_m(r, t)$  была конечной во всех точках цилиндрической области.

Таким образом, начально-граничная задача (7) – (9) – математическая модель, описывающая малые колебания идеального или совершенного газа [1] в бесконечной неограниченной цилиндрической трубке, рассматриваемые в пределах одного поперечного сечения. Решение задачи (7) – (9) методом разделения переменных можно построить с помощью системы аналитических вычислений Maple [2], имеющей большие возможности для решения некоторых классических задач математической физики.

## Литература

1. Крайко А.Н. Теоретическая газовая динамика: классика и современность / А.Н. Крайко. – М.: ТОРУС ПРЕСС, 2010. – 440 с.
2. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple / Д.П. Голоскоков. – СПб.: Питер, 2004. – 539 с.

## MATHEMATICAL MODELING OF THE PROBLEM OF GAS DYNAMICS

N.V. Zaitseva

*The construction of a mathematical model of small oscillations of a gas in a cylindrical tube is studied. The solution of the problem was obtained with the System of Computer Mathematics Maple.*

Keywords: ideal gas, initial-boundary value problem, Maple program.

УДК 004.4

**ПЛАГИН АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ФОРМИРОВАНИЯ МЕТАДАННЫХ ДОКУМЕНТОВ  
ЦИФРОВОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ БИБЛИОТЕКИ LOBACHEVSKII DML**Н.В. Зайцева<sup>1</sup>, Ш.М. Хайдаров<sup>2</sup><sup>1</sup> n.v.zaiceva@yandex.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет<sup>2</sup> 15jkeee@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В соответствии со схемой NISO Journal Article Tag Suite (JATS) version 1.0 разработан плагин автоматизированного формирования метаданных документов, загруженных в цифровую математическую библиотеку Lobachevskii DML через информационную систему Open Journal System.*

**Ключевые слова:** метаданные, журнальная статья, цифровая библиотека Lobachevskii DML, интеграция электронных ресурсов.

Многие мировые издательства принимают к публикации журнальные статьи в форматах Microsoft Word, OpenOffice, LaTeX, Markdown, HTML и PDF, однако используют при этом XML-формат хранения статей в соответствии со схемой Journal Article Tag Suite (JATS) V1.0 (<https://jats.nlm.nih.gov/publishing/tag-library/1.0/index.html>), разработанной некоммерческой организацией США The National Information Standards Organization (NISO) ([www.niso.org](http://www.niso.org)), которая создает и поддерживает технические стандарты в сферах издательской и библиотечной деятельности. JATS V1.0 успешно используется в проекте ORCID (<https://orcid.org>), издательствами стран США, Англии, Японии, Австралии, Канады, Кореи, Бразилии, Китая, Германии, Норвегии, Швеции, Швейцарии, Франции, России, Хорватии, Бельгии, Египта, Омана, ОАЭ и др. Однако процесс преобразования статей, представленных авторами, в JATS-совместимый XML-формат занимает много времени, а проблема автоматического формирования метаданных остается актуальной до настоящего времени.

Нами разработан OJS-плагин [1–4] преобразования метаданных в JATS-формат, позволяющий экспортировать данные как отдельных статей, так и целых выпусков журналов, размещенных в цифровой математической библиотеке Lobachevskii DML (<http://www.lobachevskii-dml.ru/>), который обеспечивает импорт соответствующих данных на основе определения типа документа (Document Type Definition) `journalpublishing.dtd` (<https://dtd.nlm.nih.gov/publishing/1.0/>).

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, проект 1.2368.2017/ПЧ, и при частичной финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-47-160012.

**Литература**

1. Elizarov A.M. Automated System of Services for Processing of Large Collections of Scientific Documents / A.M. Elizarov, E.K. Lipachev, S.M. Khaydarov // CEUR Workshop Proceedings. – 2016. – Vol. 1752. – P. 58-64.
2. Elizarov A.M. Lobachevskii DML: Towards a Semantic Digital Mathematical Library of Kazan University / A.M. Elizarov, E.K. Lipachev // CEUR Workshop Proceedings. – 2017. – Vol. 2022. – P. 326-333.
3. Елизаров А.М. Структура и сервисы цифровой математической библиотеки Lobachevskii-DML / А.М. Елизаров, Е.К. Липачев, Ш.М. Хайдаров // Ученые записки ИСГЗ. – 2017. - № 1(15). – С. 215-220.
4. Елизаров А.М. Веб-технологии для математика: основы MathML. Практическое руководство / А.М. Елизаров, Е.К. Липачев, М.А. Малахальцев. – М.: Физматлит, 2010. – 192 с.

**PLUGIN FOR AUTOMATED METADATA GENERATION OF DIGITAL MATHEMATICAL DOCUMENTS OF  
LOBACHEVSKII DML**

N.V. Zaitseva, S.M. Khaidarov

*Plugin for the Open Journal System, allowing generation of metadata for downloadable articles are developed. Plugin for showing metadata of articles in accordance with the scheme NISO JATS V1.0 is ready.*

Keywords: metadata, journal article, Lobachevskii Digital Mathematics Library, integration of electronic resources.

УДК 5530.12+531.51

## МОДЕЛИРОВАНИЕ АНИМИРОВАННОГО КАСКАДА ОТКРЫВАЮЩИХСЯ МАТРЁШЕК В СРЕДЕ СИСТЕМЫ MAPLE

Э.Р. Ибрагимова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *eva.ibragimova14@mail.ru*; МБОУ «Средняя общеобразовательная русско - татарская школа №57» г. Казани

*Описывается ход построения каскада открывающихся матрёшек в среде Maple с использованием преобразования гомотетии.*

**Ключевые слова:** Maple-проект, анимированное изображение, открывающаяся матрёшка.

Математическое компьютерное моделирование давно проникло и в сферу создания рисунка, и в киноиндустрию. Многие компании создания анимационных фильмов уже давно применяют системы символьной математики для технического решения многих сцен. Один из специалистов Maple Ник Фостер даже выиграл премию Американской киноакадемии за достижения в этой области. DreamWorks наряду с 200 аниматорами содержат в штате 15 программистов, которые занимаются математическим моделированием анимационных эффектов, и для решения сложнейших математических задач используют систему Maple. В целом, индустрия развлечений движется в направлении все более сложных эффектов, сложной компьютерной графики, многое из этого поддается физико-математическому моделированию, поэтому Maple, имеющий мощные возможности, является бесценной находкой, инструментом для киноиндустрии. И это поняли не только в компании DreamWorks.

Казанская 57-я школа работает с системой Maple более 10 лет. На основе опыта работы с пакетом и другими прикладными компьютерными программами функционирует научное общество учащихся, занимающихся разработкой проектов с применением СКМ Maple. Проекты развиваются по двум направлениям: 1) изучение конкретных приложений пакета, как инструмента математического моделирования на основе интернет-материалов и, прежде всего, сайта компании производителя Maplesoft; 2) авторские прикладные разработки. Начиная с 2015 года, учащиеся демонстрируют результаты своей деятельности на конференции «ИТОН». Один из таких проектов представлен в статье – это анимированное изображение каскада открывающихся матрёшек, выполненное в интерактивной математической среде Maple на координатной плоскости.

На начальном этапе целью было получение изображения одной матрёшки по отдельным её элементам. Затем «захотелось» матрёшку открыть – а это уже принципиально иное решение. «Открыв» матрёшку, неизбежно возникла потребность вложить в неё вторую – это ещё более сложная задача моделирования. И, конечно, за второй матрёшкой напрашивается потребность вложить и третью, и т.д. Тогда встал вопрос о разработке универсальной программы моделирования каскада  $n$ -го количества матрёшек. Таким образом, цель проекта трансформировалась в процессе работы. В конечном счёте, целью является программное решение моделирования анимированного каскада с любым конечным количеством объектов на языке Maple. На данном этапе получен каскад трех матрёшек. Хронология написания программы: 1) построение статического изображения первой матрёшки по точкам; 2) «открытие» первой матрёшки; 3) построение статического изображения второй матрёшки, вложенной в первую, так же по точкам; 4) сдвиг второй матрёшки влево; 5) поиск траектории вылета второй матрёшки из первой; 6) «открытие» второй матрёшки; 7) последовательное соединение действий: визуализация двух матрёшек одна в другой → открытие первой матрёшки → вылет второй матрёшки → открытие второй матрёшки. Однако способ построения каждой новой матрёшки по отдельным точкам, очевидно, очень громоздкий. Поэтому встал вопрос о том, как можно получить новую матрёшку без построения по координатам. Вполне естественным выходом стало использование преобразования гомотетии. В результате программа была преобразована, изменились и этапы программирования.

Далее даётся описание некоторых элементов изменённой Maple-программы получения анимированного каскада трёх матрёшек. Изображение было получено с использованием графических библиотек `plottools`, `plots`, `geometry`.

1) Первый этап – получение изображений трех матрёшек.

Первая и самая большая матрёшка строится по точкам: отдельно верхняя часть – `verx1` (рис. 1а),

отдельно нижняя часть – niz1 (рис.1б), соединение верхней и нижней частей первой матрёшки, визуализация и именование (рис.1в).

```
> plots[display](verx1,niz1);
> m1:=display(verx1,niz1):
```

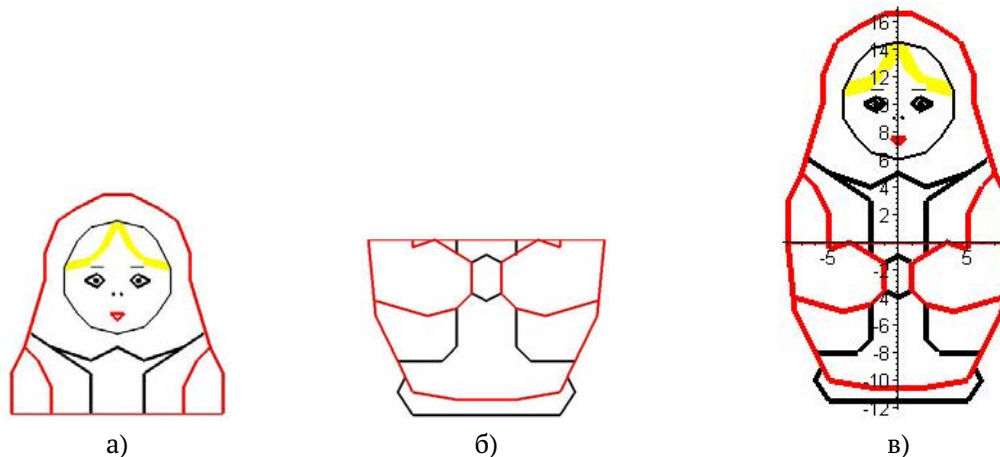


Рис. 1. Построение первой матрёшки.

Вторая матрёшка: верхняя часть второй матрёшки – как результат гомотетии верхней части первой матрёшки (рис. 2а)  $verx2:=homothety(verx1,0.85,[0,-6])$  и  $display(verx1,verx2)$ ; нижняя часть второй матрёшки – как результат гомотетии нижней части первой матрёшки (рис. 2б)  $niz2:=homothety(niz1,0.85,[0,-6])$  и  $display(niz1,niz2)$ ; соединение верхней и нижней частей второй матрёшки  $display(verx2,niz2)$  и  $m2:=display(verx2,niz2)$ ; “вкладывание” второй матрёшки в первую и визуализация (рис. 2в)  $display(m1,m2)$ .

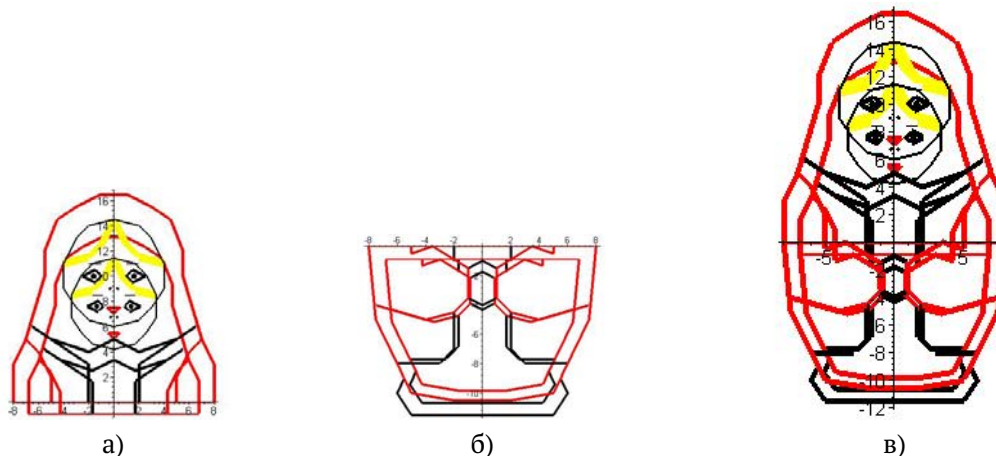


Рис. 2. Построение второй матрёшки.

Третья матрёшка получается аналогично построению второй – как результат гомотетии частей первой (рис. 3).

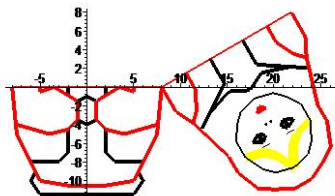
2) Второй этап – открывание и каскад матрёшек.

Открытая матрёшка – результат поворота верхней части относительно точки соединения двух частей. Такой центр поворота у второй и третьей матрёшек получен как результат гомотетии центра поворота первой. Анимация открывания реализуется за счет последовательной демонстрации списка поворотов на разные углы.

Далее в таблицах показаны элементы программы и визуализации.

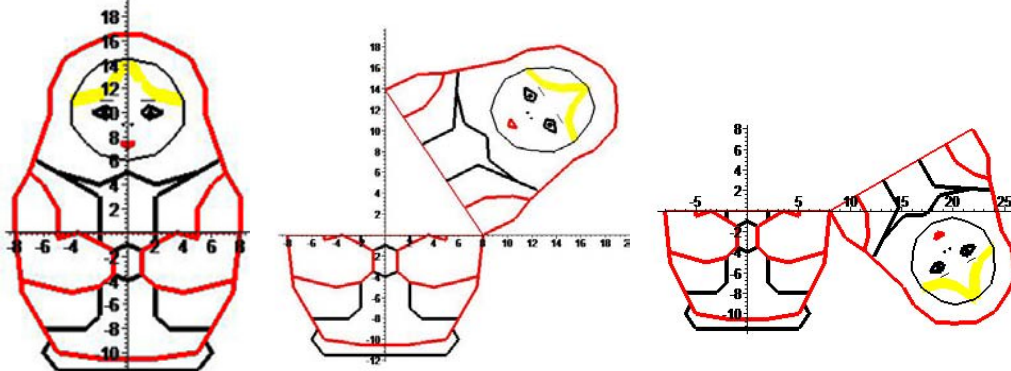
*Открытая первая матрёшка, визуализация, именование*

```
>r1:=rotate(verx1, -5*Pi/6, [8,0]):
>plots[display](r1,niz1);
>M1_niz1:=plots[display](r1,niz1):
```



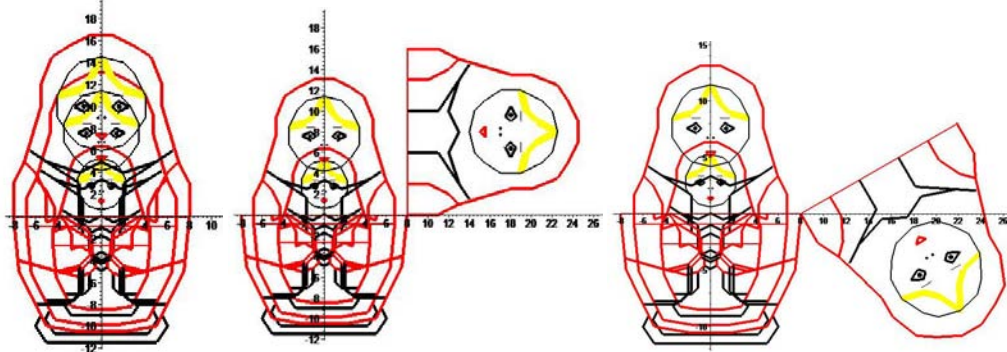
*Первая матрёшка открывается (анимация)*

```
>s1:=seq(rotate(verx1, -Pi/18*i, [8,0]), i=0..15): >s1_anim:=display(s1, insequence=true):
>plots[display](s1_anim, niz1):
> M1_anim:=plots[display](s1_anim, niz1):
```



*Первая матрёшка открывается, вторая и третья остаются внутри - присваивается имя*

```
>display(m2,m3,M1_anim, scaling=constrained);
>M1_2_3:=display(m2,m3,M1_anim, scaling=constrained):
```

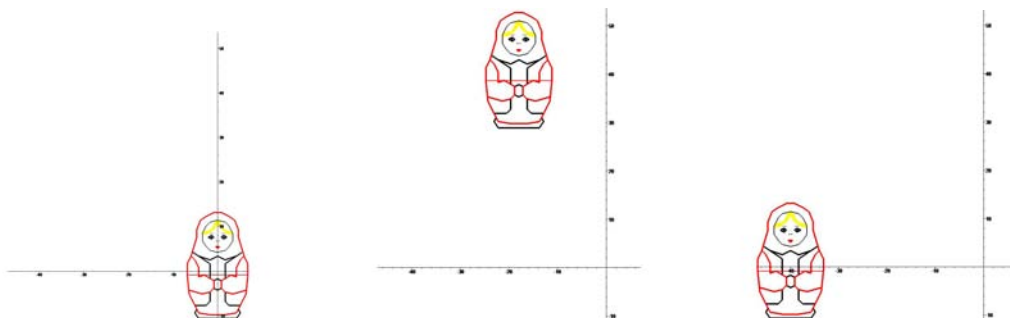


Вылет матрешек осуществляется за счет последовательного движения по параболе (вторая координата изменяется по закону квадратичной функции). Третья матрешка вылетает в два этапа.

*Вылет второй матрёшки – присваивание имени*

```
>m2_t:=seq(translate(m2, -i-10, -(1/10)*(i-10)^2+40), i=-10..30):
>plots[display](m2_t, insequence=true, scaling=constrained);
>m2_t_anim:=display(m2_t, insequence=true):
```





*Вылет третьей матрёшки - первый этап - присваивание имени*

```
>m3_t:=seq(translate(m3,-i-10,-(1/10)*(i-10)^2+40),i=-10..30):
>display(m3_t,insequence=true,scaling=constrained);>m3_t_anim:=display(m3_t,
insequence=true):
```

*Чтобы определить центр поворота верхней части второй матрёшки, нужен пакет geometry:*

```
>with(geometry):
```

*Преобразование гомотетии с точкой-центром поворота верхней части первой матрёшки и вычисление её координат*

```
>homothety(T2,point(T1,8,0),0.85,point(T,0,-6));
```

T2

```
>coordinates(T2);
```

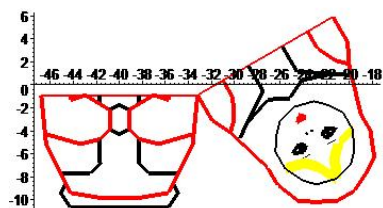
[6.80, -90]

*Поворот верхней части второй матрёшки относительно найденного центра*

```
>r2:=rotate(verx2,-5*Pi/6,coordinates(T2)):|
```

*Открытая вторая матрёшка на новом местеа*

```
>r2_niz2:=display(r2,niz2):
>r2_niz2_t:=translate(r2_niz2,-40,0):
>display(r2_niz2_t);
>M2_niz2:=display(r2_niz2_t):
```



*Вторая матрёшка открывается на новом месте (анимация)*

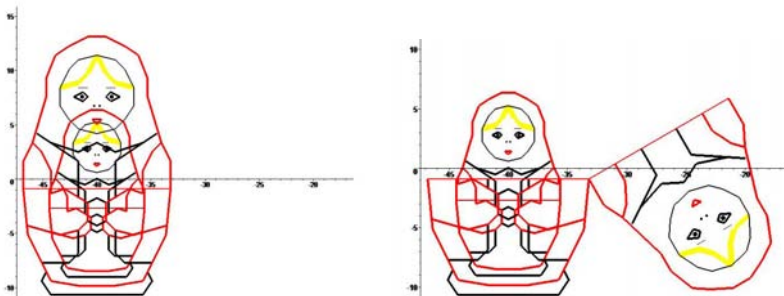
```
>s2:=seq(rotate(verx2,Pi/18*i,coordinates(T2)),i=0..15):
>s2_anim:=display(s2,insequence=true,scaling=constrained):
>s2_anim_t:=display(s2_anim,niz2,scaling=constrained):
>M2_anim_t:=translate(s2_anim_t,-40,0):
>display(M2_anim_t,insequence=true);
>M2_anim:=display(M2_anim_t,insequence=true):
```

*Двигается третья матрёшка влево - первый этап*

```
>L3:=translate(m3,40,0):
>display(L3,scaling=constrained);
>l3:=display(L3,scaling=constrained):
```

*Вторая матрёшка открывается на новом месте, третья остаётся внутри - присваивается имя*

```
>display(M2_anim,L3,scaling=constrained);
>M2_3:=display(M2_anim,L3,scaling=constrained):
```



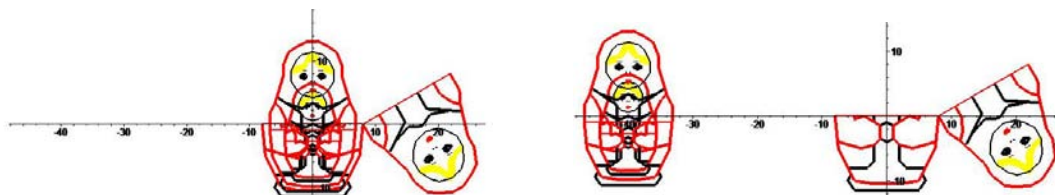
*Вылет третьей матрёшки – второй этап – присваивание имени*

```
>m3_t2:=seq(translate(L3,-i-10,-(1/10)*(i-10)^2+40),i=-10..30);
>display(m3_t2,insequence=true,scaling=constrained);
>m3_t2_anim:=display(m3_t2,insequence=true):
```

*Аналогичные действия с третьей матрёшкой: определение координат центра поворота, сдвиг и открытие на новом месте и т.д...*

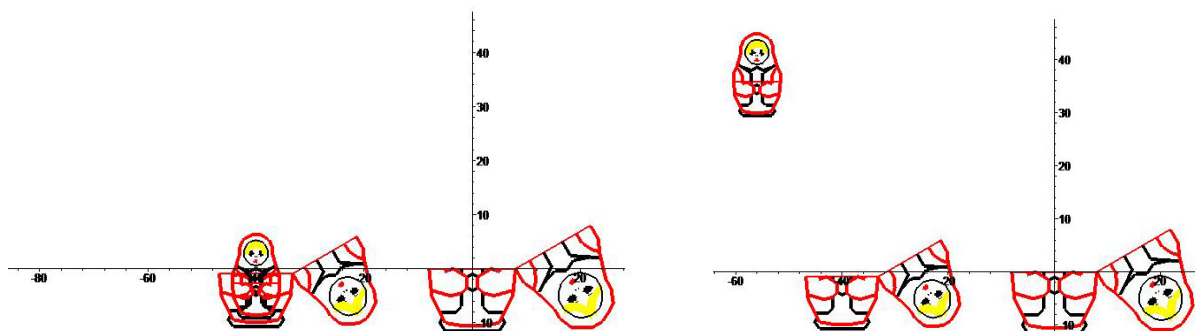
*Из открытой первой выпрыгивают вторая и третья матрёшки*

```
>plots[display](M1_niz1,m2_t_anim,m3_t_anim,scaling=constrained);
>A1:=plots[display](M1_niz1,m2_t_anim,m3_t_anim,scaling=constrained):
>plots[display](M1_niz1,M2_3,scaling=constrained);
>A2:=plots[display](M1_niz1,M2_3,scaling=constrained):
```



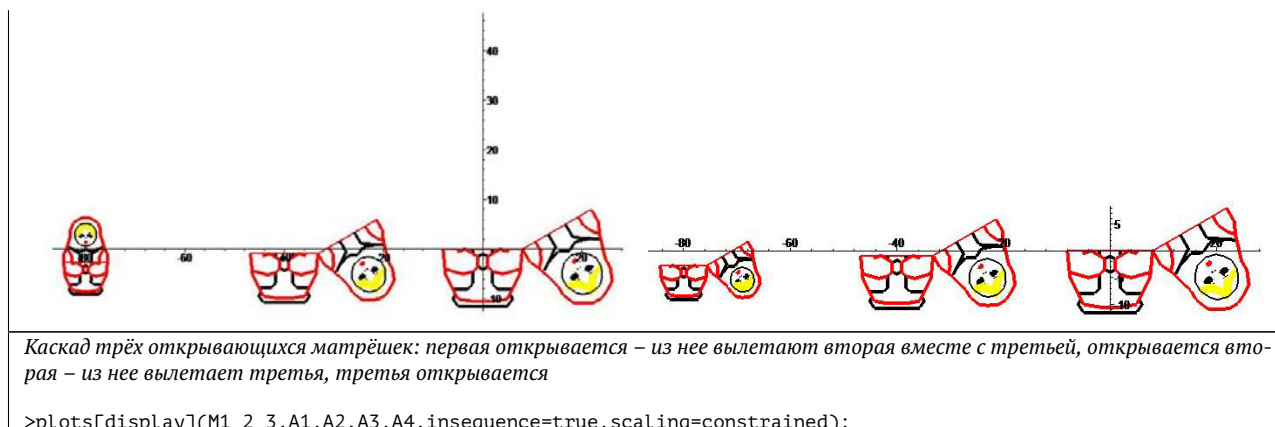
*Первая и вторая матрёшка открыты, третья выпрыгивает*

```
>plots[display](M1_niz1,M2_niz2,m3_t2_anim,scaling=constrained);
>A3:=plots[display](M1_niz1,M2_niz2,m3_t2_anim,scaling=constrained):
```



*Первая и вторая матрёшки открыты, третья открывается*

```
>plots[display](M1_niz1,M2_niz2,M3_anim,scaling=constrained);
>A4:=plots[display](M1_niz1,M2_niz2,M3_anim,scaling=constrained):
```



Таким образом, с помощью гомотетии можно задать несколько матрёшек (объектов). Недостаток такого способа в том, что невозможно менять цвет каждого нового объекта. А также при «рисовании» по точкам, то есть с помощью задания ломаных, нельзя установить непрозрачность изображения.

В целом, поставленная на данном этапе цель работы достигнута – найдена процедура построения, открывания, сдвига и клонирования матрёшки. Однако есть ощущение, что программу можно сделать более универсальной – видимо, через задание цикла, при этом еще и меняя цвет клона.

Кроме того, напрашивается сделать изображение трехмерным. Однако это сначала – сложная математическая задача, которая ждёт своего решения.

В заключении хотелось бы сказать, что компьютерное математическое моделирование анимированного изображения – это сложнейшая и математическая, и программистская, и эстетическая задача, это и наука, и искусство.

#### ANIMATED IMAGE OF CASCADE OF OPENING MATRYOSHKAS IN THE MAPLE ENVIRONMENT

E.R. Ibragimova

*The course of constructing a cascade of opening matryoshkas using the homothety transformation in the Maple environment is described.*

Keywords: Maple project, animated image, opening matryoshka.

УДК 004.35

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОВРЕМЕННЫХ ИНТЕРАКТИВНЫХ СРЕДСТВ В ОБРАЗОВАНИИ

И.И. Иванова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *ivanova\_iriv@mail.ru*; МОУ «Средняя общеобразовательная школа №41» г. Вологды

*Предметом исследования статьи является анализ использования интерактивных средств в образовании. Основные возможности распределены на несколько групп: с применением дополнительных устройств, без использования и с использованием специального программного обеспечения для интерактивных досок. Работа имеет выраженную практическую направленность.*

**Ключевые слова:** интерактивный комплекс аппаратно-программных средств, интерактивная доска, программное обеспечение для интерактивных досок, возможности интерактивной доски, программа SMART Notebook.

В последнее время в образовании стали очень популярными такие интерактивные устройства, как интерактивные доски, планшеты, системы опроса и тестирования, трибуны, приставки и т.д. Они позволяют разнообразить учебные занятия за счет средств визуализации и интерактивности. Наибольшее распространение получила интерактивная доска (ИД). В ней объединяются проекционные технологии с сенсорным устройством, то есть такая доска не только отображает информацию с компьютера, но и позволяет управлять самим процессом демонстрации, вносить правки, делать пометки, сохранять полученные материалы для последующего применения и редактирования.

Можно расширить функционал интерактивной доски, если подключить к ней дополнительные устройства, такие как документ-камера, система опроса и тестирования, датчики и т.д. или

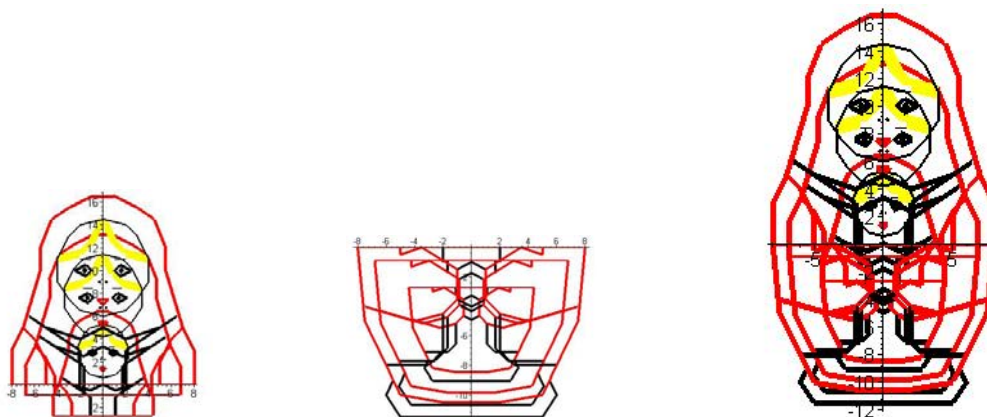


Рис. 3. Построение третьей матрёшки.

использовать специальное программное обеспечение (ПО). Назовем это интерактивным комплексом аппаратно-программных средств (ИК АПС). Он состоит из аппаратной составляющей (проектор, компьютер, интерактивная доска или интерактивная приставка, дополнительные устройства, совместимые с ИД) и программной составляющей (специальное программное обеспечение).

Такой интерактивный комплекс можно применять на любых уроках и при изучении любых дисциплин. Но, чтобы грамотно использовать на занятиях все богатство возможностей ИК АПС, учителю необходимо самому знать эти возможности.

Их можно отобразить в виде следующей схемы (рис.1).

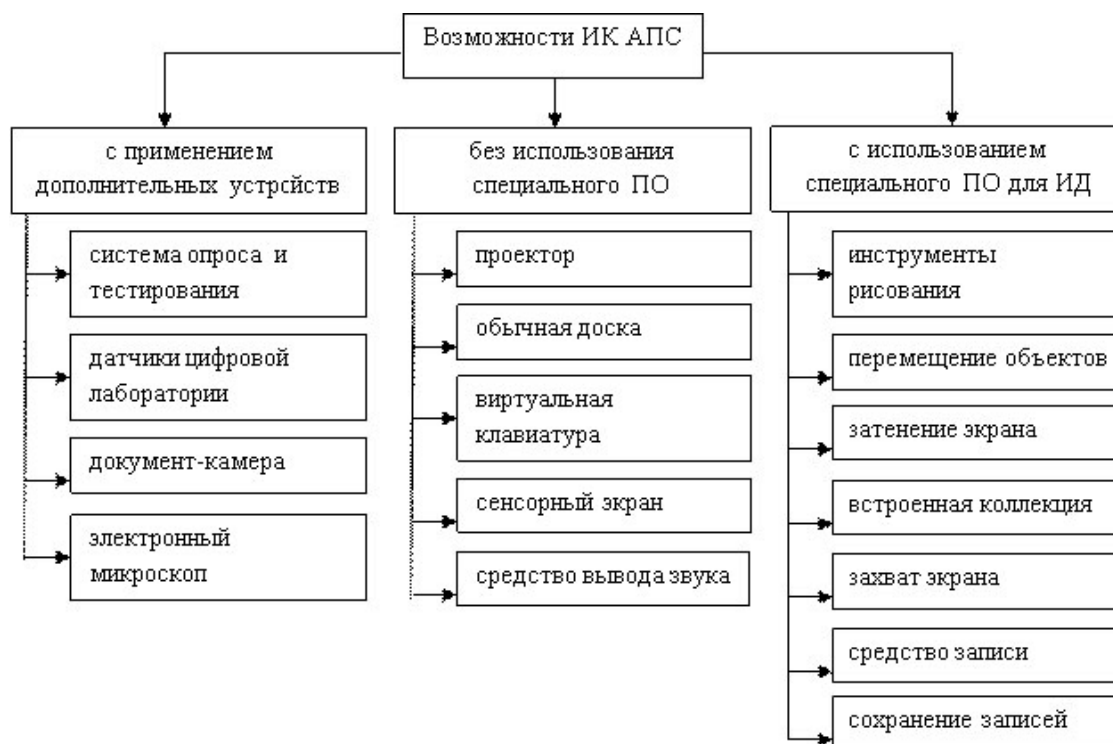


Рис. 1. Возможности интерактивного комплекса аппаратно-программных средств.

Рассмотрим возможности, предоставляемые ИК АПС, подробнее.

1. К ИД можно подключить **дополнительные устройства**:

*Система опроса и тестирования.* Позволяет провести опрос, голосование, тестирование по любой теме. Результаты сразу же отображаются на ИД. Можно применять на любом этапе урока: при

организации проверки домашнего задания, при закреплении полученных знаний, при рефлексии и т.д.

*Датчики цифровой лаборатории.* Они обеспечивают автоматизированный сбор и обработку данных, позволяя отображать ход эксперимента в виде графиков, таблиц, показаний приборов. Проведенные эксперименты могут сохраняться в реальном масштабе времени и воспроизводиться синхронно с их видеозаписью.

*Документ-камера.* Демонстрирует на ИД в режиме реального времени четкое и резкое изображение практически любых объектов, в том числе и трехмерных. Позволяет делать пометки прямо поверх отображаемого изображения и сохранять полученные материалы.

*Электронный микроскоп.* Позволяет производить увеличение до 10<sup>6</sup> раз, демонстрируя все на ИД. Можно использовать на уроках физики, биологии. Удобно работать всем классом. Полученные изображения также можно сохранять для последующей работы.

**2. Без использования специального программного обеспечения** интерактивная доска может употребляться как:

*Проектор.* Все материалы, которые были разработаны ранее (презентации, видеоролики и т.д.), можно применять на уроках с использованием ИД. На доске можно показывать любую программу, которая установлена на компьютере. При подготовке к контрольным, практическим, лабораторным работам, а также ГИА очень удобно работать с дисками по преподаваемой дисциплине. На ИД можно демонстрировать задания, наглядный материал (в том числе и интерактивный – ЦОР, ЭОР), и готовые тестирующие программы.

*Обычная доска.* На ИД можно писать и стирать так же, как на меловой или маркерной доске. И что особенно важно, делать пометки можно прямо поверх изображений: добавлять комментарии, подчеркивать важную информацию, заполнять таблицу, дополнять схему, выделять ключевые моменты на карте и т.д.

*Виртуальная клавиатура.* С помощью виртуальной клавиатуры можно выполнять набор символов в любом приложении: текст в документе, запрос в поисковых системах, подписи к рисункам и т.д. Нажатие на клавишу на виртуальной клавиатуре позволяет вводить соответствующие буквы, цифры или символы. Сохранены все возможности обычной клавиатуры, но для уверенной работы с виртуальной клавиатурой нужна небольшая практика.

*Сенсорный экран* интерактивной доски позволяет управлять компьютерными программами прямо с экрана, всего лишь касаясь поверхности маркером, пальцем или любым другим предметом. Движение маркером по доске равносильно движению мыши по экрану монитора, поэтому, работая только с ИД, можно демонстрировать работу в любых компьютерных программах и приложениях.

*Средство вывода звука.* Все ИД подразумевают возможность подключения аудио-системы, которая существенно расширяет возможности использования мультимедийных ресурсов на уроках. Можно слушать музыку, просматривать видеоролики и фильмы, даже если компьютер не оснащен колонками.

**3. Рассмотрим дополнительные возможности, которые предоставляет интерактивная доска с использованием специального программного обеспечения:**

*Инструменты рисования.* Они позволяют делать надписи, используя различные цвета, толщину и текстуру (инструменты «Перо», «Художественное перо», «Волшебное перо»). При необходимости текст можно стереть, используя инструмент «Ластик». С помощью инструментов «Линия», «Фигуры» и «Заливка» можно оперировать линиями, стрелками, геометрическими фигурами, выносками и т.д. Инструмент «Текст» позволяет вводить различные символы, используя обычную или виртуальную клавиатуру.

*Перемещение объектов – режим Drag and Drop (перетаски и отпусти).* При помощи этой технологии любой объект на экране ИД может быть перемещен в другое положение, что позволяет решать следующие задачи: устанавливать соответствие между объектами, выделять их, группировать, сортировать, а также просто перемещать по экрану.

*Затенение экрана.* Суть данного инструмента заключается в том, что он закрывает некоторый фрагмент экрана, и скрытая за ней информация появляется в нужный момент. Использование «Затенения экрана» позволяет организовать не только поэтапное изложение материала, но и проверку. Скрыть можно любую часть доски так, как это задумал учитель. Применяя затенение ячейки, можно добиться такого же эффекта при работе с таблицами. Щелкая по шторкам-ячейкам можно в нужный

момент открыть «спрятанную» в таблице информацию.

*Встроенная коллекция* состоит из множества элементов (рисунки и фоны, интерактивные средства и мультимедиа, файлы и страницы Notebook, темы), сгруппированных по разделам: администрирование и оценка, география, искусство, история, люди и культура, математика, наука и технология, русский язык и литература. Например, при подготовке к уроку учитель математики может воспользоваться коллекцией разнообразных математических объектов, таких как: многогранники, тела вращения, координатные прямые и плоскость, окружность, треугольники и т.д. Чертежи получаются наглядными, аккуратными. Кроме этого в коллекции ИД имеются изображения математических инструментов, что позволяет демонстрировать работу с ними. Преподаватель любой дисциплины может во встроенной коллекции найти для своего урока полезную информацию, фон, подходящую тему, использовать разнообразные интерактивные фрагменты или готовые рисунки. Для последующего использования в коллекцию можно добавить свои материалы, как созданные самостоятельно, так и взятых из других коллекций или сети Интернет.

*Захват экрана.* С помощью этого инструмента можно создавать снимки части экрана или всего экрана целиком. При этом на снимке запечатлеваются все типы объектов, отображаемых на экране: фон, пометки, сетка, линии, фигуры, текст и др. При этом автоматически созданный снимок будет сохраняться на страницу в файле программы ИД. Далее с полученным изображением можно выполнять все стандартные действия, что и с обычным рисунком: перемещать, поворачивать, копировать, изменять размеры и т.д.

*Средство записи.* Педагог может самостоятельно создавать видеoinструкции, обучающие ролики или видеуроки и показать своим ученикам на занятиях, так как ИД с помощью инструмента «Средство записи» позволяет создавать видеofрагменты в различных форматах: AVI (более высокое качество), WMV (более низкое качество). Созданные видеоролики можно демонстрировать в любом видеоплеере, поддерживающем данные форматы, например, Windows Media.

*Сохранение записей.* Все материалы урока с записями и пометками, сделанными на доске, можно сохранить в компьютере для последующего просмотра и анализа. Причем можно сохранять страницы в различных форматах: элементы коллекции, WEB-страницы, рисунки, PDF-документы, презентации. В случае необходимости всегда есть возможность вернуться к ранее изученному материалу. Файлы, сохраненные на предыдущих занятиях можно при необходимости открыть, чтобы повторить пройденный материал. Ученики, пропустившие данный урок, также могут воспользоваться этими материалами для устранения пробелов в знаниях.

Современные интерактивные средства предлагают широкий спектр возможностей подготовки и проведения урока. При подключении к ИД совместимых интерактивных устройств появляются дополнительные возможности. Но даже без особых навыков можно работать с ИД как с обычной, используя ее для записи и стирания текста. Для работы с текстом также удобно применять виртуальную клавиатуру. Используя ИД как проектор и экран, можно демонстрировать презентации, фильмы, изображения. При обучении учащихся работе в различных программах удобно использовать ИД как сенсорный монитор для подключенного компьютера. В работе со специальным ПО для ИД многие учителя испытывают трудности, так как сложно самостоятельно разобраться со всеми возможностями и грамотно применять их на своих уроках. Однако, поработав на ИД, большинство учителей уже не хотят возвращаться к привычному мелу и доске.

## Литература

1. Веряев А.А., Ушаков А.А. Интерактивная доска в современной школе: проблемы выбора и использования / А.А. Веряев, А.А. Ушаков // Школьные технологии. – 2011. - № 1. – С. 132-139.
2. Иванова И.И. Основные возможности интерактивных досок / И.И. Иванова // Ученые записки. – 2011. - № 34. – С. 299-304.
3. Иванова И.И. Техническое обеспечение образовательного процесса / И.И. Иванова // Информационная среда образования и науки. – 2011. – Режим доступа: [http://www.iiorao.ru/iio/pages/izdat/ison/publication/num\\_6\\_2011/](http://www.iiorao.ru/iio/pages/izdat/ison/publication/num_6_2011/)
4. Иванова И.И. Анализ возможностей современных интерактивных досок и специального программного обеспечения к ним / И.И. Иванова, В.А. Касторнова // Вестник ЧГУ. – 2016. - № 4. – С.120-124.
5. Иванова И.И. Использование возможностей интерактивных досок (на примере уроков русского языка и математики) / И.И. Иванова, В.А. Касторнова // Педагогическая информатика. – 2011. - № 2. – С. 18-28.

## THE USE OF MODERN INTERACTIVE TOOLS IN EDUCATION

I.I. Ivanova

*The article analyses the use of interactive tools in education. The key opportunities are divided into several categories: using additional devices, with and without the use of specialized interactive board software. The study adopts a practice-oriented approach.*

Keywords: interactive complex of hardware and software, interactive whiteboard, software for interactive boards, interactive board capabilities, SMART Notebook software.

УДК 519.1

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТРЕНАЖЕРА «КОНСТРУКТОР ГРАФОВ»  
ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕОРИИ ГРАФОВ**М.А. Иорданский<sup>1</sup>, Н.А. Мухин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> [iordanski@mail.ru](mailto:iordanski@mail.ru); Нижегородский государственный педагогический университет им. К. Минина

<sup>2</sup> [fly9024@gmail.com](mailto:fly9024@gmail.com); Нижегородский Губернский колледж

*В статье на примерах задач кодирования, размещения и конструирования графов демонстрируются возможности использования разработанного компьютерного тренажера «Конструктор графов» при проведении практических занятий по теории графов в курсе дискретной математики.*

**Ключевые слова:** визуализация, кодирование, нумерация, конструирование графов.

Становление цифровой экономики естественным образом связано с развитием цифровой педагогики. Среди различных инструментов такой педагогики особую роль играют компьютерные тренажеры. Их эффективное использование возможно практически во всех учебных дисциплинах. При изучении теоретического материала тренажеры можно использовать как иллюстративное демонстрационное средство, а при рассмотрении практических вопросов можно создавать с их помощью соответствующую операционную среду и реализовывать в ней алгоритмы решения поставленных задач.

При изучении теории графов – одного из разделов современной дискретной математики, наличие механизмов визуализации графовых структур и выполнения над ними требуемых действий играет особо важную роль. С этой целью используются различные информационные технологии [1, 2]. Алгоритмы обработки графов включены также в MathCAD и Maple. Однако, указанные системы имеют один ключевой недостаток: закрытый исходный код, в связи с чем затруднена их доработка под новые задачи, особенно, если требуемый функционал изначально отсутствует в рассматриваемой системе. Кроме того, большинство данных систем распространяются на коммерческой основе.

В работе рассматривается компьютерный тренажер «Конструктор графов» - открытая информационная система, реализующая необходимый функционал по решению задач теории графов. Демонстрируется использование конструктора графов при решении некоторых классов задач.

**Визуализация графов**

Вершины графов с последовательной их нумерацией вводятся по щелчку мыши. Положение вершин пользователь выбирает произвольно. При вводе вершины с номером  $n$  она автоматически соединяется ребром с вершиной с номером  $n - 1$ . Такой прием удобен при построении произвольных графов, поскольку почти все графы гамильтоновы. Дополнительные ребра могут вводиться с подтверждением через окна «V1» и «V2» или по щелчкам мыши на концевых вершинах будущего ребра (на одной вершине - левой кнопкой, а на другой - правой). Встроенный редактор позволяет удалять вершины с инцидентными ребрами, а также отдельные ребра. Вершины можно перемещать, сохраняя структуру графа.



## Кодирование графов

Задачи оптимального кодирования графов представляют значительный интерес, учитывая актуальность проблемы «сжатия» информации. Алгоритмы экономного кодирования графов изучаются в курсе дискретной математики в классических и частично в педагогических университетах. С некоторыми темами, как например, код Прюфера, знакомятся и старшеклассники.

В среде конструктора графов возможно решение как прямой, так и обратной задачи кодирования по Прюферу: переход от списка ребер к коду Прюфера и обратно. При этом по списку ребер производится визуализация дерева. Интерфейс окна программы при кодировании деревьев изображен на рис.1.

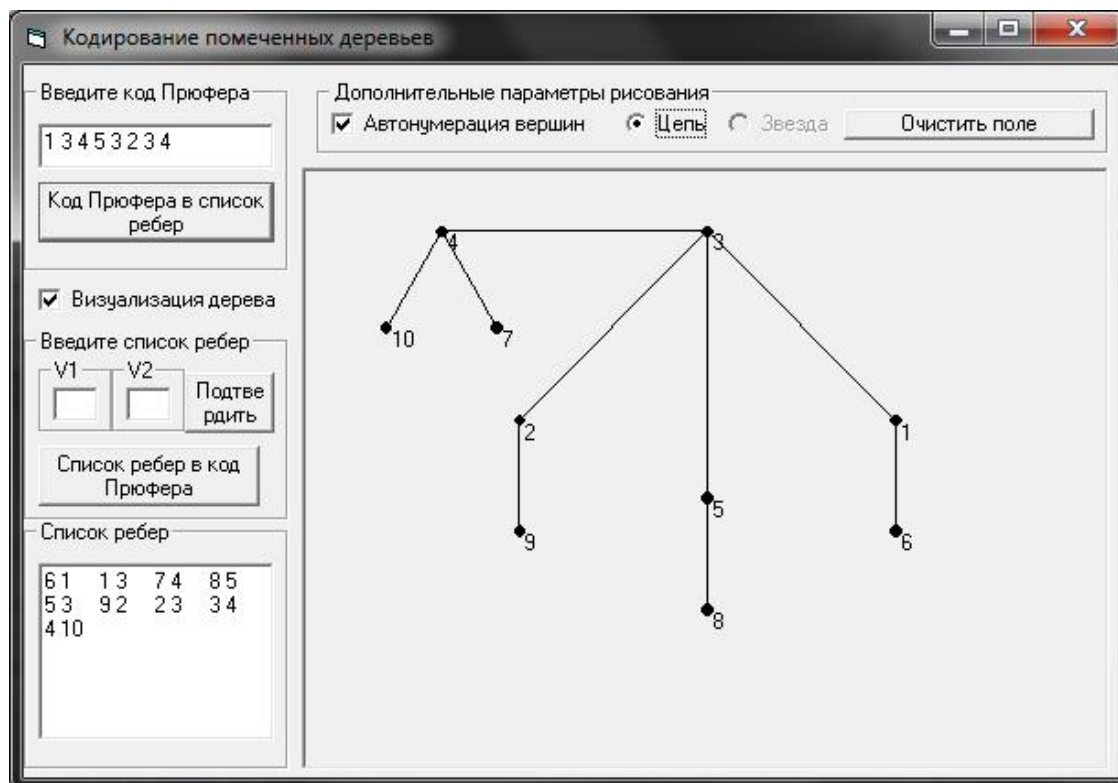


Рис. 1. Кодирование помеченного дерева

При решении прямой задачи номера концевых вершин ребер вводятся с подтверждением через окна «V1» и «V2». Весь список ребер можно увидеть в одноименном окне. При активации кнопки «Визуализация дерева» выводится изображение дерева, соответствующее списку ребер. Код Прюфера появляется в одноименном окне после нажатия клавиши «Список ребер в код Прюфера».

При решении обратной задачи вводится код Прюфера – последовательность из  $k$  целых чисел, каждое из которых не превосходит  $k + 2$ . По клавише «Код Прюфера в список ребер» формируется соответствующий список ребер. Изображение дерева выводится при активации кнопки «Визуализация дерева».

## Нумерации вершин графов

Построение оптимальных нумераций вершин графов – еще один важный класс задач современной дискретной математики. Необходимость в решении подобных задач возникает при размещении различных объектов в элементах заданных структур: расстановки оборудования в цехах, трассировке микросхем и т.д. Весьма важным как в практическом, так и в теоретическом отношении являются линейные размещения, когда вершины графов располагаются в заданных позициях вдоль прямой. Задачи линейного размещения вершин графов удобно формулировать как задачи нумерации вершин графов натуральными числами.



В зависимости от рассматриваемого приложения используются различные классы графов и критерии оптимальности. Так, например, задача кодирования информации, передаваемой по двоичному каналу с возможными ошибками замещения в отдельных разрядах ( $0 \rightarrow 1$  или  $1 \rightarrow 0$ ), при котором минимизируется накапливающая при этом ошибка, приводит к следующей задаче. Необходимо построить нумерацию вершин  $n$ -мерного единичного куба, при которой минимизируется *длина графа* – сумма модулей разностей номеров всех пар смежных вершин (сумма длин ребер). При решении систем линейных алгебраических уравнений большой размерности с разреженными матрицами с целью экономии памяти необходимо нумеровать вершины графов так, чтобы минимизировать максимальную длину ребер, или, наоборот, максимизировать минимальную длину ребер.

В конструкторе графов имеется возможность изменять исходную нумерацию вершин и вычислять для каждой нумерации необходимые функционалы. На рис.2 приведен пример нумерации вершин 3-мерного куба, минимизирующей длину графа.

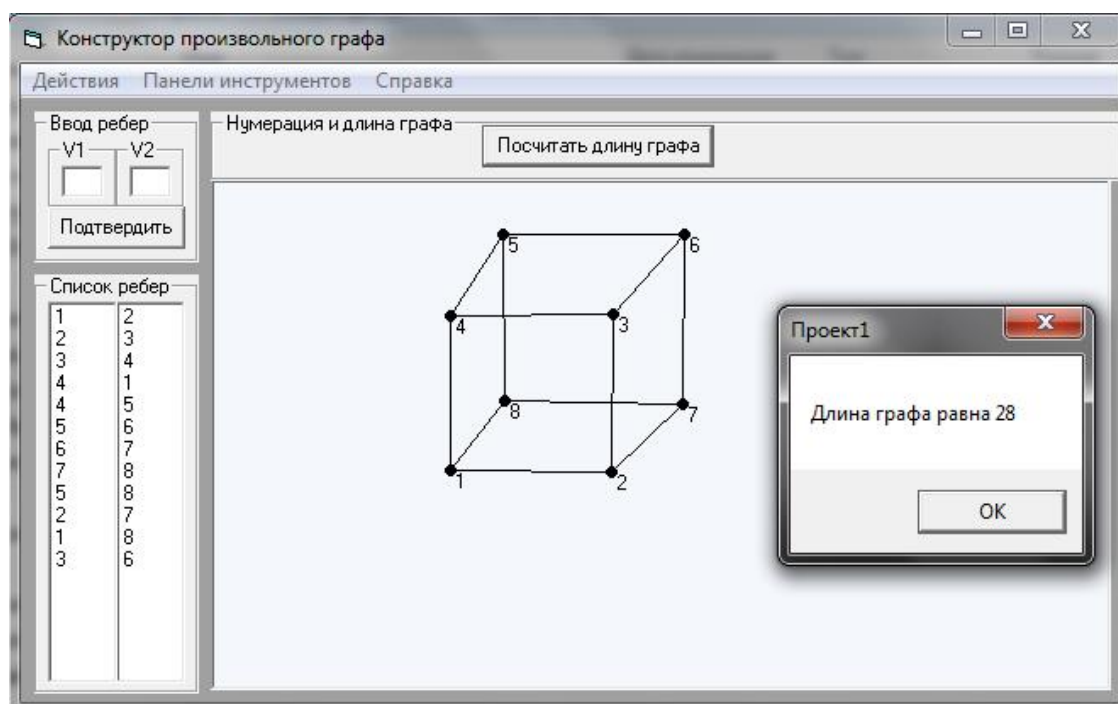


Рис. 2. Минимальная нумерация куба

## Конструирование графов

В теории графов для проверки выдвигаемых гипотез необходимо использовать графы с заданными свойствами. Построение таких графов возможно с помощью *операций склейки* - отождествления изоморфных подграфов одного или двух графов - операндов. Накладывая ограничения на вид отождествляемых подграфов, их выбор и, быть может, на способ отождествления, можно обеспечить наследование результирующим графом заданных характеристических свойств графов - операндов. Для ряда классических свойств графов таких как планарность, эйлеровость, гамильтоновость, двудольность и др. указанные ограничения рассматривались в [3].

В конструкторе графов при склейке вершин результирующей вершине присваивается меньший из номеров двух отождествляемых вершин. Вершина с большим номером удаляется из графа, а инцидентные ей ребра становятся инцидентными результирующей вершине. При склейке ребер одно из них также удаляется. На рис. 3 представлены два исходных графа-операнда.

В результате склейки их по пустому подграфу, содержащему три вершины, получается граф, изображенный на рис. 4. Вершина с номером 9 отождествлена с вершиной с номером 5; вершина с номером 8 – вершиной с номером 4; вершина с номером 7 – с вершиной с номером 3.

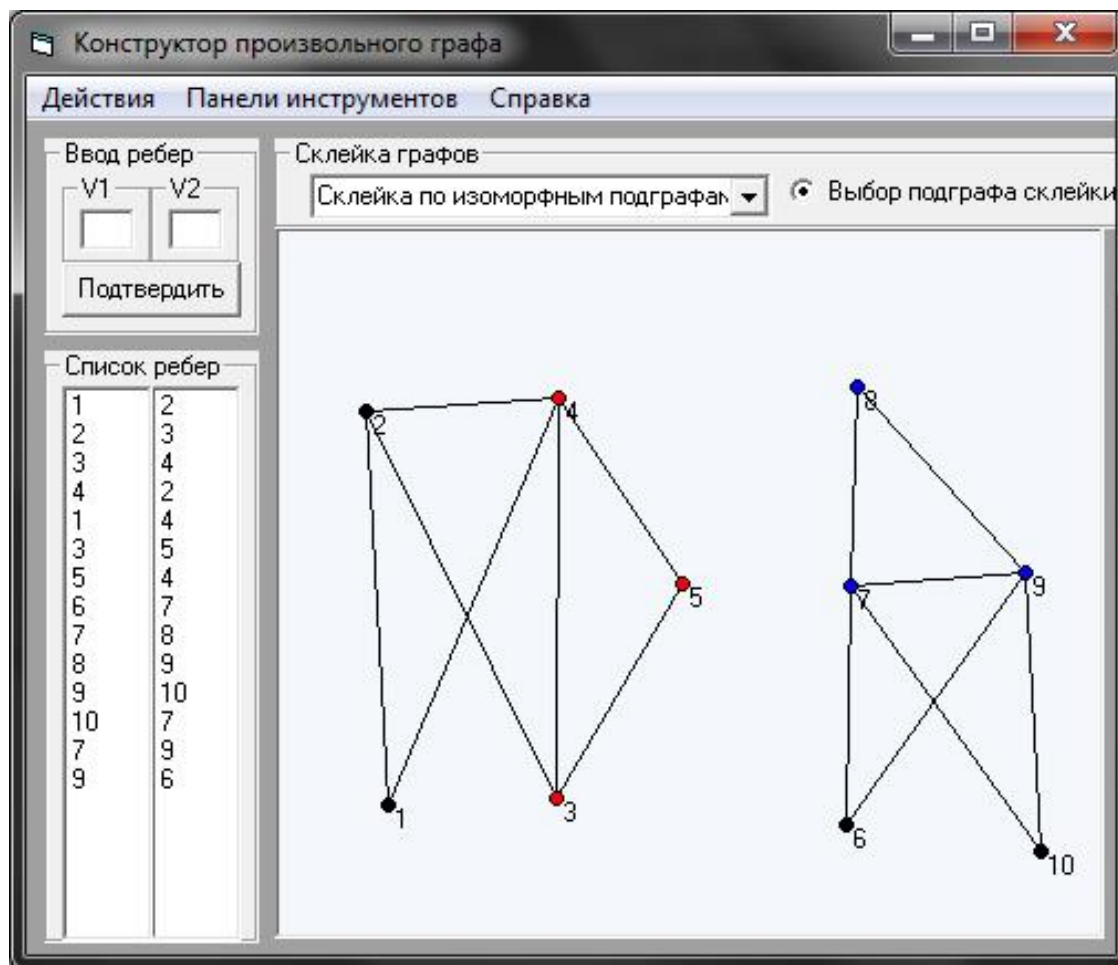


Рис. 3. Исходные графы-операнды

### Педагогическая апробация

Тренажер «Конструктор графов» используется на практических занятиях с бакалаврами по спецкурсу «Оптимальные нумерации вершин графов» и с магистрами в спецкурсе «Конструктивная теория графов и её приложения» в институте информационных технологий, математики и механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

На факультете естественных, математических и компьютерных наук Нижегородского государственного педагогического университета им. К. Минина тренажер «Конструктор графов» используется на практических занятиях по дискретной математике.

Занятия с тренажером организуются так, чтобы вначале студенты в результате экспериментов в его операционной среде могли самостоятельно формулировать алгоритмы решения предлагаемых им задач, а затем на лекциях эти алгоритмы получают теоретическое обоснование.

### Литература

1. Программа для построения графов C# [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://vscode.ru/prog-lessons/programma-dlya-postroeniya-grafov.html>.
2. Работа с графами онлайн [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://graphonline.ru/>.
3. Иорданский М.А. Конструктивная теория графов и её приложения. – Н.Новгород: Кириллица, 2016. – 172 с.

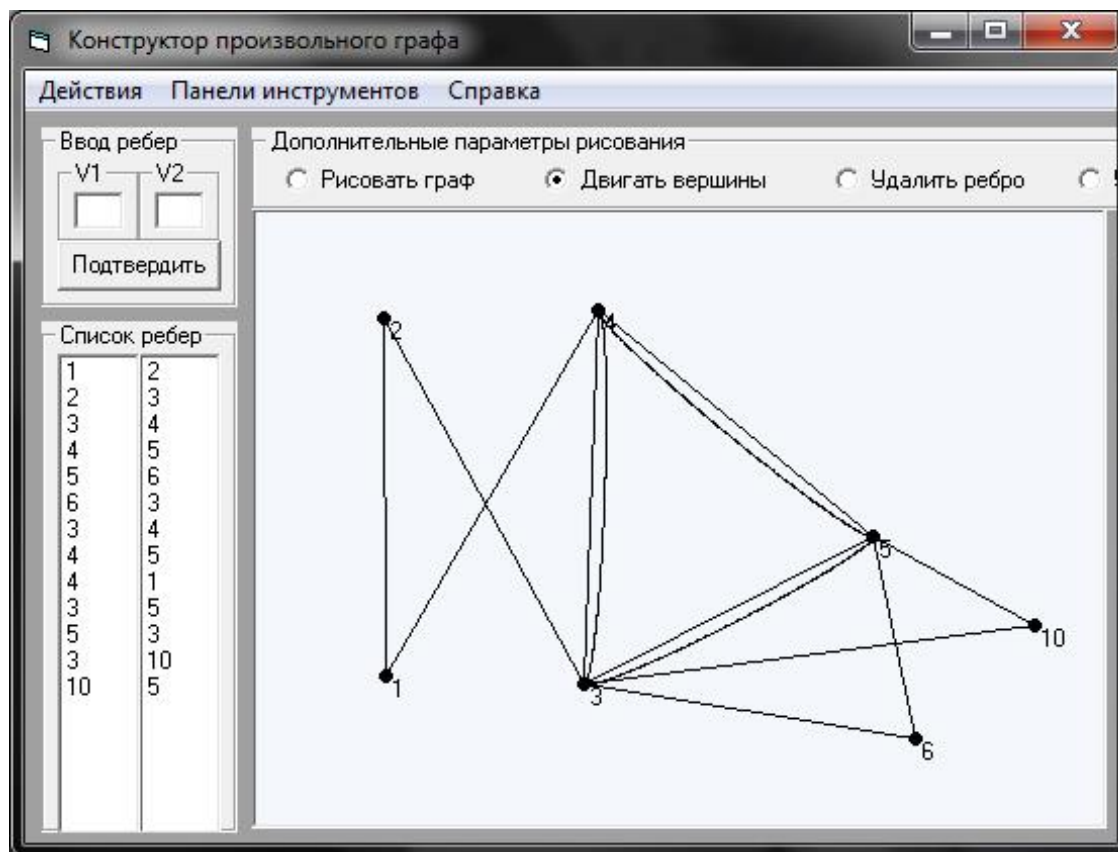


Рис. 4. Результат операции склейки

The article demonstrates the possibilities of using the Graph Designer computer simulator during practical classes in graph theory in the course of discrete mathematics using examples of coding problems, locating and constructing graphs.

Keywords: visualization, coding, numbering, construction of graphs.

UDC 517.54

## GENERALIZED REDUCED MODULE OF A DOMAIN OVER THE UNIT DISK WITH CIRCULAR AND RADIAL SLITS

A.V. Kazantsev<sup>1</sup>, M.I. Kinder<sup>2</sup>

<sup>1</sup> avkazantsev63@gmail.com; Kazan Federal University

<sup>2</sup> mkinder@rambler.ru; Kazan Federal University

For  $(n + 1)$ -ly connected planar domain  $D$  with analytic boundary we construct the function  $F(w, w_0) = (w - w_0)f(w, w_0)$  which maps  $D$  conformally onto the unit disk with circular and radial slits. We show that if  $n \geq 2$ , then Mityuk's function,  $M(w) = -(2\pi)^{-1} \ln |f(w, w)|$ , representing the generalized reduced module of the domain  $D$  has at least one stationary point in  $D$ .

**Keywords:** nonlinear mechanical modeling, conformal map, multiply connected domain, canonical domain, generalized reduced module, Mityuk's function, Mityuk's radius.

### 1. Introduction

Classical task in the complex function theory concerns with the construction of the conformal mappings

$$F(w, w_0) = (w - w_0)f(w, w_0), \quad f(w_0, w_0) \neq 0, \quad (1)$$

from the planar finitely connected regions onto the canonical domains such as the unit disk centered at the origin with cuts along the arcs of prescribed form, namely, circular concentric arcs, radial slits, or their various disjoint combinations.

I.P. Mityuk [1] has proposed a way to define a generalized reduced modules connected with function  $F(w, w_0)$ . The generalized reduced module,

$$M(w) = -\frac{1}{2\pi} \ln |f'(w, w)| \quad (2)$$

of a multiply connected domain  $D$  at a point  $w$  will be called *Mityuk's function* with respect to the distinguished canonical domain.

Connection of the functions (2) with the exterior inverse boundary value problems goes back to F.D. Gakhov [2]. As it has appeared, the non-emptiness of the critical points set of the function  $M(w)$  is equivalent to the suitable exterior problem. The existence of critical points of Mityuk's function in the case of circular concentric slits has been proved by M.I. Kinder [3]. The case of circular and radial slits is studied in the present report (see also [4] and [5]).

Let  $D$  be  $(n+1)$ -ly connected domain with the boundary,  $\partial D$ , consisting of disjoint analytic curves  $L_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ ; the contour  $L_0$  encircles the others. In the section 1 we shall define the auxiliary functions involving in the construction of the mapping (1) of the domain  $D$  onto the unit disk with radial and circular slits. In the section 2 the existence and the univalence of such a mapping will be proved. In the section 3 we show that the function (2) has at least one stationary point in  $D$  if  $n \geq 2$ ; the doubly-connected example is constructed where the function (2) has no stationary points.

Let us note that a number of the assertions of this note can be transferred to the general case of Jordan domains; we won't stop on details.

## 2. Functions $S(w, w_0)$ , $S^*(w, w_0)$ and their properties

Let  $1 < m < n$ . We let  $\Gamma_1$  denote the collection of contours  $L_0, L_1, \dots, L_m$ , and let  $\Gamma_2$  be a finite set of curves  $L_{m+1}, L_{m+2}, \dots, L_n$ . Let us introduce two fundamental functions  $S(w, w_0)$  and  $S^*(w, w_0)$  which are the analogies of the Green and Neumann functions for the first and second problems of mathematical physics. The quantity  $S(w, w_0)$  is defined by the following properties:

- 1) the function  $s(w, w_0) = S(w, w_0) + \ln |w - w_0|$  is harmonic everywhere in the region  $D$ ;
- 2)  $S(w, w_0)$  has the following boundary values:

$$S(t, w_0) = 0, \quad t \in \Gamma_1, \quad \text{and} \quad (\partial S / \partial n)(t, w_0) = 0, \quad t \in \Gamma_2, \quad (3)$$

where  $\vec{n}$  is the inner normal to the boundary  $\partial D$ , and the notation  $t \in \Gamma_k$  means that  $t$  varies over all of the contours in the collection  $\Gamma_k$ ,  $k = 1, 2$ .

The function  $S^*(w, w_0)$  is defined analogously with

$$(\partial S^* / \partial n)(t, w_0) = 0, \quad t \in \Gamma_1, \quad \text{and} \quad S^*(t, w_0) = 0, \quad t \in \Gamma_2, \quad (4)$$

instead of (3). Functions  $S(w, w_0)$  and  $S^*(w, w_0)$  are uniquely defined by these properties, and their existence follows from the general theorems of the potential theory or from the following reasons. Using the idea of the double of the multiply connected domain we construct the Riemann surface  $\mathfrak{R}$ , sewing the region  $D$  and its copy,  $\tilde{D}$ , along boundary contours  $\Gamma_2$ . Due to the second boundary condition in (3) the problem of search of function  $S(w, w_0)$  harmonically continues from  $D$  to  $\tilde{D}$ . At the same time the values  $S(w, w_0)$  vanish on each of  $2(m+1)$  boundary components of the border of  $\mathfrak{R}$ . Thus the finding of the function  $s(w, w_0) = S(w, w_0) + \ln |w - w_0|$  on the Riemann surface  $\mathfrak{R}$  of the genus  $n - m - 1$  leads to the usual Dirichlet problem which solvability is well-known (see, e.g., [6]).

Integral representation for harmonic functions and boundary behavior of  $S(w, w_0)$  and  $S^*(w, w_0)$  imply the following

**Property 1.** *If  $u(w)$  is a harmonic function, which is continuously differentiable in the closed domain  $\overline{D}$ , then we have*

$$u(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} u(t) \frac{\partial S}{\partial n}(t, w) d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n}(t) S(t, w) d\sigma, \quad (5)$$

$$u(w) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n}(t) S^*(t, w) d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2} u(t) \frac{\partial S^*}{\partial n}(t, w) d\sigma. \quad (6)$$

The following assertion establishes the symmetry of the functions  $S$  and  $S^*$ .

**Property 2.** *Functions  $S(w, w_0)$  and  $S^*(w, w_0)$  are harmonic in  $D$  with respect to  $w_0$  (for fixed  $w \neq w_0$ ), and*

$$S(w, w_0) = S(w_0, w), \quad S^*(w, w_0) = S^*(w_0, w).$$

The proof is completely the same as the one for the Green function to be symmetric with respect to its arguments (see, for instance, [7]).

To formulate the property 3 we are needed in some constructions which we shell introduce now.

By the addition of the conjugate functions  $U(w, w_0)$  and  $U^*(w, w_0)$  we complete the functions  $S(w, w_0)$  and  $S^*(w, w_0)$  up to the functions  $T(w, w_0) = S(w, w_0) + iU(w, w_0)$  and  $T^*(w, w_0) = S^*(w, w_0) + iU^*(w, w_0)$  and which are analytic with respect to  $w$ , harmonic with respect to  $w_0$ , and multi-valued in  $D$ . Let us find their increments when a point  $w$  goes around the closed curves homotopic to the boundary contours. It is easy to see that the circuit along the contours  $L_k \in \Gamma_1$  doesn't change the function  $T^*(w, w_0)$ , but gives to  $T(w, w_0)$  the increments

$$-2\pi i \xi_k(w) = \int_{L_k} dT(t, w) = i \int_{L_k} \frac{\partial U}{\partial \sigma}(t, w) d\sigma = -i \int_{L_k} \frac{\partial S}{\partial n}(t, w) d\sigma. \quad (7)$$

Similarly, under the circuit of the contour  $L_k \in \Gamma_2$  the function  $T(w, w_0)$  remains former, but  $T^*(w, w_0)$  obtains the increment

$$-2\pi i \xi_k^*(w) = \int_{L_k} dT^*(t, w) = -i \int_{L_k} \frac{\partial S^*}{\partial n}(t, w) d\sigma. \quad (8)$$

Periods  $\xi_k(w)$  and  $\xi_k^*(w)$  are functions harmonic and single-valued in  $D$ . Formulae (5), (6) imply that the boundary values  $\xi_k(w)$  vanish on all of the contours  $\Gamma_1$  except  $L_k (\in \Gamma_1)$  where these values are equal to unit; on the rest of the boundary we have  $(\partial \xi_k / \partial n)|_{\Gamma_2} = 0$ . Analogously,  $\xi_k^*|_{L_j} = 0$ ,  $\xi_k^*|_{L_k} = 1$  for  $L_k \in \Gamma_2$  and  $L_j \in \Gamma_2$ ,  $j \neq k$ ;  $(\partial \xi_k^* / \partial n)|_{\Gamma_1} = 0$ .

Functions  $\xi_k(w)$  and  $\xi_k^*(w)$  are analogs of the harmonic measures in the Dirichlet problem. We apply now to these functions the procedure of completion them by the conjugate functions. As a result we obtain analytic functions  $\zeta_k(w)$ ,  $k = \overline{0, m}$ , and  $\zeta_k^*(w)$ ,  $k = \overline{m+1, n}$ , which are determined to within an imaginary constant. They admit integral representations following from (7) and (8):

$$\zeta_k(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} \frac{\partial T}{\partial n}(t, w) d\sigma, \quad \zeta_k^*(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} \frac{\partial T^*}{\partial n}(t, w) d\sigma.$$

When a point  $w$  goes around the closed curves homotopic  $L_j$ , the functions  $\zeta_k(w)$  and  $\zeta_k^*(w)$  get the imaginary increments

$$2\pi i A_{jk} = \int_{L_j} d\zeta_k(w) = -i \int_{L_j} \frac{\partial \xi_k}{\partial n}(t) d\sigma, \quad k = \overline{0, m}, \quad (9)$$

and

$$2\pi i A_{jk}^* = \int_{L_j} d\zeta_k^*(w) = -i \int_{L_j} \frac{\partial \xi_k^*}{\partial n}(t) d\sigma, \quad k = \overline{m+1, n},$$

respectively. Owing to the above mentioned boundary behavior of the functions  $\xi_k(w)$  and  $\xi_k^*(w)$  all of the constants  $A_{jk}$  for  $j > m$ ,  $A_{jk}^*$  for  $j \leq m$  are equal to zero. It follows from the relation

$$A_{jk} = -\frac{1}{4\pi^2} \iint_{L_j L_k} \frac{\partial^2 S(t, \tau)}{\partial n(t) \partial n(\tau)} d\sigma(t) d\sigma(\tau) = A_{kj}$$

that the numbers  $A_{jk}$ ,  $j, k = \overline{0, m}$ , form the symmetric matrix. Similar symmetry is obtained for the matrix with entries  $A_{jk}^*$ ,  $j, k = \overline{m+1, n}$ . We are able now to formulate and prove the following

**Property 3.** Ranks of matrices  $\{A_{jk}\}_0^m$  and  $\{A_{jk}^*\}_{m+1}^n$  are equal  $m$  and  $n - m - 1$ , respectively.

Proof is carried out for the matrix  $\{A_{jk}\}_0^m$  (the matrix and  $\{A_{jk}^*\}_{m+1}^n$  is treated similarly). Following to [8] we form a harmonic function in  $D$ ,  $\xi(w) = \sum_{k=0}^m \alpha_k \xi_k(w)$ , and calculate an integral

$$\frac{1}{2\pi} \iint_D [\text{grad} \xi(w)]^2 du dv = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \xi(t) \frac{\partial \xi}{\partial n}(t) d\sigma = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \xi(t) \frac{\partial \xi}{\partial n}(t) d\sigma.$$

Using the inequalities (9) and taking into account the boundary properties of the function  $\xi(w)$ , we get

$$\frac{1}{2\pi} \iint_D [\text{grad} \xi(w)]^2 du dv = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m A_{jk} \alpha_j \alpha_k. \quad (10)$$

The quantity in the left-hand side of the equality (10) is always non-negative: it vanishes only in the case  $\text{grad} \xi \equiv 0$  in  $D$ , i.e. when  $\xi(w) \equiv \text{const}$ . But then all of the boundary values,  $\alpha_k$ , of the function  $\xi(w)$  on the contours  $\Gamma_1$  are equal to each other.

Conversely, if all of the boundary values,  $\alpha_k$ , of the function  $\xi(w)$  are equal to each other, then we obtain the boundary value problem for  $\xi(w)$ ,

$$\xi|_{\Gamma_1} = \alpha, \quad (\partial \xi / \partial n)|_{\Gamma_2} = 0,$$

which, by the uniqueness, has only one solution,  $\xi(w) \equiv \alpha$  (it is received by the transfer to the double of the domain  $D$ ). Thus we have proved the validity of the non-negativity relation

$$\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m A_{jk} \alpha_j \alpha_k \geq 0,$$

where the equality is attained only when all of  $\alpha_k$ 's are equal to each other.

We set now  $\alpha_0 = 0$ . The quadratic form

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m A_{jk} \alpha_j \alpha_k = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m A_{jk} \alpha_j \alpha_k$$

vanishes only when all of  $\alpha_k$ 's are equal to  $\alpha_0$ , i.e. equal to zero. Therefore, the matrix  $\{A_{jk}\}_1^m$  is positive definite, and hence it has non-zero determinant. Now we will show that the latter is the rank minor.

In fact, it follows from the properties of periods that  $\sum_{j=0}^m A_{kj} = 0$ ,  $k = \overline{0, m}$ , and, moreover, as it is noted above, all of  $A_{jk}$ 's vanish for  $j > m$ . Consequently,

$$A_{k0} + \sum_{j=1}^m A_{kj} = 0, \quad (11)$$

whence  $\det\{A_{kj}\}_0^m = 0$ . Together with the just proved inequality,  $\det\{A_{kj}\}_1^m \neq 0$ , it yields to us the desirable result,  $\text{rank}\{A_{kj}\}_0^m = m$ .

### 3. Mapping onto the unit disk with circular and radial slits

Let  $\{B_{jk}\}_1^m$  and  $\{B_{jk}^*\}_{m+2}^n$  are the inverse matrices to  $\{A_{jk}\}_1^m$  and  $\{A_{jk}^*\}_{m+2}^n$ . We have the following

**Lemma 1.** Let  $D$  be  $(n+1)$ -ly connected Jordan domain with analytic boundary. Function

$$F(w, w_0) = \exp\{-T(w, w_0) - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m B_{jk} \zeta_k(w) \xi_j(w_0)\} \quad (12)$$

maps  $D$  conformally and univalently onto the unit disk with  $m$  cuts along the concentric circular arcs centered at the origin and with  $n - m$  radial slits lying on the lines meeting at the origin.

**Proof.** To find out the geometrical properties of the function (12) we shall determine the multivalence character of  $\arg F(w, w_0)$ . The function

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m B_{jk} \zeta_k(w) \xi_j(w_0) \quad (13)$$

is analytic in  $w$ ; its periods under the circuit along the curves homotopic to the contours from the collection  $\Gamma_2$  are equal to zero. Increments, which (13) receives under the circuit of  $L_l \in \Gamma_1$ , are equal to

$$2\pi i \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m B_{jk} A_{kl} \xi_j(w_0) = 2\pi i \xi_l(w_0).$$

by virtue of (9). The function  $-T(w, w_0)$  has the same periods, therefore the expression

$$\ln F(w, w_0) = -T(w, w_0) + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m B_{jk} \zeta_k(w) \xi_j(w_0) \quad (14)$$

has no periods with respect to the curves homotopic to inner boundary contours  $L_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Let us find an increment of the function (14) relative to  $L_0$ . For this purpose we take into account that the periods  $T(w, w_0)$  and  $\zeta_k(w)$  under the circuit of  $L_0$  are equal to  $2\pi i \xi_0(w_0)$  and, in view of (11), to  $2\pi i A_{k0} = -2\pi i \sum_{j=1}^m A_{kj}$ , respectively. Hence the increment, which  $\ln F(w, w_0)$  receives under the circuit of the contour  $L_0$ , is equal to  $+2\pi i$ . Thus the function  $F(w, w_0)$  is single-valued in  $D$  and has the simple zero at the point  $w = w_0$ .

For the values of (12) we shall determine the modules on the contours of  $\Gamma_1$  and the arguments on the contours of  $\Gamma_2$ . For this purpose we shall calculate the real part of the function  $\ln F(w, w_0)$  on  $\Gamma_1$ , and its imaginary part on  $\Gamma_2$ . We consider the known boundary values of  $T(w, w_0)$  and  $\zeta_k(w)$  to find that

$$\ln |F(t, w_0)| = \begin{cases} 0, & t \in L_0, \\ -\sum_{j=1}^m B_{jk} \xi_j(w_0), & t \in L_k, k = \overline{1, m}, \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \arg F(t, w_0) = 0, \quad t \in L_k, k = \overline{m+1, n}.$$

It follows that the value  $|F(t, w_0)|$  is constant on every contour  $L_k \in \Gamma_1$ , and  $\arg F(t, w_0)$  is constant on every contour  $L_k \in \Gamma_2$ . We conclude from these facts that the function  $F(w, w_0)$  maps  $D$  on the domain  $D_F = F(D)$  such that the images of the boundary curves in  $\Gamma_1$  lie on the circles, and the images of the boundary curves in  $\Gamma_2$  lie on the straight lines  $\arg F(t, w_0) = \text{const}$ . An argument of the function  $F(w, w_0)$  don't change when  $w$  circumscribes any contour  $L_k$ ,  $k \neq 0$ , therefore the image of every such contour will be the cut along an arc of the circle ( $k = \overline{1, m}$ ) or radial slit ( $k = \overline{m+1, n}$ ) on some Riemann surface over the plane of the variable  $F$ . Since  $\arg F(t, w_0)$  increases by  $2\pi$  when  $w$  circumscribes  $L_0$ , then the image of the boundary contour  $L_0$  will be the unit circle  $|F| = 1$ .

Having used the argument principle, we will prove the univalence of the mapping  $F = F(w, w_0)$ . If  $a$  is a point of the domain  $D_F$  out of concentric circles and straight lines along which the images of boundary contours  $L_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , are located, then

$$\text{var}_{\partial D} \arg [F(w, w_0) - a] = 2\pi. \quad (15)$$

Indeed, when  $w \in L_k$ ,  $k = \overline{m+1, n}$ , the difference  $F - a$  lies in the half plane bounded by a straight line  $\arg F(t, w_0) = \text{const}$ , and hence the variation of  $\arg [F(w, w_0) - a]$  is equal to zero. When  $w \in L_k$ ,  $k = \overline{1, m}$ , we represent  $F - a$  as  $a \cdot [F(w, w_0) / a - 1]$  if  $|a| > |F(t, w_0)|$ ,  $t \in L_k$ , or by the expression  $F(w, w_0) \cdot [1 - a / F(w, w_0)]$  if  $|a| < |F(t, w_0)|$ ,  $t \in L_k$ ; then it is easy to see that the relation

$$\text{var}_{L_k} \arg [F(w, w_0) - a] = 0, \quad k = \overline{1, m},$$

holds. By virtue of simplicity of the closed curve  $F(L_0)$  representing the unit circle an increment of the argument of  $F(w, w_0) - a$  along  $L_0$  is equal to  $+2\pi$ , and (15) is proved.

If a point  $a$  is located at the infinite part of the complement to the unit circle  $|F| = 1$ , then one can show by the same reason that the variation of  $\arg [F(w, w_0) - a]$  along the boundary  $\partial D$  is equal to zero. In view of the argument principle the function  $F(w, w_0) - a$ , which doesn't have poles in the domain  $D$ , is nonzero if  $|a| > 1$ , and is equal to zero only once if  $|a| < 1$ . For the correctness of the latter conclusion it remains to check that the analogous reasons are valid for the points lying on the curves excluded above.

Really, let, for example, the module of the point  $a$  coincides with  $F(t, w_0)$ ,  $t \in L_k$ ,  $k = \overline{1, m}$ . If the point  $b$  ( $|b| \neq |a|$ ) belongs to sufficiently small neighborhood of  $a$ , then, by Rouché's theorem, the functions

$F(w, w_0) - b$  and  $F(w, w_0) - a = [F(w, w_0) - b] + [b - a]$  have the same number of zeros. Therefore the function  $F(w, w_0)$  takes the value  $a$  only once.

Thus we have established that the function  $F(w, w_0)$  produces the univalent mapping from the domain  $D$  onto  $D_F$ , the unit disk with circular and radial slits. Lemma 1 is proved.

**Remark 1.** The function  $F(w, w_0)$  is determined to within a factor depending, in general, on  $w_0$  and which is in modulus equal to unit. This factor will be uniquely determined if we require that one of the radial slits, which is the image of some contour in  $\Gamma_2$  (say, the contour  $L_{m+1}$ ), has the zero inclination.

#### 4. Mityuk's function

We will present the function  $F(w, w_0)$  in the form (1); it is clear that  $f(w_0, w_0) = F'_w(w_0, w_0) \neq 0$ . Function (2) acts as a generalized reduced module of the domain  $D$  at a point  $w$  with respect to the canonical domain  $D_F$  ([1]). Let us call the quantity (2) Mityuk's function, and a quantity

$$\Omega(w) = \exp[2\pi M(w)] = 1 / |f(w, w)| \quad (16)$$

Mityuk's radius of the domain  $D$  at a point  $w$  (see [9], [10]). For finding the critical points of the function  $M(w)$  we get the equation

$$f'_1(w, w) = 0, \quad (17)$$

where  $f'_1(w, w_0)$  means an application of the operator

$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad w = u + iv,$$

to the function  $f(w, w_0)$  with respect to the first argument. There holds the following

**Theorem 1.** Equation (17) is solvable in  $(n + 1)$ -ly connected domain  $D$  with analytic boundary for any  $n \neq 1$ .

**Proof.** As in the case of Gakhov's equation (see, for example, [11]), we will reduce the solvability of (17) to the existence problem of stationary points for some real surface connected with that equation. Having used the representation (12) of the function  $F(w, w_0)$ , on the base of the symmetry of the function  $S(w, w_0) = \operatorname{Re} T(w, w_0)$  with respect to its arguments and of the symmetry of the matrix  $\{B_{jk}\}_{j,k=1}^m$  we derive the equality  $\ln |F(w, w_0)| = \ln |F(w_0, w)|$ , whence

$$\ln |f(w, w_0)| = \ln |f(w_0, w)|. \quad (18)$$

The relation (18) is principal in our reasonings. Further transforms of the equation (17) coincide with those which were used in [11] for the Gakhov equation. By means of (18) the left-hand side of (17) may be presented as

$$f'_1(w, w) = f(w, w) \frac{\partial}{\partial w} \ln |f(w, w)|. \quad (19)$$

Thus it is possible to write the equation (17) in the form  $(\partial/\partial w)M(w) = 0$ , where  $M(w)$  is Mityuk's function (2).

Equality (19) means that the root of the equation (17) is a stationary, or critical point of the surface with the equation  $\Omega = \Omega(w)$ , where  $\Omega(w)$  is the Mityuk's radius (16). We will explain the boundary properties of function (16).

**Lemma 2.** Function (16) is infinitely differentiable in the domain  $D$  and has the following limit values on the boundary  $\partial D$ :

$$\lim_{w \rightarrow t} \Omega(w) = 0, \quad t \in \Gamma_1, \quad (20)$$

$$\lim_{w \rightarrow t} \Omega(w) = +\infty, \quad t \in \Gamma_2. \quad (21)$$

**Proof of the lemma 2.** Function  $\Omega(w)$  inherits the property of infinite differentiability from the functions entering its representation. Having used (12), we will rewrite the expression for  $\Omega(w)$  in the form

$$\ln \Omega(w) = s(w, w) + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m B_{jk} \xi_j(w) \xi_k(w),$$



where  $s(w, w)$  is a regular part of the function  $S(w, w_0)$  calculated at a point  $w = w_0$ , that is  $s(w, w) = \lim_{w_0 \rightarrow w} [S(w, w_0) + \ln |w - w_0|]$ .

We will prove a limit relation (21) (proof of the equality (20) is completely analogous). By virtue of the boundedness of the functions  $\xi_k(w)$  in the closed domain  $\overline{D_w}$  it is sufficient to establish that

$$\lim_{w \rightarrow t} s(w, w) = +\infty, \quad t \in \Gamma_2. \quad (22)$$

We will prove (22) for one of the contours  $L_k \in \Gamma_2$ .

It follows from the equalities (3) that the function  $S(w, w_0)$  is the conformal invariant. In order to write this fact it will be convenient to correct notations for a short time. Domains connected by conformal mappings are denoted by the same letter  $D$ , but they differ in lower indices corresponding to variables which run over these  $D$ 's; so the new notation for our  $D$  is  $D_w$ . Furthermore, we mark the dependence on the domains in the notations of fundamental and related functions defined in these domains:  $S(w, w_0) = S(D_w; w, w_0)$ , etc. As a result we receive the formula expressing change of  $s(D_w; w, w)$  under the conformal transformations of the domain  $D_w$ :

$$s(D_w; w, w) = s(D_\zeta; \zeta, \zeta) + \ln |\phi'(\zeta)|, \quad (23)$$

where  $D_w = \phi(D_\zeta)$ ,  $w = \phi(\zeta)$ . Considering the law of change (23), we pass to auxiliary circular domain  $D_\zeta$  (unit disk minus  $n$  non-intersecting closed disks lying within it), and we map it onto the domain  $D_w$  by a function  $w = \phi(\zeta)$ . We take the unit circle centered at the origin as an outer circle  $L_{\zeta_0} \in \partial D_\zeta$  corresponding to the contour  $L_k = L_{wk}$ .

It is well-known that for the domain  $D_w$  with smooth boundary  $\partial D_w$  whose tangent slope angle as a function of the arc parameter  $\sigma$  satisfies the Hölder condition the derivative of the conformal mapping  $w = \phi(\zeta)$  from  $D_\zeta$  onto  $D_w$  has the bounded module  $|\phi'(\zeta)|$ . Therefore on the basis of (23) we will reduce the equality (22) to the form

$$\lim_{\zeta \rightarrow e^{i\theta}} s(\zeta, \zeta) = +\infty. \quad (24)$$

Let us consider the function  $S(\zeta, \zeta_0)$  harmonic in  $D_\zeta \setminus \{\zeta_0\}$  whose normal derivative vanishes on the outer circle  $L_{\zeta_0}$ . Due to this fact the function  $S(\zeta, \zeta_0)$  may be harmonically extend beyond the unit circle by the symmetry principle (see, e.g., [12], p. 471). This extension is given by the formula

$$\tilde{S}(\zeta, \zeta_0) = \begin{cases} S(\zeta, \zeta_0), & |\zeta| < 1, \\ S(1/\bar{\zeta}, \zeta_0), & |\zeta| > 1. \end{cases}$$

Let's note that  $S(1/\bar{\zeta}, \zeta_0) = -\ln |(1 - \zeta\bar{\zeta}_0)/\zeta| + s(1/\bar{\zeta}, \zeta_0)$ ,  $|\zeta| > 1$ . The first summand here is the function harmonic in the whole plane except the point  $1/\bar{\zeta}_0$ . Hence the function  $S(\zeta, \zeta_0)$  is represented in the form

$$S(\zeta, \zeta_0) = -\ln |(\zeta - \zeta_0)(1 - \zeta\bar{\zeta}_0)| + h(\zeta, \zeta_0),$$

at the same time

$$s(\zeta, \zeta_0) = -\ln |1 - \zeta\bar{\zeta}_0| + h(\zeta, \zeta_0), \quad (25)$$

where the function  $h(\zeta, \zeta_0)$  harmonic in  $\zeta$  has no singularities at the point  $\zeta = \zeta_0$ . Besides this, the normal derivative of the function  $h(\zeta, \zeta_0)$  vanishes on the unit circle. Using an integral representation (6) for  $h(\zeta, \zeta_0)$  and setting  $\zeta_0 = \zeta$  we will come to the formula

$$h(\zeta, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m \int_{L_{\zeta k}} \frac{\partial h(t, \zeta)}{\partial n} S^*(t, \zeta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=m+1}^n \int_{L_{\zeta k}} h(t, \zeta) \frac{\partial S^*(t, \zeta)}{\partial n} d\theta. \quad (26)$$

If now  $\zeta \rightarrow e^{i\theta} \in L_{\zeta_0}$ , then, as it is seen from (26), the quantity  $h(e^{i\theta}, e^{i\theta})$  is bounded. This and (25) imply (24), and, consequently, (22). Lemma 2 is proved.

Let's continue the proof of Theorem 1 returning to old notations and introducing the new one: we will denote by  $\Omega$  the surface  $\Omega = \Omega(w)$  of Mityuk's radius (16).

According to Lemma 2 the smooth surface  $\Omega$  is attached to the boundary contours from the collection  $\Gamma_1$  and has the form of cylinder over each of the components from  $\Gamma_2$ . It is clear that such a surface, in

general, doesn't possess a maximum (top) over the domain  $D$ . We will prove the existence of a stationary point of the surface  $D$  using the properties of the planar vector fields. Let's consider the gradient vector field in  $D$ ,

$$\operatorname{grad} \Omega(w) = \left( \frac{\partial \Omega}{\partial u}, \frac{\partial \Omega}{\partial v} \right), \quad w = u + iv, \quad (27)$$

whose singular points are exactly the roots of the equation (17). Suppose the domain  $D$  doesn't contain the singular points of (27). Then the components of the level lines  $\Omega(w) = \varepsilon$  and  $\Omega(w) = N$  where  $\varepsilon$  and  $N$  are sufficiently small and large positive numbers, respectively, are the simple closed curves that approximate the boundary of the domain  $D$ . We consider the  $((n+1)$ -ly connected) domain  $D^*$  which is bounded by these curves, and we define the winding number of the vector field (27) along the boundary of the domain  $D^*$  by the equality

$$\gamma = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^*} d \ln \frac{\partial \Omega}{\partial w}. \quad (28)$$

It is known from the theory of the planar vector fields [13] that if the winding number (28) is nonzero, then there exists at least one singular point of the vector field (27). Hence in order to prove the solvability of the equation (17) it is enough to show that  $\gamma \neq 0$ .

We will consider the behavior of  $\operatorname{grad} \Omega(w)$  on the boundary of the domain  $D^*$ . Since  $D^*$  consists of the level lines of the function (16) where the equality

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u} du + \frac{\partial \Omega}{\partial v} dv = 0,$$

is fulfilled, then the vector  $\overrightarrow{\operatorname{grad} \Omega(w)}$  is orthogonal to tangent vector  $(du, dv)$ , i.e. the vector field (27) coincides with the field of normals on the boundary  $D^*$ . Therefore  $\gamma = 1 - n$ . Thus in the case of doubly connected domain ( $n = 1$ ) the winding number of the field (27) is equal to zero. If the connectivity order of the domain  $D$  is greater than two, then  $\gamma \neq 0$ , as was required.

Theorem 1 is proved.

Let's consider the doubly connected case excluded in Theorem 1. We show that the equation (17) can really be unsolvable (cf. [14]).

**Example.** The function

$$F(w, w_0) = \frac{w - w_0}{1 - \bar{w}_0 w} \prod_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(1 - q^{2k} w / w_0)(1 - q^{2k} w_0 / w)}{(1 - q^{2k} w \bar{w}_0)(1 - q^{2k} / (w \bar{w}_0))} \right]^{(-1)^k}$$

maps the ring  $E_q = \{w : q < |w| < 1\}$  conformally onto the unit disk with one radial slit. For doubly connected domain  $E_q$  the equation (17) takes the form

$$0 = \frac{r^2}{1 - r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[ \frac{q^{2k} r^2}{1 - q^{2k} r^2} - \frac{q^{2k} / r^2}{1 - q^{2k} / r^2} \right] \quad (29)$$

( $r = |w|$ ). We will expand every term of the series at the left-hand side of (29) in powers of  $r$  and we will group together the terms with the identical powers of  $r$ . This sequence of operations is reflected in the following chain of equalities:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{m=1}^{\infty} r^{2m} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-q^{2m})^k [r^{2m} - r^{-2m}] = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[ r^{2m} - \frac{(r^{2m} - r^{-2m}) q^{2m}}{1 + q^{2m}} \right] = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^{2m} + r^{-2m} q^{2m}}{1 + q^{2m}}. \end{aligned}$$

The result demonstrates that the equation (17) has no solutions in the doubly connected domain  $E_q$ .

In conclusion we will note that the given example of unsolvability of the equation (17) in doubly connected domain is not the unique.

The obtained results will be published in the journal *Lobachevskii Journal of Mathematics* in 2018.

The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Government of the Republic of Tatarstan within the scientific project № 18-41-160017.

## References

1. Mityuk I. P. A generalized reduced module and some of its applications / I. P. Mityuk // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mathematics. – 1964. – №2. – P. 110-119.
2. Gakhov F. D. On the inverse boundary problems / F. D. Gakhov // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1952. – №86(4). P. 649-652.
3. Kinder M. I. The number of solutions of F. D. Gakhov's equation in the case of a multiply connected domain / M. I. Kinder // Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika). – 1984. – №28(8). – P. 91-95.
4. Kinder M. I. Canonical conformal mappings of multiply connected domains for inverse boundary value problems / M. I. Kinder // Dep. in VINITI. – 1983. – № 5871-83. – 52 p.
5. Kinder M. I. Exterior inverse boundary value problem in multiply connected regions and on Riemann surfaces / M. I. Kinder. – PhD in Mathematics, Kazan State University, 1984. 146 p.
6. Nevanlinna R. Uniformisierung / R. Nevanlinna. – Springer-Verlag, Berlin, 1967. – 394 p.
7. Stoilov S. The theory of functions of a complex variable / S. Stoilov. – 1962. – Moscow, Vol.2. – 416 p.
8. Schiffer M. Some recent developments in the theory of conformal mappings. Appendix to the book: R. Courant, Dirichlet's principle, conformal mappings, and minimal surfaces. / M. Schiffer. – New York, 1950. 330 p.
9. Elizarov A. M. Strict superharmonicity of Mityuk's function for countably connected domains of simple structure / A.M. Elizarov, A.V. Kazantsev, M.I.Kinder // Lobachevskii J. Math. – 2017. – №38(7). P. 408-413.
10. Kazantsev A.V. Sectio Aurea conditions for Mityuk's radius of two-connected domains / A.V. Kazantsev // Uchenye Zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie nauki. – 2017 – №159(1). – P. 33–46.
11. Kinder M. I. Investigation of F. D. Gakhov's equation in the case of multiply connected domains / M.I.Kinder // Trudy Sem. Kraev. Zadacham, Kazan University. – 1985. – №22. – P. 104–116.
12. Hurwitz A. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen / A. Hurwitz, R. Courant. – Berlin: Springer-Verlag, 1964. – 706 p.
13. Krasnosel'skii M. A. Plane Vector Fields / M. A. Krasnosel'skii, A.I. Perov, A.I.Povolockii, P.P.Zabreiko. – New York, Academic Press, 1966. – 242 p.
14. Sagitova S. B. Investigations of the inverse boundary value problems in multiply connected domains / Sagitova S. B. – PhD in Mathematics, Kazan State University, 1983. – 116 p.

УДК 519.85(023)+372.8:51

## МНОГОУРОВНЕВЫЕ ЗАДАЧИ НА СОРЕВНОВАНИЯХ ПО МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

М.И. Киндер<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [mkinder@rambler.ru](mailto:mkinder@rambler.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В статье разбираются исследовательские (многоуровневые) задачи, которые предлагались автором на математических олимпиадах школьников, а также на соревнованиях по спортивному программированию различного уровня. Обсуждаются связи и рекуррентные соотношения между классическими комбинаторными объектами, которые возникают при анализе и исследовании этих задач. Выделяются подзадачи и вопросы, относящиеся к «окрестности» проблемы; их решение представляет собой своеобразные уровни «погружения» в решение общей задачи. Некоторые из предлагаемых в статье задач были использованы на 1-ой международной проектной математической олимпиаде «Ачалыш» (Казань, 2017 г.). Часть задач предлагалась на международных соревнованиях по спортивному программированию — Открытом Кубке имени Е.В. Панкратьева в 2015-2016 гг. и на кубке международной школы ISI (Junior) в июне 2018 г.*

**Ключевые слова:** олимпиады по математике, олимпиады по спортивному программированию, многоуровневые задачи, исследовательские задачи для школьников, комбинаторные объекты.

### 1. Введение

Новые образовательные стандарты обучения предполагают формирование культуры учебно-исследовательской и проектной деятельности школьника.

Как отмечается в известной книге [7], умение решать нестандартные (исследовательские, проблемные, поисковые, творческие и т.п.) задачи является одним из основных показателей уровня математического развития школьника, глубины освоения учебного материала.

При таком подходе ученик неизбежно сталкивается с необходимостью ставить вопросы и искать на них ответы, придумывать гипотезы, доказывать и опровергать их. Поэтому исследовательские задачи, по сути, являются органической частью обучения математике.

Хорошая задача для исследования содержит большой простор для продвижения, уточнений, вспомогательных задач, обобщений, а при доказательстве используются разнообразные методы. Кроме того, качество исследовательской задачи определяется наличием «подзадач» (уровней), которые шаг за шагом позволяют начинающему исследователю приблизиться к полному решению основной проблемы. Можно смело утверждать, что такие задачи развивают научный вкус и имеют в перспективе выходы на идеи и методы «большой» математики.

Технология применения исследовательских задач в обучении математике подробно описана, например, в книге [6].

В статье приведено несколько многоуровневых исследовательских проблем по комбинаторике и теории чисел. Почти все задачи по формулировкам и начальным этапам решения доступны младшеклассникам, однако полное решение, как правило, требует некоторой математической культуры. Определённо можно сказать, что это задачи «на вырост», к этим задачам полезно возвращаться несколько раз на разном уровне строгости и обобщения.

Некоторые из предлагаемых в статье задач были использованы на 1-ой международной проектной математической олимпиаде «Ачалыш», которая проходила в Казани в ноябре 2017 года. Часть задач предлагалась на международных соревнованиях по спортивному программированию — Открытом Кубке имени Е.В. Панкратьева в 2015–2016 гг. и на кубке международной школы ISI (Junior) в июне 2018 г. Для их решения команда из трёх программистов должна была найти и реализовать эффективные алгоритмы, которые давали бы ответы на заранее подготовленные тесты за отведенное время. Успешное решение задачи помимо знания языков программирования предполагало математическую подготовку, знание алгоритмов и структур данных, а также слаженную командную работу в условиях дефицита времени.

## 2. Задача «Идеальные наборы гирь»

*На базарах города Новогиреевка все продавцы взвешивают товар с помощью наборов гирь, каждая из которых весит целое число граммов, а общий вес всех гирь составляет  $n$  граммов. Такой набор называют идеальным, если любой груз с весом в целое число граммов от 1 до  $n$  может быть уравновешен некоторым количеством гирь данного набора, и притом единственным образом. Груз всегда кладётся на левую чашку весов, гири — на правую. Два способа взвешивания, отличающиеся лишь заменой некоторых гирь на другие того же веса, считаются одинаковыми. Например, для  $n = 5$  таких наборов три: (1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 3) и (1, 2, 2).*

*Ваша задача — найти все идеальные наборы, имеющие наименьшее количество гирь общим весом в  $n$  граммов.*

**Решение.** В каждом идеальном наборе обязательно содержится по крайней мере одна гиря весом 1 грамм. (В противном случае груз весом в 1 грамм взвесить будет невозможно.) Ясно, что таких гирь может быть несколько, поэтому предположим, что в наборе содержится  $q_1 - 1$  гирь весом 1 грамм, причём  $q_1 > 1$ . Тогда любой вес, меньший  $q_1$ , взвешивается единственным образом, и значит,  $q_1$  будет следующей гирей. Таких гирь тоже может быть несколько; будем считать, что в наборе есть  $q_2 - 1$  гирь весом  $q_1$  граммов, причём  $q_2 > 1$ .

Теперь любой вес от 1 до  $(q_1 - 1) + q_1(q_2 - 1) = q_1 \cdot q_2 - 1$  можно взвесить *единственным* образом с помощью гирь 1 и  $q_1$  граммов, и значит, следующей в идеальном наборе будет гиря массой  $q_1 \cdot q_2$  граммов. Продолжая рассуждения таким образом, приходим к идеальному набору вида

$$\{(q_1 - 1) \cdot 1, (q_2 - 1) \cdot q_1, (q_3 - 1) \cdot q_1 q_2, \dots, (q_s - 1) \cdot q_1 q_2 \dots q_{s-1}\}.$$

Суммарный вес гирь, входящих в идеальный набор, равен  $n$ , поэтому  $n = (q_1 - 1) + (q_2 - 1)q_1 + (q_3 - 1)q_1 q_2 + \dots + (q_s - 1)q_1 q_2 \dots q_{s-1} = q_1 q_2 \dots q_s - 1$ . Другими словами, неизвестные числа  $q_1, q_2, \dots, q_s$

удовлетворяют уравнению

$$q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s = n + 1,$$

из которого внимательный школьник может сделать важное заключение: числа  $q_1, q_2, \dots, q_s$  являются делителями числа  $n + 1$ , причем все  $q_i > 1$ . Отсюда всего один, почти очевидный, шаг до красивой формулировки утверждения в общем виде.

**Теорема 1.** *Количество идеальных наборов общим весом в  $n$  граммов совпадает с количеством упорядоченных факторизаций числа  $n + 1$  без единичных множителей.*

Общее число гирь в идеальном наборе легко подсчитывается:

$$k = (q_1 - 1) + (q_2 - 1) + \dots + (q_s - 1).$$

Когда идеальный набор содержит наименьшее число гирь? Только в случае, когда все  $q_i - 1$  — простые числа. Действительно, если  $q_i = a \cdot b$  — составное, то соответствующее слагаемое в сумме равно  $q_i - 1 = a \cdot b - 1 > (a - 1) + (b - 1)$ , то есть  $ab + 1 > a + b$ , и значит, количество гирь в этом наборе можно уменьшить. Таким образом, приходим еще к одному красивому утверждению [5].

**Теорема 2.** *Количество идеальных наборов минимальной длины равно количеству упорядоченных разложений числа  $n + 1$  на простые множители.*

Например, для  $n + 1 = 12$  имеем три упорядоченных разложения на простые множители:

$$2 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 2.$$

Первому разложению соответствует идеальный набор  $\{1, 2, 4, 4\}$  (то есть  $2 - 1 = 1$  гиря в 1 грамм,  $2 - 1 = 1$  гиря в 2 грамма и  $3 - 1 = 2$  гири в  $2 \cdot 2 = 4$  грамма). Двум другим разложениям соответствуют наборы гирь  $\{1, 2, 2, 6\}$  и  $\{1, 1, 3, 6\}$ .

Реализация алгоритма решения задачи на олимпиаде по информатике состоит из двух шагов:

- Разложение числа  $n + 1$  на простые множители.
- Подсчет количества и вывод идеальных наборов минимальной длины.

Если простые множители в разложении числа  $n + 1$  повторяются, то есть  $n + 1 = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s}$ , приходим к стандартной задаче генерации в лексикографическом порядке наборов вида  $(m_1, m_2, \dots, m_s)$ . Для этого нужно сгенерировать все перестановки сомножителей с повторениями. В общем случае, количество идеальных наборов для веса  $n$  находится по формуле для полиномиальных коэффициентов

$$\frac{(m_1 + m_2 + \dots + m_s)!}{m_1! m_2! \dots m_s!}.$$

На этом математическая составляющая, кажется, исчерпала себя. Однако это не так, и задача допускает дальнейшее развитие и продолжение. Отметим несколько важных фактов и утверждений, связанных с идеальными наборами.

*Замечание 1.* Рассмотренная проблема относится к теории разбиений в перечислительной комбинаторике и впервые была решена в 1886 году английским математиком Мак-Магоном [11]. *Совершенным разбиением (perfect partition)* числа  $n$  называется такое разбиение, в котором каждое натуральное число, не превосходящее  $n$ , можно единственным образом представить в виде суммы частей разбиения. Формула Мак-Магона для подсчета количества совершенных разбиений  $n$  выражается через количество упорядоченных факторизаций числа  $n + 1 = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s}$ :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k C_i^k \prod_{t=1}^s C_{i+m_t-k}^{m_t}, \quad m = m_1 + m_2 + \dots + m_s.$$

*Замечание 2.* В известной online-энциклопедии [12] целочисленных последовательностей количество упорядоченных факторизаций задаётся последовательностью A074206. В зависимости от количества простых множителей, входящих в разложение исходного числа, получаются различные формулы для подсчета упорядоченных факторизаций. Многие авторы отмечали связи частных случаев этой формулы с различными теоретико-числовыми функциями (напр., [1], [10], [3], [4]).

*Замечание 3.* Последовательность A074206 богата различными рекуррентными соотношениями и тождествами, которые можно использовать для подсчёта чисел этой последовательности. Вывод и дальнейшее исследование простых рекуррентных формул для перечисления упорядоченных факторизаций без преувеличения доступны школьникам и студентам. Эти соотношения составляют различные уровни «погружения» в решение общей проблемы.

### 3. Задача «Красивые суммы»

*В городе Прекрасном состоялся конкурс красоты среди арифметических выражений, и первое место на этом конкурсе заняли красивые суммы. Красивыми суммами называют суммы нескольких подряд идущих положительных целых чисел. Например, суммы  $7+8$  и  $4+5+6$  — красивые, а сумма  $3+5+7$  — некрасивая, хотя результат суммирования во всех случаях равен 15. (Сумма из одного слагаемого 15 тоже считается красивой.) Исходя из этого, красотой целого положительного числа будем называть количество представлений этого числа в виде красивых сумм. Например, красота числа 15 равна 4, поскольку 15 представляется в виде красивых сумм ровно четырьмя способами:  $15 = 7+8 = 4+5+6 = 1+2+3+4+5$ .*

*Из двух целых чисел более красивым считается то, у которого больше представлений в виде красивых сумм. При равенстве количеств таких представлений предпочтение в красоте отдаётся меньшему из них. Например, 15 — наименьшее целое число красоты 4.*

*Ваша задача — научиться для данного натурального числа  $n$  находить наименьшее число красоты  $n$  ( $1 \leq n \leq 10^5$ ).*

**Решение.** Красивое представление числа  $B$  запишем в виде суммы

$$B = (m+1) + (m+2) + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}m(m+1) = \frac{1}{2}(n-m)(n+m+1).$$

Сомножители  $n-m$  и  $n+m+1$  имеют разную чётность, ровно один из них нечётный. Значит, красивое разложение числа  $B$  обязательно имеет нечётный множитель. И наоборот, каждому нечётному множителю соответствует разложение  $B$  с нечётным множителем. Таким образом, справедлива

**Теорема 3.** *Количество красивых разложений числа  $B$  совпадает с количеством его нечётных делителей.*

Например, число 15 имеет четыре нечётных делителя 1, 3, 5 и 15, поэтому у него четыре красивых разложения.

Таким образом, исходную задачу можно переформулировать следующим образом: *найти наименьшее натуральное число  $B$  с заданным количеством нечётных делителей, равным  $n$ .* Так как  $n$  не превосходит  $10^5$ , в разложение искомого числа  $B$  могут входить не более 16 наименьших нечётных простых чисел: 3, 5, 7, 11 и так далее до 59. Осталось найти показатели, с которыми они входят в разложение  $B$ .

Пусть  $B = 2^{m_0} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s}$  — разложение на простые множители, тогда количество его нечётных делителей равно

$$\tau_1(B) = (m_1 + 1)(m_2 + 1) \dots (m_s + 1).$$

(Другими словами, отбрасываем делители, связанные со степенями двойки, и у полученного нечётного числа находим количество его делителей.) Поскольку красота числа  $B$  равна  $n$ , отсюда следует, что увеличенные на единицу показатели, будут делителями  $n$ .

Таким образом, алгоритм решения задачи следующий.

- Находим все разложения числа  $n$  на множители в невозрастающем порядке.
- Для каждого из них записываем соответствующее наименьшее нечётное  $B_i$ , имеющее в точности  $n$  делителей.
- Среди полученных чисел  $B_i$  выбираем наименьшее. Оно и будет равно  $B$ .

Например, число  $n = 15$  имеет два разложения на множители в невозрастающем порядке: 15 и  $5 \cdot 3$ , которым соответствуют наименьшие нечётные числа  $3^{14-1}$  и  $3^{5-1} \cdot 5^{3-1}$ . Наименьшим среди них будет второе. (Для сравнения чисел между собой необязательно вычислять каждое из них — можно сравнить логарифмы этих чисел.)

### 4. Задача «Наборы чисел с заданным значением НОК»

Двоечник Петька был ленивым и часто прогуливал уроки. Теплым майским днём решил Петька вместо урока математики сходить на речку, через лес. Но не смог он добраться до речки — встретила ему на пути Баба-Яга. Решила она проучить Петьку и не отпускать домой, пока не решит задачу по математике. По той самой теме, которую он прогулял. А задача была такая. Назвала Баба-Яга два натуральных числа  $m$  и  $k$ . И нужно было Петьке найти количество упорядоченных наборов из  $k$  натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное равно данному числу  $m$ . Например, для  $m = 10$  и  $k = 2$  существует 9 наборов из двух целых положительных чисел, у которых наименьшее общее кратное равно 10:

$$(1; 10), (10; 1), (2; 10), (10; 2), (5; 10), (10; 5), (10; 10), (2; 5), (5; 2).$$

И теперь вам нужно найти написать программу, которая позволит дать ответ на задачу и поможет Петьке вернуться домой.

*Замечание 4.* «Легенда» задачи была составлена студентами КФУ, сама задача предлагалась автором на муниципальном этапе Всероссийской олимпиады школьников по информатике в 2016 г.

**Решение.** Для малых значений  $k$  и  $m$  ( $2 \leq k \leq 3$ ,  $1 \leq m \leq 100$ ) все требуемые наборы компьютер может найти несложным перебором. Этот этап исследования задачи можно считать экспериментальным. Методом проб и ошибок юный исследователь определяет возможные закономерности и пытается отыскать связи комбинаторного характера.

Сначала попробуем решить более простую задачу при  $k = 2$ , то есть найдём количество упорядоченных пар натуральных чисел  $a$  и  $b$ , для которых наименьшее общее кратное равно данному числу  $m$ .

Пусть пара чисел  $a, b$  имеет наименьшее общее кратное, равное  $n$ . В этом случае каждое из чисел  $a, b$  является делителем  $n$ . Поэтому если  $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_s^{n_s}$  — разложение числа  $n$  на простые множители, то должно быть:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s} \quad \text{и} \quad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_s^{\beta_s},$$

причём  $0 \leq \alpha_i \leq n_i$ ,  $0 \leq \beta_i \leq n_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ). Так как  $\text{НОК}(a, b) = n$ , то наибольшее среди чисел  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  равно  $n_i$  для каждого делителя  $p_i$ . Осталось подсчитать общее количество таких наборов  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$  и  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$ .

Для каждого  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$  общее количество упорядоченных пар  $(\alpha_i, \beta_i)$ , у которых каждое число неотрицательно и не превосходит  $n_i$ , равно  $(n_i + 1)^2$ . С другой стороны, все пары чисел  $\alpha_i, \beta_i$ , у которых наибольшее из них меньше  $n_i$ , удовлетворяют соотношениям  $0 \leq \alpha_i \leq n_i - 1$  и  $0 \leq \beta_i \leq n_i - 1$ ; число таких пар, очевидно,  $n_i^2$ . Значит, количество пар  $(\alpha_i, \beta_i)$ , удовлетворяющих условию  $\max(\alpha_i, \beta_i) = n_i$ , будет равно  $(n_i + 1)^2 - n_i^2 = 2n_i + 1$ . Перемножая эти числа для всех  $i$  от 1 до  $s$ , находим требуемое число упорядоченных пар  $a, b$ , для которых наименьшее общее кратное равно  $n$ :

$$\prod_{i=1}^s (2n_i + 1) = (2n_1 + 1)(2n_2 + 1) \dots (2n_s + 1).$$

Полученная формула подсчитывает также количество всех натуральных делителей числа  $n^2 = p_1^{2n_1} p_2^{2n_2} \dots p_s^{2n_s}$ , включая 1 и  $n^2$ ; это число обозначается через  $\tau(n^2)$ .

Например, количество упорядоченных пар  $a, b$ , для которых  $\text{НОК}(a, b) = 100$ , будет равно  $\tau(100^2) = \tau(2^4 \cdot 5^4) = 25$ . Если натуральное число  $n$  не делится ни на один квадрат, кроме 1, общее количество упорядоченных пар  $a, b$  с наименьшим общим кратным  $n$  равно  $3^s$ . (Такие числа  $n$  называются свободными от квадратов числами.)

*Замечание 5.* В энциклопедии [12] целочисленных последовательностей количества упорядоченных пар  $a, b$  с заданным наименьшим общим кратным  $n$  составляют последовательность A048691. Эта же последовательность подсчитывает количество упорядоченных пар взаимно простых чисел, которые являются делителями числа  $n$ .

*Замечание 6.* Количество различных неупорядоченных пар чисел  $a, b$ , для которых наименьшее общее кратное равно  $n$ , можно подсчитать по формуле [8]:

$$\frac{(2n_1 + 1)(2n_2 + 1) \dots (2n_s + 1) + 1}{2} = \frac{\tau(n^2) + 1}{2}.$$

Действительно, в первом подсчёте две пары чисел, отличающиеся только порядком, считались различными. Поэтому каждая пара чисел с заданным наименьшим общим кратным  $n$ , кроме пары  $a = b = n$ , была сосчитана

по два раза. Значит, число существенно различных пар  $a, b$  равно

$$\frac{(2n_1 + 1)(2n_2 + 1) \dots (2n_s + 1) - 1}{2} + 1 = \frac{\tau(n^2) + 1}{2}.$$

В энциклопедии [12] количества *неупорядоченных* пар  $a, b$  с заданным наименьшим общим кратным  $n$  составляют последовательность A018892. Эта же последовательность подсчитывает количество упорядоченных пар  $a, b$  взаимно простых чисел, каждое из которых является делителем  $n$  и  $a \leq b$ .

*Замечание 7.* Отметим еще несколько целочисленных последовательностей из энциклопедии [12], которые так или иначе связаны с наименьшим общим кратным или с наибольшим общим делителем:

а) A100565 — последовательность чисел, подсчитывающих количество упорядоченных троек  $a, b, c$  попарно взаимно простых чисел, которые являются делителями заданного  $n$  и которые образуют *неубывающую* последовательность  $a \leq b \leq c$ . (Также совпадает с количеством троек  $a, b, c$ , для которых  $a \leq b \leq c$  и  $[a, b] = [b, c] = [c, a] = n$ .)

б) A247513, A247516, A247517 — последовательности чисел, подсчитывающих количества троек, четвёрок, пятёрок, у которых их наибольший общий делитель 1, а наименьшее общее кратное  $n$ .

*Замечание 8.* Количество *неупорядоченных* пар взаимно простых делителей числа  $n > 1$  равно  $\frac{1}{2}(\tau(n^2) - 1)$ . Это число равно также количеству способов записать  $\frac{1}{n}$  в виде суммы двух *различных* дробей с числителем 1. ([12], A063647.)

Разберём задачу в общем случае. Пусть  $m$  — наименьшее общее кратное всех чисел нашего набора, и пусть  $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$  — разложение  $m$  на простые множители. Тогда условию задачи удовлетворяют все наборы чисел  $m_i = p_1^{\alpha[i,1]} p_2^{\alpha[i,2]} \dots p_s^{\alpha[i,s]}$ ,  $1 \leq i \leq k$ , у которых неотрицательные показатели  $\alpha[i, t]$  степеней простых чисел  $p_t$  не превосходят  $\alpha_t$  и для которых выполняются условия

$$\max(\alpha[1, t], \alpha[2, t], \dots, \alpha[k, t]) = \alpha_t,$$

для каждого  $t$  от 1 до  $s$ . Подсчитаем число наборов по каждому показателю  $\alpha$  отдельно. Количество наборов, которые удовлетворяют условиям  $0 \leq \alpha_i \leq \alpha$  для всех  $i$  от 1 до  $k$ , равно

$$(\alpha + 1)^k - \alpha^k.$$

В самом деле, число  $\alpha_i$  может принимать  $\alpha + 1$  значений — это все неотрицательные числа от 0 до  $\alpha$ , и по правилу произведения количество таких наборов равно  $(\alpha + 1)^k$ . Исключим из этого множества наборы, для которых  $\max(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) < \alpha$ . Для таких наборов  $0 \leq \alpha_i \leq \alpha - 1$  для всех  $i$  от 1 до  $k$ , поэтому их количество равно  $\alpha^k$ . Значит, количество требуемых наборов равно  $(\alpha + 1)^k - \alpha^k$ . Теперь по правилу произведения число наборов по всем показателям  $\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , равно:

$$L[m, k] = \prod_{i=1}^s [(\alpha_i + 1)^k - \alpha_i^k].$$

Например, для  $m = 10 = 2^1 \cdot 5^1$  и  $k = 2$  получаем

$$L(10, 2) = [(1 + 1)^2 - 1^2] \cdot [(1 + 1)^2 - 1^2] = 9$$

упорядоченных наборов из двух чисел, у которых НОК равен 10.

Алгоритмическая сложность такого решения —  $O(\text{Fact}(m) + k)$ , где  $\text{Fact}(m)$  означает количество операций, необходимых для разложения числа  $m$  на простые множители; как правило, это  $O(\sqrt{m})$ .

Для чисел  $k$  из диапазона  $[1; 10^{18}]$  для быстрого вычисления  $(\alpha + 1)^k$  и  $\alpha^k$  нужно использовать бинарный алгоритм возведения в степень. Алгоритмическая сложность такого решения —  $O(\text{Fact}(m) + \log k)$ .

*Замечание 9.* В «окрестность» разобранной задачи, безусловно, нужно отнести близкую к ней задачу определения упорядоченных наборов чисел с заданными значениями НОД и НОК ([9]). Последняя предлагалась также на соревнованиях по программированию среди студентов (Открытый Кубок имени Е.В. Панкратьева по программированию, 2016 г.). Мы приведём более простую формулировку этой задачи, которая была представлена школьникам на 1-ой международной проектной математической олимпиаде «Ачалыш» (Казань, 2017 г.).

*Вам приходилось когда-нибудь вычислять наибольший общий делитель нескольких чисел? А наименьшее общее кратное? Ну, конечно, да... А приходилось ли вам находить сами числа по известным значениям их наибольшего*



общего делителя (НОД) и наименьшего общего кратного (НОК)? Ну, или хотя бы определять, сколько таких наборов имеют заданные НОД и НОК? Наверное, нет...

Итак, вам необходимо подсчитать количество упорядоченных наборов из  $k$  целых положительных чисел, у которых наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное равны данным числам  $D$  и  $M$  соответственно. Например, при  $k = 2$ ,  $D = 2$ ,  $M = 12$  таких упорядоченных наборов четыре: (2, 12), (12, 2), (4, 6) и (6, 4). Вам необходимо

а) подсчитать количество упорядоченных пар натуральных чисел, у которых НОД равен  $D = 10$ , а НОК равен  $M = 1000$ ;

б) доказать, что количество упорядоченных пар натуральных чисел с заданными НОД и НОК всегда является степенью двойки;

в) подсчитать количество упорядоченных троек натуральных чисел, у которых НОД равен  $D = 10$ , а НОК равен  $M = 1000$ .

*Замечание 10.* До сих пор не решена комбинаторная задача перечисления неупорядоченных наборов натуральных чисел с заданным значением их НОК или с заданными значениями НОД и НОК.

## 5. Заключение

Как отмечалось в [2], создание качественных олимпиадных задач по математике и информатике является сложным и трудоёмким процессом. Большинство задач, которые предлагаются на таких интеллектуальных соревнованиях, представляют собой многоуровневые исследовательские проблемы. В статье представлено несколько таких задач, а также обсуждаются связи с другими близкими вопросами комбинаторного характера. Полное решение некоторых задач неизвестно до сих пор и ждёт своего исследователя.

## Литература

1. Гульден Я., Джексон Д. Перечислительная Комбинаторика / Я. Гульден, Д. Джексон. – М.: Наука, 1990. – 504 с.
2. Киндер М.И. Классические комбинаторные объекты на соревнованиях по программированию / М.И. Киндер // Информационные технологии в образовании и науке – ИТОН 2016: материалы международной научно-практической конференции. – Казань: Изд-во Академии наук РТ. – 2016. – С. 46–52.
3. Киндер М.И. О совершенных разбиениях натуральных чисел / М.И. Киндер // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – № 5.
4. Киндер М.И. Об идеальных и совершенных разбиениях натуральных чисел / М.И. Киндер // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – № 6.
5. Кнут Д. Искусство программирования. Том 4, вып. 3: генерация всех сочетаний и разбиений. / Д. Кнут. – М.: ООО «Вильямс», 2007. – 208 с.
6. Сгибнев А.И. Исследовательские задачи для начинающих / А.И. Сгибнев. – М.: МЦНМО, 2015. – 136 с.
7. Фридман Д.М. Как научиться решать задачи / Д.М. Фридман, Е.Н. Турецкий. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.
8. Яглом А. Неэлементарные задачи в элементарном изложении / А. Яглом, И. Яглом. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 544 с.
9. Bagdasar O. On some functions involving the lcm and gcd of integer tuples / O. Bagdasar // Appl. Math. Inform. and Mech., ser. A2 – 2014. – Vol.6. – P. 91-100.
10. Chor B., Lemke P., Mador Z. On the number of ordered factorizations of natural numbers / B. Chor, P. Lemke, Z. Mador // Discrete Mathematics. – 2000. – Vol.214. – P.123-133.
11. MacMahon P.A. Certain special partitions of numbers / P.A. MacMahon // Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. – 1886. – Vol.21. – P. 367-373.
12. oeis.org – on-line энциклопедия целочисленных последовательностей. – Режим доступа: <http://oeis.org>.

## MULTILEVEL TASKS IN MATHEMATICS AND INFORMATICS OLYMPIADS

M.I. Kinder

*This study explores the use of multi-level tasks which include questions of the enumeration of combinatorial configurations, algorithms and their construction, as well as the solution of some problems, closely related to mathematics and informatics olympiads.*

Keywords: mathematical olympiads, programming contests, informatics olympiads, multilevel tasks in mathematics, multilevel tasks in informatics contests, combinatorial tasks.

УДК 514.822

## УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В MAPLE: ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ

М.Э. Копарова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> marina.koparova@rambler.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*В статье излагаются основные принципы продольных колебаний стержня, алгоритм решения задачи о продольных колебаниях стержня. Приведены примеры решения.*

**Ключевые слова:** уравнения гиперболического типа, СКМ Maple.

### 1. Уравнение гиперболического типа

Семейства  $\varphi(x, y) = const$  и  $\psi(x, y) = const$  можно рассматривать как общие интегралы уравнения  $A(dy)^2 - 2Bdx dy + C(dx)^2 = 0$  - эти уравнение распадается на два уравнения

$$y' = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad (1)$$

$$y' = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \quad (2)$$

Правые части (1) и (2) действительны и различны, следовательно, согласно указанной теореме, функции  $z = \varphi(x, y)$  и  $z = \psi(x, y)$  являются решениями уравнения в частных производных

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 2B\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + C\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Функции  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  линейно независимы, поэтому, возвращаясь к уравнению

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0,$$

можем сделать замену переменных по формулам  $\xi = \varphi(x, y)$  и  $\eta = \psi(x, y)$ .

Так как функции  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  удовлетворяют уравнению

$$A(dy)^2 - 2Bdx dy + C(dx)^2 = 0,$$

в результате этой замены переменных окажется  $\bar{A} = 0$  и  $\bar{C} = 0$ .

Следовательно, уравнение

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0$$

преобразуется к виду:

$$2\bar{B}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \Phi(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0,$$

или, после деление на  $2\bar{B}$  и переноса в другую часть равенства к виду: (3)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \bar{\Phi}(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) \quad (3)$$

представляет собой канонической формой уравнения гиперболического типа.

Иногда пользуются другой канонической формой уравнения гиперболического типа. Сделаем в уравнении (3) замену переменных по закону  $\xi = t + \tau$  и  $\eta = t - \tau$  где  $t, \tau$  - новые переменные.

В результате этого преобразования уравнение (3) примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \bar{\Phi},$$

где  $\bar{\Phi} = 4\Phi$ .

*Уравнение продольных колебаний стержня*

Уравнения продольных колебаний для струны, стержня и пружины записываются одинаково. Рассмотрим стержень, расположенный на отрезке  $(0, 1)$  оси  $x$ . Процесс продольных колебаний может быть описан одной функцией  $U(x, t)$ , представляющей в момент  $t$  смещение точки, имевшей в положении равновесия абсциссу  $x$ . При продольных колебаниях это смещение происходит вдоль стержня. При выводе уравнения будем предполагать, что натяжения, возникающие в процессе колебания, следуют закону Гука. Подсчитаем относительное удлинение элемента  $(x, x + \Delta x)$  в момент времени  $t$ . Координаты концов этого элемента в момент  $t$  имеют значения  $x + u(x, t), x + \Delta x + u(x + \Delta x, t)$  относительно равно

$$\frac{[\Delta x + u(x + \Delta x, t) - u(x, t)] - \Delta x}{\Delta x} = Ux(x + \theta \Delta x, t), (0 \leq \theta \leq 1)$$

Переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$  получим, что относительное удлинение в точке  $x$  определяется функцией  $U(x, t)$ . В силу закона Гука натяжение  $T(x, t)$  равно  $T(x, t) = k(x) Ux(x, t)$ , где  $k$  - модуль Юнга в точке  $x$  ( $k(x) > 0$ ). Пользуясь теоремой об изменении количества движения, получаем интегральное уравнение колебаний

, где  $F(x, t)$  - плотность внешней силы, рассчитанная на единицу длины. Предположим, существование и непрерывность вторых производных функции  $U(x, t)$ . Применяя теорему о среднем и совершая предельный переход при  $\Delta x = x_2 - x_1 \rightarrow 0$  и  $\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$  приходим к дифференциальному уравнению продольных колебаний стержня.  $[k(x)Ux]_x = \rho U_{tt} - F(x, t)$  Если стержень однороден ( $k(x) = const, \rho = const$ ), то это уравнение записывают следующим образом:

$$U_{tt} = aU_{xx} + f(x, t)$$

$$a = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$$

где

$$f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho}$$

есть плотность силы, отнесенная к единице массы.

*Постановка задачи о продольных колебаниях стержня*

Одного уравнения движения (4) или (5)

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \tag{4}$$

или

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{g(x, t)}{\rho} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \tag{5}$$

не достаточно для полного определения движения стержня. Нужно задать начальные условия, то есть задать смещения сечений стержня и их скорости

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

в начальный момент времени

$$u(x, t) = f_1(x),$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = f_2(x) \tag{6}$$

где  $f_1(x), f_2(x)$  - заданные функции на интервале  $(0, 1)$ .

Рассмотрим разные варианты граничных условий на конце стержня, который будем обозначать координатой  $x_k$ .

1) если конец закреплен, то перемещение его равно нулю, т.е.

$$u(x_k, t) = 0 \text{ в любой момент времени } t.$$

2) если конец свободен, то усилие  $F(x, t)$  на этом конце равно нулю (нет внешних сил), т.е.  $u(x_k, t) = 0$  в любой момент времени  $t$ , а, следовательно, учитывая уравнение вида:

$$F(x, t) = S\sigma(x, t) = SE \frac{\partial u(x, t)}{\partial x},$$

где  $S$  - площадь поперечного сечения стержня,  $E$  - модуль упругости материала стержня. Отсюда, получаем, что

$$\frac{\partial u(x_k, t)}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

3) если конец стержня соединен с неподвижной опорой пружиной с жесткостью  $x_k$ , (упругое закрепление конца), то сила, передаваемая пружиной концу стержня при его колебаниях, будет равна  $\pm x_k$

$$u(x_k, t) = 0$$

Тогда граничное условие на этом конце примет вид

$$SE \frac{\partial u(x_k, t)}{\partial x} = c_k u(x_k, t) \quad (8)$$

4) если к концу стержня прикреплен груз массой

$$m_g$$

(случай сосредоточенной массы), то сила, передаваемая от сосредоточенной массы к концу стержня при колебаниях равна

$$m_g \frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial t^2}$$

Таким образом, математическая модель, описывающая продольные колебания упругого однородного ограниченного стержня включает в себя уравнение

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

в случае свободных колебаний, или уравнение

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{g(x, t)}{\rho} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

в случае вынужденных колебаний, начальные условия

$$u(x, t) = f_1(x),$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = f_2(x)$$

и два граничных условия на концах  $x = 0$  и  $x = l$ , каждое из которых в зависимости от варианта закрепления может иметь один из видов (4) - (7).

### Алгоритм решения задачи

Рассмотреть продольные колебания стержня, один конец которого  $x = 0$  и  $x = l$  жестко закреплены, а свободный конец  $x = 0$  получает в начальный момент времени  $t = 0$  продольный ударный импульс  $P$ . До удара стержень находился в состоянии покоя.

При решении данной задачи нам необходимо найти решение уравнения колебаний:

$$c^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) - \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} u \right) = 0,$$

$$0 < x < l, t > 0 \quad (A^*)$$

удовлетворяющее:

1) граничным условиям, то есть

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 \quad (B^*)$$

2) начальным условиям, которые можно записать в виде:

$$u(0, t) = 0$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} u \right)_{t=0} = \left\{ 0, 0 < x < l - \epsilon, v_0 = \frac{P}{\rho \epsilon S}, l - \epsilon < x < l \right\}, \quad (C^*)$$

где  $S$  - площадь поперечного сечения стержня, его плотность.

### Программа

```
> restart;
```

Итак, введем уравнение колебаний (A\*):

```
> assume(c, positive);
```

```
> eq:=c^2*dif(u(x,t),x$2)-dif(u(x,t),t$2)=0;
```

```
0<x,x<l,t>0;
```

И введем начальные условия:

$$D[2](u)(x, y) = \text{subs}(y = 0, \text{diff}(u(x, y), y))$$

- производная от функции  $u(x, y)$  по второму аргументу, вычисленная при  $y = 0$

```
> init_c:=u(x,0)=0,D[2](u)(x,0)=phi(x);
```

Функцию  $\varphi(x)$  определим двумя способами:

1. Как кусочную функцию с помощью команды *piecewise*

```
>phi1:=piecewise(0<x and x<l-epsilon,0,
l-epsilon<x and x<l,P/(rho*epsilon*S));
```

2. Как обобщенную сингулярную функцию Дирака:

```
>phi2:=(x)->P/(rho*S)*Dirac(x-l);
```

```
>phi3:=tg(x*(l-x));
```

Надо заметить, что предел первой функции как раз и является определением второй. Введем теперь граничные условия:

```
>bound_c:=u(0,t)=0,u(1,t)=0;
```

Произведем разделение переменных в уравнении (A\*) представляя функцию  $u(x, t)$  в виде произведения:

```
>U:=u(x,t)=X(x)*T(t);
```

и подставляя эту функцию в уравнение (A\*):

```
>Eq_1:=subs(U,eq);
```

Раскроем скобки в левой части уравнения, поделим результат на  $u(x, t)$  :

```
>Eq_2:=expand(lhs(Eq_1)/(X(x)*T(t)))=0;
```

Вводя константу разделения  $\lambda$  сформируем два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка:

```
>Eq_x0:=op(1,lhs(Eq_2))=-lambda:
Eq_x:=lhs(Eq_x0)*X(x)-rhs(Eq_x0)*X(x)=0;
>Eq_t0:=op(2,lhs(Eq_2))=lambda:
Eq_t:=lhs(Eq_t0)*T(t)-rhs(Eq_t0)*T(t)=0;
```

Как известно, требование ограниченности решения приводит к условию положительности константы разделения, при этом нулевое ее значение также исключается, так как оно противоречит граничным условиям.

Итак

```
>assume(lambda>0):
Sol_x:=dsolve(Eq_x,X(x));
```

Теперь необходимо решить задачу Штурма-Лиувилля, то есть нужно найти все нетривиальные собственные функции  $X(x)$  и собственные значения  $\lambda$ , удовлетворяющие граничным условиям задачи.

Введем упрощенную пользовательскую функцию  $X(x)$  с помощью команды *unapply*

```
>X:=unapply(rhs(Sol_x),x);
>X(x);
```

и перепишем граничные условия  $bound_c$ , которые фактически определяют лишь функцию  $X(x)$  :

```
>bound_cx:={X(0)=0,X(1)=0};
```

Решаем эту систему, как систему линейных однородных алгебраических уравнений - как мы знаем, для существования нетривиального решения этой системы необходимо и достаточно равенство нулю ее определителя, что дает условия на постоянную разделения  $\lambda$ .

Основную матрицу системы вычисляем с помощью команды *genmatrix*

```
>A:=linalg[genmatrix](bound_cx,{_C1,_C2});
>Delta:=linalg[det](A);
op(-1,Delta);
```

Поскольку  $\lambda$  строго больше нуля, так как решения с нулевым значением  $\lambda$  не удовлетворяют граничным условиям, то в уравнении  $\Delta = 0$  необходимо приравнять нулю лишь  $\cos$ .

Для определения всех корней этого уравнения используем команду: *\_EnvAllSolutions:=true* :

```

>_EnvAllSolutions:=true:
>Lambda0:=solve(op(-1,Delta),lambda);
>Lambda:=subs(_Z1='k',Lambda0);
>ev:=unapply(Lambda,k);
>assume(k, posint):
>Xi0:=(x,k)->subs({_C2=0,lambda=ev(k)},X(x));
>Xi0(x,k);

```

Полученная система собственных функций автоматически ортогональна на отрезке  $[0, 1]$ . Нормируем теперь эти функции:

```

>Coef2:=(k)->simplify(int(Xi0(x,k)^2,x=0..l),symbolic);
>assume(l>0):
>Coef:=(k)->simplify(sqrt(Coef2(k)),radical,symbolic);
>Coef(k);
>Xi:=(x,k)->simplify(Xi0(x,k)/Coef(k),radical,symbolic);
>Xi(x,k);

```

Таким образом, собственные значения  $k$ , и собственные функции задачи найдены, это:  $\Xi(x, k)$ .

Найдем теперь общее решение временного дифференциального уравнения, куда необходимо подставить найденные константы разделения.

```

>EQ_t:=subs(lambda=ev(k),Eq_t);

```

Теперь решим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка сразу с учетом первого начального условия, согласно которому,  $T(0) = 0$ :

```

>Tau:=(t,k)->simplify(subs(_C1=C(k),dsolve({EQ_t,T(0)=0},T(t))));
>Tau(t,k);

```

Общее решение задачи примет следующий вид:

```

>Gen_U:=sum(Xi(x,k)*rhs(Tau(t,k)),k=0..infinity);

```

Коэффициенты  $C(k)$  являются коэффициентами Фурье и определяются начальными условиями по формуле:

$$C(k) = \int_0^l \phi(x) \Xi(x, k) dx$$

Подставляя сюда  $\phi(x) = \phi_2(x)$ ,

$$\phi_3(x) = tg(x * (l - x))$$

а также вводя массу стержня:  $M = \rho l S$  найдем:

```

>C2:=(k)->subs(rho=M/(l*S),int(Xi(x,k)*phi3,x=0..l));
>C2(k);

```

Подставляя эти коэффициенты получим решение нашей задачи:

```

>U_0:=(x,t)->subs(C(k)=C2(k),Gen_U);
>U_0(x,t);

```

Это и есть точное решение поставленной задачи для функции  $\phi_3(x)$ .

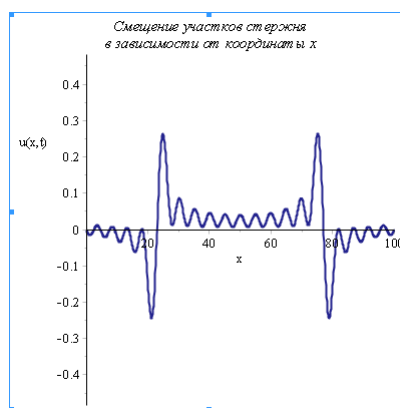
### Визуализация

Построим теперь анимационную модель решений. Для этого заменим точное решение приближенным, ограничиваясь первыми сорока членами ряда:

```
>with(plots):
>U:=(x,t,l,c,M,P)-> sum(-sin(Pi*k*x/l)*sqrt(2)*sqrt(Pi)*
  sin((1/2)*Pi*k)*(cos((1/4)*Pi^2*k^2/l^2)*
  cos((1/4)*l^2)*FresnelS((1/2)*(Pi*k+l^2)*
  sqrt(2)/(l*sqrt(Pi)))-cos((1/4)*Pi^2*k^2/l^2)*
  cos((1/4)*l^2)*FresnelS((1/2)*(Pi*k-l^2)*
  sqrt(2)/(l*sqrt(Pi)))-cos((1/4)*Pi^2*k^2/l^2)*
  sin((1/4)*l^2)*FresnelC((1/2)*(Pi*k+l^2)*
  sqrt(2)/(l*sqrt(Pi)))+cos((1/4)*Pi^2*k^2/l^2)*
  sin((1/4)*l^2)*FresnelC((1/2)*(Pi*k-l^2)*
  sqrt(2)/(l*sqrt(Pi)))-cos((1/4)*l^2)*sin((1/4)*
  Pi^2*k^2/l^2)*FresnelC((1/2)*(Pi*k+l^2)*
  sin((1/4)*Pi^2*k^2/l^2)*FresnelC((1/2)*(Pi*k-l^2)*
  sqrt(2)/(l*sqrt(Pi)))-sin((1/4)*l^2)*
  sin((1/4)*Pi^2*k^2/l^2)*FresnelS((1/2)*(Pi*k+l^2)*
  sqrt(2)/(l*sqrt(Pi)))+sin((1/4)*l^2)*
  sin((1/4)*Pi^2*k^2/l^2)*FresnelS((1/2)*(Pi*k-l^2)*
  sqrt(2)/(l*sqrt(Pi))))*sin(Pi*k*c*t/l)/l, k = 0 .. 40):
>U(x,t,100,10,1,1);
>evalf(U(1,1,100,10,1,1));
```

Анимлируем теперь полученное решение:

```
>plots[animate](U(x,t,100,10,1,0.1),x=0..100,t=0..40,
  color=navy,thickness=2,numpoints=1000,
  frames=64,title='Смещение участков стержня в зависимости от координаты x',
  labels=[x,'u(x,t)']);
```

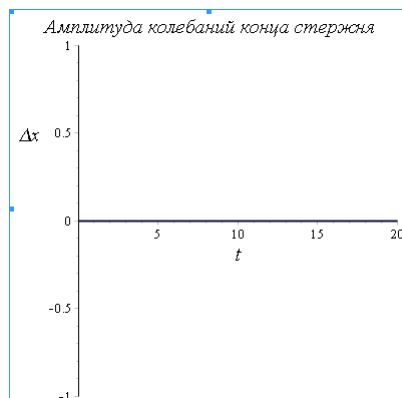


Покажем, как колеблется конец стержня  $x = l$ :

```
>plot(U(10,t,10,1,1,0.1),t=0..20,color=navy,thickness=2,numpoints=2000,
  title='Амплитуда колебаний конца стержня',titlefont=[TIMES,ROMAN,16],
  labels=[t,x],labelfont=[TIMES,ROMAN,16]);
```

Построим анимационную процедуру, изображающую колебания стержня - смещение вдоль стержня цветом, а конец стержня колеблющимся.

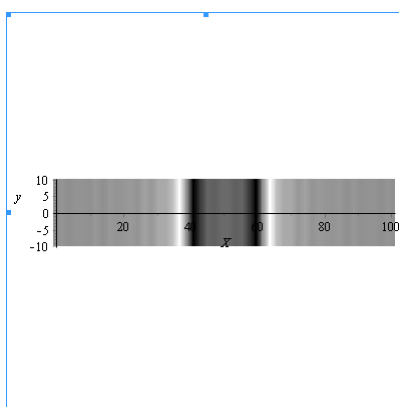




```

>Anim_Osc:=proc(l,c,M,P,T,N) local i,cadr,X,TT,t,dt,u:
  dt:=evalf(T/N,3):
  t:=(i)->evalf(dt*i):
  u:=(X,TT)->U(X,TT,l,c,M,P):
  cadr:=(i)->plots[densityplot](u(X,t(i)),X=0..l,y=-10..10,grid=[50,50],
  style=PATCHNOGRID,scaling=CONSTRAINED):
  plots[display](seq(cadr(i),i=0..N),insequence=true):
  end proc:
>Anim_Osc(100,10,1,1,40,72);

```



## Литература

1. Горюнов А.Ф. Уравнения математической физики в примерах и задачах: Учебное пособие / А.Ф. Горюнов. – Часть 1. – М.:МИФИ, 2008. – 616 с.

## HYPERBOLIC EQUATIONS IN MAPLE: LONGITUDINAL VIBRATIONS OF A ROD

М.Е. Копарова

*The article presents the basic principles of longitudinal oscillations of the rod, the algorithm for solving the problem of longitudinal vibrations of the rod. Examples of solutions are given.*

Keywords: hyperbolic equations, SCM Maple.

УДК 372.862

## ЭФФЕКТИВНЫЕ СПОСОБЫ ОЦЕНКИ УРОВНЯ СФОРМИРОВАННОСТИ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ

Д.М. Коростелева<sup>1</sup>, Т.Ю. Гайнутдинова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> korosteleva.professional@yandex.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет; Казанский государственный энергетический университет

<sup>2</sup> tgainut@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В статье предлагаются современные эффективные способы оценки алгоритмического мышления в контексте педагогической проблемы. Также предлагается авторский метод оценки уровня сформированности алгоритмического мышления в соответствии с современными требованиями к освоению курса информатики.*

**Ключевые слова:** алгоритмическое мышление, мышление, алгоритм, уровень сформированности алгоритмического мышления.

Формирование алгоритмического мышления старшеклассников в контексте современных требований к результатам обучения может быть рассмотрено как в рамках психологической, так и педагогической проблемы. Одной из главных задач общеобразовательного учреждения является развитие интеллектуальных способностей и формирование разных видов мышления учащихся.

Т.Н. Лебедева в понятие «алгоритмическое мышление» вкладывает познавательный процесс, характеризующийся наличием четкой, рациональной последовательности совершаемых мыслительных процессов, детализированных и оптимизированных крупных блоков с последующим осознанным закреплением процесса конечного результата в формализованном виде [1].

Компонентами алгоритмического мышления являются:

1. умение формализовать задачу;
2. умение разбивать задачу на отдельные составные логические блоки;
3. умение определять взаимосвязи этих блоков;
4. умение построить решение задачи на основе блоков с помощью применения метода проектирования «снизу-вверх» или «сверху-вниз», умение провести анализ каждого блока решения задачи и предложить пути по его оптимизации.

Т.Н.Лебедевой были раскрыты критерии сформированности алгоритмического мышления школьников, а именно:

1. знание основных операций, приемов и методов, на основе которых формируется процесс решения задачи, умение производить разрозненные операции (например, на определение только математической модели, распознавание той или иной формы рекурсивного процесса и пр.), что составляет знание этапов решения задач и умение применять их в отдельности;
2. овладение структурой совокупности всех операций (т.е. структуры деятельности по решению задач любого характера: итеративного, рекурсивного). В этом случае ученик должен не только знать этапы решения задач, но и уметь принять их для достижения результата своей деятельности;
3. умение применять знания основных операций, структуры совокупности операций при решении задачи, умение проводить систематизацию и обобщение знаний, умение предлагать пути по оптимизации созданного алгоритма или его отдельных блоков;
4. умение применять свои знания в нестандартных ситуациях, оперирование всеми понятиями и осуществлять перенос полученных знаний на класс других задач (получение бесконечного множества объектов с помощью конечного выражения), при решении нестандартных задач, задач олимпиадного характера, умение сочетать знания из других предметов для решения задач.

На основании вышесказанного можно сделать вывод о том, что алгоритмическое мышление - это познавательный процесс, характеризующийся наличием четкой, рациональной последовательности совершаемых мыслительных процессов, детализированных и оптимизированных крупных блоков с последующим осознанным закреплением процесса конечного результата в формализованном виде, а его развитие, включающее несколько этапов, имеет начало в дошкольном возрасте человека и формируется на протяжении всей жизни.

В процессе уровня сформированности старшеклассников показали свою эффективность следующие методики: Тестирование с использованием авторской методики «Оценка уровня сформированности алгоритмического мышления посредством использования материалов единого государственного экзамена по информатике»; Тестирование с применением методики Т.Н.Лебедевой; Методика «Прогрессивные матрицы Равена».

С учетом основных критериев сформированности алгоритмического мышления, выделенных в работе Т.Н.Лебедевой, нами была сформирована авторская методика оценки уровня сформированности алгоритмического мышления старшеклассников, с целью проверки гипотезы об эффективности использования обучающей системы по программированию в курсе информатики 10-11 классов средней школы.

Данная методика создана на основе материалов Кодификатора элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена по информатике и ИКТ (далее – кодификатор), Спецификации контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2018 года по информатике и ИКТ (далее – спецификация), а также Демонстрационного варианта контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2018 года по информатике и ИКТ (далее - демонстрационный вариант).

Кодификатор элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена по информатике и ИКТ (далее – кодификатор) является одним из документов, определяющих структуру и содержание КИМ ЕГЭ. Он составлен на основе Федерального компонента государственных стандартов основного общего и среднего (полного) общего образования по информатике и ИКТ (базовый и профильный уровни).

В ходе разработки методики для оценивания уровня сформированности алгоритмического мышления старшеклассников было установлено, что материалы ЕГЭ могут быть использованы для оценки алгоритмического мышления старшеклассников [3], поскольку данный экзамен проводится с целью проверки уровня знаний и умений по информатике и ИКТ, определенных на основе Федерального компонента государственных стандартов основного общего и среднего (полного) общего образования по информатике и ИКТ.

Структура тестов методики обеспечивает оптимальный баланс заданий разных типов и разновидностей, трех уровней сформированности проверяющих знания и умения на трех различных уровнях: знания, умения применять знания в стандартной ситуации, а также продуктивного применения в новой ситуации. Содержание экзаменационной работы отражает существенную часть содержания курса информатика и ИКТ. Вышеизложенные факторы обеспечивают валидность результатов методики и надежность измерения уровня сформированности алгоритмического мышления старшеклассников.

Содержание заданий разработано по следующим темам курса информатики и ИКТ (в соответствии со спецификацией и кодификатором): «Информация и ее кодирование», «Моделирование и компьютерный эксперимент», «Системы счисления», «Логика и алгоритмы», «Элементы теории алгоритмов», «Программирование», «Архитектура компьютеров и компьютерных сетей», «Обработка числовой информации», «Технологии поиска и хранения информации».

Таким образом, содержанием методики охватываются основные темы курса информатики и ИКТ, выбранные в соответствии с требованиями освоения программы.

В ходе создания методики были получены консультации к.п.н. Сахиевой Р.Г., к.п.н. Вашетиной О.В., к.т.н. Гайнутдиновой Т.Ю. Распределение заданий методики в соответствии с уровнями в тестах методики [4]:

1. Знаниевый уровень - 8 заданий на знание материала курса информатики и ИКТ (в соответствии со спецификацией).

2. Деятельностный уровень - 15 заданий, проверяющих умение учащегося применять имеющиеся знания по информатике и выполнять действия в соответствии со спецификацией.
3. Продуктивный уровень - 1 задание повышенного уровня, разработанное в соответствии с требованием использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, а именно:
  - (a) Осуществлять поиск и отбор информации.
  - (b) Создавать и использовать структуры хранения данных.
  - (c) Работать с распространенными автоматизированными информационными системами.

Содержание методики совпадает с заданиями ЕГЭ, однако они перераспределены согласно следующему принципу группировки заданий ЕГЭ: предполагается, что оценку можно осуществить посредством объединения заданий из КИМов ЕГЭ в группы заданий, которые позволят оценить уровень знаний и/или умений исходя из следующей классификации:

#### I Знаниевый уровень

1. Знание о системах счисления и двоичном представлении информации в памяти компьютера (Задание в ЕГЭ номер 1).
2. Знание о файловой системе организации данных или о технологии хранения, поиска и сортировки информации в базах данных (Задание в ЕГЭ номер 4).
3. Знание технологии обработки информации в электронных таблицах и методов визуализации данных с помощью диаграмм и графиков (Задание в ЕГЭ номер 7).
4. Знание основных конструкций языка программирования, понятия переменной, оператора присваивания (Задание в ЕГЭ номер 8).
5. Знание о методах измерения количества информации (Задание в ЕГЭ номер 10).
6. Знание базовых принципов организации и функционирования компьютерных сетей, адресации в сети (Задание в ЕГЭ номер 12);
7. Знание позиционных систем счисления (Задание в ЕГЭ номер 16).
8. Знание основных понятий и законов математической логики (Задание в ЕГЭ номер 18).

#### II Деятельностный уровень

1. Умение представлять и считывать данные в разных типах информационных моделей (схемы, карты, таблицы, графики и формулы) (Задание в ЕГЭ номер 2);
2. Умение представлять и считывать данные в разных типах информационных моделей (схемы, карты, таблицы, графики и формулы) (Задание в ЕГЭ номер 3);
3. Умение кодировать и декодировать информацию (Задание в ЕГЭ номер 5);
4. Умение создавать линейный алгоритм для формального исполнителя с ограниченным набором команд (Задание в ЕГЭ номер 6);
5. Умение определять скорость передачи информации при заданной пропускной способности канала, объем памяти, необходимый для хранения звуковой и графической информации (Задание в ЕГЭ номер 9);
6. Умение исполнить рекурсивный алгоритм (Задание в ЕГЭ номер 11);
7. Умение подсчитывать информационный объем сообщения (Задание в ЕГЭ номер 13);
8. Умение исполнить алгоритм для конкретного исполнителя с фиксированным набором команд (Задание в ЕГЭ номер 14);
9. Умение представлять и считывать данные в разных типах информационных моделей (схемы, карты, таблицы, графики и формулы) (Задание в ЕГЭ номер 15);
10. Умение осуществлять поиск в сети информации Интернет (Задание в ЕГЭ номер 17);

11. Работа с массивами (заполнение / считывание / поиск / сортировка / массовые операции) (Задание в ЕГЭ номер 19);
12. Анализ алгоритма, содержащего цикл и ветвление (Задание в ЕГЭ номер 20);
13. Умение анализировать программу, использующую процедуры и функции (Задание в ЕГЭ номер 21);
14. Умении анализировать результат исполнения алгоритма (Задание в ЕГЭ номер 22);
15. Умение строить и преобразовывать логические выражения (Задание в ЕГЭ номер 23);

### III Продуктивный уровень

1. Умение создавать собственные программы (30-50 строк) для решения задач средней сложности (Задание в ЕГЭ номер 27).

Таким образом, в совокупности данная методика оценки уровня сформированности алгоритмического мышления включает 24 задания различного уровня сложности, проверяющих знание элементов содержания курса информатики и ИКТ, изложенных в кодификаторе, разработанном на основе Федерального компонента государственных стандартов основного общего и среднего (полного) общего образования по информатике и ИКТ.

В соответствии с данными требованиями, разработанными Т.Н. Губиной [2] были определены уровни сформированности алгоритмического мышления для каждого из уровней владения - знаи-евый, деятельностный, продуктивный:

- Низкий уровень (программа не компилирует или компилирует с грубыми ошибками, программа не выводит результат или же результат с ошибками).
- Высокий уровень (программа компилирует без ошибок или с мелкими ошибками, ответ на наборах тестовых входных параметров корректен).

Данная методика решает проблему сложности оценки уровня сформированности алгоритмического мышления в виду многокомпонентности данного вида мышления.

### Литература

1. Лебедева Т.Н. Формирование алгоритмического мышления школьников в процессе обучения рекурсивным алгоритмам в профильных классах средней общеобразовательной школы: автореф. дис. ... канд. пед. наук. Челябинский государственный педагогический университет, Челябинск, 2005.
2. Губина Т.Н. Методические приемы развития алгоритмического мышления будущего учителя информатики / Т.Н. Губина // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2016. – Т. 12. – № 3-1. – С. 6-16.
3. Васильев А.В. Разработка обучающей системы по математике для школьников в контексте современных тенденций развития дидактической инженерии / А.В. Васильев, Д.М. Коростелева // Информационные технологии в образовании и науке – ИТОН 2016: материалы международной научно-практической конференции. – Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2016. – С. 128-135.
4. Белошистая А.В., Левитес В.В. Развитие логического мышления младших школьников / А.В. Белошистая, В.В. Левитес. – М.: МПСИ, 2012. – 128 с.

### EFFECTIVE METHODS FOR ASSESSING THE LEVEL OF FORMATION OF ALGORITHMIC THINKING OF STUDENTS

D.M. Korosteleva, T.U. Gainutdinova

*In the article, permissive methods for evaluating algorithmic thinking in the context of a pedagogical problem. Also propose an author's method for assessing the level of education in algorithmic thinking in accordance with modern requirements for mastering the course of computer science.*

Keywords: algorithmic thinking, thinking, algorithm, level of formation of algorithmic thinking.

УДК 517.958

## УРАВНЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В MAPLE: КОЛЕБАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ В MAPLE

И.Д. Михайлов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *raboty2015@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*В данной работе изложен алгоритм решения уравнений гиперболического типа для колебания прямоугольной мембраны с помощью метода Фурье. Для решения конкретных примеров использован пакет Maple. Также представлена визуализация колебаний прямоугольной мембраны.*

**Ключевые слова:** уравнения гиперболического типа, плоская мембрана, Maple, метод Фурье.

### 1. Метод Фурье

Метод Фурье - один из распространенных и эффективных методов решения уравнений с частными производными. Этот метод часто встречается и под другими названиями: метод разделения переменных или метод собственных функций. Основная идея этого метода состоит в том, что решение задачи для уравнения с частными производными сводится к решению вспомогательных задач для уравнений с меньшим числом независимых переменных. В частности, если заданное уравнение содержит две независимые переменные, то вспомогательные задачи будут уже зависеть только от одной переменной. Таким образом, решение уравнения с частными производными сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. При применении метода Фурье удобно использовать следующую лемму: если в прямоугольнике  $R$  плоскости  $XOY$ : для некоторых функций

$$(R) : \begin{cases} a < x < b \\ A < y < B \end{cases}$$

выполняется тождество :

$$X(x) = Y(y),$$

то в этом случае

$$X(x) = Y(y) = const.$$

#### *Колебания прямоугольной мембраны*

Рассмотрим мембрану, которая в состоянии покоя имеет форму прямоугольника, ограниченного прямыми  $x = 0$ ,  $x = l$ ,  $y = 0$ ,  $y = m$  (рис.1).

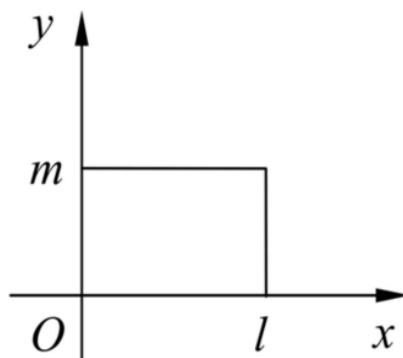


Рис. 1.

Задача о колебаниях мембраны сводится к решению уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

с начальными условиями:

$$u \Big|_{t=0} = f(x, y), \quad u' \Big|_{t=0} = g(x, y) \quad (2)$$

и краевыми условиями, заданными на границе прямоугольника

$$u \Big|_{x=0} = 0, \quad u' \Big|_{x=l} = 0, \quad u' \Big|_{y=0} = 0, \quad u' \Big|_{y=m} = 0 \quad (3)$$

Поставленную задачу будем решать методом Фурье. Ищем решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (3), в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента.

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \quad (4)$$

Из первого условия (4) следует, что  $X(0)Y(y)T(t) = 0$ . Так как нас интересуют решения, тождественно не равные нулю, то  $X(0) = 0$ . Аналогично составим и остальные условия, налагаемые на функции  $X(x)$  и  $Y(y)$ . Выписав их все вместе, получим:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(m) = 0. \quad (5)$$

Дифференцируя дважды функцию (4) по каждому из аргументов, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''YT, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY''T, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = XYT''$$

(аргументы у функций для сокращения записи опущены).

Подставляя выражения для производных в уравнение (1), получим:

$$\frac{T''}{T} = a^2 \left( \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} \right).$$

Левая часть переменных не зависит от  $x$  и  $y$ , а правая часть от переменной  $t$ . Поэтому оно может соблюдаться только при условии, что ни левая, ни правая части не зависят ни от одной из переменных, т.е.

$$\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = const.$$

Далее, так как отношение  $\frac{X''}{X}$  зависит только от  $x$ , а  $\frac{Y''}{Y}$  только от  $y$ , то сумма  $-\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}$  может быть постоянной лишь при условии, что каждое из этих слагаемых есть, в свою очередь, величина постоянная, т.е.

$$\frac{X''}{X} = \lambda^2, \quad \frac{Y''}{Y} = \eta^2.$$

Обе последние постоянные выбраны отрицательными, так как в противном случае нельзя будет удовлетворить краевым условиям (5) без того, чтобы функция обратилась в тождественный нуль. В результате для определения функций  $X(x)$ ,  $Y(y)$ ,  $T(t)$  получаем уравнения:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0 \quad (6)$$

$$Y''(y) + \eta^2 Y(y) = 0, \quad Y(0) = Y(m) = 0 \quad (7)$$

$$T''(t) = a^2(\lambda^2 + \eta^2)T(t) = 0 \quad (8)$$

Решения уравнений (6) и (7) имеют вид:

$$X(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x), \quad Y(y) = D_1 \cos(\eta y) + D_2 \sin(\eta y).$$

Краевые условия  $X(0) = X(l) = 0$  приводят к соотношениям  $C_1 = 0$  и  $\lambda l = k\pi$ , где  $k$  - целое число. Только при соблюдении последнего требования уравнение (6) имеет ненулевое решение. Аналогично, из условий,  $Y(0) = Y(m) = 0$  следует что  $D_1 = 0$  и  $\eta m = n\pi$ , где  $n$  - целое число. Собственные числа  $\lambda_k$  и  $\eta_n$  определяются формулами:

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l}, \quad \eta_n = \frac{n\pi}{m},$$

где  $k$  и  $n$  - любые целые положительные числа. Каждой паре собственных чисел соответствуют собственные функции

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad Y_n(y) = \sin \frac{k\pi y}{m} \quad (9)$$

Из (9) ясно, что если брать числа  $k$  и  $n$  отрицательными, то новых собственных функций не получится. Также, очевидно, что, умножая любую из собственных функций на произвольную постоянную, мы будем снова получать решение уравнения (6) или (7) с нулевыми краевыми условиями. Перейдем к уравнению (8). Для каждой пары собственных чисел  $\frac{k\pi}{l}$  и  $\frac{k\pi}{m}$  оно имеет вид

$$T''(t) + \pi^2 + a^2 \left( \frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right) T(t) = 0.$$

Решение этого уравнения обозначим функцией  $T_{kn}(t)$  с двумя индексами. Произвольные постоянные, входящие в его общее решение, придется также обозначить буквами с двумя индексами:  $a_{kn}$  и  $b_{kn}$ . С учетом принятых обозначений будем иметь:

$$T_{kn}(t) = a_{kn} \cos(\omega_{kn} t) + b_{kn} \sin(\omega_{kn} t) \quad (10)$$

где

$$\omega_{kn} = \pi a \sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2}}$$

собственные частоты колебаний мембраны.

Составив произведение функций (9) и (10), образуем функции  $u_{kn}(x, y, t)$ , удовлетворяющие уравнению (1) и краевым условиям (4). Каждой паре положительных чисел  $k$  и  $n$  соответствует функция:

$$u_{kn}(x, y, t) = (a_{kn} \cos(\omega_{kn} t) + b_{kn} \sin(\omega_{kn} t)) \sin(\lambda_k x) \sin(\eta_n y). \quad (11)$$

Прежде чем переходить ко второй части метода Фурье – отысканию решения, удовлетворяющего начальным условиям, выясним свойства функций (11). Функции  $u_{kn}(x, y, t)$  описывают собственные колебания мембраны. Каждая из них представляет собой стоячую волну для прямоугольной мембраны. Запишем формулу (11) в виде

$$u_{kn}(x, y, t) = F_{kn} \sin(\omega_{kn} t + \phi_{kn}) \sin(\lambda_k x) \sin(\eta_n y)$$

где

$$F_{kn} = \sqrt{a_{kn}^2 + b_{kn}^2}, \quad \text{tg}(\phi_{kn}) = \frac{a_{kn}}{b_{kn}}$$

Ясно видно, что каждая точка  $(x, y)$  мембраны совершает простое гармоническое колебание с частотой  $\omega_{kn}$  и амплитудой  $F_{kn} \sin(\lambda_k x) \sin(\eta_n y)$ . Все точки проходят положение в одни и те же моменты времени, определяемые равенствами  $\omega_{kn} t + \phi_{kn} = r\pi$ , где  $r$  принимает значения  $0, 1, 2, 3, \dots$ . Точно также одновременно точки достигают максимального отклонения (в ту или другую сторону). Помимо линий контура, будет  $k-1$  узловых линий, параллельных оси  $Oy$ :

$$x = \frac{l}{k}, \quad x = \frac{2l}{k}, \quad \dots, \quad x = \frac{(k-1)l}{k},$$

и  $(n-1)$  линий, параллельных оси  $Ox$ :

$$y = \frac{m}{n}, \quad y = \frac{2m}{n}, \quad \dots, \quad y = \frac{(n-1)m}{n},$$



(этих значениях  $\delta$  и  $\delta$  собственные функции обращаются в нуль). Эти линии разобьют мембрану на  $n \times k$  прямоугольников, причем в двух соседних (т.е. имеющих общую сторону) отклонения будут направлены в разные стороны. Центр каждого такого прямоугольника будет являться пучностью, так как в этих точках прямоугольника  $\sin(\lambda_k x) \sin(\eta_n y) = \pm 1$ . Количество пучностей определяется произведением  $n \times k$ .

Для большей наглядности рассмотрим сначала самое простое колебание, соответствующее случаю  $k = n = 1$

$$u_{11}(x, y, t) = F_{11} \sin(\omega_{11} t + \phi_{11}) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{m}\right).$$

Его частота

$$\omega_{11} = \pi a \sqrt{\frac{1^2}{l^2} + \frac{1^2}{m^2}}$$

является наименьшей собственной частотой и характеризует основной тон мембраны. Особенно просто выражение для частоты основного тона в случае квадратной пластинки ( $m = l$ ). Здесь

$$\omega_{11} = \frac{\pi a \sqrt{2}}{l} = \frac{\pi \sqrt{2}}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

где  $T$  - натяжение, а  $\rho$  - плотность мембраны. Эта частота в  $\sqrt{2}$  раз больше, чем частота колебаний струны, имеющей ту же длину, что и длина стороны мембраны. При колебании мембраны контур ее остается неподвижным. Так как все точки мембраны находятся внутри прямоугольника  $0 < x < l$  и  $0 < y < m$ , то функции  $\sin \frac{\pi x}{l}$  и  $\frac{\pi y}{m}$  положительны и все точки мембраны одновременно находятся то по одну сторону плоскости  $xOy$ , то по другую в зависимости от знака  $\sin(\omega_{11} t + \phi_{11})$ . Наибольшую амплитуду колебаний будет иметь точка, для которой  $\sin \frac{\pi x}{l} = 1$  и  $\sin \frac{\pi y}{m} = 1$ , т.е. точка с координатами  $(\frac{l}{2}, \frac{m}{2})$  - центр мембраны. Узловые линии совпадают с контуром мембраны.

Вернемся к задаче отыскания решения (1) удовлетворяющего начальным условиям (2). Как обычно, будем искать его в виде ряда, составленного из частных решений (11). Каждое частное решение зависит от двух индексов:  $k$  и  $n$ , поэтому нам придется образовать двойную сумму

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{kn} \cos(\omega_{kn} t) + b_{kn} \sin(\omega_{kn} t)) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m} \quad (12)$$

Заставляя индексы суммирования  $k$  и  $n$  пробегать все положительные числа независимо друг от друга, мы тем самым учтем все частные решения вида (11). Подставляя  $t = 0$  в функцию  $u(x, y, t)$  и в производную  $\frac{\partial u}{\partial t}$  получим :

$$u \Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m} = f(x, y), \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{kn} b_{kn} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m} = F(x, y), \quad (14)$$

Формулы (13) и (14) представляют разложение функций двух переменных в двойные ряды Фурье. С подобным разложением мы сталкиваемся впервые и поэтому рассмотрим его подробнее. Возьмем систему функций  $\sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m}$  и покажем, что в области  $D: 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq m$  она ортогональна. Это значит, что двойной интеграл, взятый по области  $D$  от произведения двух различных функций системы, равен нулю. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_0^m \sin \frac{k_1 \pi x}{l} \sin \frac{n_1 \pi y}{m} \sin \frac{k_2 \pi x}{l} \sin \frac{n_2 \pi y}{m} dx dy = \\ = \left( \int_0^l \sin \frac{k_1 \pi x}{l} \sin \frac{k_2 \pi x}{l} dx \right) \left( \int_0^m \sin \frac{n_1 \pi y}{m} \sin \frac{n_2 \pi y}{m} dy \right). \end{aligned}$$

Поскольку система функций  $\sin \frac{k\pi x}{l}$  ортогональна в интервале  $[0, l]$ , а система  $\sin \frac{n\pi y}{m}$  в интервале  $[0, m]$ , то написанное выражение равно нулю, если соблюдается хотя бы одно из неравенств  $k_1 \neq k_2$  и  $n_1 \neq n_2$ . Если же  $k_2 = k_1 = k$  и  $n_2 = n_1 = n$ , то

$$\int_0^l \int_0^m \sin^2 \frac{k\pi x}{l} \sin^2 \frac{n\pi y}{m} dx dy = \int_0^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx \int_0^m \sin^2 \frac{n\pi y}{m} dy = \frac{lm}{4}$$

Исходя из установленных соотношений, легко найти коэффициенты  $a_{kn}$  и  $b_{kn}$  разложений (13) и (14). Формулы для их отыскания совершенно аналогичны обычным формулам Фурье:

$$a_{kn} = \frac{4}{lm} \int_0^l \int_0^m f(x, y) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m} dx dy, \quad (15)$$

$$b_{kn} = \frac{4}{lm\omega_{kn}} \int_0^l \int_0^m F(x, y) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m} dx dy, \quad (16)$$

Подставив выражения (15) и (16) в формулу (12), завершим решение задачи.

## 2. Применение пакета Maple в изучении темы «Колебания прямоугольной мембраны»

> restart:

Однородное уравнение и его решение методом разделения переменных:

> Eq3:=diff(U(x,y,t),t\$2)=a^2\*(diff(U(x,y,t),x\$2)+diff(U(x,y,t),y\$2)):

> f:=(x,y)->A\*x\*y\*(l-x)\*(L-y):

Находим решение однородного уравнения и подставляем  $X(x)$ ,  $Y(y)$ ,  $T(T)$ .

> pdsolve(Eq3,HINT=X(x)\*Y(y)\*T(t)):

Решаем дифференциальное уравнение

> dsolve({diff(X(x),x\$2)=-lambda^2\*X(x),X(0)=0},X(x)):

При значение true задает выдачу всех решений

> \_EnvAllSolutions:=true:

Решаем уравнение

> solve(sin(lambda\*l)=0,lambda):

> about(\_Z1):

> nu:=n->Pi\*n/l:

> mu:=n->Pi\*n/L:

Тогда для функций  $X(x)$  и  $Y(y)$  получим

> X:=(x,n)->sin(x\*nu(n)):

> Y:=(y,m)->sin(y\*mu(m)):

> dsolve({diff(T(t),t\$2)=a^2\*\_c[1]\*T(t)+a^2\*\_c[2]\*T(t),D(T)(0)=0},T(t)):

> T:=(t,n,m)->cos(a\*t\*sqrt(nu(n)^2+mu(m)^2)):

> S:=(x,y,t,N,M)->Sum(Sum(u(n,m)\*X(x,n)\*Y(y,m)\*T(t,n,m),n=1..N),m=1..M):

```
> U:=(x,y,t)->S(x,y,t,infinity,infinity):
```

```
> U(x,y,t):
```

Начальные условия при  $t = 0$

```
> U(x,y,0):
```

```
> assume(n::posint,m::posint):
```

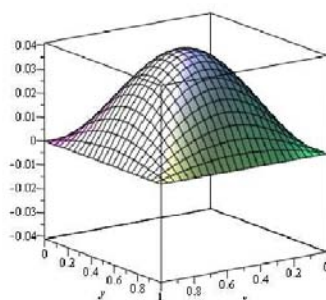
```
> u:=(n,m)->int(int(f(x,y)*X(x,n)*Y(y,m),y=0..L),x=0..l)/
int(int(X(x,n)*Y(y,m),y=0..L),x=0..l):
```

```
> U(x,y,t):
```

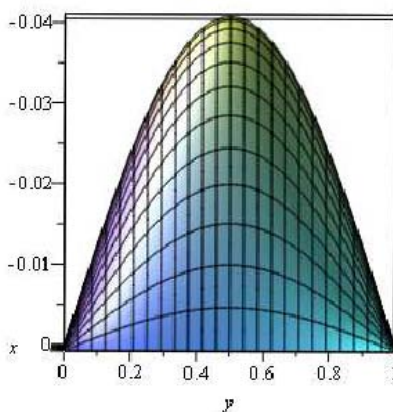
### 3. Визуализация колебаний

```
> a:=1:l:=1:L:=1:A:=1:
```

```
> plots[animate3d](S(x,y,t,1,1),x=0..1,y=0..1,t=0..5,frames=50,axes=BOXED):
```



```
> plot3d(S(x,y,0.7,1,1),x=0..1,y=0..1,axes=BOXED):
```



## HYPERBOLIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION IN MAPLE: THE OSCILLATION OF A RECTANGULAR MEMBRANE AND ITS IMPLEMENTATION IN MAPLE

I.D. Mihajlov

*This paper presents an algorithm for solving hyperbolic equations for oscillations of a rectangular membrane using the Fourier method. To solve some equations used package Maple. Visualization of vibrations of a rectangular membrane is also presented.*

Keywords: Hyperbolic partial differential equation, rectangular membrane, Maple, Fourier method.

УДК 514.822

## СОЗДАНИЕ ПРОЕКТА ДЛЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ НА ТЕМУ: «СОЛНЕЧНАЯ СИСТЕМА»

Е.С. Моисеева<sup>1</sup>

<sup>1</sup> lenysik\_@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт психологии и образования

*В статье приведен пример создания проекта для старшеклассников по учебному предмету «Астрономия» с использованием бесплатного программного обеспечения GeoGebra.*

**Ключевые слова:** астрономия, проект, старшеклассники, солнечная система, эллипс, GeoGebra.

Солнечная система — это, прежде всего Солнце и восемь больших планет, к числу которых относится и Земля. Четыре ближайшие к Солнцу планеты, называемые планетами земной группы, — Меркурий, Венера, Земля и Марс. Четыре более удалённые от Солнца планеты — Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун (также называемые газовыми гигантами) — намного более массивны, чем планеты земной группы.

Проект по астрономии – это самостоятельная творческая завершённая работа, по какой-либо теме, созвучной со школьным курсом, которая выполнена учащимися под руководством учителя. Для реализации проекта возможно использование информационно-коммуникационных технологий. Для того чтобы визуализировать модель солнечной системы понадобится компьютер и программное обеспечение GeoGebra. GeoGebra — это бесплатный программный инструмент, который можно легко установить на любом компьютере. Она используется для визуализации математических объектов и создания их динамических моделей.

Построение солнечной системы начинается с понимания того, как планеты движутся вокруг Солнца. На данном этапе работы ученики сталкиваются с проблемной ситуацией. Необходимо ответить на вопрос: какова траектория движения планет? В начале 17 в. немецким ученым Иоганном Кеплером был сделан вывод, что планеты движутся по орбитам, имеющим форму эллипса, причем Солнце находится в одном из его фокусов. Так что расстояние между планетой и Солнцем периодически меняется. Этот вывод известен как первый закон Кеплера. С высокой степенью точности можно считать орбиты планет крайним случаем эллипса, т.е. при построении орбиты будут иметь вид окружности. Эллипс изучается по геометрии в 10 классе. В учебнике по геометрии 10–11 класс, Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, дается определение эллипсу: «Эллипсом называется множество всех таких точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек постоянная. Фиксированные точки называются фокусами эллипса». Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где  $a, b$  – положительные действительные числа, причем  $a > b$ . Построим эллипс в компьютерной среде GeoGebra. Запускаем GeoGebra.



В «Панели инструментов» выбираем «Ползунок» и добавляем в правый верхний угол полотна. Для этого щелкните по области, в которой нужно разместить ползунок. В появившемся окне оставьте все значения без изменения и нажмите кнопку «Применить». С помощью инструмента



попробуйте переместить точку на ползунке. Убедитесь, что значение параметра  $a$  меняется от  $-5$  до  $5$ . Установите ползунок в положение  $a = 3$ . Аналогично на полотно добавляем еще один ползунок. Устанавливаем его в положение  $b = 1,5$ . Получим:

В строке ввода вводим уравнение эллипса: « $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$ » и нажимаем на клавиатуре клавишу «ENTER».

На полотне построился эллипс с заданными значениями. Для того чтобы наш эллипс сделать ярче, в «Панели объектов» находим «Эллипс» и щелкая по нему правой кнопкой мыши, переходим в свойства данного объекта. Чтобы поменять цвет у «Эллипс» необходимо перейти во вкладку «Цвет» и выбрать подходящий. Получим:

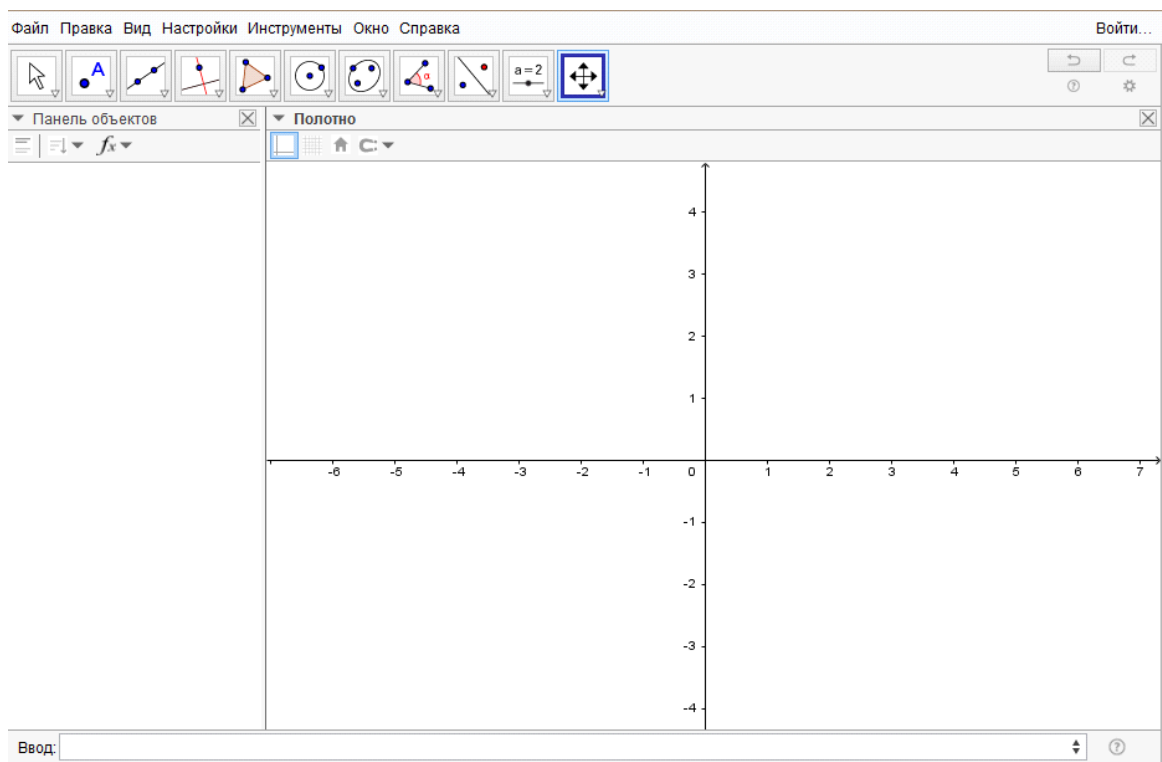


Рис. 1. Окно программы

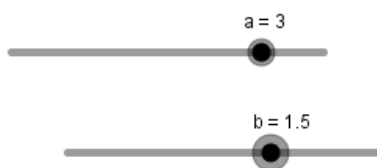
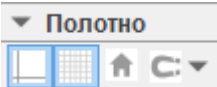


Рис. 2. Ползунки

При изменении параметров уравнения (передвижение ползунков  $a$  и  $b$  вправо или влево), эллипс будет менять свой вид, как по горизонтали так и по вертикале.

Чтобы сохранить полученный результат, выполните «Файл - Сохранить как...». Укажите место на компьютере для сохранения и сохраните файл как «Эллипс.ggb».

Теперь мы знаем, как построить эллипс в GeoGebra. Перейдем к построению солнечной системы. Построим и анимируем движение планет вокруг солнца с помощью системы GeoGebra. Создадим новый файл GeoGebra – «Файл-Создать». Скроем сетку и оси на полотне, для этого нажмем на >

«Полотно»,  и сделаем «Оси» и «Сетка» не активными.

Добавим Солнце на полотно. Выполните «Правка - Вставить изображение из - Файл». В появившемся диалоговом окне выберите файл с изображением солнца и нажмите кнопку «Открыть». Заменяем появившиеся значения точек А и В. В «Панели объектов» находим точку А и щелкая по ней правой кнопкой мыши, переходим в свойства данного объекта. Далее необходимо перейти во вкладку «Основные» и заменить значение точки А на  $(-0.25, 0.69)$ . Найдите на панели объектов точку В и измените ее координаты на  $(-0.71, -0.24)$ .

Так как мы уже знаем, что планеты движутся по орбитам, имеющим форму эллипса, построим траекторию движения Меркурия, используя значения:  $a = b = 1$ . Получим частный случай, когда планеты движутся по окружности. Уравнение окружности:  $x^2 + y^2 = R^2$ , а вот значение орбитального

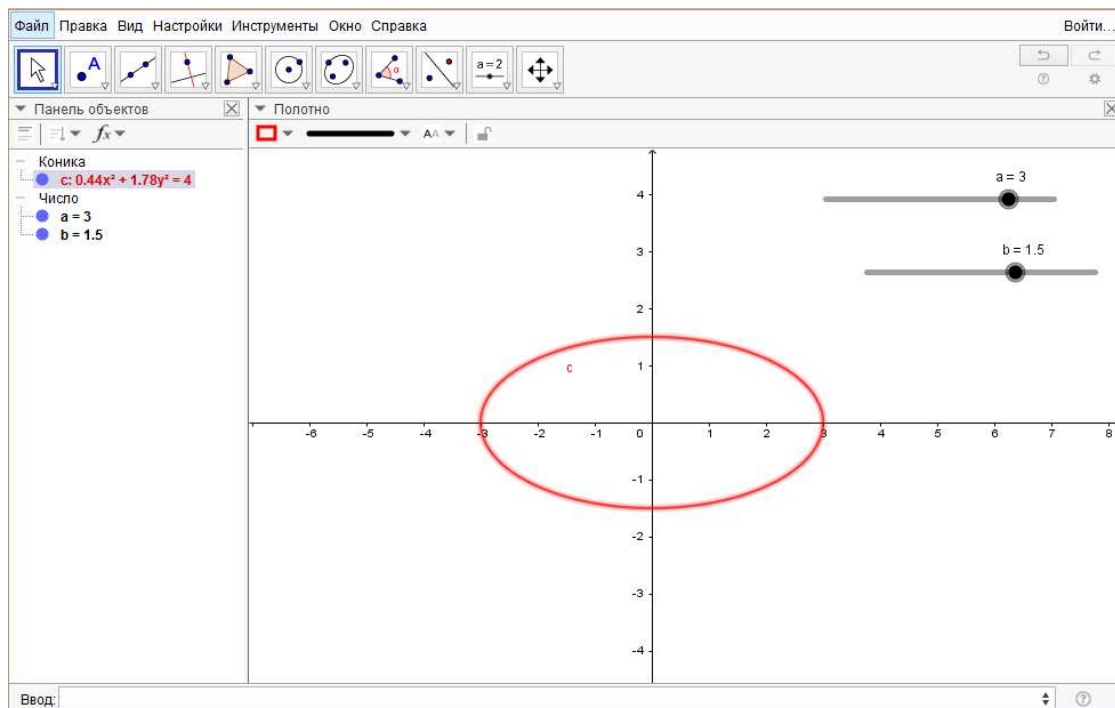


Рис. 3. Эллипс

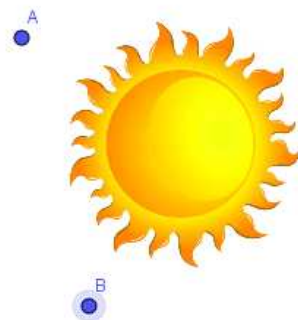





Рис. 4. Солнце

радиуса возьмем равно 0,38. Переименуем уравнение в «Меркурий» и изменим цвет на оранжевый. Зайдем во вкладку «Алгебра» и установим «Шаг» = 1. Добавим скорость движения меркурия по орбите. Для этого создадим ползунок. Установите интервал для ползунка «мин.:0», «макс.:5» и значение 4.7. Далее добавим 2 точки на небольшом расстоянии друг от друга, которые будут лежать на орбите

меркурия. Для этого в «Панели инструментов» выбираем «Точка»  и поместим их на уравнении меркурия.

Переименуем точку C на «меркурий1», а точку D на «меркурий2». Зайдем во вкладку «Алгебра» и установим «Скорость» =  $\dot{a}$ . Щелкните правой кнопкой мыши по этим точкам и нажмите «Анимиро-

вать». Остановить анимацию можно нажав кнопку «Пауза»  в левом нижнем углу полотна. Далее добавим изображение меркурия на полотно (см. выше как добавить картинку). Заменяем значение появившихся точек C и D на «меркурий1» и «меркурий2» соответственно. Получим:

При нажатии кнопки «Проиграть»  в левом нижнем углу полотна, анимируется модель дви-

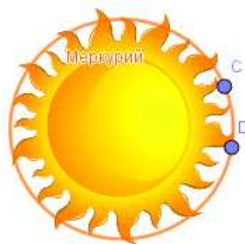


Рис. 5. Солнце и орбита Меркурия

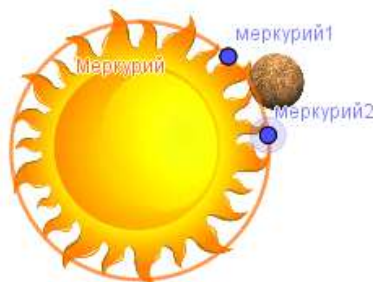


Рис. 6. Солнце и Меркурий

жения планеты Меркурий. Для того чтобы скрыть точки и надписи на рисунке, необходимо в «Панели объектов» щелкнуть правой кнопкой мыши по этим объектам и нажать «Показывать объект».

<p>Точка</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="radio"/> A = (-0.86, 0.59)</li> <li><input type="radio"/> B = (-0.5, -0.86)</li> <li><input checked="" type="radio"/> C = (0.33, 0.52)</li> <li><input checked="" type="radio"/> D = (0.59, 0.19)</li> <li><input checked="" type="radio"/> меркурий1 = (0.33, 0.52)</li> <li><input checked="" type="radio"/> меркурий2 = (0.59, 0.19)</li> </ul>	получиться:	<p>Точка</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="radio"/> A = (-0.86, 0.59)</li> <li><input type="radio"/> B = (-0.5, -0.86)</li> <li><input type="radio"/> C = (-0.26, 0.56)</li> <li><input type="radio"/> D = (0.16, 0.6)</li> <li><input type="radio"/> меркурий1 = (-0.26, 0.56)</li> <li><input type="radio"/> меркурий2 = (0.16, 0.6)</li> </ul>
---	-------------	---

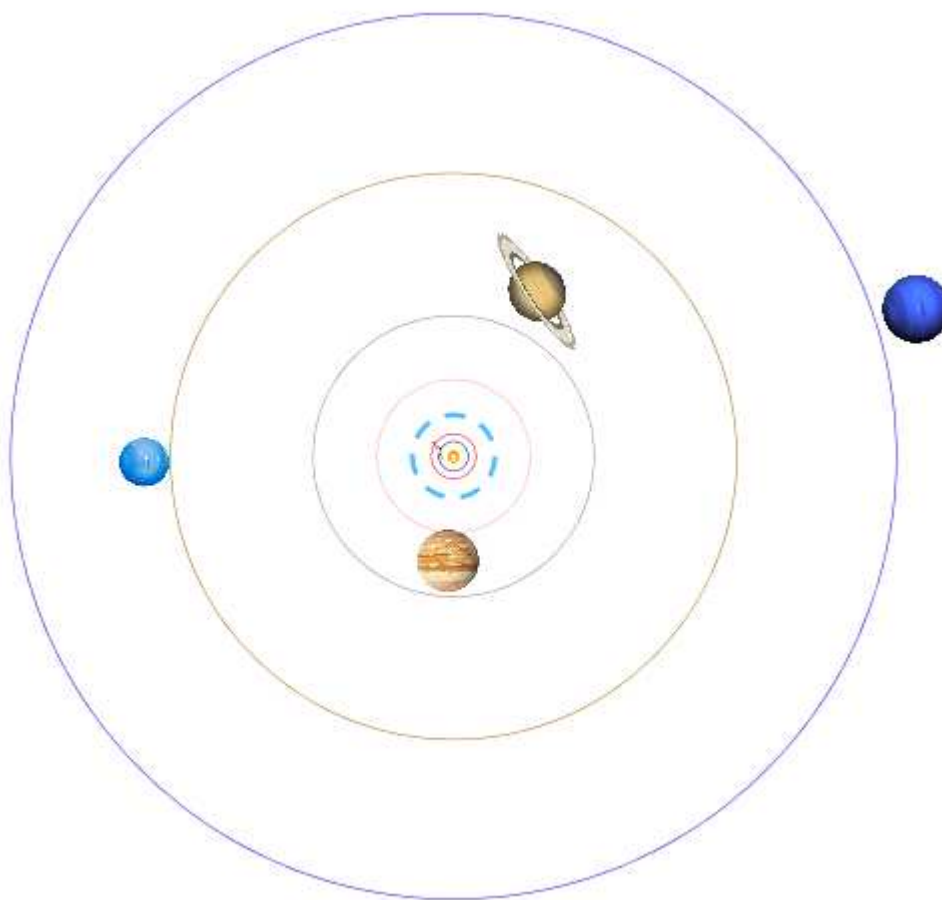


Рис. 7. Визуализация Солнца и Меркурия

Для того чтобы анимировать движение других планет, необходимо выполнить п.3 для каждой планеты используя значения орбитального радиуса и скорость движения планеты по орбите. Получим:

Чтобы сохранить полученный результат, выполните «Файл - Сохранить как...». Укажите место на компьютере для сохранения и сохраните файл как «Солнечная система.ggb».

Данный проект может быть полезен для учеников 11 класса при изучении Астрономии: главы № 3 «Строение Солнечной системы», параграфа № 12 «Законы движения планет Солнеч-



**Рис. 8.** Визуализация Солнечной системы

ной системы» по учебнику «Астрономия. Базовый уровень» 11 класс, Воронцов-Вельяминов Б.А., Страут Е.К., ДРОФА. Для защиты своего проекта учащиеся могут использовать информационно-коммуникационные технологии, а именно создание презентации с помощью программы Microsoft PowerPoint.

### **Литература**

1. Воронцов-Вельяминов Б. А. Астрономия. Базовый уровень. 11 класс: учебник / Б.А. Воронцов-Вельяминов, Е.К. Страут. – М.: Дрофа, 2013. – 238 с.
2. Атанасян Л. С. Геометрия 10–11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 2013. – 255 с.
3. Чеботарева Э.В. Компьютерный эксперимент с GeoGebra / Э.В. Чеботарева. – Казань: Казанский университет, 2015. – 61 с.
4. GeoGebra [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.geogebra.org/>
5. Википедия — свободная энциклопедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org>

CREATING A PROJECT FOR HIGH SCHOOL STUDENTS ON THE TOPIC: «SOLAR SYSTEM»

E.S. Moiseeva

*The article provides an example of creating a project for high school students in the subject «Astronomy» using the free software GeoGebra.*

Keywords: astronomy, project, high school students, solar system, ellipse, GeoGebra.



УДК 5530.12+531.51

## МОДЕЛИРОВАНИЕ АНИМИРОВАННОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ «КОЛБА С ПУЗЫРЬКАМИ» В СРЕДЕ СИСТЕМЫ MAPLE

Ш.А. Муртазин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *shamkazm@mail.ru*; МБОУ «Средняя общеобразовательная русско - татарская школа №57» г. Казани

*Описывается ход построения анимированного изображения бурлящей в колбе жидкости, выполненного в среде Maple.*

**Ключевые слова:** Maple-проект, анимированное изображение, бурлящая в колбе жидкость.

Maple — программный продукт компании Waterloo Maple Inc., ориентированный на численное исследование математической модели и её визуализацию. Пакет Maple состоит из ядра, которое выполняет большинство базовых операций, и библиотек, содержащих множество дополнительных команд, имеет собственный язык программирования, обладает мощными графическими возможностями. Работа проходит в интерактивном режиме. Система Maple пользуется особой популярностью в научном мире, но её можно использовать и на самом элементарном уровне, что и делается в нашей казанской 57-й школе. Один из авторских проектов представлен в данной статье – это анимированное изображение бурлящей в колбе жидкости.

Для построения использовались команды ядра `plot` – построение линии на координатной плоскости, и `seq` – список. А также использованы команды дополнительных библиотек `plots` и `plottools`: `circle` – построение окружности, `polygonplot` – построение многоугольника по вершинам, `display` – объединение разных объектов на одной координатной плоскости. Кроме того применялись следующие опции: `color` – цвет линии, `thickness` – толщина линии, `scaling=constrained` – выравнивание единичных отрезков по осям, `insequence=true` – показать список последовательно.

Этапы построения:

- Построение колбы;
- Построение изображения жидкости;
- Построение пузырей;
- Построение подставки;
- Построение изображения огня;
- Объединение изображений огня, подставки и колбы с жидкостью (рис.1);
- Первый этап анимирования пузырей – пузыри отрываются от жидкости и поднимаются до края горлышка колбы;
- Второй этап анимирования пузырей – вылетая из колбы пузыри, поднимаясь, увеличиваются в размерах. Увеличение происходит за счёт масштабирования радиуса:

```
>seq(circle([-4.5,7.6+i],0.2+0.2*i/3,color=green,thickness=3),i=1..6);
```

- Объединение всех элементов и двух этапов анимации (рис.2,3).

В целом, на данном этапе цель работы реализована – получено анимация бурлящей в колбе жидкости. В перспективе можно сделать изображение трёхмерным.

MODELING ANIMATION IMAGE "FLASK WITH BUBBLES IN THE MAPLE ENVIRONMENT

S.A. Murtazin

*The process of constructing an animated image of a liquid that is bubbling in a flask, performed in a Maple environment, is described.*

Keywords: Maple project, animated image, boiling liquid in a flask.

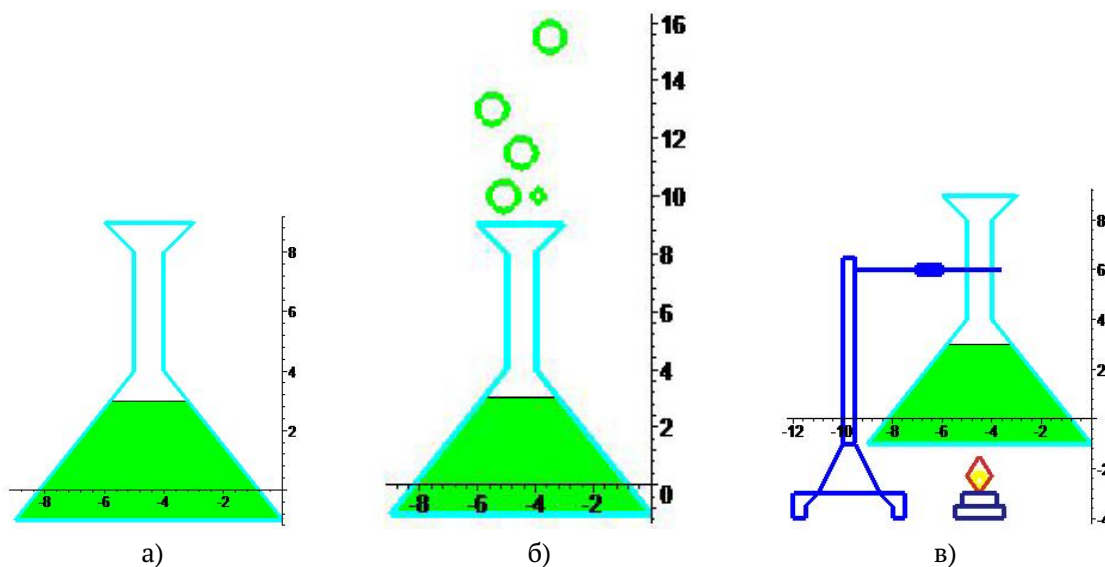


Рис. 1. Построение изображения колбы с подставкой и пузырьками.

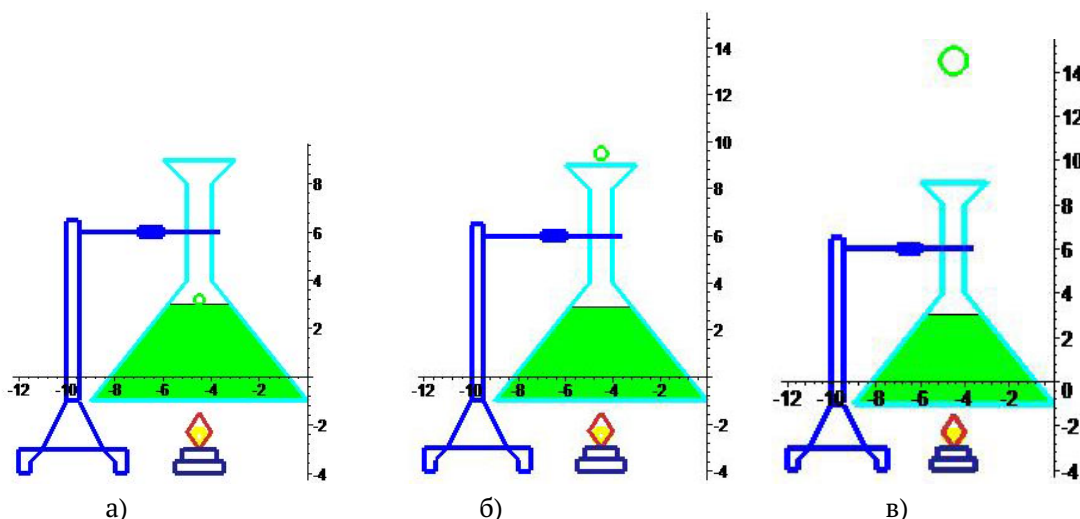


Рис. 2. Анимирование одного пузырька (кадры анимации).

УДК 5530.12+531.51

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФРАКТАЛОВ СРЕДСТВАМИ ПАКЕТА MAPLE

Л.А. Мухаметшина<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [liyamuchametshina@mail.ru](mailto:liyamuchametshina@mail.ru); МБОУ «Средняя общеобразовательная русско - татарская школа №57» г. Казани

*Описывается построение элементарных геометрических фракталов с использованием преобразования гомотетии в интерактивной среде системы Maple.*

**Ключевые слова:** геометрические фракталы, гомотетия, Maple.

История геометрических фракталов, как известно, началась еще в конце 19 века. Родоначальником учения о фракталах принято считать Бенуа Мандельброта, выпустившего в 1977 году книгу «Фрактальная геометрия природы». Часто геометрический фрактал определяется как самоподобная структура. Геометрические фракталы являются самыми наглядными, так как видна их самоподобная структура.

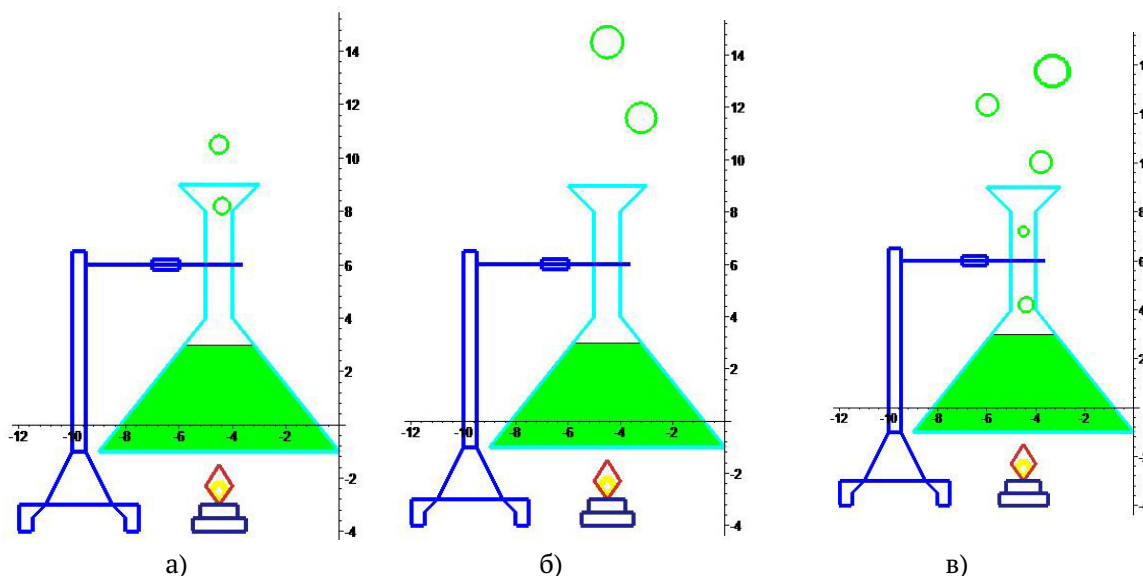
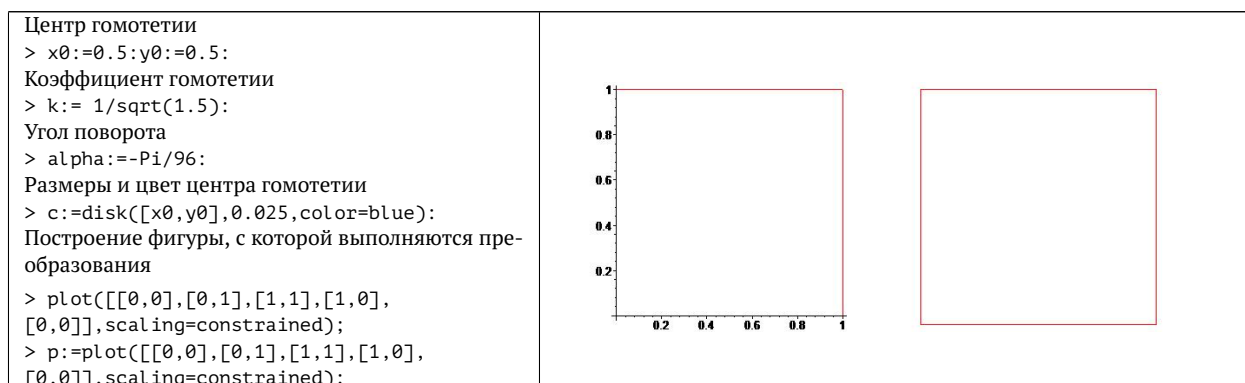


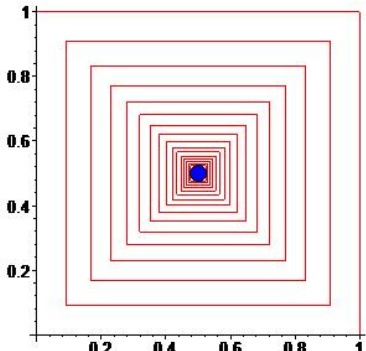
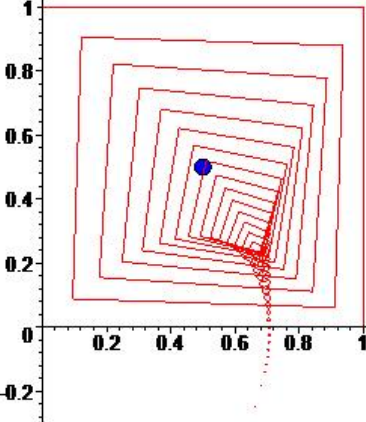
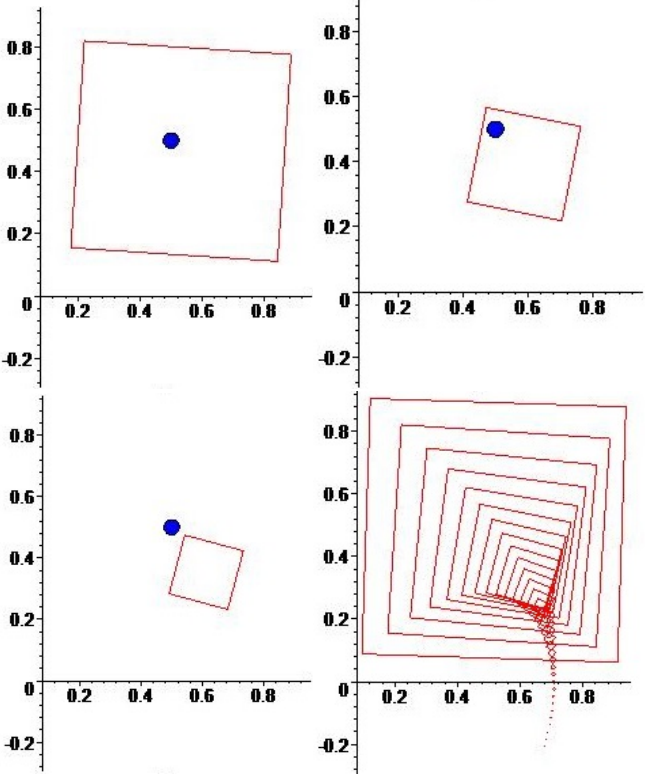
Рис. 3. Анимирование нескольких пузырьков (кадры анимации)

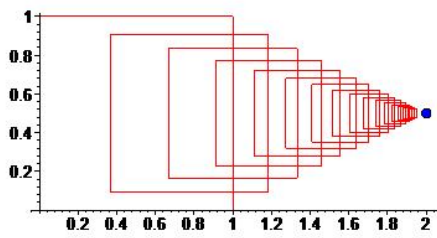
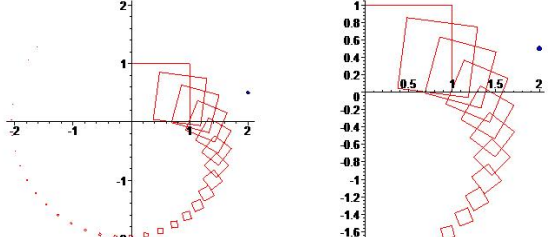
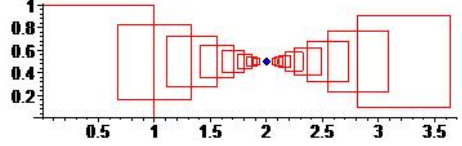
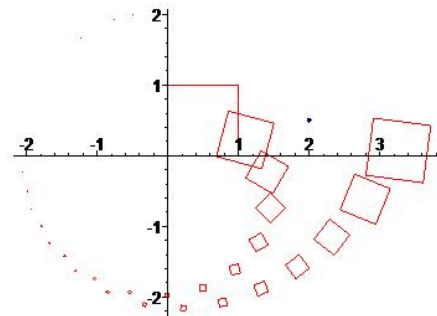
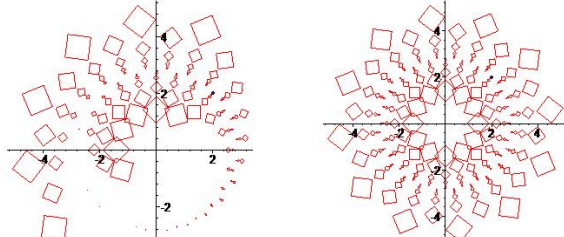
Самые известные фракталы – это снежинка Коха, дерево Пифагора, Фрактальное дерево, ветка папоротника, множество Мандельброта.

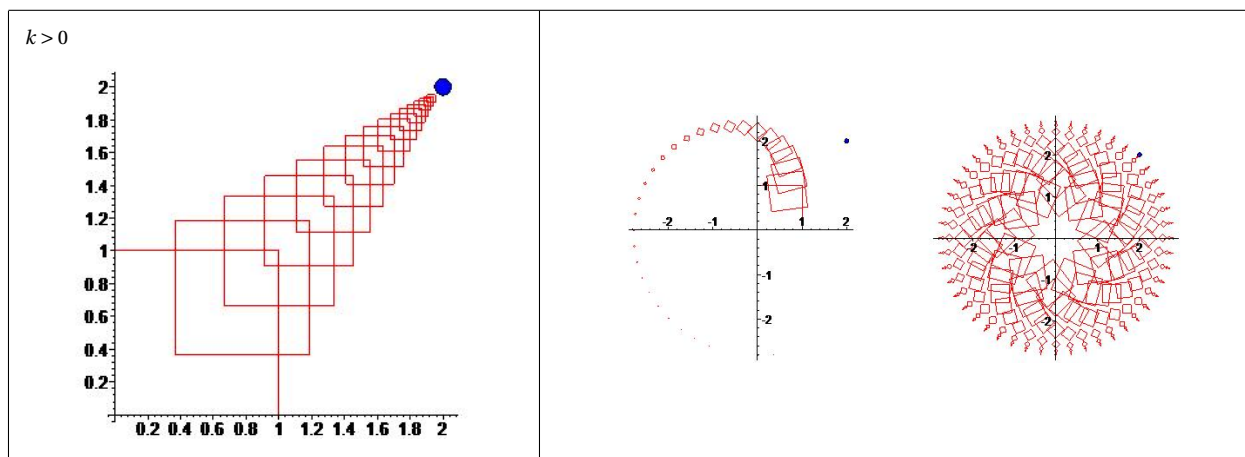
Занимаясь с системой Maple и заинтересовавшись фракталами, естественно возникла мысль визуализировать их в интерактивной компьютерной математической среде. Для этого нужно было понять математическую структуру фрактальных множеств. Изучение материалов по описанию фрактальных структур и даже их построению средствами различных компьютерных программ (в том числе и Maple) не принесло полной ясности в понимании столь сложного вопроса и привело к поиску своих путей визуализации геометрических фракталов. Неизбежно возникла идея использовать гомотетию.

Далее описывается моделирование множеств подобных структур в интерактивной среде Maple. В построении используются библиотека `plottools`, команды `plot` – построение по точкам, `homothety` – преобразование гомотетии, `rotate` – поворот, `seq` – список; анимация осуществляется с помощью опции `insequence=true`. Ниже приводится программа построения, которая составлена так, что меня только начальные параметры и прокручивая ее снова, получается новый результат.



<p>Визуализация гомотетии относительно заданного центра <math>[x_0, y_0]</math> с заданным количеством итераций</p> <pre>&gt; ih_i:=seq(homothety(p,k^i,[x0,y0]), i=0..15); &gt; plots[display](c,h_i);</pre>	
<p>Преобразование гомотетии с поворотом на заданный угол</p> <pre>&gt; r_i:=seq(rotate(homothety(p,k^i, [x0,y0]),i*alpha),i=1..36); &gt; r_i_p:=plots[display](r_i): &gt; plots[display](c,p,r_i);</pre>	
<pre>&gt; plots[display](c_r_i_anim,r_i_p, insequence=true);</pre>	

<p>Изменим начальные параметры:            Центр гомотетии  <math>&gt; x_0 := 2; y_0 := 0.5;</math>            Коэффициент гомотетии  <math>&gt; k := 1/\sqrt{1.5};</math>            Угол поворота  <math>&gt; \alpha := -\pi/24;</math></p>	
<p>Преобразование гомотетии с новым углом поворота            Можно изменить количество итераций <math>i</math></p>	
<p>Коэффициент подобия отрицательный</p> 	
<p>Добавим поворот гомотетии с поворотом (<math>k &lt; 0</math>)  <math>&gt; r_i := \text{seq}(\text{rotate}(\text{homothety}(p, k^i, [x_0, y_0]), i * \alpha), i = 1..36);</math>  <math>&gt; r_{i_p} := \text{plots}[\text{display}](r_i);</math>  <math>&gt; rr_i := \text{seq}(\text{rotate}(r_{i_p}, i * (\pi/6)), i = 1..6);</math>  <math>&gt; \text{plots}[\text{display}](c, rr_i);</math>            И увеличим количество итераций</p>	



Можно менять первоначальную фигуру – и, снова прокручивая программу, получать новые изображения.

Полученные геометрические структуры нельзя назвать фракталами в принятом математическом понимании. Построение настоящих фракталов, как геометрических, так и алгебраических, – цель следующего этапа проекта.

#### SIMULATION OF SIMPLE FRACTALS IN THE MAPLE ENVIRONMENT

L.A. Mukhametshina

*We describe the construction of elementary geometric fractals using the homothetic transformation in the interactive environment of the Maple system.*

Keywords: geometric fractals, homothety, Maple.

УДК 004.92, 514

#### ГРАФИКА В СРЕДЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ OCTAVE

А.М. Нигмедзянова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [aigmani23@rambler.ru](mailto:aigmani23@rambler.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В статье описаны принципы работы с графикой в среде программирования OCTAVE, приведены примеры.*

**Ключевые слова:** графика, среда OCTAVE.

Создание и совершенствование компьютеров привело и продолжает приводить к созданию новых технологий в различных сферах научной и практической деятельности. Графические возможности мониторов персональных компьютеров и гибкие языки программирования позволяют сделать представление функций более наглядным, представив их в виде графиков. Мы живем в веке информационных технологий и расширение знаний по программированию помогает быстро адаптироваться к современной среде обитания. Кроме того она находится в свободном доступе и является кроссплатформенной.

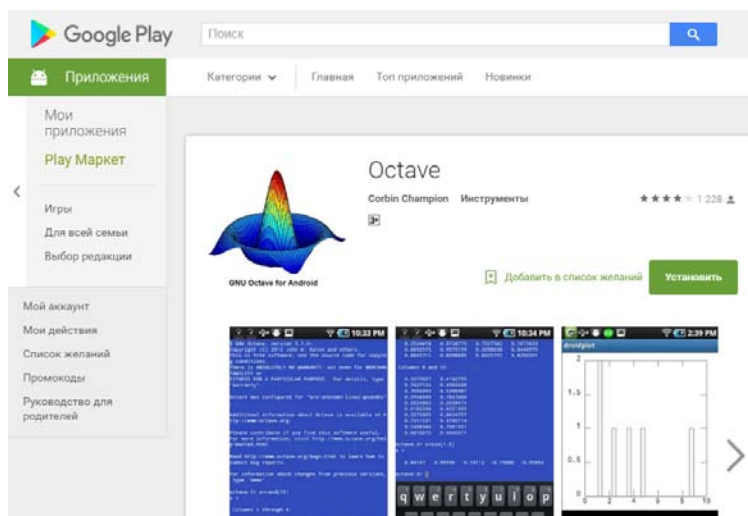
Octave - это свободный интерпретирующий язык программирования высокого уровня, ориентированный на проведение математических вычислений.

Первоначально Octave была разработана для студентов факультета инженерной химии, в качестве вспомогательной программы для учебника по проектированию химического реактора, в 1993 году. Разработчиками данной программы являются James B. Rawlings, из Висконского университета в Мэдисоне и John G.Eckerd из Техасского университета. Впоследствии область применения данного продукта расширилась, его стали использовать в университете при обучении дифференциальным уравнениям и линейной алгебре. Практически каждый думает, что название «октава» имеет какое-то отношение к музыке, на самом деле так звали профессора, написавшего известный учебник по моделированию химических реакций, который славился хорошими умениями в математических подсчетах.

GNU Octave - программный пакет решений для работы с математическими моделями и графиками. Программное обеспечение написано на языке программирования C++ и его можно внедрять в другие проекты. Программа имеет поддержку множества функций при решении математических задач, а в случае если пользователю не будет хватать её функционала, в сети всегда можно найти и расширить их с помощью дополнений. По заверениям разработчиков, совместим с таким ПО как MATLAB и поддерживает многие его функции. Так же программа является кроссплатформенной, что делает её доступной для всех пользователей разных операционных систем.

Очевидно, что Octave сейчас больше, чем просто ещё один программный пакет для учебного курса с ограниченной областью применения за пределами учебного класса. Сегодня Octave- высокоуровневый интерпретируемый язык программирования, предназначенный для решения задач вычислительной математики. Программа представляет удобный интерактивный командный интерфейс для решения линейных и нелинейных математических задач, и для выполнения других численных экспериментов.

Octave - система для математических вычислений, использующая совместимый с MATLAB язык высокого уровня. Octave представляет интерактивный командный интерфейс для решения линейных и нелинейных математических задач, а также проведения других численных экспериментов. Кроме того, Octave можно использовать для пакетной обработки. Язык Octave оперирует арифметикой вещественных и комплексных скаляров и матриц, имеет расширения для решения линейных алгебраических задач, нахождения корней систем нелинейных алгебраических уравнений, работы с полиномами, решения различных дифференциальных уравнений, интегрирования систем дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений первого порядка, интегрирования функций на конечных и бесконечных интервалах. Этот список можно легко расширить, используя язык Octave (или используя динамически загружаемые модули, созданные на языках C, C++, Фортран и др.).



Свойства Octave:

- Octave написан на C++ с использованием библиотеки STL.
- Для запуска скриптов Octave использует интерпретатор.
- Octave можно дополнять динамически подгружаемыми модулями.
- Для создания графиков используется gnuplot.
- Octave является кроссплатформенной.
- Язык, совместимый с MatLab.

Преимущества Octave:



- Язык Octave отличается от других языков тем, что студенты осваивают его куда быстрее.
- Octave не является коммерческой проектом, скачать ее может любой пользователь, так же как и внести свои коррективы.
- Данную программу можно скачать на любое ПК устройство с ОС Android или Windows С портала Google play.

Запуск программы можно осуществить через меню Windows, открываемой кнопкой «Пуск». Найдя папку Octave-4.0.1, необходимо открыть подменю и щелкнуть на команде Octave(GUI). Также возможен запуск программы с помощью ярлыка:



После запуска программы пользователь видит окно интерпретатора с сообщением, в котором указано название программы, ее версия, разработчики, краткие характеристики пакета и ссылки на официальный сайт, где можно узнать более подробную информацию о программе.

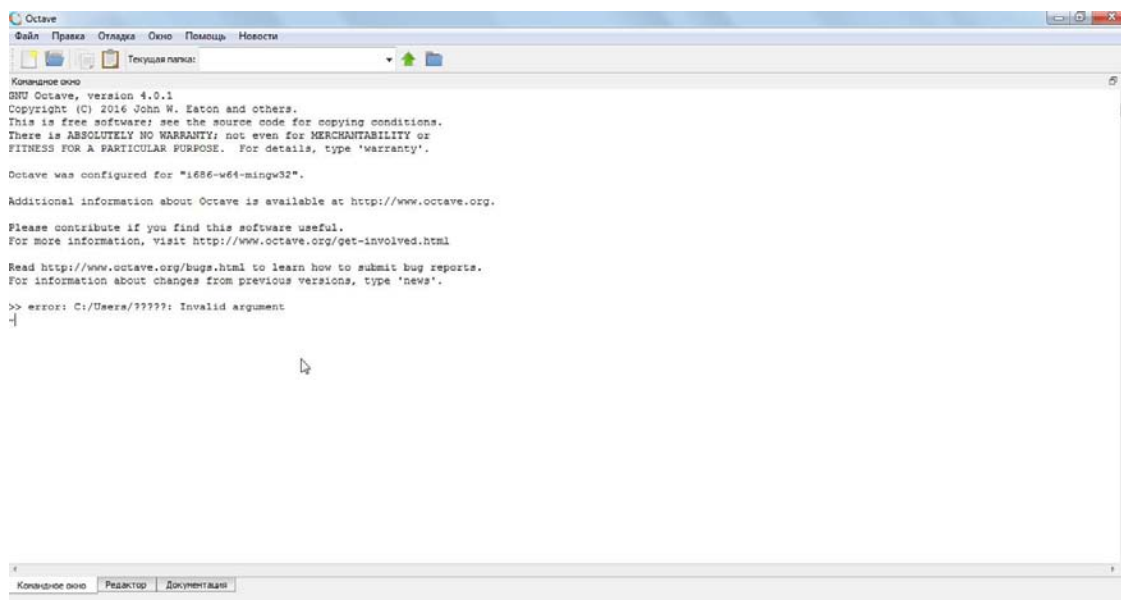


Рис. 1. Окно интерпретатора

Перед началом работы в программе пользователь должен определить, в каком режиме он будет работать, так как в Octave существуют 2 режима работы:

1. **Терминальный режим.** В данном режиме пользователь остается во вкладке, которая открылась при запуске программы. Работа с системой происходит в диалоговом режиме – пользователь вводит команды, а система выполняет их и выводит результаты на экран.
2. **Программный режим.** Для работы в этом режиме, следует открыть вкладку «Редактор», расположенную в нижней части окна, где пользователь создает текстовый файл с расширением .m, в котором хранятся последовательно выполняемые команды Octave. Затем этот текстовый файл (программа на языке Octave) запускается на выполнение в среде Octave.

После запуска программы, перед нами появляется окно интерпретатора. Структура данного окна включает в себя перечень следующих позиций:

- строка заголовка ( в левом верхнем углу);



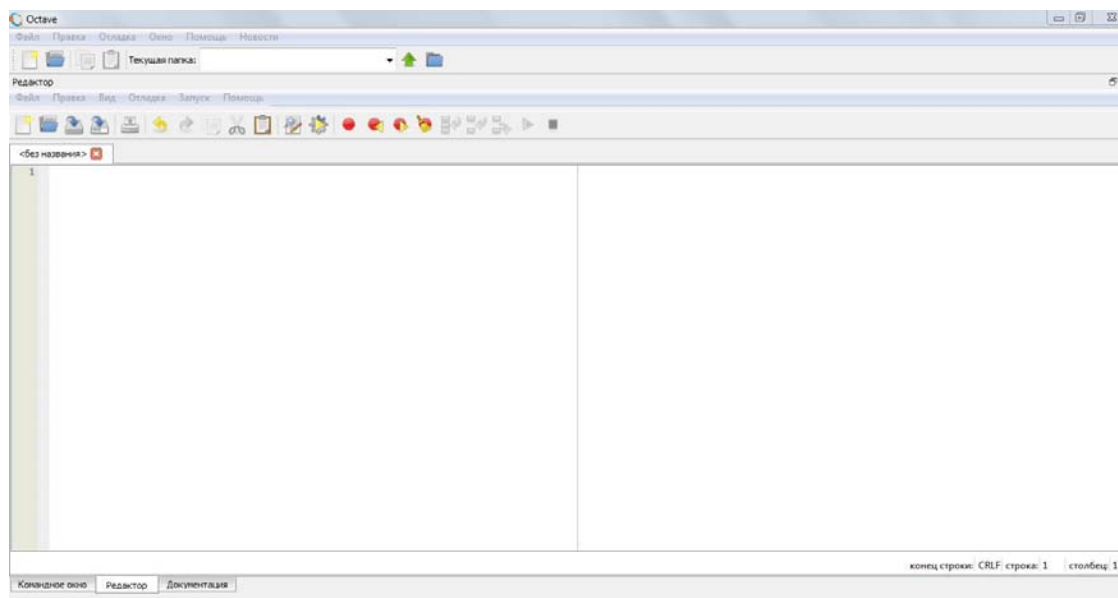


Рис. 2. Окно редактора

- строка главного меню;
- главная панель инструментов;
- окно ввода и редактирования документа;
- панель вкладок.

Язык главного меню программы определяется автоматически согласно тому, какой язык используется в операционной системе. К сожалению, отсутствует контекстная панель инструментов и панель специальных математических символов.

Пользовательский интерфейс Octave-4.0.1 позволяет создавать документы, содержащие одновременно текстовые комментарии, команды входного языка, результаты вычислений в виде математических формул и графические данные. Пользователь Octave-4.0.1 работает с документами, которые являются описанием алгоритмов решения задач, программами и результатами их исполнения. Графические построения выполняются в отдельных окнах и имеют свое меню для оперативного управления параметрами.

Рассмотрим подробнее меню системы, которое располагается под строкой заголовка. Меню системы включает:

- Файл – работа с файлами и областью переменных
- Правка – команды редактирования документа, операции с буфером обмена, настройки программы
- Отладка – инструменты отладки
- Окно – управление видом пользовательского интерфейса
- Помощь – работа со справочной системой
- Новости – примечания к выпуску.

Полезно обратить внимание на то, что в настройках можно изменить параметры интерфейса, как командной строки, так и редактора, а так же устанавливать комбинации клавиш.

Еще один важный элемент интерфейса - это всплывающие подсказки, которые появляются при наведении курсора мыши на тот или иной элемент интерфейса.

Рассмотрим графические возможности среды Octave.

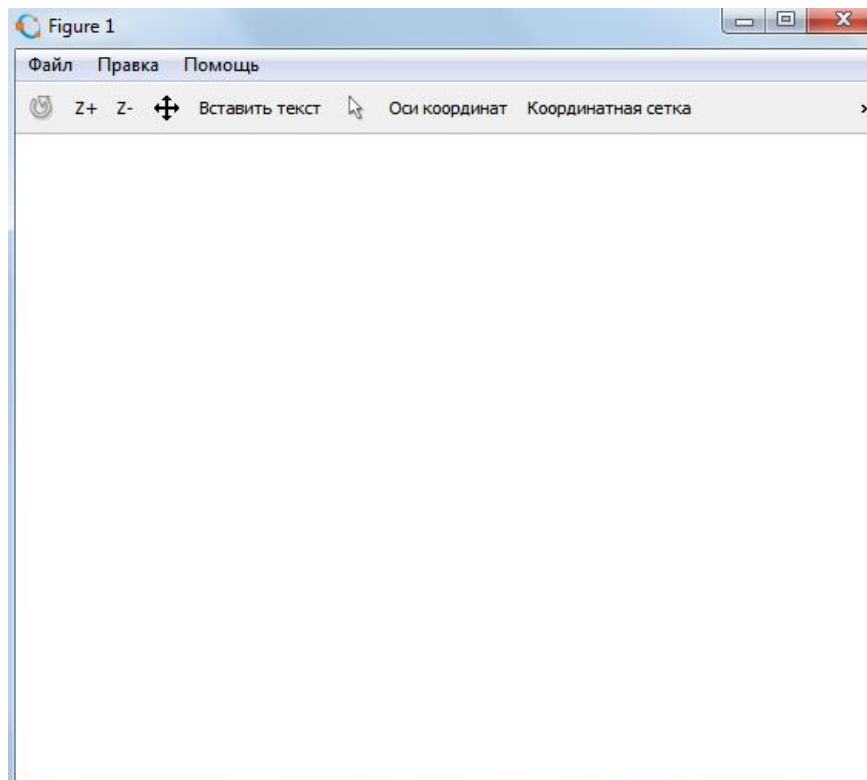


Рис. 3. Графическое окно

## 1. Построение двумерных графиков

Двумерная графика подразумевает график, точки которого определяются двумя величинами. Для построения графиков чаще всего используются декартова и полярная системы координат.

Для построения графика в среде программирования Octave для начала открываем окно редактора, в котором необходимо написать саму программу. Когда программа написана, нажимаем кнопку сохранить файл и запустить. После запуска программы перед нами появится вспомогательное окно с заданным графиком.

Для наглядности мы можем менять тип, маркер, размер линии, а так же при необходимости выводить легенду. Цвет линии определяется буквой латинского алфавита, что соответствует первой букве цветов в английском языке для легкого запоминания.

За размер маркера отвечает команда "*markersize*", размер которого пишется через запятую, после команды, например "*markersize*",5. Так же в Octave есть функция *pause*(*n*), которая приостанавливает построение графика на *n* секунд.

Кроме того, в Octave существуют другие функции, такие как:

- *grid on/off* – снимает/наносит сетку
- *axis*[*xmin, xmax, ymin, ymax*] выводит только ту часть графика, которую мы задаем
- команда *title*('Заголовок') выводит заголовок графика
- *xlabel*('Подпись под осью  $x'$ '), *ylabel*('Подпись под осью  $y'$ ') служат для подписей осей  $x$  и  $y$
- функция *text*( $x, y, \text{'текст'}$ ) выводит текст левее точки с координатами ( $x, y$ )
- функция *legend*('легенда1', 'легенда2', ..., 'легенда*n*', *m*) выводит легенды для каждого из графиков, параметр *m* определяет месторасположение легенды в графическом окне: 1 – в правом верхнем углу графика (значение по умолчанию); 2 – в левом верхнем углу графика; 3 – в левом нижнем углу графика; 4 – в правом нижнем углу графика.

При выводе текста с помощью функций *xlabel*, *ylabel*, *title*, *text* можно выводить греческие буквы, использовать символы верхнего и нижнего индекса. Для вывода текста в верхнем индексе используется символ  $\langle\langle \wedge \rangle\rangle$ , в нижнем – символ  $\langle\langle \_ \rangle\rangle$ . При работе с текстом можно также использовать синтаксис *TEX*.

#### Построение графиков в прямоугольной системе координат

Для того, чтобы построить график в прямоугольной системе координат для начала необходимо сформировать массив *x*, после чего массив *y*. Затем для построения графика используем функцию *plot*. Когда программа написана, нажимаем кнопку сохранить файл и запустить.

**Пример.** Вывести на экран график функции  $7\sin(x) + 9$  двумя способами.

#### Решение задачи в Octave.

*Способ первый:* задаем в окне редактора функцию, сформировав сперва массив *x*, массив *y* и после этого используем функцию *plot*

```
x = -20 : 0.1 : 20;
y = 7 * sin(x) + 9;
plot(x,y)
```

*Способ второй* (полная форма функции *plot*):  $plot(x_1, y_1)$ , где  $x_1$  - массив абсциссы графика,  $y_1$  - массив ординаты графика

```
plot(x = -20 : 0.1 : 20, y = 7 * sin(x) + 9)
```

Результат отображен на Рис. 4.

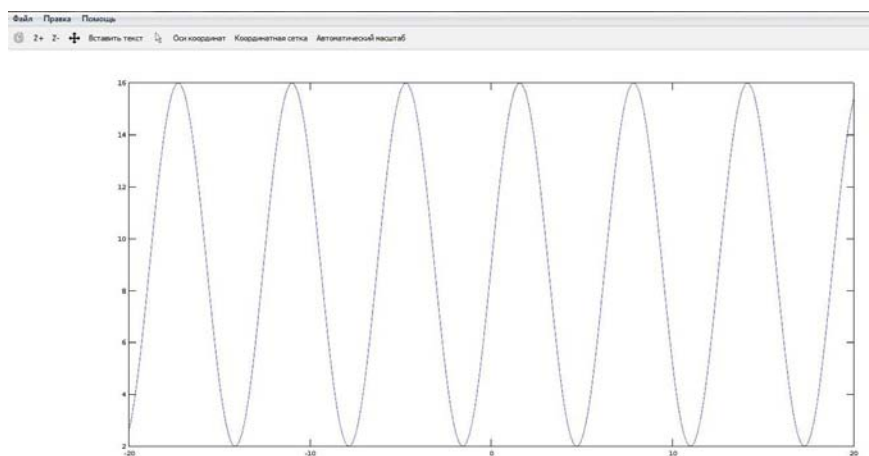


Рис. 4. График функции  $7\sin(x) + 9$

**Пример.** Последовательно вывести графики функций  $y = \sin(x)$ ,  $y = \cos(x)$  различными цветами с заголовками графиков и задержкой в 5 секунд.

#### Решение задачи в Octave.

Чтобы вывести графики функций последовательно, необходимо для начала создать графическое окно с дескриптором *okno1*, далее последовательно выполняем шаги, как показано в предыдущем примере. После команды *plot* выводим линии сетки, используя команду *grid on* и затем выводим заголовок командой *title*. Чтобы приостановить построение графика на *n* секунд необходимо использовать функцию *pause(n)*, где *n* - количество секунд. Эта процедура проводится для каждой заданной функции. Для того, чтобы в конце процедуры командное окно было закрыто, надо ввести команду *delete(okno1)*

```

okno1 = figure();
x = -6*pi():pi()/50:pi();
y = sin(x);
plot(x, y, 'k');
grid on;
title('Plot y = sin(x)');
pause(5);
y = cos(x);
plot(x, y, 'b');
grid on;
title('Plot y = cos(x)');
pause(5);
delete(okno1);

```

Результат показан на Рис. 5,6.

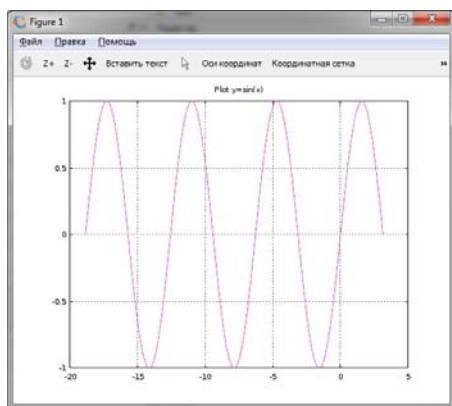


Рис. 5. График функции  $y = \sin(x)$ .

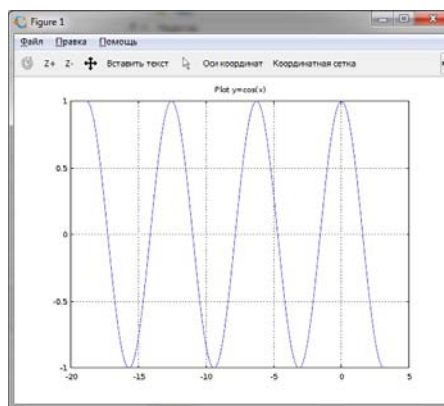


Рис. 6. График функции  $y = \cos(x)$ .

### Построение графиков в полярной системе координат

Полярная система координат состоит из заданной фиксированной точки  $O$ , называемой полюсом, концентрических окружностей с центром в полюсе и лучей, выходящих из точки  $O$ , один из которых,  $OM$ , называют полярной осью. Положение любой точки  $M$  в полярных координатах можно задать положительным числом  $\rho = |OM|$  (полярный радиус) и числом  $\phi$ , равным величине угла  $\angle XOM$  (полярный угол). Числа  $\rho$  и  $\phi$  называют полярными координатами точки  $M$  и обозначают  $M(\rho, \phi)$ .

Для формирования графика в полярной системе координат необходимо сформировать массивы значений полярного угла и полярного радиуса и обратиться к функции  $polar : polar(\phi, r_0, s)$ , где  $\phi$  - массив полярных углов;  $r_0$  - массив полярных радиусов;  $s$  - строка, состоящая из трёх символов, которые определяют цвет линии, тип маркера и тип линии.

**Пример.** Построить график лемнискаты в полярной системе координат  $\rho = 3\sqrt{2}\cos(2\phi)$ , где функция  $\rho$  определена при  $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  ( $\cos 2\phi \geq 0$ ).

**Решение задачи в Octave.**

```

fi = -pi/4 : pi/200 : pi/4;
ro = 3*sqrt(2 * cos(2*fi));
polar(fi, ro, 'r');
hold on;
polar(fi, -ro, 'r');
grid on;

```

Результат выполнения процедуры отображен на Рис. 7.

#### Построение графиков, заданных параметрически

Задание функции  $y(x)$  с помощью равенств  $x = f(t)$  и  $y = g(t)$  называют параметрическим, а вспомогательную величину  $t$  - параметром. Построение графика функции, заданной параметрически, можно осуществлять следующим образом:

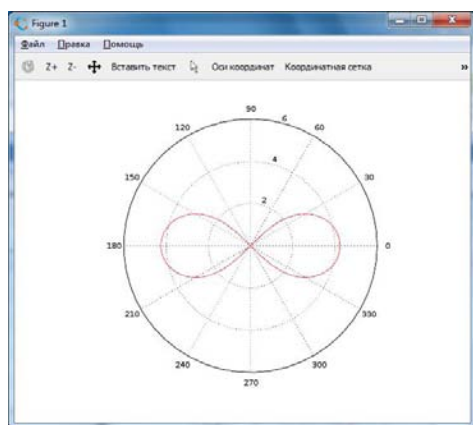
1. Определить массив  $t$ ;
2. Определить массивы  $x = f(t)$  и  $y = g(t)$ ;
3. Построить график функции  $y(x)$  с помощью функции  $plot(x, y)$ .

**Пример.** Построить график эпициклоиды, заданной параметрически  $x = 4 \cos(t) - \cos(4t)$ ,  $y = 4 \sin(t) - \sin(4t)$ ,  $t \in [0; 2\pi]$ .

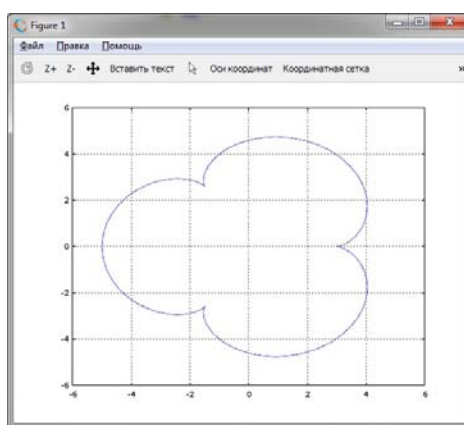
**Решение задачи в Octave.**

```
t = 0 : pi/50 : 2*pi;
x = 4 * cos(t) - cos(4 * t);
y = 4 * sin(t) - sin(4 * t);
plot(x, y);
grid on;
```

Результат выполнения процедуры отображен на Рис. 8.



**Рис. 7.** График лемнискаты  $\rho = 3\sqrt{2}\cos(2\phi)$ .



**Рис. 8.** График эпициклоиды  $x = 4 \cos(t) - \cos(4t)$ ,  $y = 4 \sin(t) - \sin(4t)$ .

#### Построение гистограммы

Так же в Octave существует еще одна функция  $bar$ , которая предназначена для построение гистограммы. Функция  $bar(y)$  выводит элементы массива  $y$  в виде гистограммы, а качестве массива  $x$  выступает массив номеров элементов массива  $y$ . Функция  $bar(x, y)$  выводит гистограмму элементов массива  $y$  в виде столбцов в позициях, определяемых массивом  $x$  элементы которого должны быть упорядочены в порядке возрастания.

**Пример.** Построить гистограмму прогноза погоды на октябрь, если температура в октябре была соответственно 5, 6, 7, 8, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 градуса.

**Решение задачи в Octave.**

```
y = [5;6;7;8;9;8;7;6;5;4;3];
bar(y);
```

Полученная гистограмма - Рис.9.

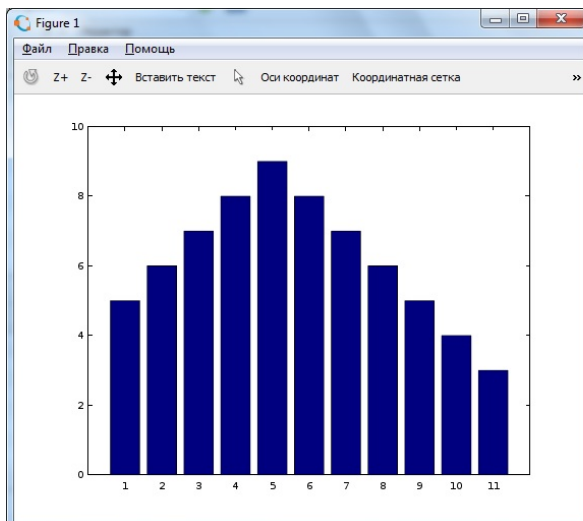


Рис. 9. Гистограмма прогноза погоды

### Анимация

При изучении движения тела на плоскости Octave позволяет построить график движения и проследить за движением. Построить анимационный ролик можно с помощью функции  $comet(x, y)$ , которая позволяет увидеть движение вдоль кривой  $y(x)$  на плоскости.

**Пример.** Построить движение точки вдоль графика функции  $y = \sin(x)$ .  
**Решение задачи в Octave.**

```
x = 0 : pi/30 : 6 * pi
y = sin(x)
comet(x, y)
```

Полученная анимация - Рис.10,11.

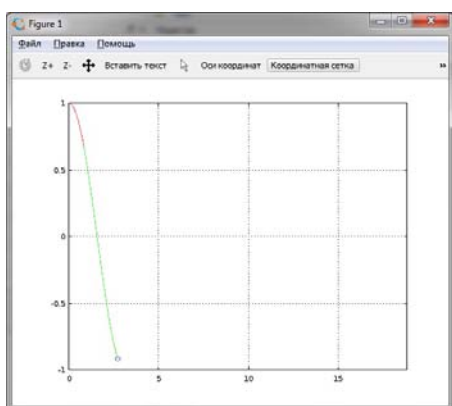


Рис. 10. Начало движения точки.

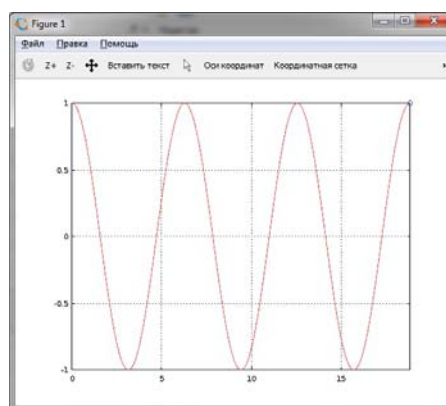


Рис. 11. Конечное положение точки.

## 2. Построение трёхмерных графиков

График поверхности (трёхмерный или 3D-график) - это график, положение точки в котором определяется значениями трёх координат.

### Построение графиков поверхностей

Дадим определение прямоугольной (или декартовой) системе координат в пространстве. Прямоугольная система координат в пространстве состоит из заданной фиксированной точки  $O$  пространства, называемой началом координат, и трёх перпендикулярных прямых пространства  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ , не лежащих в одной плоскости и пересекающихся в начале координат, - их называют координатными осями ( $OX$  - ось абсцисс,  $OY$  - ось ординат,  $OZ$  - ось аппликат). Положение точки  $M$  в пространственной системе координат определяется значением трёх координат и обозначается  $M(x, y, z)$ . Три плоскости, содержащие пары координатных осей, называются координатными плоскостями  $XY$ ,  $XZ$ ,  $YZ$ .

Величина  $z$  называется функцией двух величин  $x$  и  $y$ , если каждой паре чисел, которые могут быть значениями переменных  $x$  и  $y$ , соответствует одно или несколько определенных значений величины  $z$ . При этом переменные  $x$  и  $y$  называют аргументами функции  $z(x, y)$ . Пары тех чисел, которые могут быть значениями аргументов  $x, y$  функции  $z(x, y)$ , в совокупности составляют область определения этой функции.

Для построение графика двух переменных  $z = f(x, y)$  необходимо выполнить следующие действия.

1. Сформировать в области построения графика прямоугольную сетку, проводя прямые, параллельные осям  $y = y_j$  и  $x = x_i$ , где  $x_i = x_0 + ih$ ,  $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ,  
 $y_j = y_0 + jb$ ,  $b = \frac{y_k - y_0}{k}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, k$ .
2. Вычислить значения  $z_{i,j} = f(x_i, y_j)$  во всех узлах сетки.
3. Обратиться к функции построения поверхности, передавая ей в качестве параметров сетку и матрицу  $Z = z_{i,j}$  значений в узлах сетки.

Для формирования прямоугольной сетки в Octave есть функция *meshgrid*. Рассмотрим построение трёхмерного графика на следующем примере.

**Пример.** Построить график функции  $z(x, y) = 3x^2 - 2\sin^2 y$ ,  $x \in [-2, 2]$ ,  $y \in [-3, 3]$ .

**Решение задачи в Octave.** Для построения графика функции  $z(x, y) = 3x^2 - 2\sin^2 y$ ,  $x \in [-2, 2]$ ,  $y \in [-3, 3]$  сформируем сетку. Для этого воспользуемся функцией *meshgrid*. Здесь же вычислим значение функции во всех узловых точках. Результат формирования сетки и вычисления значения функции мы можем увидеть в командном окне.

```
[x y] = meshgrid(-2:2, -3, 3); %формирование сетки
z = 3 * x . * x - 2 sin(y).^2
```

Для построения каркасного графика следует обратиться к функции *mesh*: *mesh(x, y, z)*.

```
[x y] = meshgrid(-2:2, -3, 3);
z = 3 * x . * x - 2 sin(y).^2
mesh(x, y, z);
```

В результате получаем трёхмерный график (Рис.13).

Любой трёхмерный график можно вращать, используя мышку.

Для построения поверхностей, кроме функции *mesh* построения каркасного графика, есть функция *surf*, которая строит каркасную поверхность, заливая её каждую клетку цветом, который зависит от значения функции в узлах сетки.

### Литература

1. Нигмедзянова А.М., Минсафина Э.И., Мамешина А.Н. Среда программирования Octave. Задачи линейной алгебры. Графика.: учеб.-методич. пособие / А.М. Нигмедзянова, Э.И. Минсафина, А.Н. Мамешина. - Казань: Казан. университет, 2016. - 78 с.
2. Alfio Quarteroni, Fausto Saleri, Paola Gervasio. Scientific Computing with MATLAB and Octave (Texts in Computational Science and Engineering). Springer, 2014. - 442 p.

```

x =ug>
-2 -1 0 1 2
-2 -1 0 1 2
-2 -1 0 1 2
-2 -1 0 1 2
-2 -1 0 1 2
-2 -1 0 1 2
-2 -1 0 1 2

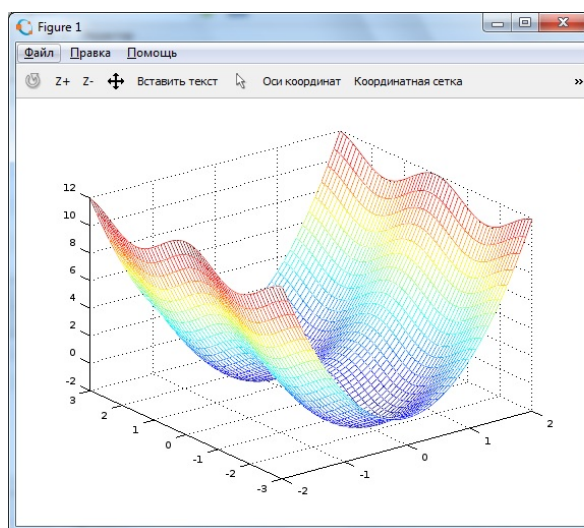
y =
-3 -3 -3 -3 -3
-2 -2 -2 -2 -2
-1 -1 -1 -1 -1
0 0 0 0 0
1 1 1 1 1
2 2 2 2 2
3 3 3 3 3

z =
11.96017 2.96017 -0.03983 2.96017 11.96017
10.34636 1.34636 -1.65364 1.34636 10.34636
10.58385 1.58385 -1.41615 1.58385 10.58385
12.00000 3.00000 0.00000 3.00000 12.00000
10.58385 1.58385 -1.41615 1.58385 10.58385
10.34636 1.34636 -1.65364 1.34636 10.34636
11.96017 2.96017 -0.03983 2.96017 11.96017

debug>

```

**Рис. 12.** Вычисление значения функции во всех узловых точках.



**Рис. 13.** График функции  $z(x, y) = 3x^2 - 2\sin^2 y$ .

3. Dr Shoichiro Nakamura. GNU OCTAVE Primer for Beginners: EZ Guide to the Commands and Graphics. Paperback, 2015. – 82 p.
4. Jesper Schmidt Hansen. GNU Octave Beginner's Guide. Packt Publishing, 2011. – 280 p.



The article describes the principles of working with graphics in the programming environment OCTAVE, examples are given.  
Keywords: graphics, environment OCTAVE.

УДК 519.61

## ЦЕПИ МАРКОВА И ПРОБЛЕМА КОЛЛАТЦА

Е.Д. Ощепков<sup>1</sup>

<sup>1</sup> oshchepkov.04.05.1997@gmail.com; Кубанский государственный университет

В статье обсуждается задача аддитивной теории чисел так называемой проблемы Коллатца или сиракузской проблемы.

**Ключевые слова:** проблема Коллатца, сиракузская проблема, теория чисел, Python.

Речь идет о вопросах делимости. Мы берем произвольное нечетное число  $A$  и заменяем его на  $3 \cdot A + 1$  – это уже четное число. После этого делим его на степени двойки пока не получится нечетное число  $B$ . Отображение  $A \rightarrow B$  называется отображением Коллатца. Требуется доказать, что если взять достаточное количество суперпозиций этого отображения, то каким бы не было исходное нечетное число  $A$  в итоге всегда получится 1.

**Определение 1.** Множество нечётных чисел обозначим как  $\mathbb{N}_1$ , а множество чисел взаимно простых с 6 обозначим как  $\mathbb{N}_3$ .

**Определение 2.** Функцию Коллатца обозначим через  $K$ . Нечётному числу  $n$  ставится в соответствие нечётное число  $t$ , которое получено из числа  $3n + 1$  путём деления на максимально возможную степень числа 2.

Таким образом  $K : \mathbb{N}_1 \rightarrow \mathbb{N}_1$ .

**Гипотеза Коллатца.** Для любого нечётного числа  $t$  найдётся такое натуральное  $n$ , что  $K^*(t) = 1$ .

Опираясь на данную гипотезу можно выдвинуть следующие леммы.

**Лемма 1.** Пусть имеется два состояния системы – это числа вида  $6k + 1$  и  $6k + 5$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда матрица переходов марковского процесса имеет вид:

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Лемма 2.** Пусть имеется 6 состояний системы – это числа вида:  $18k + 1, 18k + 5, 18k + 7, 18k + 11, 18k + 13, 18k + 17$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда матрица переходов марковского процесса имеет вид:

$$\frac{1}{63} \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 & 32 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

**Лемма 3.** Пусть имеется 18 состояний системы – это числа вида:

$54k + 1, 54k + 5, 54k + 7, 54k + 11, 54k + 13, 54k + 17, 54k + 21, 54k + 23, 54k + 25, 54k + 29, 54k + 31, 54k + 35, 54k + 37, 54k + 41, 54k + 43, 54k + 47, 54k + 49, 54k + 53$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда матрица переходов марковского процесса имеет вид:

Чтобы получить эту матрицу можно пойти несколькими путями. Первый – это доказывать вручную, но это большой объём вычислений, а также огромный риск ошибиться при вычислениях. Но есть и второй путь – написать программу, которая вычислит значения всех элементов матрицы. Рассмотрим, как это можно сделать.

Заметим, что в каждом последующем доказательстве используются результаты, полученные в предыдущем доказательстве, а именно вероятностные события, выходящие за рамки данного доказательства. Поэтому для того, чтобы браться за получение матрицы в третьей лемме, следует пройти по алгоритму из первой, а затем второй леммы.

$$\frac{1}{262143} \begin{pmatrix} 65536 & 8 & 16384 & 2048 & 64 & 8192 & 1024 & 512 & 256 & 131072 & 1 & 2 & 16 & 32768 & 4 & 32 & 4096 & 128 \\ 16384 & 2 & 4096 & 512 & 16 & 2048 & 256 & 128 & 64 & 32768 & 65536 & 131072 & 4 & 8192 & 1 & 8 & 1024 & 32 \\ 16 & 512 & 4 & 131072 & 4096 & 2 & 65536 & 32768 & 16384 & 32 & 64 & 128 & 1024 & 8 & 256 & 2048 & 1 & 8192 \\ 4 & 128 & 1 & 32768 & 1024 & 131072 & 16384 & 8192 & 4096 & 8 & 16 & 32 & 256 & 2 & 64 & 512 & 65536 & 2048 \\ 1024 & 32768 & 256 & 32 & 1 & 128 & 16 & 8 & 4 & 2048 & 4096 & 8192 & 65536 & 512 & 16354 & 131072 & 64 & 2 \\ 256 & 8192 & 64 & 8 & 65536 & 32 & 4 & 2 & 1 & 512 & 1024 & 2048 & 16384 & 128 & 4096 & 32768 & 16 & 131072 \end{pmatrix}$$

Заметим, что модуль с каждой леммой увеличивается в 3 раза. Также заметим, что вероятностных событий в 3 раза меньше чем модуль. Следовательно, столько же строк и столбцов в матрице. Также заметим, что любой модуль можно расписать как  $2 \cdot 3^D$ , где  $D$  – не только степень, но и количество шагов, которые нужно пройти для получения матрицы.

Например  $2 \cdot 3^1 = 6$ , для того, чтобы получить матрицу по модулю 6, нам нужно пройти один шаг.  $2 \cdot 3^2 = 18$ , для того, чтобы получить матрицу по модулю 18, нужно пройти два шага и так далее.

Идея программы состоит в том, что нужно вычислить все необходимые вероятностные события, затем вычислить элементы матрицы. Возводить полученную матрицу в натуральную степень до тех пор, пока все строки матрицы не будут одинаковыми. В итоге вывести элементы полученной матрицы после возведения в степень, а также вывести степень. Полученная степень – это количество шагов, которое нужно пройти, чтобы получить стационарные значения. Матрица, возведенная в такую степень – матрица предельных переходов.

#### Примеры вычислений на Python.

Чтобы получить матрицу стационарных состояний для первой леммы, не нужно возводить ни в какую степень, так как обе строки у неё одинаковые. А сами стационарные состояния выглядят так:

$$\frac{1}{3} (1 \ 2)$$

Чтобы получить матрицу стационарных состояний для второй леммы, нужно возвести данную матрицу во вторую степень. Стационарные состояния выглядят так:

$$\frac{1}{3969} (504 \ 252 \ 126 \ 1008 \ 693 \ 1386)$$

Чтобы получить матрицу стационарных состояний для третьей леммы, нужно возвести данную матрицу во третью степень. Стационарные состояния выглядят так:

$$\frac{1}{18014192351838207} (661900949988768 \ 593181997539768 \\ 165475237497192 \ 878503088108016 \ 1600120807774965 \ 2370254107870908 \\ 439251544054008 \ 219625772027004 \ 109812886013502 \ 1323801899977536 \\ 360087310832760 \ 720174621665520 \ 1186363995079536 \ 330950474994384 \\ 296590998769884 \ 2372727990159072 \ 1185127053935454 \ 3200241615549930)$$

Отсюда видим, что разброс вероятности появления чисел в цепочках, довольно большой. Тем самым числа входят в цепочки крайне неравномерно.

В конце хотел бы выразить благодарность своему научному руководителю, без которого не было бы моей работы - доктору физ. - мат. наук Рожкову Александру Викторовичу.

#### Литература

1. Рожков А.В. Преподавание математики и информатики в ведущих университетах мира и опыт КубГУ / А.В.Рожков, М.В.Рожкова / Университеты в системе поиска и поддержки математически одаренных детей и молодежи. Материалы I Всероссийской научно-практической конференции. – 2015. – С.116-121.
2. Рожков А.В. Стратегия DPS - Debian-Python-Sage: Проблемно-ориентированные вычислительные среды на открытом коде / А.В. Рожков / Труды V-я Междунар. Науч.-практич. Конф. «Информационные технологии в образовании и науке» (ИТОН – 2016). – Казань:КФУ, 2016. – С. 172-179.

3. Рожков А.В. Экспериментальная (вычислительная) теория чисел / А.В. Рожков, М.В. Рожкова // Новые информационные технологии в образовании и науке: материалы X междунар. науч.-практ. конф. (Екатеринбург, 27 февраля-3 марта 2017г.); ФГАОУ ВО «Рос. гос. проф.-пед. ун-т». Екатеринбург. – 2017. – С.413-417.

## MARKOV'S CHAINS AND KOLLATTS'S PROBLEM

E.D. Oshchepkov

*In article the task of the additive theory of numbers of a so-called problem of Kollatts or the Syracuse problem is discussed.*

Keywords: Kollatts's problem, Syracuse problem, theory of numbers, Python.

УДК 512.5

## СУММЫ КВАДРАТОВ МАТРИЦЫ: ОТ ГИПОТЕЗ К ТЕОРЕМАМ

И.Н. Попов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [popovivannik@yandex.ru](mailto:popovivannik@yandex.ru); Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова

*В статье рассматривается вопрос о выдвигении гипотез о числовых величинах квадратов матриц на основе экспериментальных данных. Одна из величин является возможной суммой квадрата матрицы, вторая — количество квадратов матрицы определенной суммы. Исследуемыми свойствами величин являются области их изменения и симметричность.*

**Ключевые слова:** матрица, квадрат матрицы, программирование, Maple.

### Введение.

При решении многих задач по математическому анализу, аналитической геометрии, алгебры, теории вероятностей и математической статистики и других разделов математики решение сводится к построению и исследованию матриц и их составных частей (подматриц). С таким подходом встречаемся при определении экстремумов функции нескольких переменных, решении систем линейных уравнений, преобразовании систем координат, при исследовании систем с вероятностными переходами от состояния к состоянию и так далее. В ряде же задач сами матрицы являются объектами исследований. Примерами таких ситуаций являются определение ранга матрицы, выяснение обратимости, вычисление определителя и так далее. Обсуждение всех этих вопросов отражено в полном объеме в работах [1] и [2]. В работе [3] на основе подматриц матрицы с вычетами по модулю 2 в качестве ее элементов доказывается критерий принадлежности матрицы к аддитивной группе матриц строк и столбцов  $RC$ , а также принадлежности матриц к одному классу смежности по этой подгруппе.

В данной работе рассматриваются матрицы с числовыми элементами. Хотя ряд результатов и подходов можно перенести на матрицы с элементами различной природы: вычеты по модулю, функции, матрицы и так далее.

Сформулируем и введем следующие определения и обозначения.

Пусть  $A$  — матрица размерности  $m \times n$ , где  $n \geq 2$  и  $m \geq 2$ , с числовыми элементами. Элементы  $a_{is}$ ,  $a_{it}$ ,  $a_{js}$  и  $a_{jt}$  матрицы  $A$ , где  $i, j \in \{1; 2; \dots; m\}$  и  $s, t \in \{1; 2; \dots; n\}$ , образуют подматрицу

$$A(i, s; i, t; j, s; j, t) = \begin{pmatrix} a_{is} & a_{it} \\ a_{js} & a_{jt} \end{pmatrix}$$

матрицы  $A$ , называемую квадратом.

**Теорема.** Число квадратов матрицы  $A$  размерности  $m \times n$  равно  $\frac{mn(m-1)(n-1)}{4}$ .

Суммой квадрата  $A(i, s; i, t; j, s; j, t)$  матрицы  $A$  называется число

$$\text{sum}(A(i, s; i, t; j, s; j, t)) = \frac{a_{is} + a_{jt} + a_{it} + a_{js}}{2}.$$

Отметим, что величина  $\text{sum}$  может принимать не только целочисленные значения, даже если все элементы матрицы  $A$  являются целыми числами.

Среди всех квадратов матрицы  $A$  выберем квадраты, для которых величина  $\text{sum}$  принимает наименьшее и наибольшее значения. Эти значения обозначим  $\text{sum}_{\min}$  и  $\text{sum}_{\max}$  соответственно. Возможен случай, что  $\text{sum}_{\min} = \text{sum}_{\max}$ .

Количество квадратов матрицы  $A$ , суммы которых равны  $\text{sum}$ , обозначим  $\nu(\text{sum})$ . Заметим, что не предполагается, что для каждого  $\text{sum}$  из отрезка  $[\text{sum}_{\min}; \text{sum}_{\max}]$  найдется квадрат матрицы  $A$ , сумма которого будет равна выбранному  $\text{sum}$ . Например, в матрице

$$A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

суммы квадратов могут принимать целочисленные значения из отрезка  $[3; 7]$ , но не найдется ни одного квадрата, сумма которого равна 4 или 6. Поэтому можем считать, что  $\nu(4) = \nu(6) = 0$ .

Для любой матрицы  $A$  справедливо равенство

$$\sum_{\text{sum}=\text{sum}_{\min}}^{\text{sum}_{\max}} \nu(\text{sum}) = \frac{mn(m-1)(n-1)}{4}.$$

Ряд свойств квадратов матриц рассмотрены в работе [4].

## 1. Исследуемые величины.

Исследуемыми величинами являются  $\text{sum}$  и  $\nu(\text{sum})$ . Очевидно, что при больших значениях размерности матрицы определять указанные величины "в ручную" нет возможностей. Поэтому все расчеты следует проводить, используя компьютерные программы, например, СКМ Maple, возможности которой, в частности, позволяют осуществлять работу с матрицами и их компонентами.

Для подсчета величины  $\nu(\text{sum})$  матрицы  $A$  можно воспользоваться программой:

```

1) m:=3:n:=5:
2) A:=matrix(m,n):
3) A:=evalm([[1,2,3,4,5],[1,2,3,4,5],[1,2,3,4,5]]):
4) B:=[]:pr:=m*n-1:
5) for a from 0 to pr do
6)   i:=iquo(a,n):j:=irem(a,n):c:=a+1+n:
7)   for b from c to pr do
8)     q:=iquo(b,n):s:=irem(b,n):
9)     if j<s and i<q then
10)      B:=[op(B),(A[i+1,j+1]+A[q+1,s+1]+A[i+1,s+1]+A[q+1,j+1])/2]: fi:
11) od:od:
12) B:=sort(B):S:={}:
13) for i from 1 to nops(B) do S:= S union {B[i]} od:
14) for i from 1 to nops(S) do v[S[i]]:=0 od:
15) for i from 1 to nops(B) do v[B[i]]:=v[B[i]]+1 od:
16) B:=[]:for i from 1 to nops(S) do B:=[op(B),S[i]] od: B:=sort(B):
17) L:=[]:for i from 1 to nops(S) do L:=[op(L),[B[i],v[B[i]]]] od: L:

```

Пояснения к программе. В строках 1-3 задается матрица  $A$ . С 4-11 формируется список  $B$ , элементами которого являются суммы каждого квадрата матрицы  $A$ . В строках 12-16 происходит подсчет количества квадратов матрицы определенной суммы. В строке 17 формируется список  $L$ , элементами которого являются пары, первый элемент которой равен сумме квадрата, второй — количеству квадратов с этой суммой. Элементы списка  $L$  выводятся на экран.

**Пример.** Пусть

$$A_{4 \times 6} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & 23 \\ 14 & 16 & 18 & 20 & 22 & 24 \end{pmatrix}.$$

В данной матрице можно выделить 90 квадратов.

Результатом работы программы является список:

[[5, 1], [7, 1], [9, 2], [11, 2], [13, 3], [15, 2], [16, 1], [17, 4],  
 [18, 2], [19, 3], [20, 3], [21, 5], [22, 4], [23, 4], [24, 5], [25, 6],  
 [26, 5], [27, 4], [28, 4], [29, 5], [30, 3], [31, 3], [32, 2], [33, 4],  
 [34, 1], [35, 2], [37, 3], [39, 2], [41, 2], [43, 1], [45, 1]]

Оформляя данные, получаем таблицу 1 значений ( $\text{sum}; v(\text{sum})$ ).

Таблица 1. Суммы квадратов и число квадратов с данной суммой матрицы  $A_{4 \times 6}$

sum	5	7	9	11	13	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$v$	1	1	2	2	3	2	1	4	2	3	3	5	4	4	5	6
sum	45	43	41	39	37	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25
$v$	1	1	2	2	3	2	1	4	2	3	3	5	4	4	5	6

Представляя данные таблицы 1 в графическом виде, откладывая по горизонтали значения  $\text{sum}$  от 5 до 45 с шагом 1, по вертикале —  $v(\text{sum})$  от 1 до 6 с шагом 1, получаем рисунок 1.

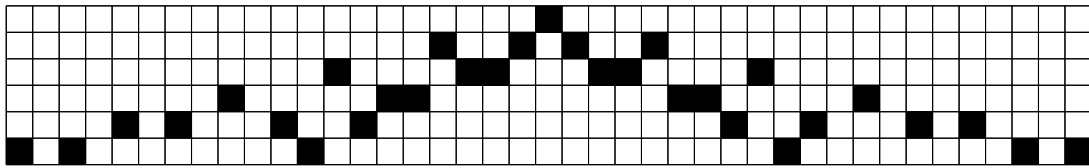


Рисунок 1. Графическое представление данных таблицы 1.

По таблице 1 получаем, что справедливо равенство  $v(2 \cdot 25 - \text{sum}) = v(\text{sum})$ . Графически это означает, что рисунок, соответствующий представлению данных, должен быть симметричным относительно одной из вертикальных прямых, что видим на рисунке 1, который симметричен относительно вертикальной прямой  $\text{sum} = 25$ .  $\square$

## 2. Экспериментальные данные и гипотезы о квадратах матриц $R$ и $C$ .

Величину  $v(\text{sum})$  можно рассматривать как функцию от величины  $\text{sum}$ . Введем следующее понятие. Если график функции  $v = v(\text{sum})$  симметричен относительно некоторой вертикальной прямой, то будем говорить, что функция  $v$  обладает свойством симметричности. В этом случае существует число  $\text{sum}_0$ , для которого справедливо равенство

$$v(\text{sum}) = v(2 \cdot \text{sum}_0 - \text{sum})$$

для любых значений  $\text{sum}$ . График функции  $v$  является симметричным относительно вертикальной прямой  $\text{sum} = \text{sum}_0$ . При этом отрезок  $[\text{sum}_{\min}; \text{sum}_{\max}]$  симметричен относительно числа  $\text{sum}_0$ .

Для выдвижения гипотез о возможных значениях величин  $\text{sum}$  и  $v(\text{sum})$  и их симметричности следует получить данные из проведенных экспериментов. Эксперименты заключаются в прогонке предложенной программы для различных значений  $m$  и  $n$ . Для получения богатого объема данных, достаточного для выдвижения предположений, следует организовать циклы по  $m$  и  $n$ , начиная с 2. При этом общее количество перебираемых квадратов матриц размерности  $m \times n$ , где  $m$  принимает натуральные значения от 2 до  $a$ ,  $n$  — от 2 до  $b$  для натуральных чисел  $a$  и  $b$ , больших 1, вычисляется по формуле:

$$\sum_{m=2}^a \sum_{n=2}^b \frac{mn(m-1)(n-1)}{4} = \frac{ab(a^2-1)(b^2-1)}{36}.$$

В качестве исследуемых матриц выбраны две матрицы размерности  $m \times n$ :

- $R$  — матрица, элементами которой являются последовательные целые числа от 0 до  $mn-1$ ,

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ n & n+1 & \dots & 2n-1 \\ 2n & 2n+1 & \dots & 3n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (m-1)n & (m-1)n+1 & \dots & mn-1 \end{pmatrix},$$

$(q+1, s+1)$ -элемент  $r_{q+1, s+1}$  матрицы  $R$  равняется  $nq+s$ , где  $0 \leq q \leq m-1$ ,  $0 \leq s \leq n-1$ ;

•  $C$  — матрица, которая получается из матрицы  $R$  путем смены знака у нечетных чисел на противоположный;  $(q+1, s+1)$ -элемент  $c_{q+1, s+1}$  матрицы  $C$  равняется  $(-1)^{nq+s} \cdot (nq+s)$ .

Примерами таких матриц являются

$$R_{6 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}, \quad C_{2 \times 8} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 & 4 & -5 & 6 & -7 \\ 8 & -9 & 10 & -11 & 12 & -13 & 14 & -15 \end{pmatrix}.$$

Для генерации матриц  $R_{m \times n}$  и  $C_{m \times n}$  следует строку 3 в предложенной программе заменить на строку:

```
3) for i from 0 to m-1 do for j from 0 to n-1 do A[i+1, j+1]:=n*i+j: od:od:
```

Для генерации матриц  $C_{m \times n}$  строку 3 заменяем на строку:

```
3) for i from 0 to m-1 do for j from 0 to n-1 do
A[i+1, j+1]:=(-1)^(n*i+j)*(n*i+j): od:od:
```

Организация циклов по параметрам  $m$  и  $n$  от 2 до 10 (при этом будет рассмотрено 27225 квадратов в 81 матрице) по выявлению свойства симметричности величины  $v$  осуществляется изменением и приписыванием строк к программе:

```
0) Lbool:=[]:
1) for m from 2 to 10 do for n from 2 to 10 do
...
17) L:=[]:for i from 1 to nops(S) do L:=op(L),[B[i],v[B[i]]] od:
18) bool:=1:
19) for i from 1 to nops(L)/2 do
20)   if L[i][2]<>L[nops(L)-i+1][2] then bool:=0 fi:
21) od:
22) if bool=1 then Lbool:=op(Lbool),[m,n] fi:
23) od:od:
24) Lbool;
```

Комментарий: в списке Lbool собираются пары  $[m, n]$ , являющиеся размерностями матриц, для каждой из которых справедливо свойство симметричности для функции количества квадратов определенной суммы.

Изменяя значения  $m$  и  $n$  от 2 до 10, на основе полученных данных о числовых свойствах квадратов матриц  $R$  размерности  $m \times n$ , были выдвинуты следующие гипотезы:

- величина  $sum$  в случае  $n > 2$  принимает все значения от  $n+1$  до  $2mn-n-3$ ;
- величина  $sum$  в случае  $n = 2$  принимает все нечетные значения от 3 до  $4m-5$ ;
- величина  $v(sum)$  обладает свойством симметричности относительно числа  $mn-1$ : для любого  $sum \in [n+1; mn-1]$  справедливо равенство  $v(sum) = v(2 \cdot (mn-1) - sum)$ , что равносильно тому, что график функции  $v(sum)$  симметричен относительно вертикальной прямой  $sum = mn-1$ ;
- величина  $v(sum)$  принимает наибольшее значение при  $sum = mn-1$ .

**Пример.** Для матрицы  $R_{6 \times 4}$  данные значений сумм квадратов  $sum$  и количества квадратов  $v(sum)$  с данным значением  $sum$  представлены в таблице 2.

Таблица 2. Суммы квадратов и число квадратов с данной суммой матрицы  $R_{6 \times 4}$

sum	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$v$	1	1	2	1	2	1	2	1	3	2	4	2	4	2	4	2	5	3	6
sum	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23
$v$	1	1	2	1	2	1	2	1	3	2	4	2	4	2	4	2	5	3	6

Общее количество квадратов матрицы  $R_{6 \times 4}$  равно 90.

В данном случае величина  $\text{sum}$  принимает все значения от 5 до 41 и справедливо равенство  $\nu(\text{sum}) = \nu(2 \cdot 23 - \text{sum})$  для  $\text{sum} \in [5; 23]$  (поэтому в 1 и 3 строках таблицы 2 числа расположены друг под другом так, чтобы их суммы равнялись 46:  $5 + 41 = 6 + 40 = \dots = 22 + 24 = 23 + 23$ ).

Представляя данные таблицы 2 в графическом виде, откладывая по горизонтали значения  $\text{sum}$  от 5 до 41 с шагом 1, по вертикале —  $\nu(\text{sum})$  от 1 до 6 с шагом 1, получаем рисунок 2.

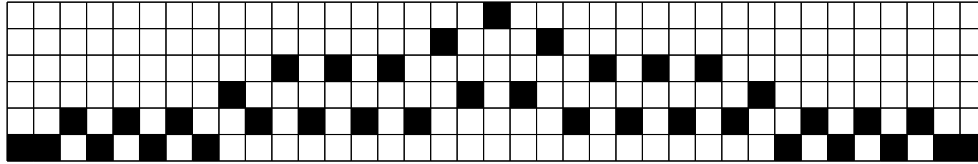


Рисунок 2. Графическое представление данных таблицы 2.

Видим, что рисунок симметричен относительно вертикальной прямой.  $\square$

Сформулированные гипотезы о свойствах величин  $\text{sum}$  и  $\nu(\text{sum})$  для матрицы  $R$  в дальнейшем были подтверждены и оформлены в виде теорем, представленных в работах [5] и [6].

Для получения информации о свойствах сумм квадратов матрицы  $C$  были проведены эксперименты, изменяя значения размерностей  $m$  и  $n$  матрицы  $C$  от 2 до 10. На основе полученных данных о числовых свойствах квадратов матриц  $C$  размерности  $m \times n$ , были выдвинуты следующие гипотезы:

- при нечетных значениях  $n$  и любом  $m$  график функции  $\nu = \nu(\text{sum})$  свойством симметричности относительно некоторой вертикальной прямой не обладает;
- при четных значениях  $n$  и произвольном  $m$  величина  $\nu(\text{sum})$  обладает свойством симметричности относительно числа  $-1$ : справедливо равенство  $\nu(\text{sum}) = \nu(-2 - \text{sum})$ , что равносильно тому, что график функции  $\nu = \nu(\text{sum})$  симметричен относительно вертикальной прямой  $\text{sum} = -1$ ;
- при четных значениях  $n$  и произвольном  $m$  величина  $\nu(\text{sum})$  принимает наибольшее значение при  $\text{sum} = -1$ .

**Пример.** Для матрицы  $C_{2 \times 8}$  данные значений сумм квадратов  $\text{sum}$  и количества квадратов  $\nu(\text{sum})$  с данным значением  $\text{sum}$  представлены в таблице 3.

Таблица 3. Суммы квадратов и число квадратов с данной суммой матрицы  $C_{2 \times 8}$

sum	-20	-18	-16	-14	-12	-7	-5	-3	-1
$\nu$	1	1	2	1	1	1	2	3	4
sum	18	16	14	12	10	5	3	1	-1
$\nu$	1	1	2	1	1	1	2	3	4

Общее количество квадратов матрицы  $C_{2 \times 8}$  равно 45.

Таблица 3 составлена таким образом, что в первой и третьей строках числа, расположенные в одном столбце, симметричны относительно числа  $-1$ , поэтому их сумма равна числу  $-2$ :  $-20 + 18 = -18 + 16 = \dots = -3 + 1 = -1 + (-1) = -2$ . Из-за симметричности функции  $\nu = \nu(\text{sum})$  вторая и четвертая строки равны.

Представляя данные таблицы 3 в графическом виде, откладывая по горизонтали значения  $\text{sum}$  от  $-20$  до  $18$  с шагом 1, по вертикале —  $\nu(\text{sum})$  от 1 до 4 с шагом 1, получаем рисунок 3.

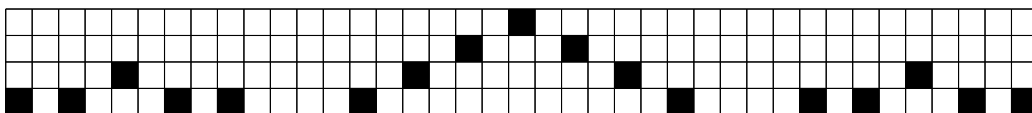


Рисунок 3. Графическое представление данных таблицы 3.

Этот пример является частным случаем, в котором функция  $\nu$  обладает свойством симметричности.  $\square$

Проанализировав полученные данные, были сформулированы теоремы о свойствах исследуемых величин  $\text{sum}$  и  $\nu(\text{sum})$ , изложенные в работе [7].

Полезными добавлениями к программе является команды:

```
18) plot(L);
19) fd := fopen('C:\DataAG\DataAG.txt', WRITE, TEXT);
20) for i from 1 to nops(L) do writedata(fd, [[L[i][1], L[i][2]]], integer); od;
21) fclose(fd);
```

Строка 18 позволяет выводить на экран график функции  $\nu(\text{sum})$ . Команды в строках 19–21 создают текстовый файл, в строках которого расположены пары чисел, соответствующие значению  $\text{sum}$  и  $\nu(\text{sum})$ . Данные такого вида могут быть в дальнейшем использованы другими программами, например, графопостроителем Advanced Grapher для наглядного представления результатов в виде графиков функций.

### Заключение.

Рассмотрим несколько комбинаторных задач, в которых квадраты матриц играют особую роль.

**Задача 1.** Пусть дана семерка чисел  $1, 2, \dots, 7$ . Следует образовать 7 множеств, состоящие из трех элементов каждое, чтобы каждая пара различных чисел из данных семи входила лишь в одно из этих множеств.

*Решение.* Требуемыми множествами являются:

$$\{1; 3; 7\}, \{1; 2; 4\}, \{2; 3; 5\}, \{3; 4; 6\}, \{4; 5; 7\}, \{1; 5; 6\}, \{2; 6; 7\}.$$

В общем случае, пусть  $S = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$  и заданы подмножества  $S_1, S_2, \dots, S_m$  множества  $S$ . Говорят, что элемент  $a_i$  и подмножество  $S_j$  инцидентны, если  $a_i \in S_j$ , где  $1 \leq i \leq n$  и  $1 \leq j \leq m$ . Матрицу  $A$  размерности  $m \times n$ , в которой  $i, j$ -элемент равен 1, если  $a_i \in S_j$ , и 0 в противном случае, называют матрицей инцидентности [8].

Формулируя задачу в общем виде, получаем, что нужно найти такие 3-элементные подмножества  $S_1, S_2, \dots, S_m$  множества  $S$ , что каждая пара различных элементов множества  $S$  принадлежат одному и только одному подмножеству. Задача разрешима, если в матрице инцидентности  $A$  нет квадрата вида  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  или, что равносильно,  $\nu_A(2) = 0$ .

Матрица инцидентности для поставленной задачи из 7 чисел имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Пояснение:} \\ \text{столбцы: элементы матрицы } A \\ \text{строки: подмножества множества } S \end{array}$$

Используемую программу получаем, что суммы квадратов этой матрицы имеют значения  $0, 1/2, 1, 3/2$ . Получаем, что подмножества выбраны требуемым образом, так как в этой матрице нет квадрата, сумма которого равна 2.  $\square$

Рассмотрим задачи из серии "На шахматной доске расставлены ладьи...".

**Задача 2.** Клетки шахматной доски пронумерованы последовательными целыми числами от 0 до 63:

0	1	2	3	4	5	6	7
...	...	...	...	...	...	...	...
56	57	58	59	60	61	62	63

Расставляются четыре ладьи таким образом, что каждая атакует две из оставшихся трех (ладьи атакуют друг друга, если стоят на одной линии (горизонтали или вертикали) и между ними нет других ладей). Для четверки ладей подсчитывается результат, равный половине суммы чисел, записанных на клетках, на которых они расположены. Определите количество расположений требуемым образом ладей, чтобы указанный числовой результат был наибольшим.

*Решение.* На рисунке 4 изображены некоторые возможные расположения ладей на шахматной доске, соответствующие условию задачи (знак "Т" символизирует поставленную ладью).

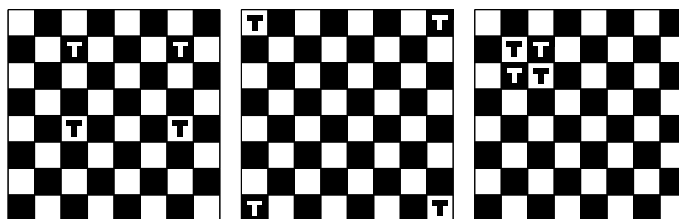


Рисунок 4. Примеры возможных расположений ладей на шахматной доске.



Как видим, решение задачи сводится к максимизации величины  $\nu(\text{sum})$  для матрицы  $R_{8 \times 8}$ . В данном случае максимальное значение величины  $\nu(\text{sum})$  равно  $\nu(8 \cdot 8 - 1) = \nu(63)$ . Используя предложенную программу, вычисляем:  $\nu(63) = 16$ . Следовательно, ответом по решению поставленной задачи является число 16.  $\square$

**Задача 3.** Клетки шахматной доски пронумерованы последовательными целыми числами от 0 до 63, затем у нечетных чисел сменили знак на противоположный:

0	-1	2	-3	4	-5	6	-7
...	...	...	...	...	...	...	...
56	-57	58	-59	60	-61	62	-63

Расставляются четыре ладьи таким образом, что каждая атакует две из оставшихся трех. Для четверки ладей подсчитывается результат, равный половине суммы чисел, записанных на клетках, на которых они расположены. Определите количество расположений требуемым образом ладей, чтобы указанный числовой результат был наибольшим.

*Решение.* В данном случае наибольший результат равен  $\nu(-1)$ , подсчитанный для матрицы  $C_{8 \times 8}$ , который равен 112.  $\square$

В рассмотренных задачах 2 и 3 изменим требование: найдите вероятность того, что ладьи расположены требуемым образом при наибольшем значении указанного числового результата. Тогда по классической формуле определения вероятностей в первом случае получаем:  $P = 16/784 = 1/49$ , во втором случае —  $P = 112/784 = 1/7$ .

Требование в задачах сформулировать можно следующим образом: в задаче 2 следует выяснить, какая из вероятностей расположения ладей больше: с указанным числовым результатом равным 42 или в два раза большим, то есть равным 84; в задаче 3 — с числовыми результатами  $-x$  или  $x - 2$ .

В решении данных задач следует применить свойство симметричности функции  $\nu$ . В первом случае справедливо равенство  $\nu(2 \cdot 63 - x) = \nu(x)$ , поэтому  $\nu(42) = \nu(84) = \nu(2 \cdot 42)$ , откуда  $\nu(42)/784 = \nu(2 \cdot 42)/784$  и вероятности равны. Во втором случае, используя равенство  $\nu(-2 + x) = \nu(-x)$ , получаем, что  $\nu(-2 + x)/784 = \nu(-x)/784$  и вероятности равны.

Обобщая задачи на случай шахматной доски размерности 100 на 100, компьютерное вычисление величин  $\text{sum}$  и  $\nu(\text{sum})$  для матриц  $R$  и  $C$  займет много времени. Поэтому для вычисления рассмотренных в статье величин необходимо прибегать к формулам, которые можно найти в работах из списка литературы.

## Литература

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969. — 368 с.
2. Ланкастер П. Теория матриц. — М.: Наука, 1973. — 280 с.
3. Попов И.Н. Группы RC и RCD: монография / И.Н. Попов – Архангельск: КИРА, 2014. – 192 с.
4. Попов И.Н. Квадраты матриц / И.Н. Попов // Научно-исследовательская деятельность школьников в области математики, прикладной математики и информатики: материалы Шестой региональной научно-практической конференции. - Ч. II. – Архангельск: САФУ, 2014. – С.119-127.
5. Попов И.Н. Суммы квадратов матрицы / И.Н. Попов // Постулат. – 2018. – № 4. – С.1-16. Режим доступа: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1367/1398>
6. Попов И.Н. Квадраты матрицы определенной суммы / И.Н. Попов // Постулат. – 2018. – № 5. – С. 1-19. Режим доступа: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1461/1493>
7. Попов И.Н. Квадраты матрицы со знакопеременными элементами / И.Н. Попов // Постулат. — 2018. — № 6. — С.1-19. Режим доступа: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1606/1640>
8. Тараканов В.Е. Комбинаторные задачи и (0, 1)-матрицы / В.Е. Тараканов. – М.:Наука, 1975. – 192 с.

THE SUM OF THE SQUARES OF THE MATRIX: FROM HYPOTHESES TO THE THEOREMS

I.N. Popov

*The article deals with the question of the hypothesis of numerical values of matrix squares on the basis of experimental data.*

*One of the values is a possible sum of the matrix square, the second — the number of squares of the matrix of a certain amount. The investigated properties of quantities are the area of change and symmetry.*

Keywords: matrix, matrix square, programming, Maple.

УДК 378.661:371.261:004.738.5

## СИСТЕМА ЭЛЕКТРОННОГО ОБУЧЕНИЯ В МЕДИЦИНСКОМ ВУЗЕ

Н.М. Попова<sup>1</sup>, Н.Г. Сабитова<sup>2</sup>, А.В. Рапенкова<sup>3</sup>

<sup>1</sup> kafedra-ozz@mail.ru; Ижевская государственная медицинская академия

<sup>2</sup> sabitovang@mail.ru; Ижевская государственная медицинская академия

<sup>3</sup> phizika@igma.udm.ru; Ижевская государственная медицинская академия

*В данной статье рассматриваются методы определения контроля знаний студентов с помощью тестирования по медицинской информатике в системе электронного обучения E-Learning, с использованием международной программы Moodle.*

**Ключевые слова:** система электронного обучения, формирование компетенций в области информационных и коммуникационных технологий (ИКТ-компетенции).

Концепция развития электронного медицинского образования в России до 2020 года предполагает:

- разработку стратегии внедрения электронных технологий в обучение;
- создание системы независимой оценки знаний студентов, врачей и аттестации преподавателей;
- интеграцию дистанционных образовательных программ в систему непрерывного медицинского образования [5].

В процессе изучения дисциплины «Медицинская информатика» студенты медицинского вуза должны ознакомиться с особенностями использования информационных и коммуникационных технологий в учебном процессе; аппаратными и программными средствами, понятийным аппаратом информационных и коммуникационных технологий в здравоохранении; технологиями автоматизации обработки текстовой информации, Интернет-технологиями и ресурсам, поисковыми системами, связанными с профессиональной деятельностью. Проанализировав литературные источники в данной области мы выявили, что не достаточно разработано учебно-методических пособий, подходов в реализации программ ФГОС-3. Есть острая необходимость совершенствовать учебный процесс в осуществлении подготовки специалистов. Требования к будущему врачу практически сводятся к автоматизации лечебно-диагностического процесса и управления медицинскими организациями (МО) за счет информационной и интеллектуальной поддержки медицинских сотрудников, что увеличит эффективность работы МО. Необходимо умение осуществлять пользовательские навыки в медицинских информационных системах, экспертных системах, способность формализовать электронные истории болезней, заполнять электронные медицинской карты, расширение возможностей применения Интернет-ресурсов, медицинских сайтов, каталогов, виртуальных атласов и др., применение телемедицинских технологий, системы электронного обучения на платформе Moodle и др. В рамках реализации Концепции создания единой государственной информационной системы в сфере здравоохранения (ЕГИСЗ) процесс информатизации здравоохранения [4], перспективы ее развития начинаются с подготовки медицинских кадров, выпускников, специалистов, усвоивших научную дисциплину «Медицинская информатика», которая является фундаментальной основой в формировании информационных и коммуникационных компетенций студентов.

Одна из методик проведения контроля знаний студентов тестирование средствами E-Learning. Электронное обучение (e-learning) – это передача знаний и управление процессом обучения с помощью новых информационных и телекоммуникационных технологий. В процессе электронного обучения используются интерактивные электронные средства доставки информации, преимущественно Интернет [2]. Активное внедрение в учебный процесс системы E-Learning открывает новые возможности в образовательном процессе.

В большинстве источников, когда речь заходит о тестовых технологиях в учебном процессе, тест рассматривается как элемент контроля и как элемент обучения [1]. Педагогический тест – это система тестовых заданий различной трудности, которая позволяет качественно и эффективно измерить уровень и степень подготовленности студентов. Педагогическое тестирование на современном этапе является эффективным средством определения уровня знаний студентов. Тестовые задания позволяют оказывать стимулирующее воздействие на познавательную деятельность учащихся, обеспечивают быстроту проведения контроля знаний студентов и возможность оптимального использования учебного времени. Система E-Learning позволяет преподавателю создавать тесты различных типов [3]. Существуют различные типы тестовых вопросов: *это тест вычисляемый, описание, тест на соответствие, вложенные ответы, множественный выбор, короткий ответ, числовой, случайный вопрос на соответствие, тест «верно-неверно», эссе и др.*

В Ижевской государственной медицинской академии (ИГМА) в учебной программе Moodle создается соответствующий изучаемому курсу электронный ресурс, состоящий из модулей (изучаемых тем), в которые включены теоретические лекции, а также контролирующие задания – тесты в каждом модуле. Результаты тестового контроля позволяет спланировать преподавателем дальнейшую учебную работу, организовать контроль знаний и оперативно получить преподавателем общие сведения о знаниях студентов по изучаемому модулю (разделу).

Технология организации работы в системе включает:

1. Вход в систему студентом на сайт <https://e-learning.igma.ru/>
2. Подтверждение аккаунта (учетной записи) (рис.1.)

Рис. 1. Подтверждение аккаунта (учетной записи).

3. Методическую информацию для данного раздела

После каждой темы (раздела) создан тест, который содержит ряд вопросов, охватывающих данную тему, и варианты ответов (рис.2).

4. Выполнение тестового задания

Для выполнения тестирования студент, пройдя аутентификацию в системе, получает доступ к тестовым заданиям. Студенту, ответившему на вопросы теста, система выдает результат, отражающий количество правильных ответов и оценку по пятибалльной шкале. Для выполнения теста дается несколько попыток (определяется преподавателем), количество времени на прохождение теста и задержка между попытками (рис.3).

5. Оценку результатов тестирования

После выполнения теста и отправки его на проверку студент видит результат тестирования – количество правильных ответов и общий балл по пятибалльной системе см. рис.5.

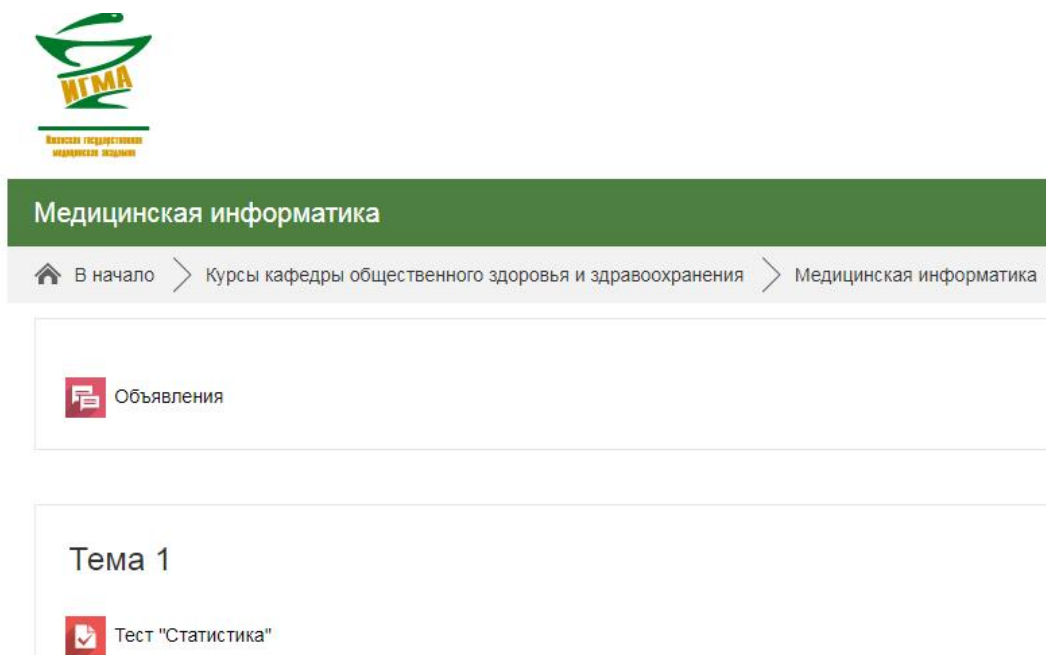


Рис. 2. Вход в тестирование.

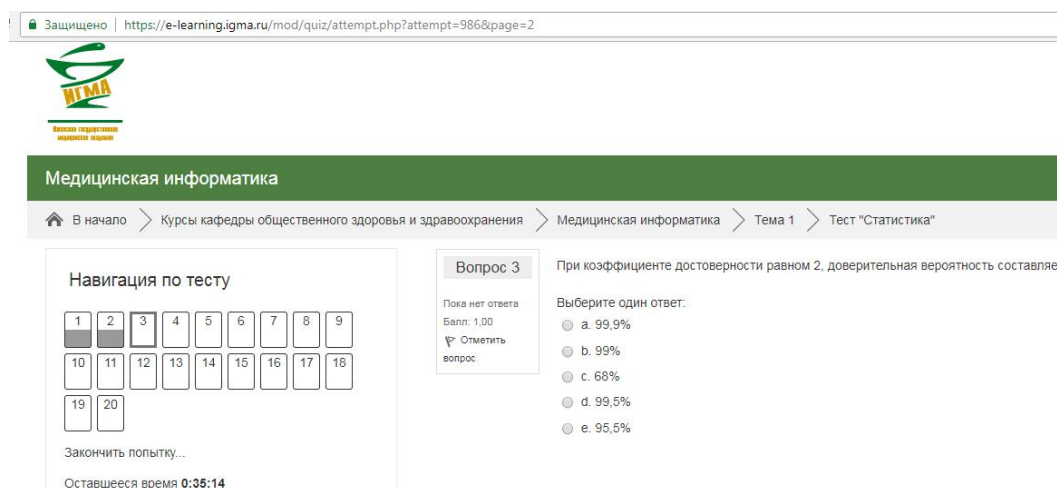


Рис. 3. Выполнение тестового задания.

Таким образом, итоговое тестирование позволяет обеспечить объективность при оценке контроля знаний, стимулирует студента в освоении дисциплины и повышает эффективность обучения студентов, а также позволяет выявить пробелы в знаниях в определенных темах в изучении дисциплины.

Наш опыт показывает, что разработанные курсы в системе E-Learning по дисциплине «Медицинская информатика» позволяют эффективно использовать для промежуточного и итогового контролей знаний в учебном процессе.

## Литература

1. Андреев А.В. Практика электронного обучения с использованием Moodle / А.В. Андреев, С.В. Андреев, И.Б. Доценко. – Таганрог: Изд-во. ТТИ юфу, 2008. – 146 с.
2. Информатизация и образование [Электронный ресурс] // Режим доступа: <http://hotuser.ru/distanczionnoe-obuchenie/1142-e-learning>

**Медицинская информатика**

В начало > Курсы кафедры общественного здоровья и здравоохранения > Медицинская информатика > Тема 1 > Тест "Статистика"

**Навигация по тесту**

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20							

Показать одну страницу  
Закончить обзор

<b>Тест начат</b>	Четверг, 21 Июнь 2018, 13:57
<b>Состояние</b>	Завершено
<b>Завершен</b>	Четверг, 21 Июнь 2018, 14:11
<b>Прошло времени</b>	13 мин. 53 сек.
<b>Баллы</b>	13.00/20.00
<b>Оценка</b>	<b>6,50 из 10,00 (65%)</b>

**Вопрос 1** С увеличением объема наблюдений ошибка репрезентативности

Выполнен  
Баллов: 0,00 из 1,00  
Статус: отметить вопрос

Выберите один ответ:

- а. Остается без изменений
- б. Уменьшается
- в. Увеличивается

**Вопрос 2** С увеличением колеблемости ряда ошибка показателя

Выполнен  
Баллов: 1,00 из 1,00  
Статус: отметить вопрос

Выберите один ответ:

- а. Существенно не меняется
- б. Увеличивается
- в. Уменьшается

**Вопрос 3** При коэффициенте достоверности равном 2, доверительная вероятность составляет:

Выполнен  
Баллов: 1,00 из 1,00  
Статус: отметить вопрос

Выберите один ответ:

- а. 99,9%
- б. 99%
- в. 68%

Рис. 4. Оценка результатов тестирования.

3. Майоров А. Н. Теория и практика создания тестов для системы образования. (Как выбирать, создавать и использовать тесты для целей образования) / А. Н. Майоров. – М.:Интеллект-центр, 2001. – 296 с.

4. Приказ от 28 апреля 2011 г. n 364 "Об утверждении концепции создания единой государственной информационной системы в сфере здравоохранения"[Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.rosminzdrav.ru/system/attachments/attaches/000/018/.../Концепция.docx>

5. Электронное медицинское образование войдет в систему цифровой экономики[Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://sovetrektorov.ru/novosti/2018/elektronnoe-meditsinskoe-obrazovanie-voynet-v-sistemu-tsifrovoy-ekonomiki/>

## ELECTRONIC EDUCATION SYSTEM IN THE MEDICAL UNIVERSITY

N.M. Popova, N.G. Sabitova, A.V. Rapenkova

*This article examines methods for determining the control of students' knowledge through testing in medical informatics in E-Learning, using the international Moodle program.*

Keywords: e-learning system, formation of competences in the field of information and communication technologies (ICT competence).

УДК 378.14

## ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ

Н.В. Потапова<sup>1</sup>, А.В. Большаков<sup>2</sup>

<sup>1</sup> [potapova50@gmail.com](mailto:potapova50@gmail.com); Кубанский государственный университет

<sup>2</sup> [aleksiosroller@mail.ru](mailto:aleksiosroller@mail.ru); Кубанский государственный университет

*В статье проводится анализ использования информационных технологий в образовательном процессе вуза как объективной закономерности современного образования. Рассмотрен пример реализации курсов экспериментальной математики для студентов факультета математики и компьютерных наук Кубанского государственного университета.*

**Ключевые слова:** высшее образование, информационные технологии, педагогическое взаимодействие, экспериментальная математика.

Само понятие «информационная технология» возникло в последние десятилетия XX в. Главной особенностью информационных технологий является то, что в них и предметом, и продуктом труда является информация, а орудиями труда – средства вычислительной техники и связи. Причем сегодня информация стала рассматриваться как вполне реальный производственный ресурс наряду с другими материальными ресурсами. Двадцать – тридцать лет назад трудно было представить такую зависимость различных сфер деятельности человека от информационных технологий. Они становятся все более взаимопроникающими. В связи с этим изменяется и система образования, в которой особое место занимают компьютерные технологии как одна из разновидностей информационных технологий, связанных с применением и использованием компьютерной техники и средств связи.

Технология обучения по своей природе имеет характер информационного взаимодействия участников образовательного процесса. С одной стороны, она представляет собой совокупность методов и средств сбора, обработки и обобщения учебной информации. С другой – способы воздействия преподавателя на обучаемого данной информацией. Отсюда следует, что использование компьютерных технологий в обучении – это педагогическая разновидность информационных технологий [1].

В настоящее время в педагогической науке доминируют два основных подхода к пониманию сущности использования информационных (в том числе и компьютерных) технологий в обучении студентов вузов:

1. возможность расширения содержательной и информационной подготовки студентов за счет способности иллюстрировать лекционный и практический материал, углубления изучаемой предметной области за счет способности моделирования, наглядности, имитации изучаемых процессов и явлений, решаемых учебных, научных и практических задач;
2. комплекс методов, производственных процессов и программно-технических средств, интегрированных с целью сбора, хранения, распространения, отображения и предоставления информации пользователям для развития познавательной деятельности студентов и совершенствования образовательного процесса вуза.

Составными частями использования информационных технологий в обучении выступают следующие компоненты.

Во-первых, в процессе обучения потенциальным знанием является содержание обучения в виде учебной информации, предъявляемой студентам, и комплекса задач, заданий и упражнений, обеспечивающих формирование профессиональных компетенций, навыков, умений с приобретением первоначального опыта профессиональной деятельности. При этом получаемая студентами информация трансформируется в информационно-педагогический продукт, превращающийся затем в знания обучаемых.

Во-вторых, в составе информационных технологий системообразующей компоненты применительно к обучению большую роль играет собственно технология обучения как проект реального педагогического процесса. В качестве такой компоненты применяются программные комплексы, обеспечивающие необходимое функционирование компьютеров (программы управления базами данных, обучающие программы, программы управления видеокomпьютерными и экспертными системами, системами мультимедиа).

В-третьих, важным компонентом информационных технологий считаются сетевые технологии, использование которых построено на основе автоматизированных информационных систем и находит все большее применение в настоящее время.

В случае использования информационных технологий в обучении преподаватель определяет приоритетные цели обучения на каждом его этапе, требования к учебной информации; производит ее отбор и структурирование, проектирует порядок, способы, варианты ее представления студентам

для достижения необходимого педагогического эффекта. Использование в работе современных технических средств лишь многократно расширяет возможности преподавателя в его педагогическом взаимодействии со студентами, ведь именно преподаватель испытывает объективную потребность и необходимость вводить в образовательный процесс учебную информацию, обладающую более широким спектром качественных параметров, чем это было ранее.

Исходя из сущности компьютерных технологий, представляется возможным сформулировать основные цели их использования, главной из которых является повышение качества обучения студентов на основе применения информационной среды, организованной на базе современных компьютерных, коммуникационных и программных средств, объединенных с традиционными и инновационными технологиями обучения.

Наряду с главной, имеют место и другие цели, включающие все многообразие применения компьютерных информационных технологий в обучении студентов гуманитарных вузов:

1. доступность разнообразных форм обучения, в том числе и дистанционного, ориентированных на индивидуальные особенности студента;
2. возможность проведения различного рода тестирований и проверки знаний, позволяющих студентам самостоятельно контролировать свои знания;
3. возможность моделирования образовательного процесса и конкретных учебных задач в зависимости от изучаемых дисциплин и индивидуальных качеств студента;
4. возможность прогнозирования и оптимизации различных процессов для развития компетенций, необходимых в профессиональной деятельности;
5. освоение различных информационных услуг глобальной сети Интернет в соответствии с современными требованиями к будущему специалисту.

Выбор способа использования информационных технологий в педагогическом процессе стоит в прямой зависимости от дидактической задачи.

Информационные технологии можно рассматривать как разновидность педагогических технологий, позволяющих сформировать определенные профессиональные и личностные качества у студентов. Это определяется различными функциями процесса обучения: обучающей, развивающей, активизирующей, формирующей, информационной, управленческой, контролирующей, эмоционально-мотивационной, прогностической, моделирующей, познавательно-иллюстрирующей, телекоммуникационной [4].

Обучающая функция реализуется обеспечением индивидуального подхода в организации учебного процесса, повышением его наглядности, поиском информации из различных источников, моделированием изучаемых процессов или явлений, организацией коллективной и групповой работы, обеспечением обратной связи.

Развивающая функция выражается в количественном и качественном изменении знаний, навыков и умений студентов, их личностных качеств, необходимых для успешного выполнения профессиональной деятельности; творческого отношения студентов к их будущей специальности; формировании необходимых для профессиональной деятельности компетенций.

Использование компьютерных информационных технологий позволяет изучать дисциплины в более широких рамках, когда помимо основных знаний студент может получать дополнительные сведения и навыки, что дает толчок для самостоятельного изучения требуемых материалов.

Активизирующая функция предполагает побуждение студентов к инициативе и творчеству, к деятельному отношению и специальной подготовке. Активность студентов во время лекционных и практических занятий с использованием информационных технологий создает устойчивую обратную связь между преподавателем и студентом, повышает качество усвоения материала, дает возможность студенту активно участвовать в процессе обучения.

Формирующая функция позволяет студентам овладевать основами знаний, формировать первичные навыки и умения. Она способствует дальнейшему целенаправленному использованию информационных технологий в профессиональной деятельности, дает возможность ориентироваться в их многообразии, формирует отношение к ним как к необходимым средствам не только в обучении, но и в дальнейшем применении в выбранной профессии.

Информационная функция реализуется средствами Интернета, возможностями локальной или корпоративной сети вуза как источника информации, как средства для ее поиска, накопления и передачи. Информационные технологии могут предоставить все виды существующей сегодня информации, непосредственно связанные с конкретными изучаемыми дисциплинами: визуальную, звуковую, видеoinформацию.

Контролирующая функция реализуется путем использования тестов, контрольных заданий, вопросов, возможности самоконтроля и др. Она позволяет осуществлять непрерывную взаимосвязь между преподавателями и студентами, своевременно диагностировать качество усвоения учебного материала и оперативно вносить необходимые коррективы в содержание, организацию и методику обучения.

Управленческая функция - компьютерные информационные технологии - способствует формированию и развитию у студентов знаний, навыков и умений управления процессом познания и самообучения. В свою очередь, с помощью таких технологий можно управлять процессом обучения, настроив их в соответствии с индивидуальными особенностями студента.

Прогностическая функция реализуется за счет моделирования ситуаций и проектов, анализ которых позволяет прогнозировать, производить поиск решения и принимать оптимальные решения на основе подбора соответствующих параметров, дает возможность ориентироваться в различных ситуациях, вырабатывает такое качество будущего специалиста, как самостоятельность в принятии решений.

Эмоционально-мотивационная функция использования компьютерных технологий в обучении студентов проявляется в формировании и развитии у них мотивации к овладению учебным материалом по специальности; психологической готовности к учебной деятельности; эмоциональной устойчивости в процессе специальной подготовки к будущей профессиональной деятельности.

Содержание познавательно-иллюстрирующей функции использования компьютерных технологий в обучении студентов вузов расширяется за счет того, что учебный материал насыщается современной профессионально-значимой информацией, позволяющей моделировать будущую профессиональную деятельность выпускника вуза.

Моделирующая функция состоит в том, что именно информационные технологии позволяют моделировать различные ситуации, приближенные к реальным задачам, которые трудно или невозможно отобразить каким-либо иным способом. На основании различных программных средств можно составить необходимый прогноз, найти правильное решение, смоделировать определенную ситуацию в зависимости от специальности и изучаемой дисциплины.

Телекоммуникационная функция основана на использовании в обучении компьютерных телекоммуникаций, которые позволяют организовать дистанционное обучение в вузе, найти нужную информацию, провести видеоконференцию. С ее помощью можно организовать локальную или корпоративную сеть для обмена информацией между преподавателями и студентами, выдавать обучаемым индивидуальные задания, заниматься в виртуальном индивидуальном рабочем месте студента.

Информационные технологии позволяют построить педагогическое взаимодействие преподавателя и студента на принципах сотрудничества, что является основой личностно-ориентированного обучения, которое позволяет:

1. обеспечивать студенту возможность реализации личностных устремлений, индивидуальности, инициативы и самостоятельности;
2. формировать у студента способность критически относиться к результатам, интерпретировать их, делать обобщающие выводы и принимать самостоятельные решения;
3. преподавателю получать достаточно полную и объективную информацию о процессах личностного становления студента, всячески содействуя этому процессу.

Информационные технологии существенно расширяют доступ обучаемых к учебной информации и образовательным ресурсам, активизируют познавательную деятельность студентов, их заинтересованность в получении новой информации и знаний. Это происходит благодаря использованию возможностей компьютерной визуализации учебной информации, выполнению итоговых заданий, применению персональных компьютеров для сложных расчетов при выполнении и оформ-



лении курсовых проектов, практических заданий по различным дисциплинам, созданию и использованию игровых ситуаций на занятиях, возможности компьютерных программ в управлении, что в конечном счете оказывает положительное влияние на качество обучения [2].

В Кубанском государственном университете, с целью развития интереса к научно-исследовательской деятельности реализуется курс «Экспериментальная математика», в рамках которого студенты, используя инновационные компьютерные технологии, проводят численные решения и эксперименты в различных областях математики. Организатором данного курса является доктор физ.-мат. наук, профессор Рожков А.В [5].

Экспериментальная математика - область математики, отличающаяся использованием различных приёмов, в т.ч. приёмов подстановки, перемещения, доказательств от обратного, с использованием электронно-вычислительных инструментов для проверки, подтверждения старых и получения новых фактов (теорем) в математике.

Все результаты, полученные в экспериментальной математике, являются строго доказанными утверждениями математики. Грубо говоря, любые доказательства, выкладки, вычисления и т.д. являются экспериментами с целью получения новых законов (теорем). Однако, в экспериментальной математике для проведения экспериментов используется современная вычислительная техника, позволяющая осуществлять эксперименты, недоступные при ручном счете. Основным методом экспериментальной математики являются доказательные вычисления, в ходе которых результаты вычислений используются для строгого доказательства математических фактов.

Из определения экспериментальной математики видно, что ее основным инструментом являются компьютерные технологии. На курсах, проводимых для обучающихся, рассматриваются основные вычислительные приемы и алгоритмы, так же используются современные языки программирования [3].

Компьютерные технологии, интегрированные в общую математику, позволяют лучше усвоить, понять, получить наглядное представление процессов математики, что помогает совершать новые открытия. Это, несомненно, положительно влияет на процесс обучения в целом, а так же на научную деятельность. Помимо этого проделанная работа на курсах несет еще и фундаментальную важность: она позволяет доказать или опровергнуть какие-либо гипотезы, имеющие значительную роль в математике.

В частности, в этом учебном году были рассмотрены две нерешённые проблемы математики: проблема Коллатца и локальное распределение простых чисел.

Проблема Коллатца, имея простую формулировку, служит отличным примером использования компьютерных технологий для решения математических задач, при том, на курсах были исследованы некоторые свойства данной закономерности.

В области второй проблемы проводились многочисленные исследования, и все же нет конечных результатов, которые аналитически смогут описать распространение простых чисел. На курсах разрабатываются алгоритмы, позволяющие эмпирически находить плотные скопления простых чисел.

Рассмотрим пример применения компьютерных технологий в реализации программы для задачи, связанной с поиском вида плотных скоплений простых чисел на языке программирования Python.

Задача: На входе задается натуральное число  $N$ ,  $Pragal(N)$  на выходе все подмножества  $A$  из отрезка  $[0, 2N]$ , содержащие 0 и такие, что  $A$  - состоит только из четных чисел,  $A$  - не содержит полной системы вычетов не по какому простому нечетному модулю. Например, при  $N = 3$ , отрезок  $[0, 6]$ , вот полный список искомых подмножеств  $A$ :  $\{0\}$ ,  $\{0, 2\}$ ,  $\{0, 4\}$ ,  $\{0, 6\}$ ,  $\{0, 2, 6\}$ ,  $\{0, 4, 6\}$ .

Сам алгоритм представляется следующими шагами:

Input:

$2 * N$  – число, до которого будут вестись поиски.

Output:

list\_of\_set - набор всех подмножеств  $A$ , то есть само множество  $A$ .

1. Включаем элемент  $[0]$ , т.к. он будет обязательно во всех множествах  $A$ .
2. Ищем все возможные пары вида  $[0, 2i]$ , где  $i = 1...N$ . Они еще не включают в себя полную систему вычетов ни по одному из простых модулей. Поэтому никаких проверок не надо.

3. Далее по индукции: (для лучшего понимания будем иллюстрировать примером для  $i = 3$  и  $N = 3$ ). Имеем пары  $[0, 2]$ ,  $[0, 4]$ ,  $[0, 6]$ .

На  $i$ -ом шаге:

1. Для всех элементов длины  $i - 1$  (для троек – это пары, для четверок – тройки и т.д.) получаем новые наборы длины  $i$ , с помощью добавления в конец четных чисел больших последнего элемента, но меньших  $N$ . Для  $[0, 2]$  получаем:  $[0, 2, 4]$ ,  $[0, 2, 6]$ . Для  $[0, 4]$  получаем:  $[0, 4, 6]$ . Для  $[0, 6]$ , т.к.  $2 * N = 6$ , то тройки на базе этой пары построить нельзя.
2. Проверяем все получившиеся элементы длины  $i$  на то, чтобы в ней не содержалась полная система вычетов. Для этого находим все простые числа меньше, либо равные  $i$ , и проверяем остатки от деления на них дают ли полную системы вычетов или нет, если содержится, то удаляем этот компонент. Т.к.  $i = 3$ , то простые числа получаются только 2 и 3, но два мы не рассматриваем, так как элементы наборов четные. Проверяем по 3:  $[0, 2, 4]$  - дает остатки  $[0, 2, 1]$ , а это и есть полная система вычетов по модулю 3, удаляем ее из нашего сета.  $[0, 2, 6]$  - остатки  $[0, 2, 0]$ , подходит.  $[0, 4, 6]$  - остатки  $[0, 1, 0]$ , подходит.
3. Переходим к следующей итерации.

Для  $N = 3$ , большей длины мы получить уже не сможем элементы, т.к. все получившиеся тройки оканчиваются на 6.

На рисунке 1 показано применение компьютерных технологий к решению данной задачи в среде Python.

```
def progal(double_N):
    list_of_set = [[0]]
    sets = []
    for i in range(2, double_N + 1, 2): #Дополняем парами список.
        list_of_set.append([0, i])
    sets = list_of_set.copy()
    sets.remove(sets[0]) #Создаем список пар для поиска троек.
    while len(sets) != 0:
        next_sets = []
        for each in sets: #формируем все возможные i-ки на базе i-1-ок.
            each_temp = each.copy()
            if each_temp[len(each_temp)-1] != double_N:
                for i in range(each_temp[len(each_temp)-1]+2, double_N+2, 2):
                    each_temp.append(i)
                    next_sets.append(each_temp.copy())
                    each_temp.remove(each_temp[len(each_temp) - 1])

        for each in next_sets: #Проверяем нет ли среди них полных систем
вычетов по простым модулям.
            for p in list_of_prime(len(each) + 1):
                if p == 2:
                    continue
                p_set = set([])
                each_set = set([])
                for t in range(0, p):
                    p_set.add(t)
                for temp in each:
                    each_set.add(temp % p)
                if p_set == each_set & p_set:
                    next_sets.remove(each)
        list_of_set = list_of_set + next_sets
        sets = next_sets.copy()
    return list_of_set
```

Рис. 1. Программный код задачи

В результате работы программы было найдено 57391 подмножество  $A$  для  $N = 50$ . Благодаря компьютерным технологиям такие массивные вычисления стали делом 14,1 секунды.

```
C:\Users\User\PycharmProjects\rozshkov\env\Scripts\python.exe C:/Users/User/PycharmProjects/rozshkov/mult.py
57391
14.109665037232102
Process finished with exit code 0
```

Рис. 2. Результат работы программы

Курс «Экспериментальной математики» в КубГУ набирает обороты. Все больше студентов увлекается им, а вместе с этим и фундаментальными исследованиями, при помощи компьютерных технологий, возможности которых позволяют расширить знания в области математики, и дают возможность студентам проявлять свои творческие способности в научной деятельности. Подводя итог,

можно сделать вывод, что компьютерные технологии – неотъемлемая часть экспериментальной математики, которая не заканчивается на строгих теоремах, и позволяют наглядно видеть математику, а не только ее абстрактно представлять.

### Литература

1. Трофимов В.В. Информационные технологии: учебник для вузов / В.В. Трофимов. – М.: Издательство Юрайт, 2012. – 624 с.
2. Черткова Е.А. Компьютерные технологии обучения: учебник для вузов / Е.А. Черткова. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 250 с.
3. Дорофеев А.В. Профессионально-педагогическая направленность в математическом образовании будущего педагога / А.В. Дорофеев. – М.: ФЛИНТА, 2012. – 227 с.
4. Потапова Н.В. Образовательные средства ИКТ в учебном процессе / Н.В. Потапова, Г.Н. Бондаренко, О.А. Астанина // Преподавание математики и информатики в школе и в вузе – ПМИ 2017: материалы межвузовской научной конференции. – Краснодар: КубГУ, 2017. – С. 54–59.
5. Рожков А.В. Экспериментальная (вычислительная) теория чисел / М.В. Рожкова, А.В. Рожков // Новые информационные технологии в образовании и науке – НИТО-2017: материалы X международной научно-практической конференции. – Екатеринбург: РГППУ, 2017. – С. 413–417.

### INFORMATION TECHNOLOGIES IN STUDENTS TRAINING

N.V. Potapova, A.V. Bolshakov

*The article analyzes the use of information technology in the educational process of the university as an objective regularity of modern education. An example of the implementation of experimental mathematics courses for students of the Faculty of Mathematics and Computer Science of the Kuban State University is considered.*

Keywords: high education, IT, pedagogical interaction, experimental mathematics.

УДК 372.851

### КОМПЬЮТЕРНЫЕ ОБУЧАЮЩИЕ ПРОГРАММЫ С ИГРОВОЙ КОМПОНЕНТОЙ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

О.В. Разумова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [miraolga@rambler.ru](mailto:miraolga@rambler.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В работе обобщены психолого-педагогические проблемы использования компьютерных обучающих программ в школьном математическом образовании. Представлены пути решения, способствующие достижению эффективности использования информационных ресурсов в образовательном процессе.*

**Ключевые слова:** психолого-педагогические проблемы, компьютерные обучающие программы, математическое образование.

В настоящее время, несмотря на то, что в учебных заведениях разного уровня активно применяются средства информационно-коммуникационных технологий, актуальным остается вопрос о психолого-педагогических проблемах компьютеризации обучения. Особенно важными становятся поиск, обоснование и внедрение оптимальных способов применения компьютерных обучающих программ с игровой компонентой в обучении. Эмоциональная привлекательность, присущая игре в целом, в сочетании с аудиовизуальными, вычислительными, информационными возможностями вычислительной техники создает большой дидактический потенциал, который может быть реализован в школьной практике.

Существенный вклад в определение содержания и структуры информационно-коммуникационных технологий внесли работы отечественных исследователей: Н.Н. Верницкой, В.И. Гриценко, А.П. Ершова, А.И. Кочетова, А.Н. Кимберга, а также зарубежных ученых: Ю. Нивергельта, Г. Поппеля, С. Пэйперта и др. Вопросы психолого-педагогического обоснования компьютерных и информационных технологий обучения представлены в исследованиях С.И.

Архангельского, Б.С. Гершунского, Б.Ф. Ломова, Е.И. Машбица, Н.Ф. Талызиной, О.К. Филатова и др. [Агапова, №2, С. 34-40].

Обобщая выводы, полученные названными исследователями, можно отметить, что использование средств информационно-коммуникационных технологий, в частности, компьютерных обучающих программ в образовании позволяет придать учебному процессу целенаправленный личностно ориентированный характер, активизировать учебную деятельность учащихся, повысить их мотивацию в условиях наглядного представления учебного материала на экране, использования аудио-визуальных возможностей, предоставления учащимся возможности управления различными объектами и т.д.

Таким образом, результаты теоретического анализа и опроса позволили выявить противоречие между потенциальными возможностями компьютерных обучающих программ с игровой компонентой в осуществлении учебного процесса и недостаточной разработанностью системы реализации этих возможностей. Выявленное противоречие обосновывает актуальность исследования проблемы.

*Цель исследования* заключается в выявлении, определении и обосновании психолого-педагогических проблем использования компьютерных обучающих программ с игровой компонентой на уроках математики, а также потенциальных возможностей компьютерных обучающих программ с игровой компонентой, в частности, как средства повышения познавательного интереса учащихся.

*Гипотеза исследования* заключается в том, что использование компьютерных обучающих программ с игровой компонентой на уроках математики в общеобразовательной школе повысит уровень учебной мотивации учащихся, познавательный интерес к занятиям математикой.

Анализ отечественной и зарубежной психолого-педагогической, методической литературы позволил выявить 3 группы психолого-педагогических проблем в области компьютерного обучения. В постановке и решении проблем каждой группы применительно к компьютерным играм имеются свои особенности. Первая группа включает в себя проблемы теоретико-методологического характера, основывающиеся на уточнении представлений о природе игры в целом и особенностях компьютерных обучающих игр. Вторая группа – проблемы, связанные с разработкой технологии обучения. Здесь, в том числе, акцентируется внимание на особенностях управления учебной деятельностью в ситуации использования компьютерных технологий на занятиях, а также происходит уточнение места и функций компьютерных игр в учебном процессе. Третья – особенности проектирования компьютерных обучающих программ с игровой компонентой. В настоящее время разработкой программного обеспечения учебного назначения занимаются две группы специалистов. Это, во-первых, преподаватели, имеющие некоторые финансовые ресурсы и создавшие вокруг себя команду единомышленников. В результате создаются не очень совершенные с точки зрения использования изобразительных возможностей компьютера, но содержательные по информационно-методическому наполнению программные продукты, ориентированные на компьютерную поддержку конкретного вида учебных занятий в рамках определенного курса. Во-вторых, это фирмы с большими материальными возможностями, но не имеющие опыта работы по организации и методическому сопровождению процесса обучения. В итоге получают развлекательные и красивые, но практически не несущие функции обучения программы, без четкой ориентации на конкретный курс и дисциплину. В данном случае особая роль отводится организации специальной подготовки к процессу проектирования компьютерных обучающих программ авторских групп, состоящих как из разработчиков-программистов, педагогов, психологов, преподавателей, так и из самих учащихся.

Изучение комплекса проблем, связанных с разработкой и применением игр с помощью компьютера в учебных целях, позволило ответить на вопрос об особенностях построения классификационных моделей. По степени обучающего воздействия на ученика компьютерные игры могут быть разделены на следующие виды: 1) тренирующие игры: закрепляющие и контролирующие, способствующие отработке имеющихся навыков; 2) обучающие игры: помогающие ученику приобрести новые знания, умения, компетенции; 3) развивающие игры: способствующие выявлению и развитию наиболее важных способностей и навыков; 4) комбинированные игры.

Одной из задач нашего исследования явилось выявление потенциальных возможностей компьютерных обучающих программ с игровой компонентой, в частности, как средства повышения познавательного интереса и учебной мотивации учащихся старших классов общеобразовательной

школы к изучению математики.

Критериями сформированности познавательного интереса мы приняли следующие: *содержательно-деятельностный* (характер задаваемых вопросов, самостоятельность в выполнении заданий и т.д.), *эмоциональный* (проявление эмоций, настроение обучающихся и т.д.), *регулятивный* (пытливость, сосредоточенность внимания, выбор сложности задания и т.д.) [Щукина, 1988; Садыкова Е.Р., Немкова А.И., 2017].

Опытно-экспериментальная работа была организована в МБОУ «СОШ №15» и велась с февраля по март 2018 г. Участниками эксперимента выступили учащиеся 10А класса в количестве 26 человек. На первом этапе проводился констатирующий эксперимент, направленный на выяснение уровня познавательного интереса и учебной мотивации учащихся на уроках математики. Участникам была предложена модифицированная и адаптированная для старшеклассников анкета, составленная на основе разработок таких авторов, как Э.А. Баранова, К.Н. Волков, Г.Н. Казанцева, В.С. Юркевич [Ненахова, №2, С. 207–211].

Вторым этапом стало проведение серии экспериментальных занятий по алгебре (по разделу «Комплексные числа») с использованием компьютерной обучающей программы с игровой компонентой «Странные, но все же – числа». Учебные модули компьютерного продукта были разработаны средствами онлайн-сервиса Quizlet [Quizlet].

В обучающую программу вошли следующие компьютерные игры: игра «Карточки» (дано определение, необходимо выбрать верный термин; упражнение направлено на запоминание, выполняется на время), игра «Подбор» (термины и определения представлены на экране в хаотичном порядке, необходимо составить правильные пары; упражнение направлено на запоминание и сопоставление, выполняется на время), игра «Гравитация» (цель игры - защитить собственную планету от вторжения астероидов, на которых представлены теоретические вопросы или практические упражнения, задача учащегося - записать ответ в специальное окно ввода; правильные ответы устраняют угрозу и повышают уровень игрока; выполняется до окончания запрограммированного учителем блока заданий).

Заключительный этап исследования проводился теми же методами, что и первый (составлен аналогичный по смыслу опрос в тестовой форме: 10 вопросов с 4 вариантами ответов). Целью этого этапа явилось выявление индивидуальных изменений в развитии обучаемого. Затем следовала обработка собранных статистических данных: для обоих опросов была выбрана единая шкала оценивания – 30 баллов, согласно которой уровень познавательного интереса учащихся ранжировался по трем уровням.

Результаты первого этапа: «ниже среднего» – 7 чел. (26,923%), «средний» – 18 чел. (69,231%), «выше среднего» – 1 чел. (3,846%). Результаты заключительного этапа: «ниже среднего» – 3 чел. (11,538%), «средний» – 18 чел. (69,231%), «выше среднего» – 5 чел. (19,231%). В ходе дальнейшей беседы с учащимися было выявлено, что большинство из них считают применение обучающих программ с игровой компонентой на уроках математики приемлемым, т.к. это позволяет запомнить материал в интересной форме. Однако некоторые выразили мнение о том, что такая подача уместна не всегда и больше подходит для учащихся среднего и младшего возраста.

Полученные данные свидетельствуют об эффективности применения обучающих программ с игровой компонентой в учебном процессе. Характерен сдвиг мотивационно-целевой сферы у его участников с результатами на процессуальные компоненты деятельности. Следует также отметить, что создание компьютерных обучающих программ – это творческий процесс, требующий не только четких предметных знаний, но и высокий уровень сформированности предметно-специфического мышления, педагогической интуиции [Разумова, 2008]. Для обеспечения эффективного использования компьютерных продуктов в учебном процессе, педагогу необходимо учитывать в должной мере человеческий фактор, видеть в учащихся субъектов учебной деятельности.

## Литература

1. Агапова Р. О трех поколениях компьютерных технологий обучения в школе / Р. Агапова // Информатика и образование. – 1994. – №2. – С.34–40.
2. Интернет-ресурс: Онлайн-сервис для создания и применения флэш-карточек и обучающих игр Quizlet. – Режим доступа: <https://quizlet.com> (дата обращения: 20.11.17).

3. Ненахова Е.В. Диагностика познавательного интереса у обучающихся старших классов средней общеобразовательной школы. / Е.В. Ненахова // Наука и школа. – 2014. – №2. – С.207–211.
4. Разумова О.В. Формирование предметно-специфического мышления будущих учителей средствами информационных технологий: дис...канд. пед. наук. – Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет. – Казань, 2008. – 182 с.
5. Садыкова Е.Р. Задачи по планиметрии как средство формирования исследовательских умений учащихся / Е.Р. Садыкова, А.И. Немкова // Задачи в обучении математике, физике и информатике: теория, опыт, инновации: материалы II Международной научно-практической конференции, посвященной 125-летию П.А. Ларичева. – 2017. – С.258-262.
6. Щукина Г.И. Педагогические проблемы формирования познавательных интересов учащихся / Г.И. Щукина. – М.: Педагогика, 1988. – 208 с.

#### COMPUTER-BASED TRAINING PROGRAMS WITH THE GAMING COMPONENT IN MATHEMATICS LESSONS

O.V. Razumova,

*The paper summarizes the psychological and pedagogical problems of the use of computer educational programs in school mathematics education. The ways of the decision promoting achievement of efficiency of use of information resources in educational process are presented.*

Keywords: psychological and pedagogical problems, computer training programs, mathematical education.

УДК 519.61

#### ГРАФ ВЛОЖЕНИЙ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

М.В. Рожкова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> seamise\_cat@mail.ru; Краснодарский колледж управления, техники и технологий

*В статье изучается локальное распределение простых чисел, не решенная до сих пор проблема. Более точно, сгущения простых чисел, как обобщение хорошо известных чисел близнецов, триплетов и т.д. Строится граф вложений структур этих сгущений вплоть до мощности количества чисел в сгущении до 24.*

**Ключевые слова:** простые числа, локальное распределение простых чисел, частично упорядоченные множества, обыкновенные графы.

**Определение.** Множество из  $n$  простых чисел называется плотной  $n$ -кой ( $n$ -tuple), если они расположены на отрезке минимально возможной длины.

Определение независимо введено в работах [1], [2]. Плотная  $n$ -ка - это обобщение хорошо известных близнецов, т.е. простых чисел вида  $(p, p+2)$ , триплетов — простых чисел вида  $(p, p+2, p+6)$  и  $(p, p+4, p+6)$ , сдвоенных близнецов —  $(p, p+2, p+6, p+8)$ . Дальнейшее построение плотных  $n$ -к нужно производить по индукции.

В процессе вычислений были использованы идеи и методология, изложенная в работах [2], [3]. Вычисления производились с использованием пакета компьютерной алгебры `gap 4.8.X`. (официальный адрес <http://www.gap-system.org/>).

Условимся о некоторых обозначениях, упрощающих запись плотных  $n$ -к. Поскольку четное число не может быть простым, то все четные числа внутри отрезка длины  $N$  внутри которого заключена плотная  $n$ -ка мы будем опускать. Если некоторое нечетное место занято простым числом, мы это пометим цифрой 1, а 0 будет означать отсутствие числа.

В этих обозначениях упомянутые выше близницы, триплеты и сдвоенные близнецы примут вид

2-ки:  $(1,1)$ . 3-ки:  $(1,1,0,1)$ ;  $(1,0,1,1)$ . 4-ки:  $(1,1,0,1,1)$ .

Приведем также вид плотных  $n$ -к до  $n=12$  включительно. Отметим, что в настоящее время, сентябрь 2018 г. найдены всего три 21-ки и ни одной 22-ки.

5-ки:  $(1,1,0,1,1,0,1)$ ;  
 $(1,0,1,1,0,1,1)$ .

6-ка:	$(1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1)$ .
7-ки:	$(1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1)$ ; $(1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)$ .
8-ки:	$(1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1)$ ; $(1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$ ; $(1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$ .
9-ки:	$(1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1)$ ; $(1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$ ; $(1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$ ; $(1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1)$ .
10-ка:	$(1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$ ; $(1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1)$ ;
11-ки:	$(1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1)$ ; $(1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1)$ .
12-ки:	$(1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1)$ ; $(1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1)$ .

Вычисление структуры плотной  $n$ -ки. Данные вычисления плохо поддаются распараллеливанию, поскольку чтобы вычислить структуру  $n$ -ки нужно знать структуру  $(n-1)$ -к. Затратив несколько сотен часов машинного времени нам удалось в 2013 г. вычислить структуру всех  $n$ -к до  $n = 203$  включительно. В то же время, используя суперкомпьютеры, американский профессор из г. Мичиган Thomas J Engelsma со своей командой еще в декабре 2009 г. нашли структуру плотных  $n$ -к до  $n = 4507$  включительно (<http://www.opertech.com/primes/k-tuples.html>).

До  $n = 203$  его и наши результаты полностью совпали. Следует отметить, что для данного  $n$  плотные  $n$ -ки могут иметь несколько различных структур, например, при  $n = 105$  разных структур 105-к ровно 248.

Плотные  $n$ -ки важны для криптографии, а так же могут помочь опровергнуть известную гипотезу Харди-Литтлвуда о распределении простых чисел. Дело в том, что плотная 447-ка расположена на отрезке меньшей длины, чем отрезок, включающий первые 447 простых чисел. Проблема в том, если подобная 447-ка из простых чисел и существует, то ее элементы являются примерно 900-значными числами.

Исследование плотных  $n$ -к подсказывает как можно формализовать идею, что локально простые числа расположены “случайным образом”.

**Гипотеза.** Пусть  $n$  — натуральное число,  $A$  — подмножество четных чисел, содержащее 0 и содержащееся внутри отрезка  $[0, 2n]$ . Пусть  $A$  не содержит полной системы вычетов по любому нечетному простому модулю. Тогда существует бесконечно много простых чисел  $p$ , таких, что все числа  $p + a$ ,  $a \in A$  являются простыми, а все остальные числа отрезка  $[p, p + 2n]$  составные.

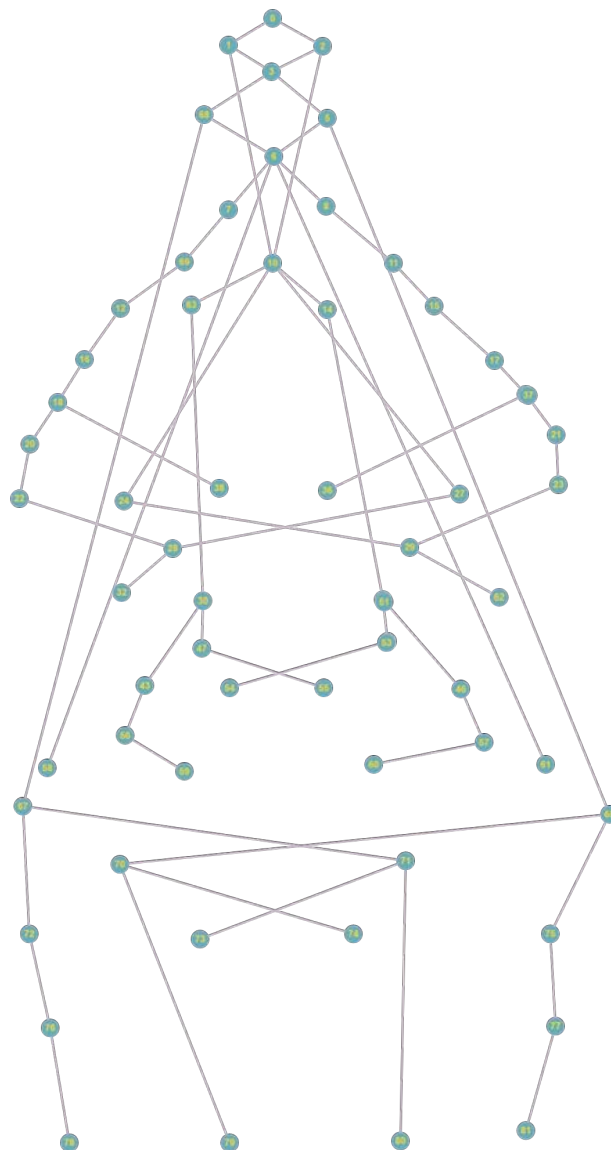
Структура плотных  $n$ -к весьма интересна. Прежде всего для каждого  $n$  множество  $n$ -к симметрично, для каждой  $n$ -ки есть симметричная ей относительно середины отрезка, внутри которого она заключена.

Кроме того каждая  $n$ -ка содержит в себе по несколько  $m$ -к при  $m < n$ . Подобное вложение имеет и большой практический смысл. Если мы нашли  $n$ -к для малых значений  $n$ , то для больших значений можно искать среди уже найденных. Мы приводим пример графа вложений плотных  $n$ -к для  $n < 25$ . Плотных 25-к ровно 18 штук и добавление их в граф вложений сделает картинку крайне трудной для визуального восприятия.

Точнее — это граф частично упорядоченного множества, у которого соединены ребрами только соседние элементы, в смысле упорядочения, а транзитивность — это движение по путям в графе. Сделано это для того, чтобы не перегружать граф ребрами. Но и даже в таком облегченном виде граф на Рис. 1 выглядит весьма живописно. Обратим внимание, что его группа автоморфизмов элементарная абелева порядка 32.

Этот граф построен вручную. Следующая наша задача составить программу для построения графа вложений плотных  $n$ -к хотя бы до  $n = 204$  — структур таких плотных  $n$ -к около 5 тыс.

**Гипотеза.** Группа автоморфизмов всего графа вложений плотных  $n$ -к простых чисел и его фрагментов до плотных  $n$ -к не более  $N$ , являются элементарными абелевыми группами.



**Рис. 1.** Граф вложений плотных  $n$ -к до  $n < 25$

## Литература

1. Forbes T. Prime clusters and Cunningham chains / T. Forbes // Math. Comp. – 1999. – Vol.68. – P.1739-1747.
2. Рожков А.В. Локальная плотность множества простых чисел и аперидические коды / А.В. Рожков, М.В. Рожкова // Наука ЮУрГУ: материалы 64-й научной конференции. Секция технических наук. – Челябинск:Изд-во ЮУрГУ, 2012. – С.86-90.
3. Рожков А.В. Стратегия DPS - Debian-Python-Sage: Проблемно-ориентированные вычислительные среды на открытом коде / А.В. Рожков // Труды V-я Междунар. Науч.-практ. Конф. «Информационные технологии в образовании и науке» (ИТОН – 2016). – Казань:КФУ, 2016. – С.172-179.
4. Рожков А.В. Экспериментальная (вычислительная) теория чисел / А.В. Рожков, М.В. Рожкова // Новые информационные технологии в образовании и науке: материалы X междунар. науч.-практ. конф. (Екатеринбург, 27 февраля-3 марта 2017г.). ФГАОУ ВО «Рос. гос. проф.-пед. ун-т». – Екатеринбург, 2017. – С.413-417.

## GRAPH OF INVESTMENTS OF PRIME NUMBERS

M.V. Rozhkova

*In article local distribution of prime numbers, the problem which is not solved still is studied. More precisely, condensations of prime numbers, as generalization of well-known numbers of twins, triplets, etc. The count of investments of structures of*



*these condensations up to the power of quantity of numbers in a condensation to 24 is under construction.*

Keywords: prime numbers, local distribution of prime numbers, partially ordered sets, ordinary columns.

УДК 519.61

## ПРОБЛЕМА ГОЛЬДБАХА: ПОИСК НАИМЕНЬШЕГО СЛАГАЕМОГО

М.В. Рожкова<sup>1</sup>, И.А. Драичиков<sup>2</sup>

<sup>1</sup> seamise\_cat@mail.ru; Краснодарский колледж управления, техники и технологий

<sup>2</sup> seamise\_cat@mail.ru; Краснодарский колледж управления, техники и технологий

*В статье приводятся результаты вычислительного эксперимента по поиску наименьшего слагаемого в разложении четного числа в сумму двух простых чисел.*

**Ключевые слова:** простые числа, локальное распределение простых чисел, проблема Гольдбаха.

**Определение.** *Натуральное число называется простым, если оно делится только на себя и на 1.*

Поиск формулы простого числа, возможно, одна из сложнейших математических проблем человечества.

**Проблема Гольдбаха (проблема Эйлера, бинарная проблема Гольдбаха)** *Утверждение о том, что любое чётное число, начиная с 4, можно представить в виде суммы двух простых чисел.*

Проблема Гольдбаха включена под номером 8 в список проблем Гильберта (1900 г.) и является почти единственной из проблем Гильберта, до сих пор остающихся нерешённой. В 1742 г. Кристиан Гольдбах (первый российский криптограф) послал письмо Леонарду Эйлеру, в котором высказал предположение:

**Каждое нечётное число, большее 5, можно представить в виде суммы трёх простых чисел.**

Леонард Эйлер заинтересовался проблемой и выдвинул более сильную гипотезу:

**Каждое чётное число, большее двух, можно представить в виде суммы двух простых чисел.**



Рис. 1. Христиан Гольдбах (1690 - 1764)

Таким образом, это одна из старейших математических проблем, которая была поставлена еще во времена царствования Елизаветы Петровны. Проблема удивительно проста в смысле формулировке и легко поддается вычислительным экспериментам. Результаты некоторых из этих экспериментов приведены в данной статье.

В процессе вычислений были использованы идеи и методология, изложенная в работах [1]. [2], [3]. Вычисления производились с использованием пакета компьютерной алгебры gap 4.9.X. (официальный адрес <http://www.gap-system.org/>). Графики строились с использованием программы

SciDAVis 1.23 (официальный сайт <http://scidavis.sourceforge.net/>). GAP и SciDAVis — программные продукты на открытом коде.

**Пример 1.** Программа GAP, которая находит все разложения вида  $2 * i = p + q$ ,  $p \leq q$ , где  $p$  и  $q$  — простые числа,

— выводит их на печать,

— подсчитывает количество различных разложений для данного четного числа,

— вычисляет среднее количество разложений, для всех натуральных чисел  $i$  из отрезка  $[m, n]$ .

```
Gold:=function(m,n)
local i,j,k,l,M,L;
l:=0; M:=[]; L:=[];
for k in [m..n] do
M[k]:=0; od;
for i in [m..n] do
for j in [1..Int((i-1)/2)] do
if IsProbablyPrimeInt(2*j+1) and IsProbablyPrimeInt(2*i-2*j-1) then
M[i]:=M[i]+1; l:=l+1;
Print("i=",2*i,"->", 2*j+1,"+",2*i-2*j-1, "\n");
fi; od; od;
L[1]:=M; L[2]:= l; L[3]:= 1.0*l/(n-m);
return(L); end;
```

**Пример 2.** Разложение четного числа в сумму двух простых чисел  $n = p + q$ ,  $p \leq q$ , с минимально возможным первым слагаемым  $p$ , назовем минимальным разложением. Поведение минимального слагаемого  $p$  очень прихотливо, что наглядно видно на рис. 2. Минимальный слагаемый изменяется от 3 до 173. И это только для четных чисел, не превосходящих 20 тыс. Но его среднее значение, т.е. его математическое ожидание, на удивление меняется очень 'правильно' и хорошо приближается функцией

$$\frac{5}{2} * \ln(n) - 16.$$

Поведение среднего значения минимального слагаемого вместе с функцией логарифма приведено на рис. 3. Шаг по оси абсцисс равен 1 млн., интервал от 4 до 4 млрд, график построен по 2 тыс. точек.

Программа поиска минимального элемента в разложении Гольдбаха и его математического ожидания

```
Gold:=function(m,n)
local i,j,k,l,M;
l:=0.0;
for i in [m..n] do
for j in [1..Int((i-1)/2)] do
if IsProbablyPrimeInt(2*j+1) and IsProbablyPrimeInt(2*i-2*j-1) then
l:=l + 2*j+1; break;
fi; od;
Print( l/(i-m)- (5/2)*Log(2.0*i)+16.0, ", ", "\n");
od; return(1); end;
```

**Пример 3.** Не менее интересно, особенно после анализа рис. 2, выяснить как себя ведет максимальное значение меньшего слагаемого в минимальном разложении Гольдбаха. Соответствующий график приведен на рис. 4. Отметим, что для наглядности ось абсцисс взята в логарифмической шкале. Поэтому значение абсциссы равно не  $x$ , а  $\exp(x)$ , а сам интервал значений аргумента от 4 до 3 млрд. Красным цветом выделена хорошо приближающая график парабола  $6.5 * x^2 - 60 * x + 140$ . Если же избавиться от логарифма абсциссы, то получится, что максимальные значения меньшего слагаемого в минимальном разложении Гольдбаха растут как функция  $6.5 * \ln^2(x)$ .

**Пример 4.** Число различных разложений Гольдбаха тоже весьма важно для решения проблемы Гольдбаха. Количество этих разложений весьма причудливо меняется в очень больших пределах. Тем не менее, среднее значение числа разложений, их математическое ожидание оказывается очень хорошей функцией, самой лучшей из всех функций - линейной! Этого было трудно ожидать, обычно там где

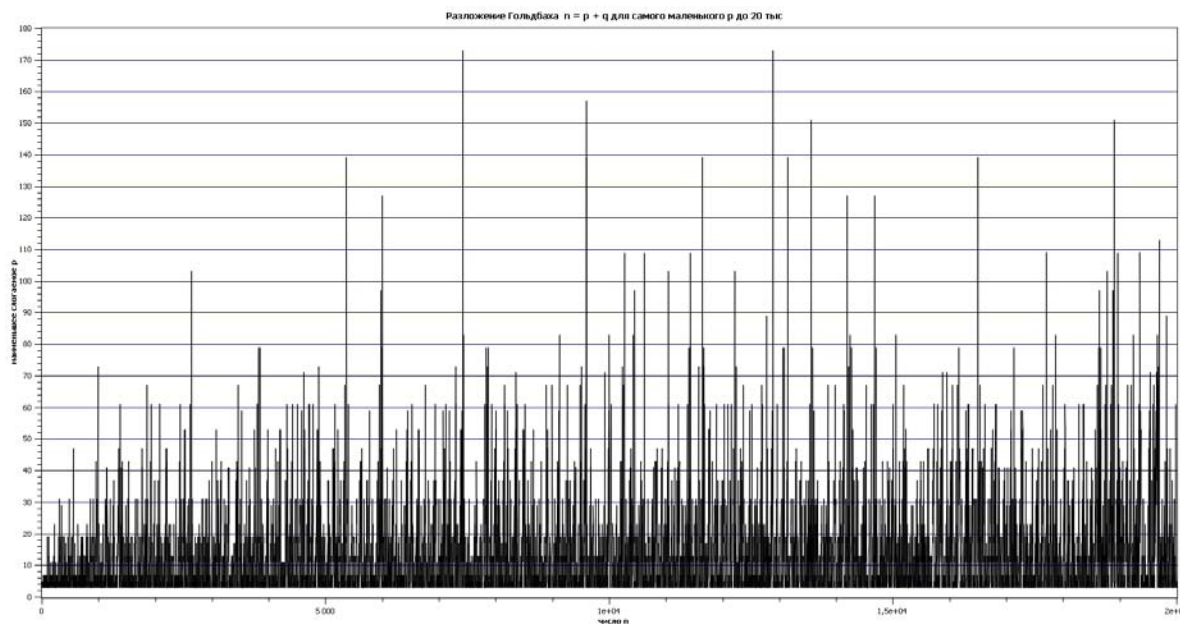


Рис. 2. Минимальные разложения Гольдбаха до 20 тыс

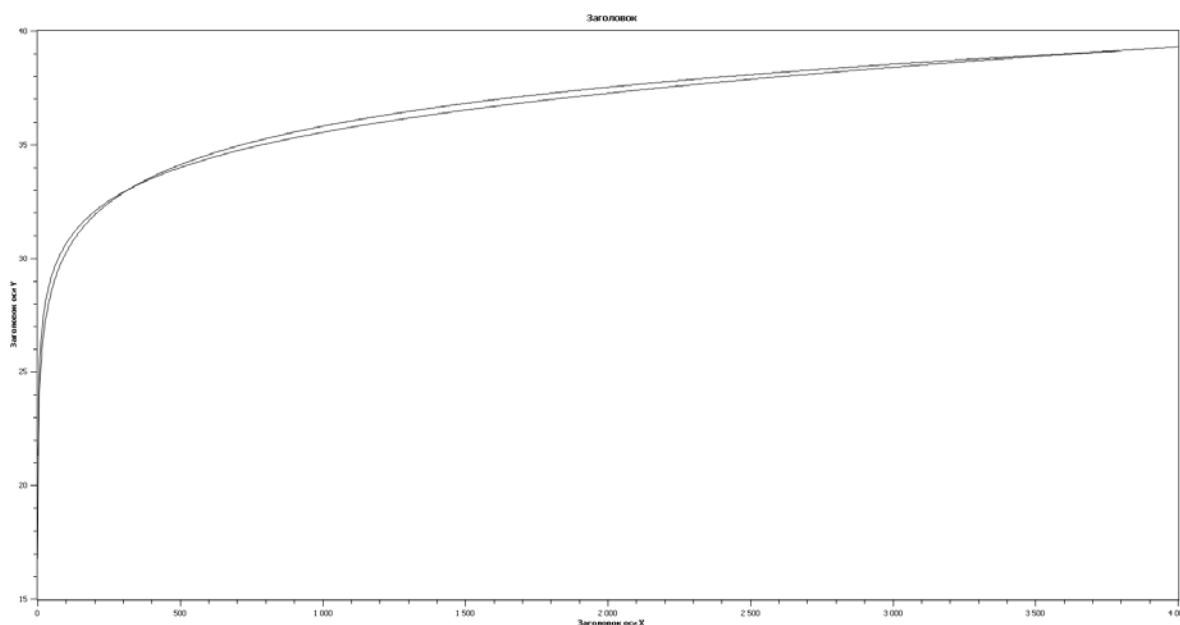


Рис. 3. Матожидание минимального слагаемого r на интервале до 4 млрд.

есть простые числа, там почти всегда появляется логарифм, как и было в трех предыдущих примерах. Приближающая линейная функция на рис. 5 задается формулой  $0.003 * x + 325$ . Функция очень пологая, медленно растущая, но это не логарифм. Вычисления производились до 1.6 млн. Количество найденных разложений составило около 5 млрд. Вычисления очень ресурсоемкие, потому, что попутно пришлось проверить на простоту около 10 млрд. натуральных чисел.

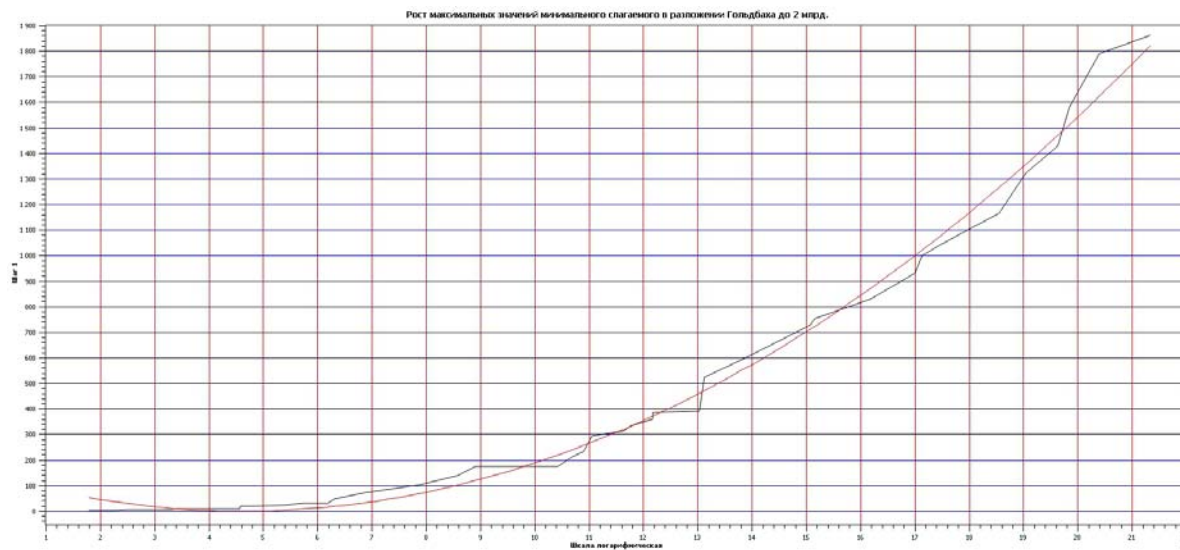


Рис. 4. Рост максимальных значений минимального слагаемого в разложении Гольдбаха до 2 млрд.

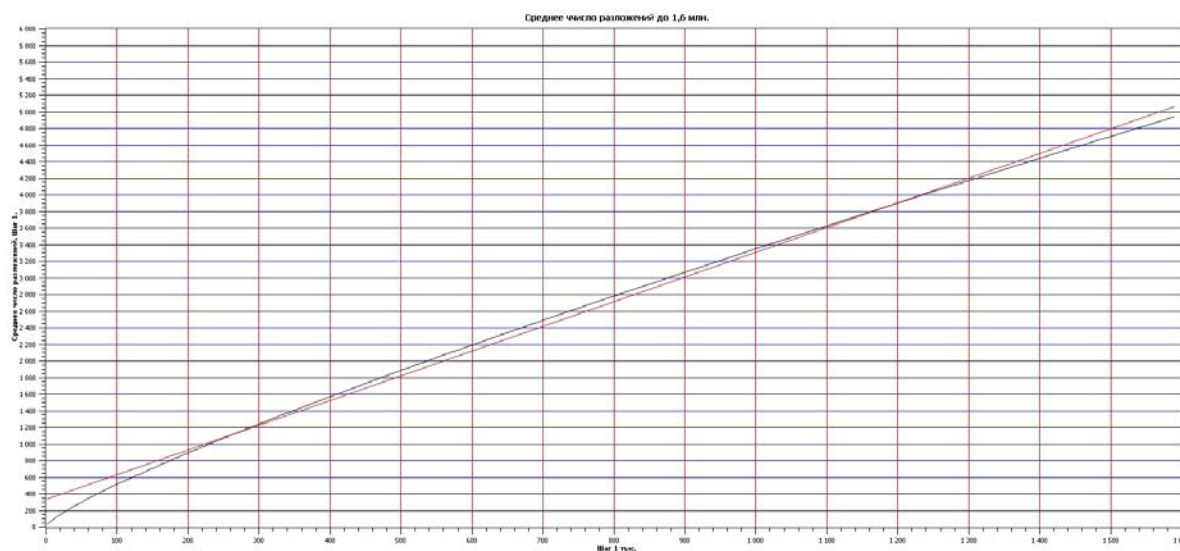


Рис. 5. Среднее число разложений до 1,6 млн. с приближающей функцией

## ИТОГ

Все проведенные вычисления однозначно указывают на положительное решение проблемы Гольдбаха. Но смысл этих экспериментов не только в этом. Возможно, они будут полезны при нахождении некоторого числового инварианта, связанного с разложениями Гольдбаха. Хотелось бы надеяться, что удастся доказать нечто про этот инвариант, что повлечет положительное решение проблемы Гольдбаха.

Благодарим проф. Рожкова А.В. за полезные обсуждения и вдохновляющие советы.

## Литература

1. Рожков А.В. Преподавание математики и информатики в ведущих университетах мира и опыт КубГУ / А.В. Рожков, М.В. Рожкова // Университеты в системе поиска и поддержки математически одаренных детей и молодежи: материалы I Всероссийской научно-практической конференции. – Майкоп, 2015. – С.116-121.
2. Рожков А.В. Стратегия DPS - Debian-Python-Sage: Проблемно-ориентированные вычислительные среды на открытом коде / А.В. Рожков // Труды V-я Междунар. науч.-практич.конф. «Информационные технологии в образовании и науке» (ИТОН – 2016). – Казань: КФУ, 2016. – С.172-179.

3. Рожков А.В. Экспериментальная (вычислительная) теория чисел / А.В. Рожков, М.В. Рожкова // Новые информационные технологии в образовании и науке: материалы X междунар. науч.-практ. конф. (Екатеринбург, 27 февраля-3 марта 2017г.). ФГАОУ ВО «Рос. гос. проф.-пед. ун-т». – Екатеринбург, 2017. – С.413-417.

#### GOLDBACH'S PROBLEM: SEARCH OF THE SMALLEST COMPOSED

M.V. Rozhkova, I.A. Draychikov

*In article results of the computing experiment on search of the smallest even number composed in decomposition are given to the sum of two prime numbers.*

Keywords: prime numbers, local distribution of prime numbers, Goldbach's problem.

УДК 519.61

#### ЛОКАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

М.В. Рожкова<sup>1</sup>, Г.В. Кашкин<sup>2</sup>

1 seamise\_cat@mail.ru; Краснодарский колледж управления, техники и технологий

2 seamise\_cat@mail.ru; Краснодарский колледж управления, техники и технологий

*В статье приводятся результаты вычислительного эксперимента по анализу локального распределения простых чисел, нахождения среднего простого числа на данном отрезке.*

**Ключевые слова:** простые числа, локальное распределение простых чисел, глобальное распределение простых чисел.

**Определение.** *Натуральное число называется простым, если оно делится только на себя и на 1.*

Поиск формулы простого числа одна из сложнейших математических проблем. Поскольку такой формулы пока не найдено, то важное значение имеет нахождение функции, которая указывает, какое количество простых чисел, не превосходит данное число  $x$ . Нахождением этой функции занималось много великих математиков, в том числе К.Ф.Гаусс (1777 - 1855), А.М. Лежандр (1752 - 1833). Но строго доказать теорему о глобальном распределении простых чисел удалось только Пафнутию Львовичу Чебышеву (1821 - 1894), члену Петербургской Академии наук и еще 24 академий мира.

В процессе вычислений были использованы идеи и методология, изложенная в работах [1]. [2], [3]. Вычисления производились с использованием пакета компьютерной алгебры gap 4.9.X. (официальный адрес <http://www.gap-system.org/>). Графики строились с использованием программы SciDAVis 1.23 (официальный сайт <http://scidavis.sourceforge.net/>). GAP и SciDAVis — программные продукты на открытом коде.

**Определение.** *Пи-функция  $\pi(x)$  — это функция, равная числу простых чисел, меньших либо равных действительному числу  $x$ .*

**Теорема (П.Л. Чебышев).** *Имеет место приближенное равенство*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x) - 1}.$$

Согласно этой формуле среди 30-значных чисел простым является каждое примерно 70-е число ( $\ln(10^{30}) = 30 * \ln(10) \approx 30 * 2.3 \approx 70$ ). А среди 300-значных чисел, с которыми работает современная криптография, простое, примерно, каждое 700-е натуральное число.

Таким образом, получается, что, чем дальше от начала координат, тем реже встречаются простые числа. Есть даже более сильное утверждение.

**Вторая гипотеза Харди-Литтлвуда.** *Для всех натуральных чисел  $x, y$  выполняется неравенство*

$$\pi(x + y) \leq \pi(x) + \pi(y).$$

Эта гипотеза утверждает, что на любом отрезке  $[x, x + y]$  длины  $y$  не может быть больше простых чисел, чем на отрезке  $[0, y]$ .

В настоящее время многие математики считают, что эта гипотеза не верна. И далеко от начала координат есть страна Эльдорадо, где простые числа встречаются чаще, чем вначале координат. К сожалению, если такие отрезки и существуют, то они находятся в районе 900-значных чисел. До введения в строй квантовых компьютеров найти эти отрезки не представляется возможным.

Тема сгущения простых чисел, относится к локальному распределению простых чисел. Теорема П.Л. Чебышева говорит о том сколько примерно простых чисел расположено на отрезке данной длины, но как о ни на нем расположены неизвестно. Именно это расположение и есть проблема локального распределения простых чисел.

Из технических соображений в дальнейшем вместо отрезка  $[1, x]$  будем рассматривать отрезок  $[1, 2x]$ .

Если бы простые числа были расположены на прямой равномерно, т.е. образовывали арифметическую прогрессию, то среднее значение простого числа, расположенного на отрезке  $[1, 2x]$  было бы равно  $\frac{2+2x}{2} = 1 + x$ . Обратное утверждение, конечно, не верно. Если среднее значение простого числа равно  $1 + x$ , это не означает, что простые числа расположены равномерно.

Рассмотрим на отрезке  $[1, 2x]$  множество простых чисел. Не теряя общности можем считать, что их четное число

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_{2k-2}, p_{2k-1}, p_{2k}.$$

Разобьем эти числа на пары  $p_1 + p_{2k}, p_2 + p_{2k-1}, p_3 + p_{2k-2}, \dots$ . В силу теоремы Чебышева последовательность  $p_1, p_2, p_3, \dots$ , рассмотренная слева направо, будет более плотной (т.е. промежутки между числами меньше), чем у последовательности  $\dots, p_{2k-2}, p_{2k-1}, p_{2k}$ , рассмотренной справа налево.

Поэтому следует ожидать, что пары удовлетворяют неравенствам

$$p_1 + p_{2k} \geq p_2 + p_{2k-1} \geq p_3 + p_{2k-2} \geq \dots$$

Очевидно, что при больших числах  $x$  первая пара дает полусумму равную примерно  $1 + x$ . Очевидно также, что полусуммы всех остальных пар будут не больше, чем  $1 + x$  и, следовательно, среднее значение простого числа на отрезке  $[1, 2x]$  не должно превосходить  $1 + x$ .

**Определение.** Средним значением простого числа на отрезке  $[1, 2x]$  называется отношение

$$S(2x) = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{2k-2} + p_{2k-1} + p_{2k}}{2k}.$$

Теперь оценим это отношение.

В силу той же теоремы Чебышева, если мы разделим отрезок  $[1, 2x]$  на две половинки  $[1, x]$ ,  $[x + 1, 2x]$ , то левая половина будет содержать больше простых чисел. Следовательно, некоторое количество левых слагаемых, в качестве правого слагаемого, неизбежно будут иметь партнера, опять же из левой половины. И значит их полусумма обязательно будет меньше  $\frac{x+1}{2}$ .

Теперь сформулируем это в виде утверждения об ожидаемом пределе некоторой полезной величины. А именно отношения реального среднего значения простого числа и его значения, в случае равномерного распределения простых чисел.

**Утверждение 1.** Пусть  $S(2x)$  — это среднее значение простого числа, не превосходящего  $2x$ . Число  $x + 1$  — среднее значение простого числа на отрезке  $[1, 2x]$ , при условии, что простые числа распределены равномерно на отрезке. Тогда, согласно теореме Чебышева, отношение реального среднего значения простого числа к идеальному  $x + 1$  может быть оценено

$$\frac{S(2x)}{x+1} \leq 1 - \frac{\ln(2)}{2 * (\ln(x) - 1)}.$$

**Доказательство.** Согласно теореме Чебышева

$$2k = \frac{2x}{\ln(2x) - 1},$$

тогда на отрезке  $[1, x]$  простых чисел примерно

$$\alpha = \frac{x}{\ln(x) - 1},$$

а на отрезке  $[x+1, 2x]$  простых чисел останется  $\beta = 2k - \alpha$ .

Очевидно,  $\beta \leq \alpha$ . Поэтому у нас имеется  $\beta$  пар простых чисел, состоящих из чисел левого отрезка  $[1, x]$  и правого отрезка  $[x+1, 2x]$ . Оставшиеся  $\alpha - \beta$  чисел образуют  $(\alpha - \beta)/2$  пар, оба элемента которых лежат в левом отрезке  $[1, x]$ .

Следовательно, среднее значение простого числа на отрезке  $[1, 2x]$  не превосходит числа

$$S(2x) \leq \frac{\beta(1+x) + \frac{\alpha-\beta}{2} * \frac{x+1}{2}}{k} = (x+1) * \left( \frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2k} \right).$$

Теперь подставляя значения чисел  $2k, \alpha$  и проводя очевидные преобразования, получаем,

$$\frac{S(2x)}{x+1} \leq 1 - \frac{\ln(2)}{2 * (\ln(x) - 1)}.$$

Утверждение доказано.

Однако, утверждение 1 говорит о теоретическом значении среднего простого числа на отрезке с учетом глобального распределения простых чисел.

**Пример 1.** Программа GAP, которая находит все простые числа на отрезке  $[m, n]$ , их сумму и отношение реального среднего простого числа и теоретического, при условии, что все простые числа расположены на отрезке равномерно. Также программа с шагом 1 млн. простых чисел выводит на печать промежуточные результаты - количество найденных простых чисел, текущее значение счетчика и текущее значение отношения реального и теоретического среднего простого числа.

```
MedPrime:=function(m,n)
local i,j,l,k;
j:=0;l:=0.0;
for i in [m..n] do
k:=2*i+1;
if IsProbablyPrimeInt(k) then
j:=j+1; l:=l+k; k:=0;
if j mod 10^6 = 0 then
Print("j=", j, "->", "i=", i, "->", "S=", l/j, "->", "D=", l/(j*(i+1.5)), "\n");
fi; fi;
od; return(1); end;
```

Следует отметить, что функция отношения истинного среднего к теоретическому ведет себя очень прихотливо. На рис. 1 указано ее поведение на интервале в 1 млн. простых чисел с шагом 1 тыс. По оси абсцисс откладывается количество простых чисел, по оси ординат величина отношения.

Если рассматривать отношение с шагом 10 млн. простых чисел, то функция становится монотонно возрастающей. На рис. 2 приведен график реального отношения с шагом 100 млн. простых чисел. Интервал — первые 15,5 млрд. простых чисел.

Вычисления производились на компьютере Intel Core i5 4430 3 ГГц, 16 ГБ оперативной памяти. Вычисления заняли примерно 200 часов машинного времени. У GAP есть огромный недостаток, очень плохая работа с памятью, поэтому примерно каждый час программу приходилось перезапускать.

Значение отношения очень близко к 1 и лежит в интервале (0.974, 0.9797) и график очень похож на логарифм. Он построен по 147 точкам.

Функция

$$1 - \frac{\ln(2)}{2 * (\ln(x) - 1)},$$

построенная по тем же 147 точкам приведена на рис. 3. Графики рис. 2 и 3 очень похожи. Однако теоретическое, явно завышенное отношение, естественно, больше, но очень не намного, всего примерно на 0.01.

Это удивительно и неожиданно.

На основании этих вычислений можно выдвинуть следующие гипотезы.

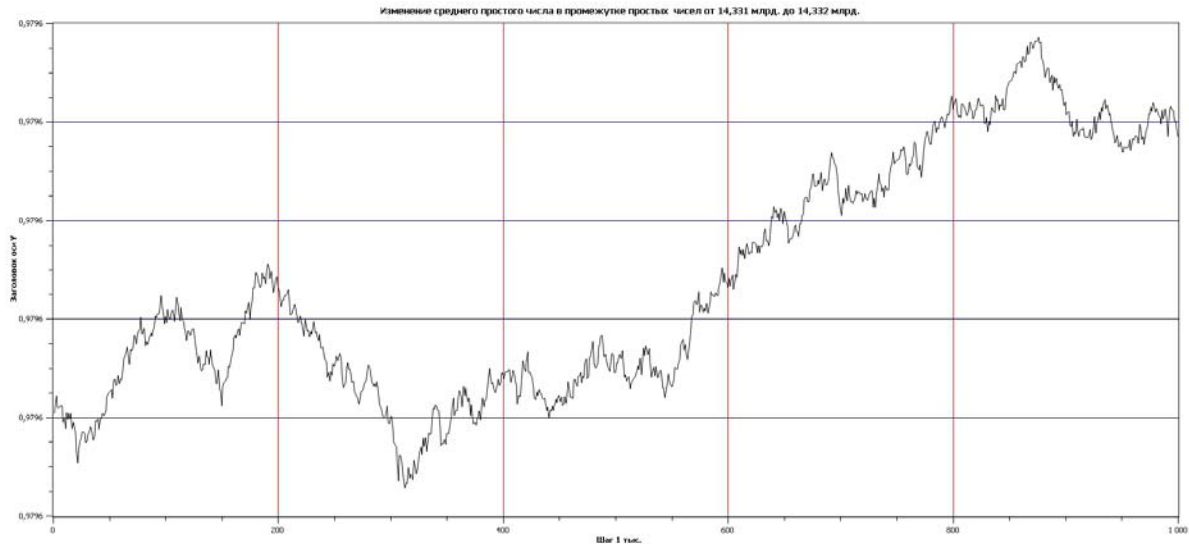


Рис. 1. Изменение среднего простого числа в промежутке простых чисел от 14,331 млрд. до 14,332 млрд.

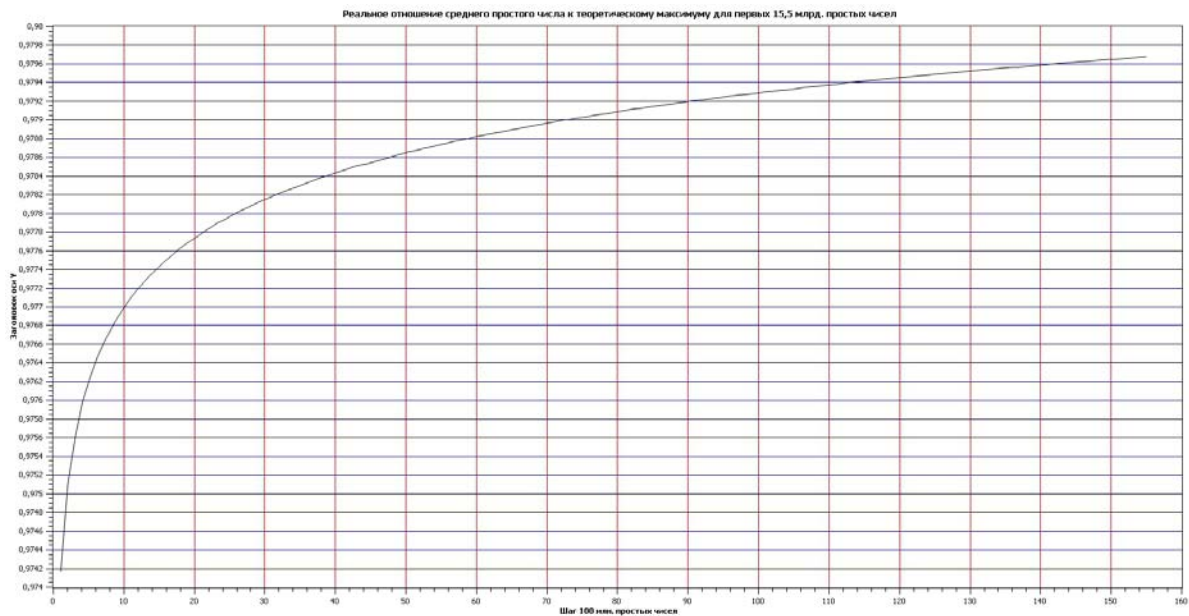


Рис. 2. Реальное отношение среднего простого числа к теоретическому максимуму для первых 15,5 млрд. простых чисел.

**Гипотеза 1.** Отношение реального среднего значения простого числа  $S(2x)$  на отрезке  $[1, 2x]$  может быть задано формулой

$$\frac{S(2x)}{x+1} \approx 0.993 - \frac{\ln(2)}{2 * (\ln(x) - 1)},$$

при этом при  $x > 2 * 10^9$  отклонение составляет меньше 0.001.

В частности,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S(2x)}{x+1} = 1.$$

В подтверждение этой гипотезы приведем рис. 4 — график отклонения реального отношения среднего простого числа и оценочной функции  $0.993 - \frac{\ln(2)}{2 * (\ln(x) - 1)}$ .

**ИТОГ**



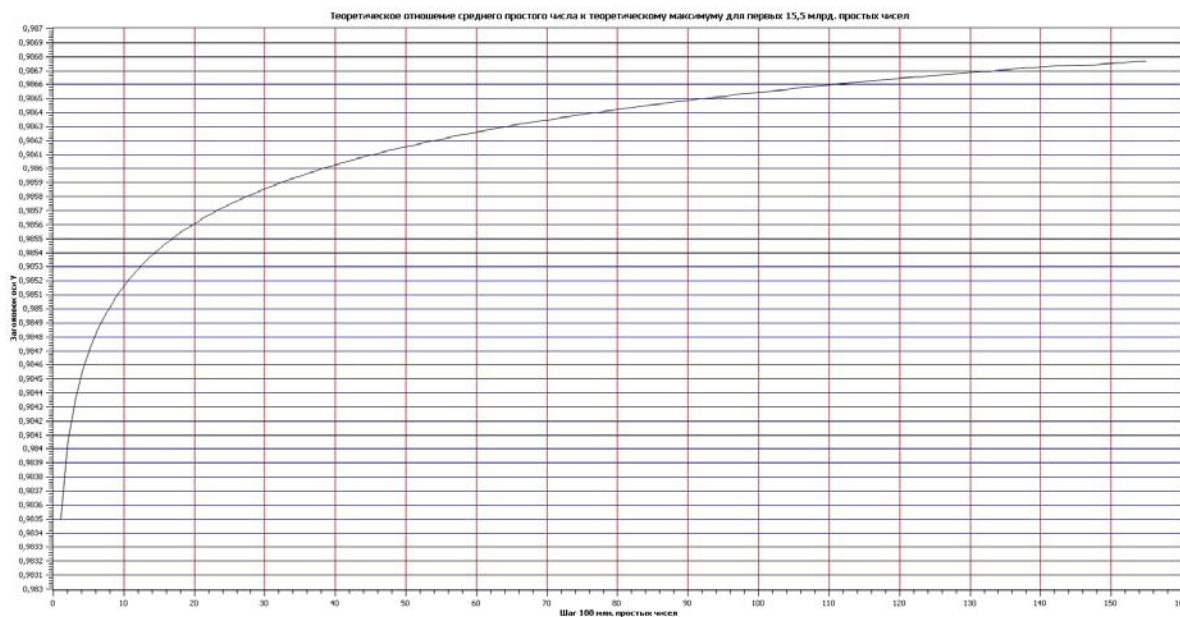


Рис. 3. Теоретическое отношение среднего простого числа к теоретическому максимуму для первых 15,5 млрд. простых чисел.

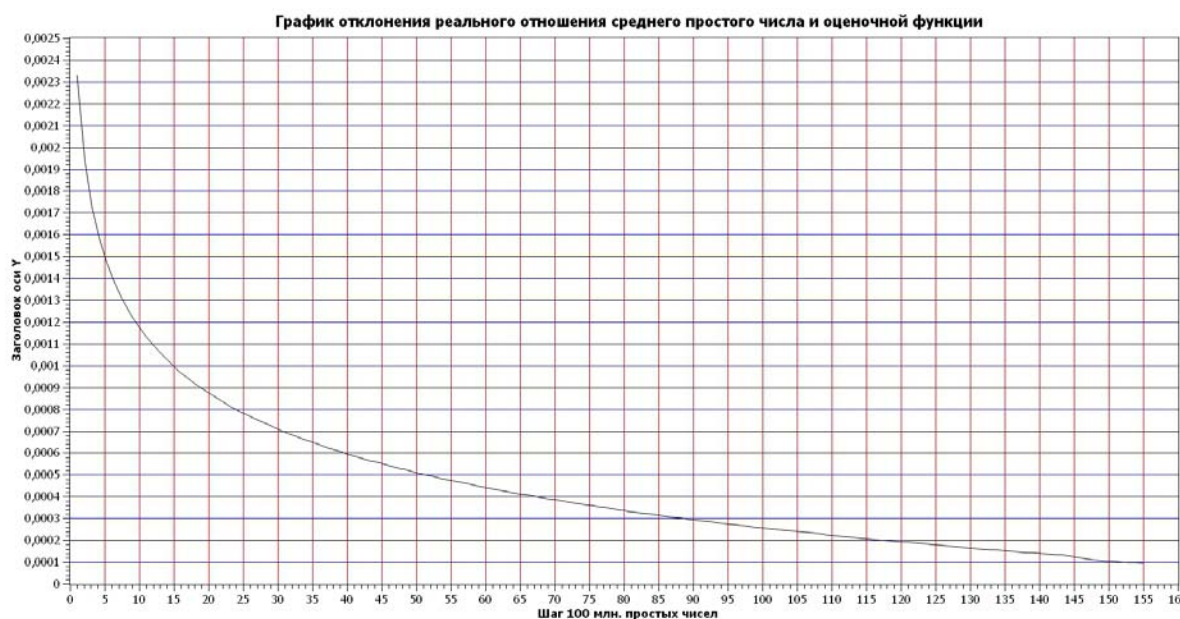


Рис. 4. График отклонения реального отношения среднего простого числа и оценочной функции.

То, что среднее значение простого числа очень близко к теоретически максимальному, говорит о том, что, по видимому, простые числа сгущаются не только в начале отрезка, но часто и у правого конца отрезка. Поэтому имеет право на жизнь гипотеза, что простые числа расположены внутри отрезка 'случайным образом.' Конечно, абсолютно случайно простые числа расположены быть не могут. Они не могут быть четными числами, нельзя взять три подряд нечетных числа и т.д. Один из вариантов формализации идеи о 'случайном распределении простых чисел' формализован в гипотезе 2.

**Гипотеза 2.** Пусть  $n$  — натуральное число, которое мы фиксируем. Пусть далее,  $A$  — подмножество четных чисел ( $0$  считаем четным числом), принадлежащих отрезку  $[0, 2n]$ . Пусть  $A$  не содержит полной системы вычетов по любому нечетному простому модулю. Тогда существует бесконечно много простых чисел  $p$ , таких, что все числа  $p + a, a \in A$  являются простыми, а все остальные числа отрезка

$[p, p + 2n]$  составные.

Благодарим проф. Рожкова А.В. за полезные обсуждения.

## Литература

1. Рожков А.В. Преподавание математики и информатики в ведущих университетах мира и опыт КубГУ / А.В. Рожков, М.В. Рожкова // Университеты в системе поиска и поддержки математически одаренных детей и молодежи: материалы I Всероссийской научно-практической конференции. – Майкоп, 2015. – С.116-121.
2. Рожков А.В. Стратегия DPS - Debian-Python-Sage: Проблемно-ориентированные вычислительные среды на открытом коде / А.В. Рожков // Труды V-я Междунар. Науч.-практич. Конф. «Информационные технологии в образовании и науке» (ИТОН – 2016). – Казань: КФУ, 2016. – С.172-179.
3. Рожков А.В. Экспериментальная (вычислительная) теория чисел / А.В. Рожков, М.В. Рожкова // Новые информационные технологии в образовании и науке: материалы X междунар. науч.-практ. конф. (Екатеринбург, 27 февраля-3 марта 2017г.). ФГАОУ ВО «Рос. гос. проф.-пед. ун-т». – Екатеринбург, 2017. – С.413-417.

## LOCAL DISTRIBUTION OF PRIME NUMBERS

M.V. Rozhkova, G.V. Kashkin

*Results of the computing experiment on the analysis of local distribution of prime numbers, findings of the median prime number on this piece are given in article.*

Keywords: prime numbers, local distribution of prime numbers, global distribution of prime numbers.

УДК 372.853

## MAPLE-ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧНИКУ А.П. РЫМКЕВИЧА ПО ФИЗИКЕ

Е.Е. Романова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [elena\\_romanova\\_01@mail.ru](mailto:elena_romanova_01@mail.ru); МБОУ «Средняя общеобразовательная русско - татарская школа №57» г. Казани

*Рассмотрена структура Maple-приложения к задачку Рымкевича по физике, приведены примеры.*

**Ключевые слова:** Maple-приложение, задачник по физике.

Традиционно, задачи по физике вызывают у учащихся затруднения. Главная трудность – ход решения задачи. Пожалуй, самым популярным, сборником по физике, который используется и для подготовки к ЕГЭ, является сборник задач А.П. Рымкевича. Занимаясь по этому сборнику и работая с системой Maple, естественно, возникла идея создать Maple-приложение к задачку А.П. Рымкевича. Эта работа только начата. На сегодняшний день Maple-решения готовы для разделов «Прямолinéное равномерное движение» и «Равноускоренное движение».

Рассмотрим структуру приложения, созданного в интерактивной среде Maple.

Титульная страница представляет собой оглавление с ссылками–номерами задач по разделам (Рис. 1).

Практически все задачи имеют единую структуру: условие задачи, необходимые формулы, ход решения; ход решения включает общие формулы, начальные параметры, решение уравнения относительно нужного параметра, вывод и ответ. В таблице 1 показаны примеры решения задач: №21 – из раздела «Равномерное движение» и №63 – из раздела «Равноускоренное движение»:

Романова Елена, 10 класс, г.Казань, школа №57  
 Maple-приложение к задачку А.П.Рымкевича по физике

Равномерное движение

- [№20](#)
- [№21](#)
- [№23](#)
- [№25](#)
- [№26](#)
- [№27](#)

Равноускоренное движение

- [№62](#)
- [№63](#)
- [№64](#)
- [№65](#)
- [№66](#)
- [№67](#)
- [№69](#)
- [№70](#)
- [№71](#)

Рис. 1. Титульный лист Maple-приложения.

Таблица 1. Примеры решения задач в среде Maple

<p style="text-align: center;"><b>Задачник А.П. Рымкевича</b>  <b>Равномерное движение</b>  <b>№21</b></p> <p><b>Условие задачи</b></p> <p>Движение грузового автомобиля описывается уравнением <math>x_1 = -270 + 12t</math>, а движение пешехода по обочине того же шоссе-уравнением <math>x_2 = -1,5t</math>. Сделать пояснительный рисунок (ось X направить вправо), на котором указать положение автомобиля и пешехода в момент начала наблюдения. С какими скоростями и в каком направлении они двигались? Когда и где они встретились?</p> <p><b>Решение</b></p> <p><b>Необходимые формулы</b></p> <p>Формула координаты тела через время <math>t</math>: <math>x = S + x_0</math>, где  <i>x</i> - конечная координата тела,  <i>S</i> - путь, пройденный телом,  <i>x0</i> - начальная координата тела</p> <p>Формула пути, пройденного телом за время <math>t</math>: <math>S = vt</math>, где  <i>S</i> - пройденный путь,  <i>v</i> - скорость тела,  <i>t</i> - время движения</p> <p><b>Ход решения</b></p> <p><math>x_1</math> - конечная координата грузового автомобиля,  <math>x_2</math> - конечная координата пешехода</p> <pre>[&gt; restart; &gt; x1:=-270+12*t;x2:=-1.5*t;                                x1=-270+12 t                                x2=-1.5 t Тела встречаются - значит их координаты равны &gt; x1=x2;                                -270+12 t=-1.5 t &gt; e:=-x1-x2; Решаем полученное уравнение - находим t &gt; t:=solve(e);                                t=20. Подставим в уравнения координат полученное значение времени &gt; subs(t=20,x1);                                -30. &gt; subs(t=20,x2);                                -30.0 Координаты равны - значит грузовый автомобиль и пешеход встретились через 20 секунд.</pre>	<p style="text-align: center;"><b>Задачник А.П. Рымкевича</b>  <b>Равноускоренное движение</b>  <b>№63</b></p> <p><b>Условия задачи</b></p> <p>Мотоциклист на расстоянии 10 м от железнодорожного переезда начал тормозить. Его скорость в это время была 20 км/ч. Определить положение мотоцикла относительно переезда через 1 с от начала торможения. Ускорение мотоцикла 1 м/с<sup>2</sup>.</p> <p><b>Необходимые формулы:</b></p> <p>Формула координаты тела через время <math>t</math>: <math>x = x_0 + v_0 t + \frac{a t^2}{2}</math>, где  <i>x</i> - конечная координата,  <i>x0</i> - начальная координата,  <i>v0</i> - начальная скорость,  <i>t</i> - время,  <i>a</i> - ускорение</p> <p><b>Ход решения</b></p> <pre>[&gt; restart; Уравнение координаты тела с учетом того, что ускорение отрицательно и начальная координата отрицательна относительно переезда, который считается началом отсчета &gt; x_:=x-x0+v0*t-a*t^2/2;                                x_=-x0+v0 t-1/2 a t^2 Перевод скорости v из км/ч в СИ - v0 (при необходимости) &gt; v:=20*v_:=(v*1000)/3600;                                v_:=50                                v_:=9 Начальные параметры &gt; x0:=-10;    t:=1;    a:=1;    v0:=-v_;                                x0=10                                t=1                                a=1                                v0=-50                                v0=-9 Вычисление конечной координаты и представление ее в десятичном виде &gt; x_:=evalf(x_);                                x_=-89                                x_=-18                                x=-4.944444444 Ответ: мотоциклист находится на расстоянии 4,9 метров от переезда.</pre>
---	---

Для тех, кто не программирует в Maple, составляются подробные программы для каждой задачи сборника. Для знакомых с основами Maple задачи группируются по используемым формулам и

создаются общие Maple-файлы решения групп задач (Таблица 2).

**Таблица 2.** Пример универсальной Maple-программы решения задач на равноускоренное движение

<pre> Равноускоренное движение &gt; restart; Необходимые формулы &gt; x_:=x0+v0*t+(a*t^2)/2;x_ ; S_:=S=v0*t+a*t^2/2;S_ ; s1_:=S=(v^2-v0^2)/(2*a);s1_ ; a_:=a=(v-v0)/t;a_ ; v_:=v=v0+a*t;v_ ;  <math display="block">x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2</math> <math display="block">S = v_0 t + a t^2</math> <math display="block">S = \frac{1}{2} \frac{v^2 - v_0^2}{a}</math> <math display="block">a = \frac{v - v_0}{t}</math> <math display="block">v = v_0 + a t</math> Начальные параметры &gt; x:=; &gt; x0:=; &gt; S:=; &gt; v:=; &gt; v0:=; &gt; a:=; &gt; t:=; &gt; solve(t); </pre>	<pre> <math display="block">x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2</math> <math display="block">S = v_0 t + a t^2</math> <math display="block">S = \frac{1}{2} \frac{v^2 - v_0^2}{a}</math> <math display="block">a = \frac{v - v_0}{t}</math> <math display="block">v = v_0 + a t</math> Начальные параметры &gt; x:=; &gt; x0:=; &gt; S:=250; &gt; v:=; &gt; v0:=20; &gt; a:=; &gt; t:=5; &gt; a=solve(S_); </pre>	<pre> <math display="block">x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2</math> <math display="block">S = v_0 t + a t^2</math> <math display="block">S = \frac{1}{2} \frac{v^2 - v_0^2}{a}</math> <math display="block">a = \frac{v - v_0}{t}</math> <math display="block">v = v_0 + a t</math> Начальные параметры &gt; x:=; &gt; x0:=; &gt; S:=; &gt; v:=; &gt; v0:=20; &gt; a:=6; &gt; t:=5; &gt; S=solve(S_); </pre>
<p>а) Заготовка с необходимыми формулами для введения начальных параметров и решения уравнения относительно нужного параметра</p>	<p>б) Нахождение ускорения при известных: пройденного пути S, начальной скорости v0 и времени t</p>	<p>в) Нахождение пути при известных: ускорении a, начальной скорости v0 и времени t</p>
<p>Решается одно и то же уравнение <math>S = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2</math> при разных начальных параметрах</p>		

Как уже было сказано, работа только начата. Таким образом создается Maple-решевник, по возможности, по всем разделам сборника Рымкевича. В перспективе предполагается дополнить каждый раздел чертежами, лучше всего анимированными, включить аналитическое тестирование. Тогда получится интерактивная математическая среда, в которой можно самим управлять визуализацией, решением и тестированием, то есть подойти к решению творчески.

## Литература

1. Рымкевич А. П. Физика. Задачник. 10 – 11 кл.: пособие для общеобразовательных учреждений / А. П. Рымкевич // 17-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013. – 188 с.

MAPLE-ANNEX FOR PROBLEM BOOK OF A.P. RYMKEVICH

E.E. Romanova

*The structure of Maple-annex to the book of A.P. Rymkevich in physics considered, examples are given.*

Keywords: Maple-annex, problem book in physics.

УДК 517.958

## УРАВНЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА В MAPLE: ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ ВТОРОГО РОДА

З.Ф. Сабитова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> sazuzu@list.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*В статье рассматриваются начально-краевые условия для уравнения эллиптического типа, его общее решение и анимация в СКМ Maple.*

**Ключевые слова:** СКМ Maple, уравнения эллиптического типа.

### 1. Общие формулы

По определению цилиндрическая функция есть произвольное решение дифференциального уравнения второго порядка

$$l(u) = u'' + \frac{1}{z}u' + \left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right)u = 0 \quad (1)$$

поэтому общее ее выражение содержится в форме

$$u = Z_v(z) = C_1 u_1(z) + C_2 u_2(z) \quad (2)$$

где  $u_1$  и  $u_2$  — какие-либо линейно независимые решения рассматриваемого уравнения,  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные, являющиеся, вообще говоря, произвольными функциями параметра  $v$ . Легко получить общее выражение цилиндрической функции для случая, когда  $v$  отлично от целого числа. Действительно, выбрав  $u_1 = J_v(z)$ , где  $J_v(z)$  — функция Бесселя, мы можем взять в качестве  $u_2$  функцию  $u_2 = J_{-v}(z)$ , которая также является решением уравнения (1), так как последнее не меняется при замене  $v$  на  $-v$ .

Если  $v$  не равно целому числу, асимптотическое поведение рассматриваемых решений при  $z \rightarrow 0$  будет

$$u_1 \approx \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^v}{\Gamma(1+v)} \quad (3)$$

$$u_2 \approx \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-v}}{\Gamma(1-v)}$$

поэтому эти решения линейно независимы между собой (при  $v$  равном нулю или целому числу это рассуждение теряет силу) и искомое выражение для цилиндрической функции может быть дано в виде

$$u = Z_v(z) = C_1 J_v(z) + C_2 J_{-v}(z), \quad v \neq 0, \pm 1, \pm 2 \quad (4)$$

Если  $v$  — целое число, то, в силу соотношения (3), построенные частные решения линейно зависимы между собой и найденное выражение (4) не является общим интегралом уравнения Бесселя (1).

Чтобы получить представление произвольной цилиндрической функции, пригодное при любых значениях параметра  $v$ , введем в рассмотрение функцию Бесселя второго рода  $Y_v(z)$ , которую для произвольных  $z$ , принадлежащих плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$ , определим при помощи равенства. (В некоторых работах, посвященных теории функций Бесселя, для обозначения этой функции используется вместо  $Y_v(z)$  символ  $N_v(z)$ ).

$$Y_v(z) = \frac{J_v(z) \cos v\pi - J_{-v}(z)}{\sin v\pi} \quad (5)$$

при  $\nu$  равном целому числу правая часть рассматриваемого выражения приобретает неопределенный вид (3), и мы условимся понимать под значением функции в этом случае предел

$$Y(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(z) \quad (6)$$

Так как по доказанному числитель и знаменатель в (5) суть целые функции  $\nu$ , рассматриваемый предел существует, и может быть вычислен по правилу Лопиталя, применение которого дает

$$Y(z) = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ \frac{\partial J(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[ \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \right\} \quad (7)$$

Из определения функции  $Y_\nu(z)$  следует, что эта функция регулярна в плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$ , а при фиксированном  $z$  представляет собой целую функцию параметра  $\nu$ . Докажем теперь, что  $Y_\nu(z)$  удовлетворяет уравнению (1), следовательно, является цилиндрической функцией. При  $\nu$ , отличном от целого числа, требуемый результат непосредственно вытекает из формулы (4), поэтому достаточно провести доказательство только для случая  $\nu = n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ .

Проще всего воспользоваться для этого принципом аналитического продолжения. Так как  $l(Y_\nu)$  — целая функция  $\nu$ , то из равенства  $l(Y_\nu) \equiv 0$ , ( $\nu \neq n$ ) следует  $l(Y_\nu) \equiv 0$ .

Решения  $u_1 = J_\nu(z)$  и  $u_2 = Y_\nu(z)$  линейно независимы между собой. Для  $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  этот результат является следствием линейной независимости решений  $J_\nu(z)$  и  $J_{-\nu}(z)$ . Линейная независимость для  $\nu = n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  вытекает из сопоставления поведения рассматриваемых функций при  $z \rightarrow 0$  [формулы (3) и (4)].

Таким образом, общее выражение цилиндрической функции, пригодное при любых значениях  $\nu$ , будет

$$u = Z_\nu(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 Y_\nu(z) \quad (8)$$

Функции Бесселя второго рода удовлетворяют тем же рекуррентным соотношениям, что и функции первого рода, именно:

$$\begin{aligned} Y_{\nu-1}(z) + Y_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z} Y_\nu(z) \\ Y_{\nu-1}(z) - Y_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z} Y_\nu(z) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{d}{dz} z^\nu Y_\nu(z) = z^\nu Y_{\nu-1}(z)$$

$$\frac{d}{dz} z^{-\nu} Y_\nu(z) = -z^{-\nu} Y_{\nu+1}(z)$$

и т. д.

При  $\nu$ , отличном от целого числа, справедливость этих формул вытекает из определения функции Бесселя второго рода и соответствующих формул для функций первого рода. Для целого  $\nu$  требуемый результат следует из непрерывности рассматриваемых функций по отношению к значку  $\nu$ , что позволяет осуществить в соотношениях (9) предельный переход  $\nu \rightarrow n$ .

Отметим еще формулу

$$Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z), \quad n = 0, 1, 2 \quad (10)$$

являющуюся следствием (7) и позволяющую свести вычисление функций с отрицательным целым значком к вычислению функций, индекс которых положителен.

При помощи замены переменных в уравнении (1) легко получить ряд других дифференциальных уравнений, общий интеграл которых может быть выражен через цилиндрические функции. Наиболее интересные для приложений уравнения этого типа являются различными частными случаями дифференциальных уравнений

$$u'' + \frac{1-2\alpha}{z} u' + \left[ (\beta\gamma z^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2 \gamma^2}{z^2} \right] u = 0 \quad (11)$$

$$u'' + \alpha z^\gamma u = 0$$

общие интегралы которых соответственно будут:

$$u = \alpha \frac{1}{z} (\beta \varepsilon^\gamma)$$

$$u = \frac{1}{2} Z_{\frac{1}{\gamma+2}} \left( \frac{2\alpha^{\frac{1}{2}}}{\gamma+2} z^{\frac{1}{\gamma+2}} \right) \tag{12}$$

где  $Z_\nu(z)$  обозначает произвольную цилиндрическую функцию.

*Разложение в ряд функции Бесселя второго рода с целым значком*

Для того чтобы получить разложение в ряд функции  $Y_n(z)$ , достаточно воспользоваться формулой (7) и вычислить производные по значку  $\nu$ , исходя из разложения (1), причем, ввиду соотношения (10), можно ограничиться рассмотрением случая целых положительных  $n = 0, 1, 2, \dots$

Так как ряд (1), по доказанному, сходится равномерно по отношению к  $\nu$ , мы можем дифференцировать его почленно и получим тогда переход к пределу при  $\nu$  под знаком суммы законен, так как ряд, полученный почленным дифференцированием равномерно сходящегося ряда регулярных функций, сходится равномерно.

$$\left[ \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left\{ \ln\left(\frac{z}{2}\right) - \psi(k+n+1) \right\}$$

где  $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$  — логарифмическая производная гамма-функции. Аналогично имеем

$$\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2k}}{k!\Gamma(k-\nu+1)!} \left\{ \ln\left(\frac{z}{2}\right) - \psi(k-\nu+1) \right\}$$

При  $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$  и  $\nu \rightarrow n$   $\Gamma(k-\nu+1) \rightarrow \infty, \psi(k-\nu+1) \rightarrow \infty$  (поэтому первые  $n$  членов ряда принимают неопределенный вид. Воспользовавшись известными формулами теории гамма-функции, получим для таких  $k$

$$\lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\psi(k-\nu+1)}{\Gamma(k-\nu+1)} = \lim_{\nu \rightarrow n} \left\{ \Gamma(\nu-k) \sin \pi(\nu-k) \frac{\psi(k-\nu) + \pi \operatorname{ctg} \pi(\nu-k)}{\pi} \right\} = (-1)^{n-k} (n-k-1)!,$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$

поэтому

$$\left[ \frac{dJ}{d\nu} \right]_{\nu=n} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} + (-1)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(n+p)!p!} \left\{ -\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \psi(p+1) \right\} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p+n}$$

где введен новый значок суммирования  $p = k - n$ .

Из формулы (7) следует, что искомое разложение функции Бесселя второго рода с целым положительным значком имеет вид

$$Y(z) = - Y_n(z) = - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n+1}}{k!(n+k)!} \left\{ 2 \ln\left(\frac{z}{2}\right) - \psi(k+1) - \psi(k+n+1) \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \arg z < \pi \tag{13}$$

где в случае  $n = 0$  первую сумму надлежит положить равной нулю.

Значения логарифмической производной гамма-функции могут быть вычислены по формулам:

$$\psi(1) = -\gamma$$

$$\psi(m+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \quad (14)$$

где  $\gamma = 0,5772\dots$  - постоянная Эйлера,  $m = 1, 2, \dots$

принимая во внимание равенство (14), мы можем представить разложение (13) в несколько другом виде, именно:

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln\left(\frac{z}{2}\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \{\psi(k+1) + \psi(k+n+1)\} \quad (15)$$

Из (14) вытекает, что при  $z \rightarrow 0$  справедливы асимптотические формулы

$$Y_0(z)_{z \rightarrow 0} \approx \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$Y_n(z)_{z \rightarrow 0} \approx -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n}, \quad n = 1, 2 \quad (16)$$

Показывающие, что, когда  $Y_n(z) \rightarrow 0$ , когда  $z \rightarrow 0$ .

## 2. Начально-граничные условия

### Задача:

Исследовать колебания круглой мембраны радиуса  $a$  с закрепленным краем при произвольных начальных условиях:

$$u(r, 0) = f(r), \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} u(r, t)\right)_{t=0} = g(r), \quad (A)$$

Задача сводится к интегрированию гиперболического уравнения (B)

$$\Delta(u) - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u\right) = 0, \quad (B)$$

(где  $\Delta(u) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u$ ,  $c$ -скорость звука в мембране) на плоскости  $(x, y)$  в полярных координатах:  $x = r \cos(\phi)$ ,  $y = r \sin(\phi)$ , (причем нас будут интересовать решения, зависящие только от времени и радиальной переменной,  $u(r, t)$ ), удовлетворяющие произвольным начальным (A) и краевому, (C):

$$u(a, t) = 0, \quad (C)$$

условиям.

## 3. Программа

### Разделение переменных

Запишем уравнение (B) в полярных координатах, для вычисления оператора Лапласа используем библиотеку *linalg*:

```
>restart:
eq:=expand(linalg[laplacian](u(r,t),[r,phi]),
coords=polar)=1/c^2*diff(u(r,t),t$2));
```



$$eq := \frac{\partial}{\partial r} u(r, t) + \frac{\partial^2}{\partial^2} u(r, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(r, t)$$

Запишем также начальные (A) и граничное (C) условия:

$$>init\_c := u(r, 0) = f(r), D[2](u)(r, 0) = g(r);$$

$$init\_c := u(r, 0) = f(r), D_2(u)(r, 0) = g(r)$$

$$>bound\_c := u(a, t) = 0;$$

$$bound\_c := u(a, t) = 0$$

$$>U := u(x, t) = X(x) * T(t);$$

$$U := u(x, t) = X(x)T(t)$$

Разделим переменные в уравнении, представляя функцию  $u(r, t)$  в виде произведения подставляя эту функцию в уравнение (B):

$$>U := u(r, t) = R(r) * T(t);$$

$$U := u(r, t) = R(r)T(t)$$

и подставляя эту функцию в уравнение (A):

$$>Eq\_1 := subs(U, eq);$$

$$Eq\_1 := \frac{\partial}{\partial r} (R(r)T(t)) + \frac{\partial^2}{\partial^2} (R(r)T(t)) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (R(r)T(t))$$

Раскроем скобки в левой части уравнения, поделим результат на  $u(x, t)$ :

$$>Eq\_2 := expand(lhs(Eq\_1)/(R(r)*T(t))) = expand(rhs(Eq\_1)/(R(r)*T(t)));$$

$$Eq\_2 := \frac{\frac{d}{dr} R(r)}{R(r)r} + \frac{\frac{d^2}{dr^2} R(r)}{R(r)} = \frac{\frac{d^2}{dt^2} T(t)}{c^2 T(t)}$$

Вводя константу разделения  $\lambda$ , сформируем два обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка:

$$>Eq\_r0 := lhs(Eq\_2) = -\lambda;$$

$$Eq\_r := expand(lhs(Eq\_r0)*R(r)) - rhs(Eq\_r0)*R(r) = 0;$$

$$Eq\_r0 := \frac{\frac{d}{dr} R(r)}{R(r)r} + \frac{\frac{d^2}{dr^2} R(r)}{R(r)} = -\lambda$$

$$Eq\_r := \frac{\frac{d}{dr} R(r)}{r} + \frac{d^2}{dr^2} R(r) + \lambda R(r) = 0$$

Теперь получим уравнение на временную функцию  $T(t)$ :

$$>Eq\_t0 := rhs(Eq\_2) = -\lambda;$$

$$Eq\_t := c^2 * lhs(Eq\_t0)*T(t) - c^2 * rhs(Eq\_t0)*T(t) = 0;$$

$$Eq_t = \frac{d^2}{dt^2} T(t) + c^2 \lambda T(t) = 0$$

Решим уравнение на радиальную функцию  $R(r)$ :

```
>dsolve(Eq_r,R(r));
```

$$R(r) = C_1 \text{BesselJ}(0, \sqrt{\lambda} r) + C_2 \text{BesselY}(0, \sqrt{\lambda} r)$$

Решение выражается в виде суперпозиции двух функций Бесселя,

$\text{BesselJ}(0, \lambda^{\frac{1}{2}} r)$  и  $\text{BesselY}(0, \lambda^{\frac{1}{2}} r)$  при  $\nu = 0$ , первого и второго рода, которые удовлетворяют уравнению Бесселя:  $xy'' + xy' + (x - \nu)y = 0$ .

Предел функции Бесселя первого рода в нуле существует:

```
>Limit(BesselJ(0,lambda^(1/2)*r),r=0)=limit(BesselJ(0,lambda^(1/2)*r),r=0);
```

$$\lim_{r \rightarrow 0} \text{BesselJ}(0, \sqrt{\lambda} r) = 1$$

а предел функции Бесселя второго рода в нуле есть бесконечность:

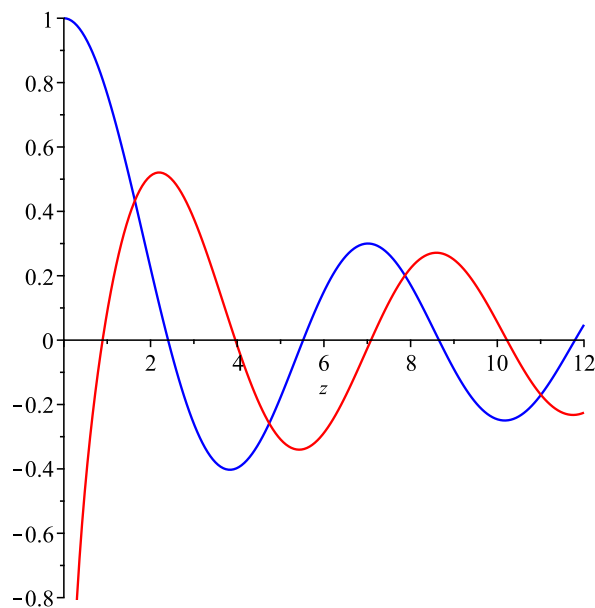
```
>Limit(BesselY(0,lambda^(1/2)*r),r=0)=limit(BesselY(0,lambda^(1/2)*r),r=0);
```

$$\lim_{r \rightarrow 0} \text{BesselY}(0, \sqrt{\lambda} r) = -\infty$$

```
>AA:=plot(BesselJ(0,z),z=0..12, color= blue):
```

```
>BB:=plot(BesselY(0,z),z=0..12, color= red):
```

```
>plots[display](AA,BB);
```



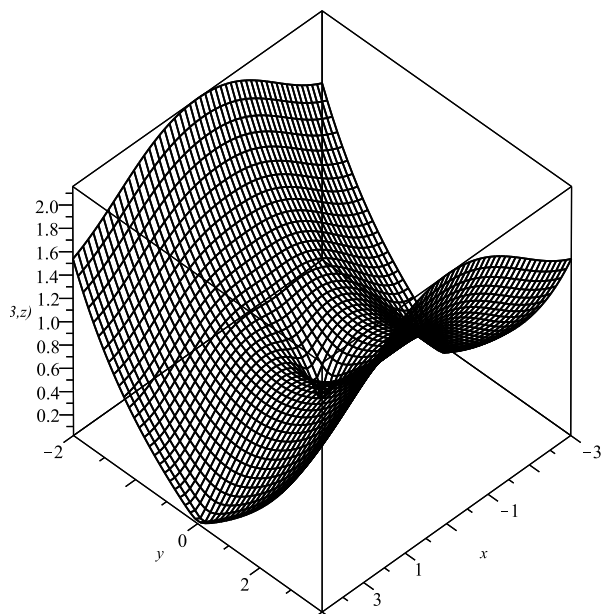
#### 4. Визуализация

**Функция Бесселя I-го рода:  $\text{BesselJ}(\nu, z)$ :**

```
>BesselJ(1,1);
```

```
>evalf(%);
```

```
>plots[complexplot3d](BesselJ(1/3,z),z=-3-2*I..3+2*I,grid=[50,50],
axes=BOXED,labels=[x,y,'BesselJ(1/3,z)'],style=wireframe,color=BLACK);
```

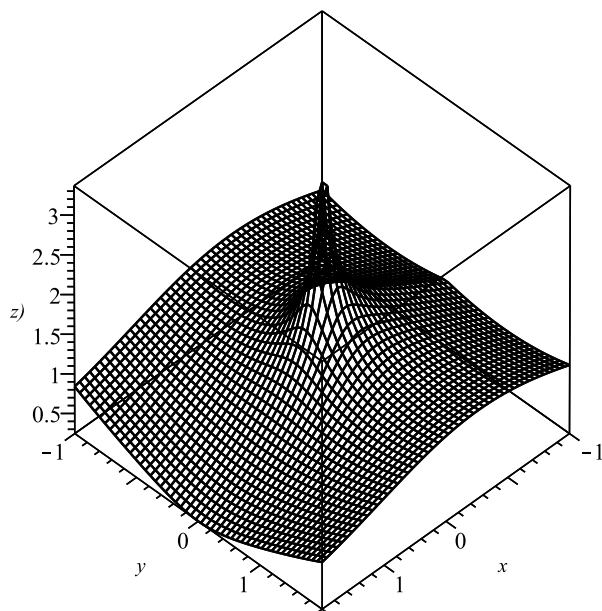


**Функции Бесселя II-го рода,  $BesselY(nu, z)$ :**

```
>BesselY(1,1);
```

```
>evalf(%);
```

```
>plots[complexplot3d](BesselY(0.3,z),z=-1-I..1+I,grid=[50,50],
axes=BOXED,labels=[x,y,'BesselY(0.3,z)'],style=wireframe,color=BLACK);
```



## Литература

1. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их разложения / Н.Н. Лебедев // 2-е изд. – М.: Учпедгиз, 1963. – 359 с.
2. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании / В.П. Дьяконов. – М.: СОЛОН-Пресс, 2006. – 721 с.
3. Голоскоков Д.П. Уравнение математической физики. Решение задач в системе Maple. Учебник для вузов. / Д.П. Голоскоков. – СПб.: Питер, 2004. – 539 с.
4. Игнатъев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей в евклидовом пространстве. Курс лекций. IV семестр. Компьютерная версия / Ю.Г. Игнатъев. – Казань: Казан. ун-т, 2013. – 204 с.

### ELLIPTIC EQUATIONS IN MAPLE: BESSEL FUNCTIONS OF THE SECOND KIND

Z.F. Sabitova

*In the article discussed the initial-boundary conditions for the equation of elliptic type, its general solution and animation in the SCM Maple.*

Keywords: Maple program, elliptic equations .

УДК 517.958

### УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В MAPLE: МЕТОД ФУРЬЕ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ В MAPLE

А.Р. Сайфуллина<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *alina.saiif77@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*В статье обсуждается уравнение гиперболического типа, подход к изучению данной темы и ее реализация в платформе Maple. Рассматриваются вопросы основных понятий гиперболического уравнения, понятий цилиндрических функций, сферических функций и функций Бесселя.*

**Ключевые слова:** уравнения математической физики, уравнения гиперболического типа, СКМ Maple.

## 1. Введение

### Основные понятия

Всякое линейное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными может быть записано в виде

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0, \quad (1)$$

где A, B, C, D, E, F, G - заданные функции от x и y (или, в частном случае, постоянные). Упростим это уравнение с помощью замены переменных

$$\begin{cases} \zeta = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $\zeta$  и  $\eta$  - новые независимые переменные. Функции, связывающие новые переменные со старыми переменными, будут подобраны позднее. Пока будем считать, что отображение (2) является взаимно однозначным. Сделаем требуемую замену переменных:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \zeta_0 n} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]; \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \zeta_0 n} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right]; \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta_0 n} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\partial n}{\partial y} \right]; \quad (6)$$

Правые части формул (3) – (6) представляют собой линейные функции относительно частных производных. Подставляя  $u_x, u_y, u_x, \dots$  из этих формул в уравнение (1), мы получим снова линейное уравнение второго порядка с неизвестной функцией  $u$  независимыми переменными  $\zeta$  и  $\eta$ .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2\overline{B} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \zeta_0 \eta} + \overline{C} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi \left( \zeta \eta u, \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (7)$$

где

$$\overline{A} = A \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2;$$

$$\overline{B} = A \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + C \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x};$$

$$\overline{C} = A \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2$$

а функция  $\Phi$  линейна относительно производных.

Уравнение (7) становится особенно простым, если в нем коэффициенты  $\overline{A}$  и  $\overline{C}$  окажутся равными нулю. Для того, чтобы первоначально заданное уравнение (1) можно было привести и к такому простому виду, надо в нем сделать замену переменных (2), подобрав функции  $\varphi$  и  $\Psi$  так, чтобы они являлись решениями уравнения

$$A \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + C \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (8)$$

Это уравнение является нелинейным уравнением в частных производных первого порядка. Следующая теорема показывает, как связаны его решения с общим решением некоторого обыкновенного уравнения.

**ТЕОРЕМА.** Для того, чтобы функция  $z = f(x, y)$  во всех точках области  $\Omega$  удовлетворяла уравнению (8), необходимо и достаточно, чтобы и семейство  $f(x, y) = \text{const}$  было общим интегралом уравнения

$$A(dy)^2 - 2Bdx dy + C(dx)^2 = 0 \quad (9)$$

в той же области  $\Omega$ .

Уравнение (9) называется характеристическим уравнением (1). Характеристическое уравнение есть обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, но второй степени. Разрешая его относительно производной  $y'$ , получим два уравнения

$$y = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}; \quad (10)$$

$$y = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}; \quad (11)$$

Если общий интеграл уравнения (10) имеет вид  $\varphi(x, y) = \text{const}$ , то, полагая  $\zeta = \varphi(x, y)$ , мы обращаем в нуль коэффициент при производной.

Если  $\psi(x, y) = \text{const}$  является общим интегралом уравнения (11), независимым от интеграла  $\varphi(x, y) = \text{const}$ , то, полагая  $\eta = \Psi(x, y)$  мы обратим в нуль также и коэффициент при второй производной  $u_{\eta\eta}$ .

Уравнение гиперболического типа

Семейства

$$\varphi(x, y) = \text{const} \text{ и } \Psi(x, y) = \text{const}$$

можно рассматривать как общие интегралы уравнения (9). Правые части (10) и (11) действительны и различны. Следовательно, согласно указанной теореме, функции

$$z = \varphi(x, y) \text{ и } z = \psi(x, y)$$

являются решениями уравнения в частных производных

$$A \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + C \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (12)$$

Функции

$$\varphi(x, y) \text{ и } \Psi(x, y)$$

линейно независимы (можно доказать, что их определитель Вронского отличен от нуля, если  $AC - B^2 < 0$ ).

Поэтому, возвращаясь к уравнению

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0$$

мы можем в нем сделать замену переменных по формулам. Так как функции  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  удовлетворяют уравнению

$$A(dy)^2 - 2Bdx dy + C(dx)^2 = 0 \quad (9),$$

то в результате этой замены переменных окажется  $\bar{A} = 0$  и  $\bar{C} = 0$ .

Следовательно уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0 \quad (13)$$

преобразуется к виду:

$$2\bar{B} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \Phi \left( \zeta \eta u, \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (12), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial \eta} = \bar{\Phi} \left( \zeta \eta u, \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right). \quad (14)$$

Полученное уравнение имеет более простой вид, чем исходное уравнение

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0.$$

Если мы его сможем решить, то для того, чтобы найти решение исходного уравнения, достаточно вернуться к старым переменным. Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2 \partial \eta} = \bar{\Phi} \left( \zeta \eta u, \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \quad (15)$$

представляет собой канонической формой уравнения гиперболического типа. Иногда пользуются другой канонической формой уравнения гиперболического типа. Сделаем в уравнении (15) замену переменных по закону  $\zeta = t + \tau$  и  $\eta = t - \tau$ , где  $t, \tau$  – новые переменные. В результате этого преобразования уравнение (15) примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \bar{\Phi}, \text{ где } \bar{\Phi} = 4\bar{\Phi}.$$

*Метод Фурье. Метод свободных колебаний струны*

Метод Фурье или метод разделение переменных является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Изложение этого метода мы проведем для задачи о колебаниях струны, закрепленной на концах. Итак, будем искать решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (16)$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 \quad (17)$$

и начальным условиям

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(l, t) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Уравнение (16) линейно и однородно, поэтому сумма частных решений также является решением этого уравнения. Имея достаточно большое число частных решений, можно попытаться при помощи суммирования их с некоторыми коэффициентами найти искомое решение. Поставим основную вспомогательную задачу: - найти решение уравнения  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ , не равное тождественно 0, удовлетворяюще однородным граничным условиям

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 \quad (19)$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \Psi(x) \quad (20)$$

и представимые в виде произведения

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (21)$$

где  $X(x)$  – функция от переменного  $x$ ,  $T(t)$  – функция от переменного  $t$ .

Подставляя предполагаемую форму решение (20) в уравнение (1), получим

$$\frac{X(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T(t)}{T(t)}. \quad (22)$$

Чтобы функция (20) была решением уравнения (16), равенство (22) должно удовлетворяться тождественно, то есть для всех значений независимых переменных  $0 < x < l, t > 0$ . Правая часть равенства (22) является функцией переменного  $t$ , а левая – только  $x$ . Фиксируя, например, некоторое значение  $x$  и меняя  $t$  (или наоборот), получим, что правая и левая части равенства (22) при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение

$$\frac{X(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T(t)}{T(t)} = -\lambda, \quad (23)$$

где  $\lambda$  – постоянная, которую для удобства последующих выкладок берем со знаком минус, ничего не предполагая при этом о её знаке.

Из соотношения (23) получим обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций  $X(x)$  и  $T(t)$ .

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0 \quad (24)$$

Граничные условия (19) дают:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(l, t) = X(l)T(t) = 0. \quad (25)$$

Отсюда следует, что функция  $X(x)$  должна удовлетворять дополнительным условиям

$$X(0) = X(l) = 0, \quad (26)$$

так как иначе мы имели бы

$$u(x, t) = 0 \text{ и } T(t) = 0,$$

в то время как задача состоит в нахождении нетривиального решения. Для функции  $T(t)$  в основной вспомогательной задаче никаких дополнительных условий нет.

Таким образом, в связи с нахождением функции  $X(x)$  мы приходим к простейшей задаче о собственных значениях:

- найти те значения параметра, при которых существуют нетривиальные решения задачи:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad X(0) = X(l) = 0$$

а также найти эти решения. Такие значения параметра  $\lambda$  называется собственными значениями, а соответствующее нетривиальное решение собственными функциями задачи (16). Сформулированную таким образом задачу часто называют задачей Штурма-Лиувилля. Рассмотрим отдельно случаи, когда параметр  $\lambda$  отрицателен, равен нулю или положителен.

1. При  $\lambda < 0$  задача не имеет нетривиальных решений. Действительно, общее решение уравнения (24) имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0 \quad X(l) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha} = 0 \quad (\alpha = l\sqrt{-\lambda})$$

то есть

$$C_1 = -C_2 \text{ и } C_1 (e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0$$

Но в рассматриваемом случае  $\alpha$  действительно и положительно, так что

$$e^{\alpha} - e^{-\alpha} \neq 0$$

Поэтому  $C_1 = 0$  и  $C_2 = 0$  и, следовательно

$$X(x) = 0$$

2. При  $\lambda = 0$  также не существует нетривиальных решений. Действительно, в этом случае общее решение уравнения (24) имеет вид

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = [C_1 x + C_2]_{x=0} = C_2 = 0 \quad X(l) = C_1 l = 0,$$

то есть

$$C_1 = 0 \text{ и } C_2 = 0$$

и, следовательно,

$$X(x) = 0$$

3. При  $\lambda > 0$  общее решение уравнения (24) может быть записано в виде

$$X(x) = D_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + D_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$C_1 = 0 \text{ и } C_2 = 0$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = D_1 = 0, \quad X(l) = D_2, \quad \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \tag{27}$$

$$C_1 = 0 \text{ и } C_2 = 0$$



Если  $X(x)$  не равно тождественно нулю, то  $D_2 \neq 0$ , поэтому

$$\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \quad \text{или} \quad \sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l} \quad (28)$$

$$C_1 = 0 \quad \text{и} \quad C_2 = 0$$

где  $n$ - любое целое число. Следовательно, нетривиальные решения задачи (27) возможны лишь при значениях

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

$$C_1 = 0 \quad \text{и} \quad C_2 = 0$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_n(x) = D_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \quad \text{где } D_n \text{ - произвольная постоянная.}$$

$$C_1 = 0 \quad \text{и} \quad C_2 = 0$$

Итак, только при значениях  $\lambda$ , равных

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

существуют нетривиальные решения задачи (27)

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \quad (29)$$

определяемые с точностью до произвольного множителя, который мы положили равным единице. Этим же значениями соответствуют решения уравнения (25)

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l}\alpha t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}\alpha t\right), \quad (30)$$

где  $A_n$  и  $B_n$  – произвольные постоянные.

Возвращаясь к задаче (16)-(41), заключаем, что функции

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l}\alpha t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}\alpha t\right)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \quad (31)$$

являются частными решениями уравнения (16), удовлетворяющими граничными условиями (19) и представимыми в виде произведения (20) двух функций (20) двух функций, одна из которых зависит только от  $x$ , другая - от  $t$ . Эти решения могут удовлетворить начальным условиям (41) нашей исходной задачи только для частных случаев начальных функций  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ .

Обратимся к решению задачи (16)-(41) в общем случае. В силу линейности и однородности уравнения (1.1) сумма частных решений

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l}\alpha t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}\alpha t\right)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \quad (32)$$

также удовлетворяет этому уравнению и граничным условиям (17). Начальные условия позволяют определить  $A_n$  и  $B_n$ . Потребуем, чтобы функция (32) удовлетворяла условиям (41):

$$u(x, 0) = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \quad (33)$$

$$u_n(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l}\alpha B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \quad (34)$$

Из теории рядов Фурье известно, что произвольная кусочно-непрерывная т кусочно-дифференцируемая функция  $f(x)$  заданная в промежутке  $0 \leq x \leq l$  разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \quad (35)$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin\left(\frac{\pi m}{l} \xi\right) d\xi \quad (36)$$

Если функции  $\phi(x)$  и  $\psi(x)$  удовлетворяют условиям разложения в ряд Фурье, то

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad \phi_n = \frac{2}{l} \int_0^{\infty} \phi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi. \quad (37)$$

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\left(\frac{\pi m}{l} x\right), \quad \Psi_n = \frac{2}{l} \int_0^{\infty} \psi(\xi) \sin\left(\frac{\pi m}{l} \xi\right) d\xi. \quad (38)$$

Сравнение этих рядов с формулами (34) показывает, что для выполнения начальных условий надо положить

$$A_n = \phi_n, B_n = \frac{l}{\pi n \alpha} \Psi_n$$

чем полностью определяется функцией (32), дающая решение исследуемой задачи.

*Общие формулы*

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} \alpha t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} \alpha t\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)),$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} \alpha t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi m}{l} \alpha t\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)),$$

$$u(x, 0) = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),$$

$$u_n(x, 0) = \Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} \alpha B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right).$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),$$

где  $b_n = \frac{2}{l} \int_0^{\infty} f(\phi) \sin\left(\frac{\pi m}{l} \phi\right) d\phi$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad \phi_n = \frac{2}{l} \int_0^{\infty} \phi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \phi\right) d\phi$$

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi \sin\left(\frac{\pi m}{l} x\right), \quad \Psi_n = \frac{2}{l} \int_0^{\infty} \psi(\xi) \sin\left(\frac{\pi m}{l} \phi\right) d\phi$$

$$A_n = \phi_n, \quad B_n = \frac{l}{\pi m \alpha} \Psi_n$$

## 2. Цилиндрические функции

*Понятия о цилиндрических функций*

Определение 1. Цилиндрическими функциями называются решения линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$u' + \frac{1}{z} u'' + \left(1 - \frac{v^2}{2}\right) u' = 0, \quad (39)$$

где  $z$  - комплексное переменное,  $v$  - параметр, который может принимать любые вещественные или комплексные значения.

Термин “цилиндрические функции” обязан своим происхождением тому обстоятельству, что уравнение (39) встречается при рассмотрении краевых задач теории потенциала для цилиндрической области. Специальные классы цилиндрических функций известны в литературе под названием функций Бесселя, и иногда это наименование присваивается всему классу цилиндрических функций.

*Функция Бесселя с целым положительным значком*

Для рассмотрения многих проблем, связанных с применением цилиндрических функций, достаточно ограничиться изучением специального класса этих функций, который соответствует случаю, когда параметр в уравнении (1) равен нулю или целому положительному числу.

Исследование данного класса носит более элементарный характер, чем теория, относящаяся к произвольным значениям, и может служить хорошим введением в эту общую теорию.

Одним из решений уравнения

$$u'' + \frac{1}{z}u' + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right)u = 0, n = 0, 1, 2, \dots \tag{40}$$

является функция Бесселя первого рода порядка  $n$ ,  $u_1 = J_n(z)$  которая для любых  $z$  определяется как сумма ряда

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!}, |z| < \infty \tag{41}$$

При помощи признака Даламбера легко убедиться, что рассматриваемый ряд сходится на всей плоскости комплексного переменного и следовательно, представляет целую функцию от  $z$ . Если обозначить левую часть уравнения (2) через  $l(u)$  и ввести сокращенную запись коэффициентов ряда (3), положив

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^{n+2k} k!(n+k)!},$$

то в результате получим

$$l(u) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{n+2k-2} \{(n+2k)(n+2k-1) + (n+2k) - n^2\} + \sum_{k=0}^{\infty} 4a_k \cdot z^{n+2k} - 2k(n+k) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^{n+2k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{n+2k} \{4a_{k+1}(k+1)(n+k+1) + a_k\}, \tag{42}$$

отсюда следует  $l(u) \equiv 0$  так как выражение в фигурных скобках равно нулю. Таким образом, функция  $J_n(z)$  удовлетворяет уравнению (40), т. е. представляет собой цилиндрическую функцию. Простейшими функциями рассматриваемого класса являются функция Бесселя порядка ноль и единица.

$$J_0(z) = 1 - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{1!^2} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{2!^2} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^6}{3!^2} + \dots \tag{43}$$

Покажем, что функция Бесселя других порядков могут быть выражены через эти две функции. Для доказательства предположим, что  $n$  — целое положительное число, умножим ряд (42) на  $z^n$  и продифференцируем по  $z$ . Тогда получим

$$\frac{d}{dz} z^n J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2n+2k)}{2^{n+2k} k!(n+k)!} k! z^{2n+2k-1} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n-1+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n-1+2k} = z^n J_{n-1}(z)$$

или

$$\frac{d}{dz} z^n J_n(z) = z^n J_{n-1}(z), n = 1, 2, \dots \tag{44}$$

Аналогичным образом, умножая ряд на  $z^{-n}$  находим

$$\frac{d}{dz} z^{-n} J_n(z) = z^{-n} J_{n+1}(z), n = 1, 2, \tag{45}$$

откуда непосредственно следует:

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z), n = 1, 2$$

$$J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J'_n(z), n = 1, 2$$

Полученные формулы известны под название рекуррентных соотношений для функций Бесселя. Первое из соотношений дает возможность выразить функцию произвольного порядка  $n$  через функции порядков нуль и единица, что существенным образом сокращает работу по составлению таблиц функций Бесселя. Второе соотношение позволяет представить производные от функций Бесселя через функции Бесселя.

Для  $n = 0$  это соотношение должно быть заменено формулой:

$$J_0' = -J_1(z)$$

непосредственно вытекающей из определения данных функций.

Функции Бесселя первого рода  $J_n(z)$  просто связаны с коэффициентами разложения функции  $\omega(z, t) = e^{\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})}$  в ряд Лорана:

$$\omega(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z) t^n, 0 < |t| < \infty.$$

*Визуализация в Maple*

```
>restart;
with(PDEtools):
with(plots):
```

Запишем уравнение Бесселя

```
>Z:=x^2*difff(y(v,x),x$2)+x*difff(y(v,x),x)+(x^2+v^2)*y(v,x)=0;
```

Найдем его решение

```
>z1:=pdsolve(Z);
```

Видим, что решения дифференциального уравнения Бесселя ( $Z$ ) называются цилиндрическими, или бesselевыми функциями. Здесь  $x$  вещественная или комплексная переменная, а  $v$  вещественный или комплексный параметр.

```
>J:=(v,x)->sum(((((-1)^k)/(factorial(k)*GAMMA(k+v+1)))*
((x/2)^(2*k+v))),k=0..infinity);
>J1:=(v,x)->sum(((((-1)^k)*((-1)^k)/(factorial(k)*
GAMMA(k+v+1))*((x/2)^(2*k+v))),k=0..infinity);
```

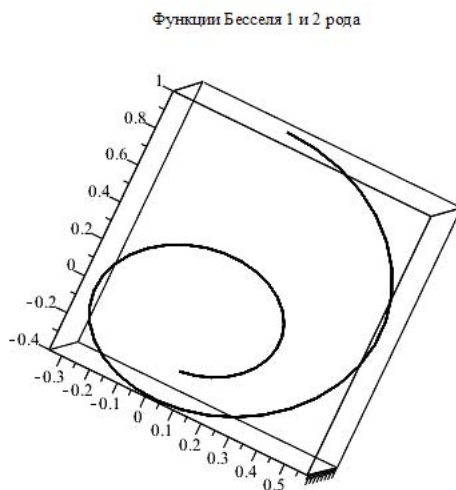
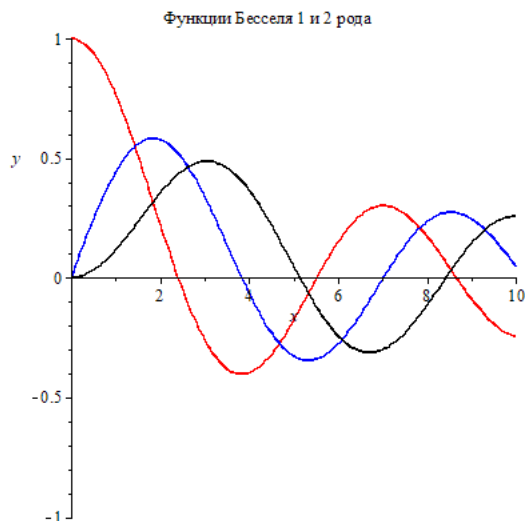
Построим графики функции Бесселя 1 и 2 рода с помощью специальных команд.

```
>plot([J(0,x),J(1,x),J(2,x)],x=0..10,y=-1..1,
color=[red,blue,black], title="Функция Бесселя 1 и 2");
#plot([BesselJ(0,x),BesselJ(1,x),BesselJ(2,x)],
x=0..10,y=-1..1,color=[red,blue,black]);
```

```
>plot3d([J(0,x),J(1,x),J(2,x)],x=0..10,y=-1..1,
color=[red,blue,black], title="Функция Бесселя 1 и 2");
#plot3d([BesselJ(0,x),BesselJ(1,x),BesselJ(2,x)],
x=0..10,y=-1..1,color=[red,blue,black]);
```

Создаем анимацию Функции Бесселя 1 и 2 рода

```
>animate(J(v,x),x=0..10,v=0..40,frames=80,
title="Анимация функции Бесселя 1 и 2 рода ");
#animate(BesselJ(v,x),x=0..10,v=0..4,frames=80);
>plot3d(J(v,x),x=0..10,v=0..5,
title="3D-модель функции Бесселя 1 и 2 рода");
>plot3d(BesselJ(v,x),x=0..10,v=0..5);
```



### Анимация 3D модели функции Бесселя

```
>plots[animate3d](J(v,t*x),x=0..10,v=0..5, t=1..2,
title="Анимация 3D- модели функции Бесселя 1 и 2 рода");
>plots[animate3d](BesselJ(v,x*t),x=0..10,v=0..3,t=1..25);

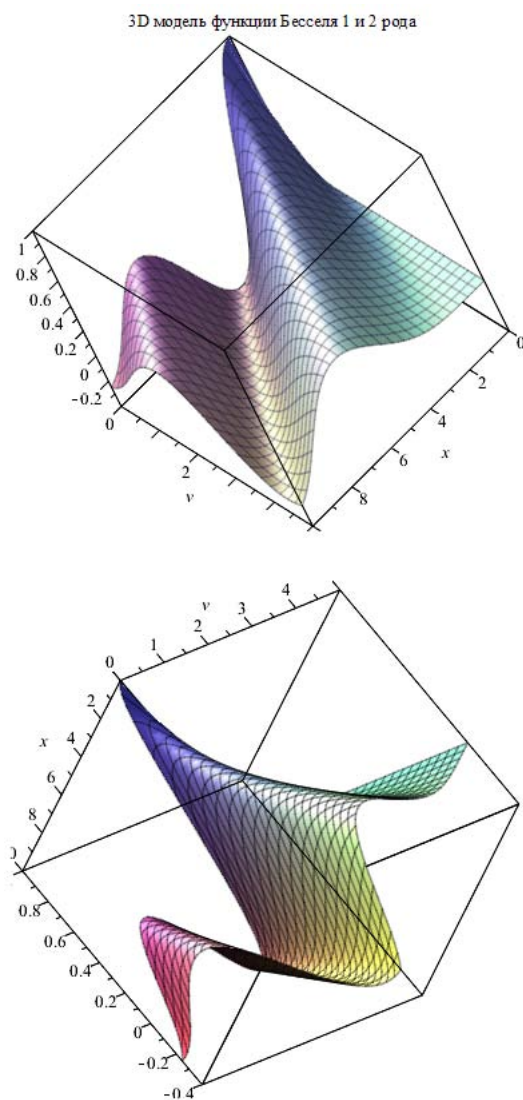
>plots[animate3d](BesselJ(t*v,x),x=0..10,v=0..3,t=0..10,frames=32);
```

### Построение на графике функций

```
>plot([J1(1,x),J1(2,x),J1(3,x),J1(4,x)],x=-5..5);

>plot([BesselI(1,x),BesselI(2,x),BesselI(3,x),BesselI(4,x)],
x=-5..5,y=-1..1);

>N:=(v,x)->(1/sin(Pi*v))*(J(v,x)*cos(Pi*v)-J1(v,x)); v<>0;
>plot([BesselY(1,x),BesselY(2,x),BesselY(3,x)],x=-1..10,
y=-3..1,color=[red,blue,black]);
```



### 3. Классические ортогональные полиномы

#### Полиномы Лежандра

Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{(1-x^2) \cdot dx}{dy} + \lambda y = 0, -1 \leq x \leq 1 \right. \\ \left. |y(-1)| < \infty, y(1) < \infty \right.$$

Уравнение (3.1) называется дифференциальным уравнением Лежандра. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

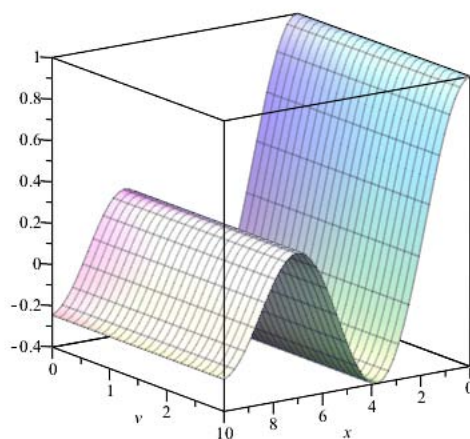
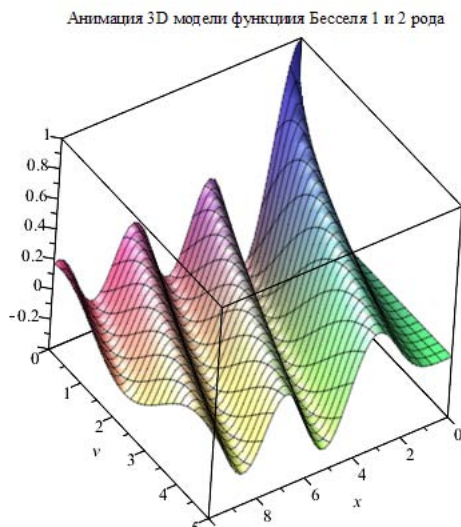
$$(1-z^2) \frac{d^2 u}{dz^2} - 2z \frac{du}{dz} + n(n+1)u = 0,$$

где  $z$  — комплексная переменная.

Решения этого уравнения при целых  $n$  имеют вид многочленов, называемых Полиномом ЛЕЖАНДРА. Полином Лежандра степени  $n$  можно представить через формулу Родрига в виде:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n$$

Часто вместо  $z$  записывают косинус полярного угла:



$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\cos \theta)^n} (\cos^2 \theta - 1)^n$$

Уравнение можно получить из частного случая гипергеометрического уравнения, называемого уравнением Лежандра.

*Рекуррентная формула*

Они также могут быть вычислены по рекуррентной формуле (при  $n \geq 1$ ):

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} x P_{n-1}(x)$$

причем первые две функции имеют вид

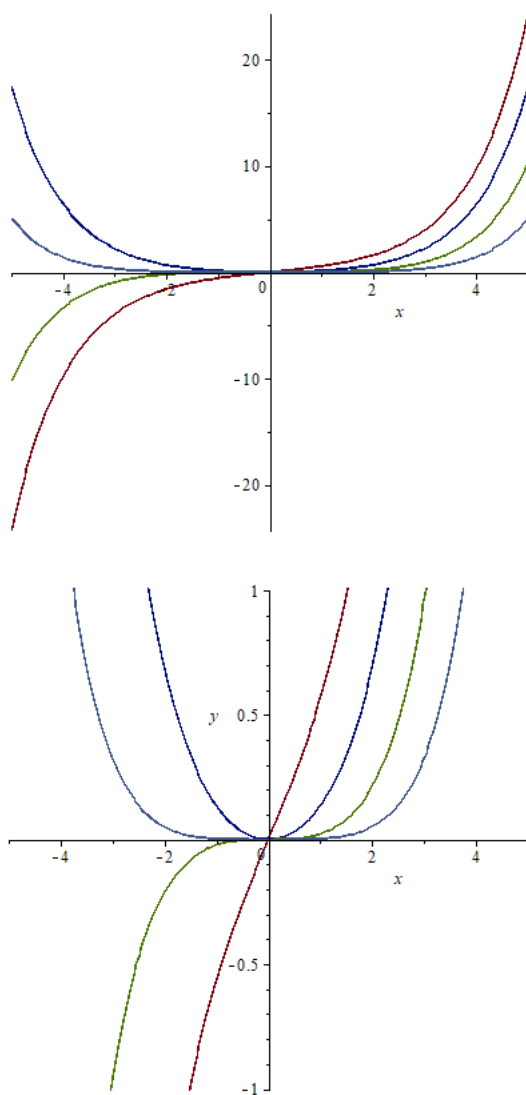
$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x$$

Производная полинома Лежандра вычисляется по формуле:

$$P'_n(x) = \frac{n}{1-x^2} [P_{n-1}(x) - x P_n(x)]$$

*Визуализация в Maple*

>restart;



```
>with(plots);
>with(PDEtools);
>plot({LegendreP(0,x),LegendreP(1,x),LegendreP(2,x),LegendreP(3,x),
LegendreP(4,x)},x=0..1,title="Полином Дежандра");
```

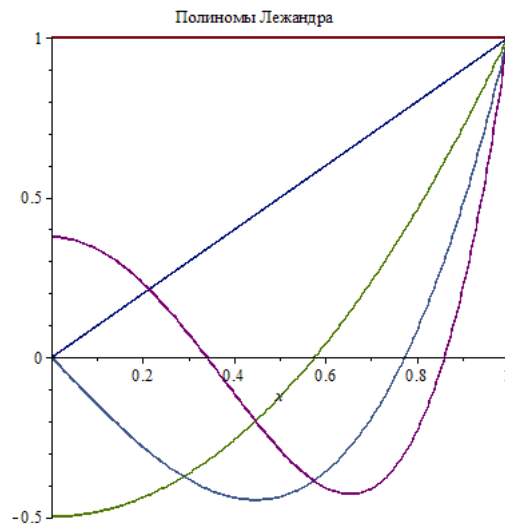
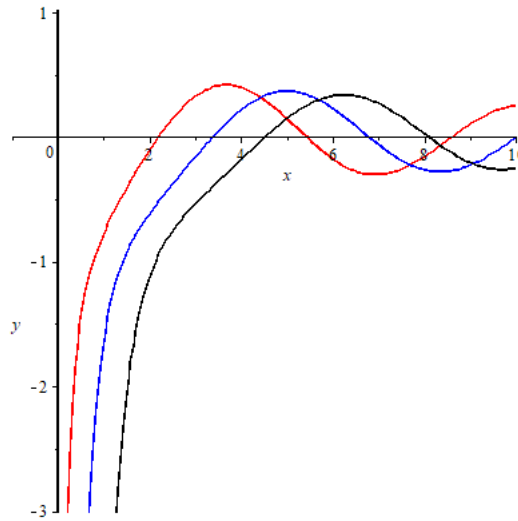
```
>plot({LegendreQ(0,x),LegendreQ(1,x),LegendreQ(2,x),LegendreQ(3,x),
LegendreQ(4,x)},x=1.5..5,title="Полиномы Лежандра");
```

#### 4. Сферические функции

##### *Введение в сферические функции*

Сферические функции представляют собой угловую часть семейства ортогональных решений уравнения Лапласа, записанную в сферических координатах. Они широко используются для изучения физических явлений в пространственных областях, ограниченных сферическими поверхностями и при решении физических задач, обладающих сферической симметрией. Сферические функции являются собственными функциями оператора Лапласа в сферической системе координат (обозначение  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ ). Они образуют ортонормированную систему в пространстве функций на двумерной сфере:





$$(Y_{lm}; Y_{lm}) = \iint |Y_m|^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 1$$

$$(Y_{lm}^p; Y_{lm}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm}^p Y_{lm} \sin\theta d\theta d\varphi = \delta_{l' l} \delta_{m' m}$$

Сферические функции имеют вид:

$$Y_{lm} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \Theta_{lm}(\theta),$$

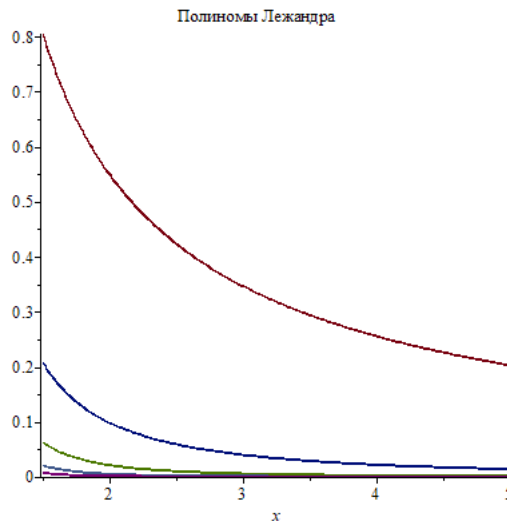
где функции  $\Theta_{lm}(\theta)$  являются решениями уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta_{lm}(\theta)}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \Theta_{lm} + l(l+1)\Theta_{lm} = 0$$

и имеет вид

$$\Theta_{lm} = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} = P_l^m(\cos\theta)$$

Здесь  $P_l^m(\cos\theta)$  - присоединённые многочлены Лежандра, а  $m!$  - факториал. Решение уравнения Лапласа в сферических координатах есть так называемая шаровая функция, получаемая умножением сферической функции на решение радиального уравнения.



### Визуализация в Maple

```
>restart;
with(PDEtools):
with(DEtools):
```

Запишем уравнение Лапласа

```
PDE:=diff(u(r,theta,phi),r$2)+(2/r)*diff(u(r,theta,phi),r)+(1/r^2)*
(diff(u(r,theta,phi),theta$2)+cot(theta)*diff(u(r,theta,phi),theta))+
1/((r^2)*(sin(theta))^2)*(diff(u(r,theta,phi),phi$2))=0;
```

Обозначаем через a1:

```
>a1:=pdsolve(PDE);
```

Выразим через t:

```
>t1:=_c2=mu;
t2:=_c1=lambda;
t3:=_F1(r)=R(r);
t4:=_F2(theta)=Theta(theta);
t5:=_F3(phi)=Phi(phi);
```

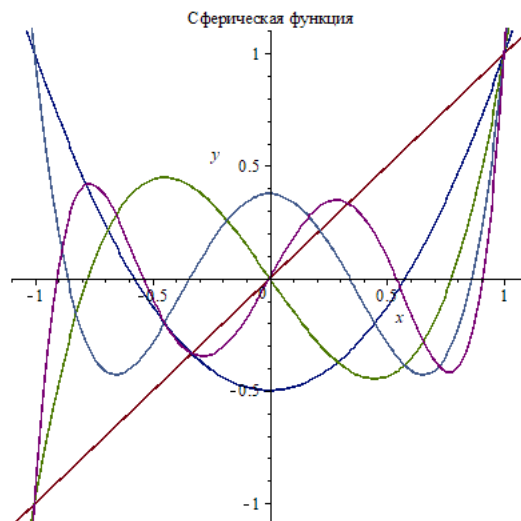
```
>a3:=subs({t1,t2,t3,t4,t5},a1);
>a3;
```

```
>a2:=dchange(theta=arccos(x),a1);
>a2:
```

```
>pde1:=(1-x^2)*(diff(Theta(theta),x$2))-2*x*(diff(Theta(theta),x))+
lambda*Theta(theta)=0;
>P:=(n,x)->(1/((2^n)*(factorial(n))))*(diff(-(x^2-1)^n,x^n));
```

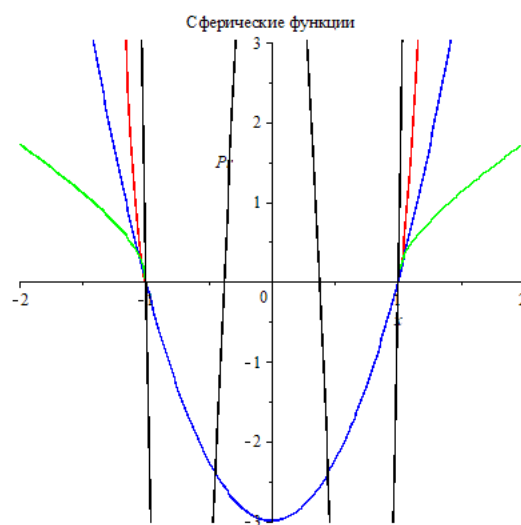
Изображаем сферическую функцию

```
>plot([P(1,x),P(2,x),P(3,x),P(4,x),P(5,x)],x=-1.1..1.1,y=-1.1..1.1,
title="Сферическая функция");
>plot([LegendreP(1,x),LegendreP(2,x),LegendreP(3,x),LegendreP(4,x),
LegendreP(5,x)],x=-1.1..1.1,v=-1.1..1.1);
```



### Сферическая функция и полином Лежандра

```
>Pr:=(n,m,x)->((x^2-1)^(m/2))*diff(P(n,x),x$m);
n=0..n;
>plot([Pr(3,3,x),Pr(2,2,x),Pr(1,1,x),Pr(4,2,x)],x=-2..2,Pr=-3..3,
color=[red,blue,green,black],title="Сферические функции");
```



```
>plot([LegendreP(3,3, x),LegendreP(2,2,x),
LegendreP(1,1, x),LegendreP(4,2,x)],x=-2..2,
LegendreP=-3..3,color=[red,blue,green,black]);
```

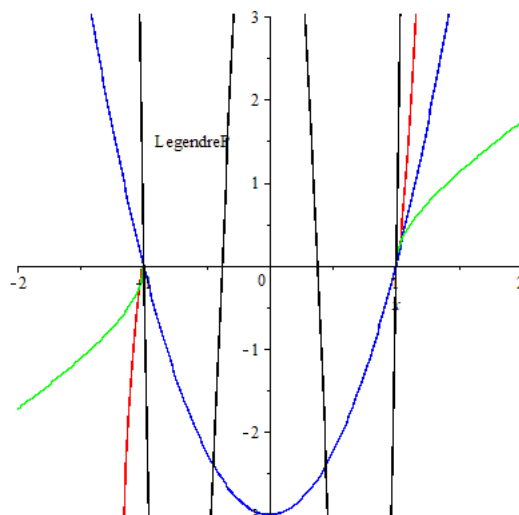
### Литература

1. Горюнов А.Ф. Уравнения математической физики в примерах и задачах: Учебное пособие / А.Ф. Горюнов– Часть 1. – М.:МИФИ, 2008. – 616 с.

HYPERBOLIC EQUATIONS IN MAPLE:  
THE FOURIER METHOD AND ITS IMPLEMENTATION IN MAPLE

A.R. Sayfullina

*This paper describes the hyperbolic equation, the approach to the study of this topic and its implementation in the Maple*



platform. The questions of the basic concepts of the hyperbolic equation, the concepts of cylindrical functions, spherical functions and Bessel functions are considered.

Keywords: equations of mathematical physics, hyperbolic equations, Maple program.

УДК 514.822; 27.35

## БАЛЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЕ СИСТЕМА КОНТРОЛЯ В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE

А.Р. Самигуллина<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [alsu\\_sam@mail.ru](mailto:alsu_sam@mail.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет

Описана автоматизированная балльно - рейтинговая система контроля знаний студентов на основе системы компьютерной математики Maple и ее приложения Maplet, а также результаты внедрения этой системы в Казанском федеральном университете.

**Ключевые слова:** Maple, балльно-рейтинговая система, Maplet, Excel.

Оценивание знаний студентов в Казанском (Приволжском) федеральном университете устанавливается на основании Регламента о балльно-рейтинговой системе оценки знаний студентов, принятого Учебно-методическим Советом от 27 апреля 2012 года, протокол №2. Основой для определения рейтинга студента являются рейтинговые показатели. Рейтинговые показатели по каждой дисциплине формируются на основе результатов текущего контроля знаний студентов в течение семестра (блок 1) и по итогам зачетно-экзаменационной сессии (блок 2). Итоговый рейтинг по дисциплине получается суммированием баллов по этим блокам с весом:

- Блок 1 – вес (коэффициент значимости) – 0,5;
- Блок 2 – вес (коэффициент значимости) – 0,5.

Согласно Регламенту студент может получить 100 баллов по дисциплине при условии полного усвоения знаний по учебной дисциплине согласно требованиям учебной программы. Принята следующая шкала соответствия рейтинговых баллов (с учетом их округления до целых) оценкам пятибалльной шкалы: 55 и менее – неудовл.; 56 - 70 – удовл.; 71 – 85 – хорошо; 86 и более – отлично. Текущий контроль знаний студентов по разным дисциплинам осуществляется один из 2-х способов: по классической схеме (студент получает домашнее задание и сдает его преподавателю) или в виде систематического аналитического тестирования (студент проходит тест во время занятий) [2]. Рассмотрим пример оценивания знаний по классической схеме. В течение семестра студенты проходят промежуточный контроль (самостоятельная работа студента - СРС, контрольные работы - КР и прилежание - П), где при выполнении заданий заполняется Excel-файл (Рис.5) преподавателем ведущий прак-

тику. Excel-файл (Рис. 2) создается автоматически из приложение Marlet при заполнение раздела «Учебный процесс» (Рис. 1). По завершении промежуточного контроля этот файл передается лек-

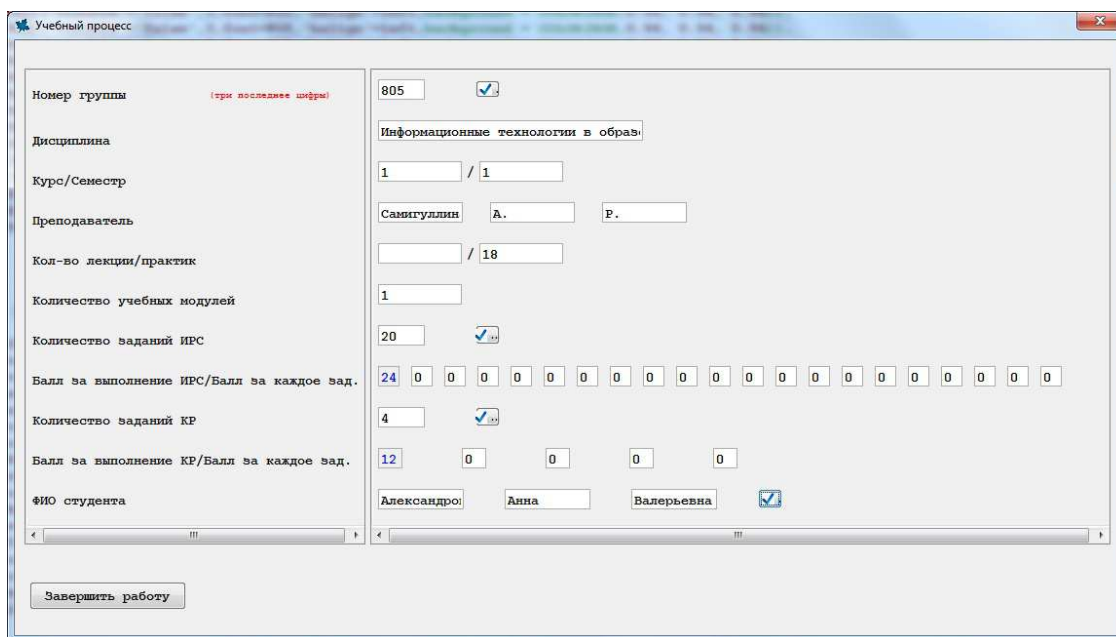


Рис. 1. Фрагмент окна «учебного процесса» при заполнении данных

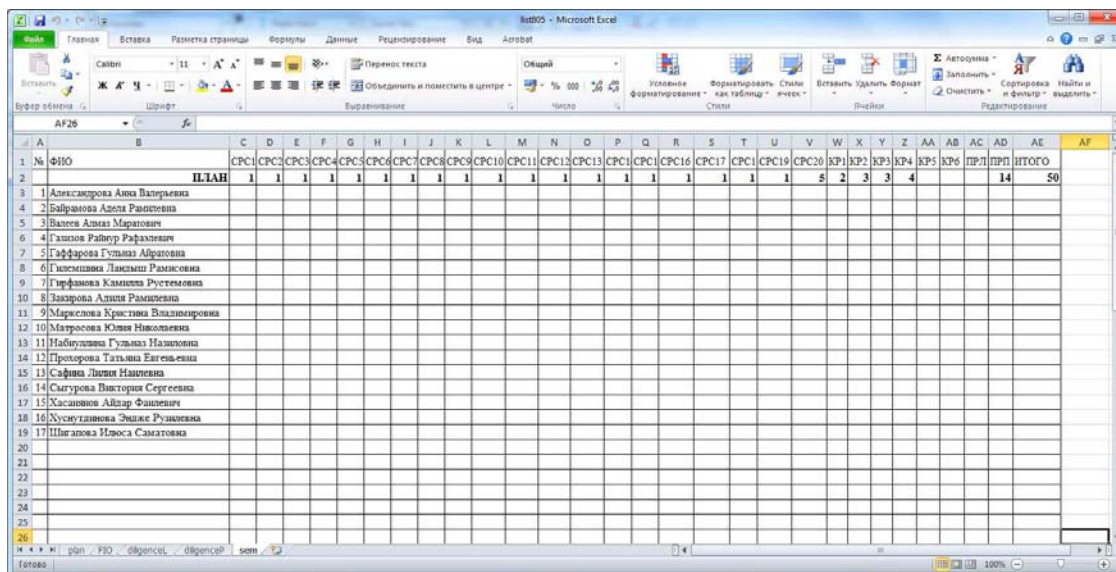


Рис. 2. Excel-файл

тору, далее во время экзамена данные будут автоматически записываться в листы этого же файла и считываться из него приложением Marlet.

Для промежуточной аттестации Автором была создана программная процедура (см. [1]-[4])

```
>ball_exam(No, p, No_Bil, DB, PB, bbb, Z):
```

No – порядковый номер студента в экзаменационной ведомости, p – семестр, экзамен, список, гистограмма, No\_Bil – номер билета, DB – добор баллов в виде списка, PB – баллы за поощрение (участие в конференции и т.д.), bbb – максимальный бал указанный в билете экзаменуемого за каждый вопрос в виде списка, Z – оценка по пятибалльной шкале в виде списка. Приведем пример ввода и

исполнение (См. Рис.3) команды `ball_exam` с 2-ым параметром «семестр» при использовании лектором во время промежуточной аттестации для получения информации за промежуточный контроль:

```
> ball_exam(1, семестр, 0, [0], 0, [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0]);
```

	CPC/1	CPC/2	CPC/3	CPC/4	CPC/5	CPC/6	CPC/7	Итого CPC	KP/1	KP/2	KP/3	Итого KP	ПР_Л	ПР_П	Итого ПР	Всего
План	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	28.0	3.0	3.0	2.0	8.0	7.0	7.0	14.0	50.0
Александрова Анна Валерьевна	4.0	3.0	3.0	3.0	2.0	4.0	4.0	23.0	2.0	3.0	2.0	7.0	7.0	7.0	14.0	44.0
Добор баллов	0.	1.0	1.0	1.0	2.0	0.	0.	5.0	1.0	0.	0.	1.0				6.0

Рис. 3. Фрагмент окна Maple при просмотре результатов промежуточного контроля студентки Александровой Анны Валерьевны

На Рис. 4 показаны результаты промежуточной аттестации. Результаты промежуточного аттестации записываются в Excel-файл в лист «sheet», где по окончании работы можно распечатать в виде экзаменационной ведомости (Рис. 5).

```
> ball_exam(1, экзамен, 10, [1, 2], 0, [10, 10, 20, 10], [4, 5, 3, 4]);
```

ФИО	Дата	Время: подготовки	ответа	Добор: max остаток	Экзамен: № билета	1	2	3	4	Σ семестр	Σ добора	Σ поопреции	Σ экзамен	Σ итого	Оценка	
Александрова Анна Валерьевна	5 октября 2018	16:31:3	0:14:34	6.0	3.0	10	4	5	3	4	44.0	3	0	38	85.0	4

Рис. 4. Промежуточная аттестация

№	ФИО студента	Оценка работы студента в семестр (в баллах)	Отметка о сдаче экзамена (в баллах)	Рейтинговый показатель по дисциплине	Итоговая оценка, вносимая в зачетную книжку	Подпись преподавателя
1	Александрова Анна Валерьевна	44	38	85	хорошо	
2	Байрамова Аделя Рамилевна					
3	Валеев Алмаз Маратович					

Рис. 5. Экзаменационная ведомость

**Литература**

1. Игнатьев Ю.Г. Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию: монография / Ю.Г. Игнатьев. – Казань: Изд-во Казанский университет, 2014. – 298 с.
2. Игнатьев Ю.Г. Обучение высшей математике на основе интегрирования методов математического и компьютерного моделирования в системах компьютерной математики / Ю.Г. Игнатьев, А.Р. Самигуллина // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2016. – Вып.2. – С.62-88.
3. Программный комплекс итоговой аттестации знаний, автоматизированного анализа и вывода результатов аттестации группы учащихся студентов по балльно - рейтинговой системе (БРС) на основе прикладного математического пакета Maple, его приложения Marplet и MicrosoftExcel: свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2014661615 Российская Федерация / Ю.Г. Игнатьев, А.Р. Самигуллина, А.А. Агафонов // – № 2014619341; заявл. 12.09.14; опубл. 10.11.14, Бюл. – № 12. – 1 с.
4. Программный комплекс программных процедур по высшей математике в прикладном математическом пакете Maple: свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2013617288 Российская Федерация / Ю.Г. Игнатьев, А.Р. Самигуллина. – № 2013613510; заявл. 26.04.13; опубл. 08.08.13.

SCORE-RATING CONTROL SYSTEM IN THE SYSTEM OF COMPUTER MATHEMATICS MAPLE

A.R. Samigullina

The article describes the score-rating system of students knowledge control using the Maple computer mathematics system, as well as the results of the implementation of this system at the Kazan Federal University.

Keywords: Maple, Score-Rating System, Marplet, Excel.







## ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Для нахождения решений системы применим *метод исключения*. Для этого умножим первое уравнение системы на  $a_{22}$ , а второе на  $(-a_{12})$  и сложим их, тогда получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \quad (1)$$

Аналогично, умножая первое уравнение системы на  $(-a_{21})$ , а второе – на  $a_{11}$  и складывая, получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \quad (2)$$

В полученных уравнениях в левой части стоят одинаковые выражения, а в правой стоят выражения по структуре похожие на выражение в левой части.

Введем обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$\Delta$  – называется определителем системы.

Введем дополнительные определители:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

Мы получили выражения, стоящие в правых частях уравнений (1) и (2). Заметим, что дополнительные определители  $\Delta_x$  и  $\Delta_y$  получаются из определителя системы  $\Delta$  путем замены коэффициентов при указанном неизвестном на соответствующие свободные члены.

Уравнения (1), (2) принимают вид:

$$\Delta x = \Delta_x, \quad \Delta y = \Delta_y.$$

Возможны два варианта:

1) Если  $\Delta \neq 0$ , то отсюда получаем, что исходная система уравнений имеет единственное решение (формулы Крамера):

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

То, что  $x, y$  являются решением системы можно проверить подстановкой их в систему.

2) Если  $\Delta = 0$ :

– Если  $\Delta = 0$  и хотя бы один из определителей  $\Delta_x \neq 0$  или  $\Delta_y \neq 0$ , то система не имеет решений (т.е. несовместна).

Доказательство. Если  $\Delta = 0$  и хотя бы один из определителей  $\Delta_x \neq 0$  или  $\Delta_y \neq 0$  (пусть  $\Delta_x \neq 0$ ), то из первого уравнения системы (1) получаем противоречие  $\Delta x = 0 = \Delta_x \neq 0$ . Значит, система уравнений не имеет решений.

– Если  $\Delta = 0$  и  $\Delta_x = \Delta_y = 0$ , то система имеет бесчисленное множество решений (т.е. система неопределенная).

Доказательство. Если  $\Delta = 0$  и  $\Delta_x = \Delta_y = 0$ , то из системы (1) имеем:  $\Delta x = 0 = \Delta_x = 0$ ,  $\Delta y = 0 = \Delta_y = 0$  – тождественные равенства.

**Примеры.**

$$1. \begin{cases} 3x + 6y = 3, \\ 4x + 8y = 2. \end{cases}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \cdot 3 \\ 4 & 2 \cdot 4 \end{vmatrix} = 0$ ,  $\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \neq 0$ ,  $\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ . Решений нет. Действительно, сократим первое уравнение на 3, а второе на 4, получим

$$\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x + 2y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Нельзя найти такие  $x, y$ , которые бы обращали в тождество оба уравнения системы.

$$2. \begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ 4x + 6y = 16. \end{cases}$$

$$\text{Здесь } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 16 & 6 \end{vmatrix} = 0, \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = 0.$$

Одно из уравнений является следствием другого (например, второе получается из первого умножением на 2). Система сводится к одному уравнению и имеет бесчисленное множество решений, содержащихся в формуле  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ .

$$3. \begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ 7x - 5y = -3. \end{cases}$$

$$\text{Здесь } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -31, \Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -31, \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Система имеет единственное решение

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 2.$$

### ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ТРЕХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Введем определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

а также дополнительные определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Возможны два варианта:

1)  $\Delta \neq 0$ , тогда решение исходной системы уравнений существует и оно единственное (формулы Крамера):

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \quad (*)$$

2)  $\Delta = 0$ .

– Если  $\Delta = 0$  и хотя бы один из определителей  $\Delta_x \neq 0$  или  $\Delta_y \neq 0$  или  $\Delta_z \neq 0$ , то хотя бы одно из равенств (\*) невозможно, т.е. система не имеет решений (несовместна).

– Если  $\Delta = 0$  и  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ , то система имеет либо бесчисленное множество решений (т.е. система неопределенная) либо не имеет решений (т.е. система несовместна).

**Примеры.**

$$4. \begin{cases} x + y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = 1, \\ 4x + 3y + 3z = 4. \end{cases}$$

Система не имеет решений, т.к.  $\Delta = 0$ , а  $\Delta_y = 1 \neq 0$ .

$$5. \begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = 3. \end{cases}$$

Система имеет бесчисленное множество решений, т.к.  $\Delta = 0$ ,  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ .

Ищем минор отличный от нуля  $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$ . Возьмем первые два уравнения системы и

запишем их в виде  $\begin{cases} x + y = 1 - z, \\ 2x + y = 2 - z. \end{cases}$

Определитель этой системы  $\tilde{\Delta} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ .

Воспользуемся формулами Крамера

$$\tilde{\Delta}_x = \begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ 2-z & 1 \end{vmatrix} = 1-z-2+z = -1, \quad \tilde{\Delta}_y = \begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 2 & 2-z \end{vmatrix} = 2-z-2+2z = z.$$

Тогда решение этой системы запишется в виде

$$x = \frac{\tilde{\Delta}_x}{\tilde{\Delta}} = \frac{-1}{-1} = 1, \quad y = \frac{\tilde{\Delta}_y}{\tilde{\Delta}} = \frac{z}{-1} = -z.$$

Если возьмем  $z = -t$ , то решение системы запишется в виде

$$x = 1, \quad y = t, \quad z = -t.$$

$$6. \begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + 2y + 2z = 3, \\ 3x + 3y + 3z = 4. \end{cases}$$

Система не имеет решений, т.к.  $\Delta = 0$ ,  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ , но уже первые два ее уравнения не совместны, т.к. если умножить первое из них на 2 и вычесть из второго, то получим невозможное равенство  $0 = 1$ .

$$7. \begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + 2y + 2z = 2, \\ 3x + 3y + 3z = 3. \end{cases}$$

Система имеет бесчисленное множество решений. Здесь  $\Delta = 0$ ,  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ , все миноры равны нулю и пропорциональны свободные члены, т.е. второе и третье уравнения являются следствиями первого. Значит, имеем одно уравнение с тремя неизвестными, которое, естественно, имеет бесчисленное множество решений.

## Литература

1. Секаева Л.Р. Применение программы «МАХИМА» для решения задач / Л.Р. Секаева // Математика. Образование. Информатизация: материалы XXIII международной конференции. – Казань, 2015. – С. 78.
2. Малакаев М.С. Несколько примеров использования программы «МАХИМА» в работе учителя / М.С. Малакаев, Л.Р. Секаева // Ежегодный сборник «Математика в образовании», посвященный памяти Анатолия Вольфовича Мерлина. – Чебоксары, 2015. – № 11. – С. 63–66.
3. Малакаев М.С. Несколько примеров использования программы «МАХИМА» в работе учителя / М.С. Малакаев, Л.Р. Секаева // Математическое образование в школе и вузе: теория и практика: материалы IV Международной научно-практической конференции «MATHEDU 2014», посвященной 210-летию Казанского университета и дню математика. – Казань, 2014. – С. 266–270.
4. Секаева Л.Р. Курс лекций по математике для бакалавров-геологов / Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева, Е.А. Широкова. – Казань: Казанский федеральный университет, 2014. – 251 с.
5. Малакаев М.С. Основы работы с системой компьютерной алгебры Maxima / М.С. Малакаев, Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева. – Казань: Казанский федеральный университет, 2012. – 47 с.

6. Малакаев М.С. Основы работы с системой компьютерной алгебры Maxima / М.С. Малакаев, Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева. – Казань: Казанский федеральный университет, 2013. – Ч. 2. – 61 с.

THEORETICAL MATERIAL FOR USE IN DISTANCE LEARNING

L.R. Sekaeva

*The Kramer's method for solving a system of linear algebraic equations is described.*

Keywords: math, Kramer's method.

УДК 517

**РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММЫ «МАХИМА»**

Л.Р. Секаева<sup>1</sup>

<sup>1</sup> lrsekaeva@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В настоящее время требования, предъявляемые к уровню математической подготовки студентов, постоянно растут. К тому же, современное представление о качественном образовании включает в себя свободное владение компьютерными технологиями. Поэтому появляется необходимость использовать в процессе обучения математике комплексные пакеты программ, позволяющие решать задачи как аналитически, так и численно.*

*Система компьютерной алгебры «МАХИМА» является бесплатной свободно распространяемой программой и обладает широкими возможностями. Выполняя задания с помощью «МАХИМА», студент знакомится с общими принципами работы подобных систем. Появляется возможность решать более трудоемкие и интересные задания, получать наглядные результаты. Это способствует закреплению знаний и умений, полученных на лекционных и практических занятиях.*

**Ключевые слова:** функция двух переменных, дифференциальное уравнение, ряд Фурье, ряд Тейлора.

Приведем некоторые примеры, решенные в программе «МАХИМА».

**Пример 1.** Найти экстремумы функции двух переменных  $z = e^{-x^2-y^2}(3x^2 + y^2)$ .

Решение. Зададим функцию

```
(%i1) z:%e^(-x^2-y^2)*(3*x^2+y^2);
```

```
(%o1) (y^2+3 x^2) %e^-y^2-x^2
```

Найдем стационарные точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума функции:

```
(%i2) solve([diff(z,x)=0,diff(z,y)=0],[x,y]);
```

```
(%o2) [[x=0,y=0],[x=-1,y=0],[x=1,y=0],[x=0,y=-1],[x=0,y=1]]
```

В результате получено пять точек. Для каждой из них проверим выполнение достаточного условия экстремума. Проделаем это только для точки (1, 0).

Так как значение определителя в этой точке  $48/e^2$  положительно, а  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(1,0)} < 0$ , то точка (1, 0) является точкой максимума и  $z_{\max} = 3/e$ .

Сравним с графиком, построенным ранее (Рис. 1).

Ответ. Точка  $\left(\frac{1}{4}, -\frac{27}{256}\right)$  является точкой минимума.

**Пример 2.** Построить интегральную кривую уравнения  $\frac{dy}{dx} = \cos x + y$ , проходящую через точку (2, -1) и поле направлений.

```
(%i3) A:diff(z,x,2);
(%o3) 4 x^2 (y^2+3 x^2) %e^-y^2-x^2 -2 (y^2+3 x^2) %e^-y^2-x^2 -24 x^2 %e^-y^2-x^2 +6 %e^-y^2-x^2
(%i4) d:determinant(matrix([diff(z,x,2),diff(z,x,1,y,1)],
[diff(z,x,1,y,1),diff(z,y,2)]));
(%o4) (4 x^2 (y^2+3 x^2) %e^-y^2-x^2 -2 (y^2+3 x^2) %e^-y^2-x^2 -24 x^2 %e^-y^2-x^2 +6 %e^-y^2-x^2)
(4 y^2 (y^2+3 x^2) %e^-y^2-x^2 -2 (y^2+3 x^2) %e^-y^2-x^2 -8 y^2 %e^-y^2-x^2 +2 %e^-y^2-x^2)-
(4 x y (y^2+3 x^2) %e^-y^2-x^2 -16 x y %e^-y^2-x^2)^2
(%i5) at(d,[x=1,y=0]);
(%o5) 48 %e^-2
(%i6) at(A,[x=1,y=0]);
(%o6) -12 %e^-1
(%i7) at(z,[x=1,y=0]);
(%o7) 3 %e^-1

(%i9) plot3d(%e^(-x^2-y^2))*(3*x^2+y^2),[x,-3,3],[y,-3,3]);
(%o9)
```

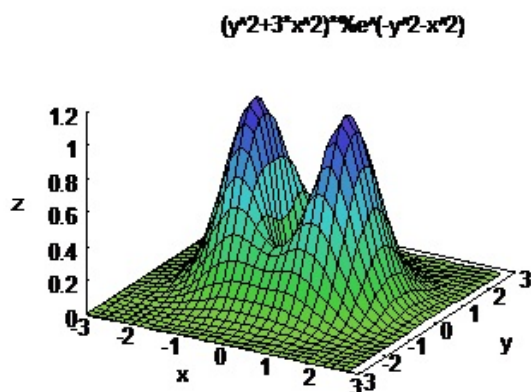


Рис. 1. График поверхности.

```
(%i1) load(plotdf);plotdf(cos(x)+y,[trajectory_at,2,-1]);
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.25.1/share/dynamics/plotdf.lisp
(%o2) Structure [EXTERNAL-PROCESS]
```

**Пример 3.** Построить поле направлений системы дифференциальных уравнений

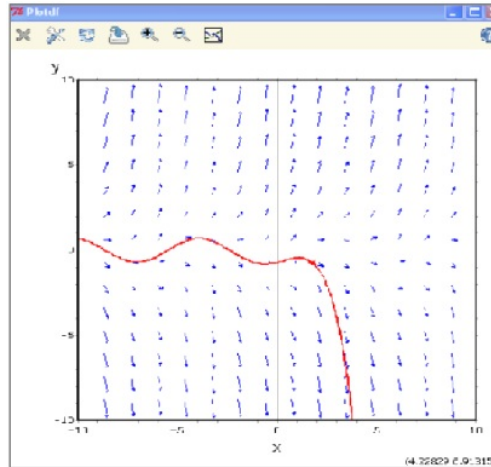
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 6y. \end{cases}$$

После ввода команды

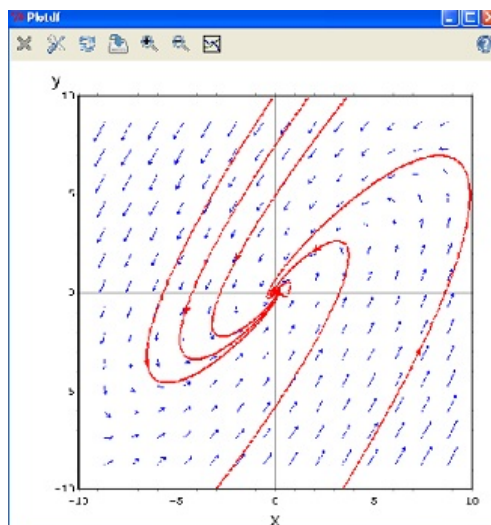
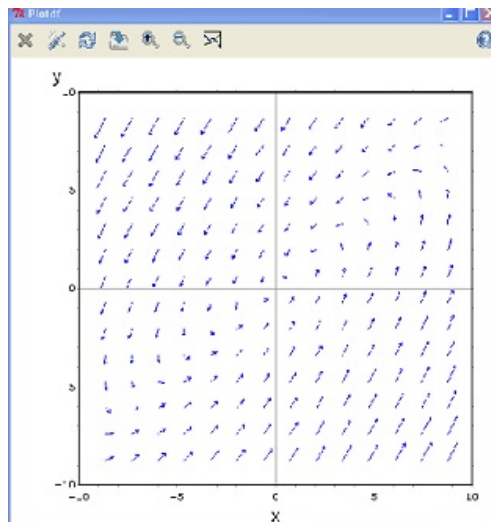
в окне появится изображение поля направлений системы:

Для построения траекторий решения, проходящих через заданные точки, нужно в опциях (как в примере 1) указать координаты точки или на изображении поля направлений подвести указатель к выбранной точке и щелкнуть левой кнопкой мыши. На приведенном ниже рисунке изображены несколько траекторий, проходящих через точки, отмеченные на линиях стрелками.

**Пример 4.** Разложить функцию  $f(x) = (x-1)^2$  в ряд Фурье на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .



```
(%i8) load(plotdf);plotdf([2*x-4*y,5*x-6*y]);
(%o8) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.25.1/share/dynamics/plotd
(%o9) Structure [EXTERNAL-PROCESS]
```



```
(%i1) load(fourie);
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.25.1/share/calculus/fourie.mac

(%i2) fourier((x-1)^2, x, %pi);

(%t2) a_0 = 
$$\frac{\frac{2\pi^3}{3} + 2\pi}{2\pi}$$


(%t3) a_n = 
$$\frac{\frac{2\pi^2 \sin(\pi n)}{n} + \frac{2 \sin(\pi n)}{n} - \frac{4 \sin(\pi n)}{n^3} + \frac{4\pi \cos(\pi)}{n^2}}{\pi}$$


(%t4) b_n = 
$$\frac{\frac{4\pi \cos(\pi n)}{n} - \frac{4 \sin(\pi n)}{n^2}}{\pi}$$


(%o4) [%t2, %t3, %t4]
```

Для того, чтобы не только вычислить коэффициенты ряда Фурье, но и получить разложение функции  $f(x)$ , заданной на отрезке  $[-T, T]$  и  $T$ -периодически продолженной на всю вещественную ось в ряд Фурье, следует ввести команды `load(fourie); totalfourier(f(x), x, T)`.

```
(%i5) totalfourier((x-1)^2, x, %pi);

(%t5) a_0 = 
$$\frac{\frac{2\pi^3}{3} + 2\pi}{2\pi}$$


(%t6) a_n = 
$$\frac{\frac{2\pi^2 \sin(\pi n)}{n} + \frac{2 \sin(\pi n)}{n} - \frac{4 \sin(\pi n)}{n^3} + \frac{4\pi \cos(\pi n)}{n^2}}{\pi}$$


(%t7) b_n = 
$$\frac{\frac{4\pi \cos(\pi n)}{n} - \frac{4 \sin(\pi n)}{n^2}}{\pi}$$


(%t8) a_0 = 
$$\frac{\pi^2 + 3}{3}$$


(%t9) a_n = 
$$\frac{4(-1)^n}{n^2}$$


(%t10) b_n = 
$$\frac{4(-1)^n}{n}$$


(%o10) 
$$4 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n} \right) + 4 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2} \right) + \frac{\pi^2 + 3}{3}$$

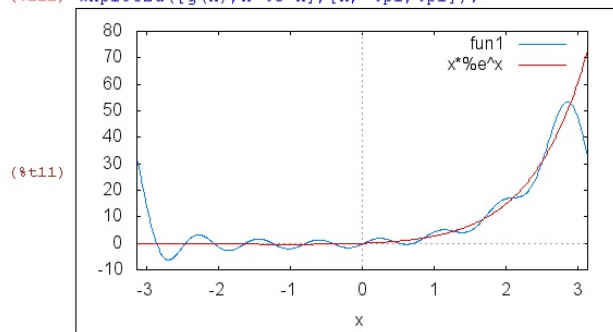
```

Maxima не только вычислила коэффициенты разложения, но и упростила их, а так же записала общий вид разложения.

Отметим, что частные суммы ряда Фурье приближают исходную функцию, в отличие от ряда Тейлора, не в конкретных точках, а «в среднем по отрезку».

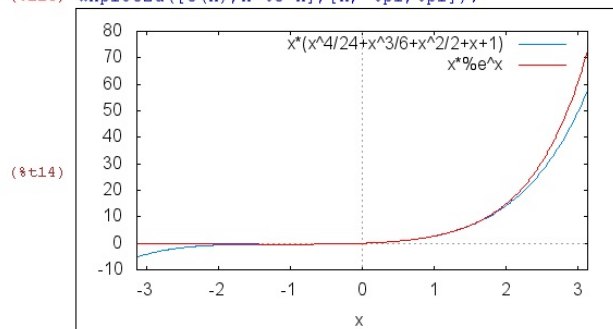
Для примера рассмотрим разложение функции  $f(x) = xe^x$  в ряд Фурье на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и ряд Тейлора в окрестности точки ноль. Построим графики, полученных разложений и сравним их с графиком  $f(x) = xe^x$ .

```
(%i11) wxplot2d([g(x), x*e^x], [x, -%pi, %pi]);
```



```
(%o11)
```

```
(%i14) wxplot2d([t(x), x*e^x], [x, -%pi, %pi]);
```



```
(%o14)
```

## Литература

1. Секаева Л.Р. Применение программы «МАХИМА» для решения задач / Л.Р. Секаева // Математика. Образование. Информатизация: материалы XXIII международной конференции. – Казань, 2015. – С. 78.
2. Малакаев М.С. Несколько примеров использования программы «МАХИМА» в работе учителя / М.С. Малакаев, Л.Р. Секаева // Ежегодный сборник «Математика в образовании», посвященный памяти Анатолия Вольфовича Мерлина. – Чебоксары, 2015. – № 11. – С. 63–66.
3. Малакаев М.С. Несколько примеров использования программы «МАХИМА» в работе учителя / М.С. Малакаев, Л.Р. Секаева // Математическое образование в школе и вузе: теория и практика: материалы IV Международной научно-практической конференции «MATHEDU 2014», посвященной 210-летию Казанского университета и дню математика. – Казань, 2014. – С. 266–270.
4. Секаева Л.Р. Курс лекций по математике для бакалавров-геологов / Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева, Е.А. Широкова. – Казань: Казанский федеральный университет, 2014. – 251 с.
5. Малакаев М.С. Основы работы с системой компьютерной алгебры Maxima / М.С. Малакаев, Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева. – Казань: Казанский федеральный университет, 2012. – 57 с.
6. Малакаев М.С. Основы работы с системой компьютерной алгебры Maxima / М.С. Малакаев, Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева. – Казань: Казанский федеральный университет, 2013. – Ч. 2. – 61 с.

## THE SOLUTION OF SOME TASKS WITH USE OF THE MAXIMA PROGRAM

L.R. Sekaeva

Now requirements imposed to the level of mathematical training of students constantly grow. Besides, modern idea of quality education includes free possession of computer technologies. Therefore there is a need to use in the course of training in mathematics the complex software packages allowing to solve problems both analytically, and in number.

The system of computer algebra «MAXIMA» is a free freeware program and has ample opportunities. Performing tasks by means of «MAXIMA», the student gets acquainted with the general principles of work of similar systems. There is an opportunity to solve more labor-consuming and interesting tasks, to receive evident results. It promotes fixing of knowledge and abilities received on a lecture and practical training.

Keywords: function of two variables, differential equation, Fourier series, Taylor series.



УДК 539.3

## РАЗРАБОТКА ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ОСНОВ ПРОЦЕССА ИЗВЛЕЧЕНИЯ ТВЕРДЫХ НЕФТЕПРОДУКТОВ ПРИ ТЕРМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Л.Р. Секаева<sup>1</sup>

<sup>1</sup> lrsekaeva@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*Целью настоящей работы является разработка теоретических основ моделирования процесса движения в породе твердых углеводородов при температурном воздействии.*

**Ключевые слова:** механика, грунт.

Известно, что при повышении температуры битума он теряет свою вязкость и переходит в разряд жидких вязких углеводородов (нефти), извлечение которой процесс достаточно разработанный и технически обеспеченный. Проблема состоит в “подаче тепла” и обеспечения такого режима повышения температурного поля в пласте, которое обеспечивало бы разогрев битума, а не окружающей породы. Экспериментально такую задачу в реальном месторождении не решить, а на макете можно получить лишь приближенные результаты.

Перед началом математического моделирования необходимо принять некоторые макромасштабные предположения. В первую очередь будем считать, что битум является жидкой фракцией, но с очень большой вязкостью. Это позволит избежать описания в математической модели фазовых переходов. Далее, рассмотрим случай квазистатического деформирования, когда инерционными слагаемыми можно пренебречь. Процесс добычи вязких углеводородов практически всегда связан с наличием в коллекторе воды, поэтому жидкая фракция будет представлять собою нефте-водяную смесь. При макромасштабном описании фильтрации такой смеси можно считать, что поровое давление нефти и воды совпадают. Наличие газа учитывать не будем.

Первой частью работы является получение основной системы разрешающих уравнений. В первую очередь к такой системе относятся уравнения равновесия, записанные для всего грунта в целом [1]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{tot}}{\partial x_j} + \rho g \delta_{i3} = 0, \quad (1)$$

причем согласно принципу напряжений Терцаги [2] тотальные напряжения в грунте  $\sigma_{ij}^{tot}$  принимаются равными

$$\sigma_{ij}^{tot} = \sigma_{ij}^{ef} - \delta_{ij} P,$$

где  $P$  – давление в жидкой фазе,  $\sigma_{ij}^{ef}$  – эффективное напряжение в грунте, а  $\rho$  – осредненная плотность породы коллектора, определяемая как

$$\rho = m(s\rho_w + (1-s)\rho_H) + (1-m)\rho_s$$

и являющаяся функцией структуры и строения коллектора. Индексы  $s$ ,  $w$ ,  $H$  соответствуют параметрам скелета грунта, воды и нефти, через  $m$  и  $s$  обозначаются, соответственно, пористость и содержание воды в жидкой фазе,  $x_i$  – глобальные декартовы координаты текущего (актуального) состояния,  $\vec{i}_i$  – орты глобальной декартовой системы координат,  $\vec{g}$  – ускорение свободного падения

$$\vec{g} = g \vec{i}_3.$$

Уравнения баланса масс [3] запишем отдельно для каждой фазы грунта. Для скелета грунта уравнение баланса масс примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \{(1-m)\rho_s\} + \text{div}\{(1-m)\rho_s \vec{v}^s\} = 0, \quad (2)$$

где  $\vec{v}^s$  – скорость частиц скелета грунта.

Уравнения баланса масс для жидких фаз примут аналогичный вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{m s \rho_w\} + \text{div}\{m s \rho_w \vec{v}^w\} = 0 \quad (3)$$

для воды и

$$\frac{\partial}{\partial t}\{m(1-s)\rho_H\} + \operatorname{div}\{m(1-s)\rho_H\vec{v}^H\} = 0 \quad (4)$$

для нефти, где  $\vec{v}^w$  и  $\vec{v}^H$  – скорости частиц воды и нефти соответственно.

Разделив уравнение баланса масс твердой фазы на  $\rho_s$ , преобразуем уравнение (2) к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}(1-m) + (1-m)\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\rho_s}{\partial t} + \operatorname{div}\{(1-m)\rho_s\vec{v}^s\} = 0. \quad (5)$$

Аналогичные преобразования уравнений (3) и (4) приведут к уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t}(sm) + sm\frac{1}{\rho_w}\frac{\partial\rho_w}{\partial t} + \operatorname{div}\{sm\rho_w\vec{v}^w\} = 0 \quad (6)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t}\{(1-s)m\} + (1-s)m\frac{1}{\rho_H}\frac{\partial\rho_H}{\partial t} + \operatorname{div}\{(1-s)m\rho_H\vec{v}^H\} = 0. \quad (7)$$

Складывая соотношения (5), (6) и (7) и пренебрегая градиентом плотности по сравнению с градиентами изменения скорости и пористости, то после некоторых преобразований можно получить

$$(1-m)\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\rho_s}{\partial t} + sm\frac{1}{\rho_w}\frac{\partial\rho_w}{\partial t} + (1-s)m\frac{1}{\rho_H}\frac{\partial\rho_H}{\partial t} + \operatorname{div}\{\vec{v}^s\} + \operatorname{div}\{sm(\vec{v}^w - \vec{v}^s)\} + \operatorname{div}\{(1-s)m(\vec{v}^H - \vec{v}^s)\} = 0. \quad (8)$$

Считая, что объемные деформации минеральных частиц скелета грунта определяются давлением жидкой фазы, и учитывая слабую их сжимаемость, закон сжимаемости для минеральных частиц скелета грунта [4] можно записать в виде

$$\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\rho_s}{\partial t} = \frac{1}{K_s}\frac{\partial P}{\partial t},$$

где  $K_s$  – модуль объемного сжатия минеральных частиц скелета грунта.

Учитывая слабую сжимаемость воды и нефти, справедливыми будут следующие соотношения

$$\frac{1}{\rho_w}\frac{\partial\rho_w}{\partial t} = \frac{1}{K_w}\frac{\partial P}{\partial t},$$

$$\frac{1}{\rho_H}\frac{\partial\rho_H}{\partial t} = \frac{1}{K_H}\frac{\partial P}{\partial t},$$

где  $K_w$  и  $K_H$  – модули объемного сжатия воды и нефти соответственно.

Тогда уравнение (8) примет вид

$$\beta\frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div}\{\vec{v}^s\} + \operatorname{div}\{sm(\vec{v}^w - \vec{v}^s)\} + \operatorname{div}\{(1-s)m(\vec{v}^H - \vec{v}^s)\} = 0,$$

причем осредненную упругоюкость всего грунта в целом  $\beta$  можно записать в виде

$$\beta = \frac{1-m}{K_s} + \frac{ms}{K_w} + \frac{m(1-s)}{K_H}.$$

В проекциях итоговое уравнение баланса масс можно записать в виде

$$\beta\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial v_i^s}{\partial x_i} + \frac{\partial\{ms(v_i^w - v_i^s)\}}{\partial x_i} + \frac{\partial\{m(1-s)(v_i^H - v_i^s)\}}{\partial x_i} = 0.$$

Закон фильтрации записывается по отношению к разности приведенных скоростей жидкости и скелета грунта в форме Дарси-Герсеванова

$$ms(\vec{v}^w - \vec{v}^s) = -\frac{k}{\mu_w}f_w(\operatorname{grad}P - \rho_w\vec{g}),$$

аналогичное уравнение для нефти примет вид

$$m(1-s)(\vec{v}^H - \vec{v}^s) = -\frac{k}{\mu_H} f_H (\text{grad}P - \rho_H \vec{g}),$$

где принимается, что  $k$  – абсолютная проницаемость скелета грунта,  $\mu_w$  – вязкость воды,  $\mu_H$  – вязкость нефти,  $f_w$  – фазовая проницаемость системы каналов, занятых водой,  $f_H$  – фазовая проницаемость системы каналов, занятых нефтью.

Подставляя уравнения фильтрации в итоговое уравнение баланса массы, получим уравнение пьезопроводности

$$\beta \frac{\partial P}{\partial t} + \text{div}\{\vec{v}^s\} - \text{div}\left\{k\left(\frac{f_w}{\mu_w} + \frac{f_H}{\mu_H}\right)\text{grad}P\right\} + \text{div}\left\{k\vec{g}\left(\frac{f_w}{\mu_w}\rho_w + \frac{f_H}{\mu_H}\rho_H\right)\right\} = 0 \quad (9)$$

или

$$\beta \frac{\partial P}{\partial t} + \text{div}\{\vec{v}^s\} - \text{div}\{k\psi\text{grad}P\} + \text{div}\{k\vec{g}\varphi\} = 0,$$

где приняты обозначения

$$\psi = \frac{f_w}{\mu_w} + \frac{f_H}{\mu_H}, \quad \varphi = \frac{f_w}{\mu_w}\rho_w + \frac{f_H}{\mu_H}\rho_H.$$

В проекциях это уравнение можно записать как

$$\beta \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial v_i^s}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ k\psi \frac{\partial P}{\partial x_i} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \{ k\varphi \delta_{i3} g \} = 0.$$

Считая отклонения температуры от начальной при термическом воздействии не слишком большими, будем считать справедливым закон теплопроводности Фурье. В предположении малости энергии диссипации вязко-пластическом деформировании уравнение теплопроводности для всего грунта в целом примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \{ [(1-m)\rho_s c_s + m s \rho_w c_w + m(1-s)\rho_H c_H] T \} + \\ & + \text{div}\{ [(1-m)\rho_s c_s \vec{v}^s + m s \rho_w c_w \vec{v}^w + m(1-s)\rho_H c_H \vec{v}^H] T \} = \\ & = \text{div}\{ [(1-m)\lambda_s + m s \lambda_w + m(1-s)\lambda_H] \text{grad}(T) \}, \end{aligned}$$

где  $c_s$ ,  $c_w$ ,  $c_H$  и  $\lambda_s$ ,  $\lambda_w$ ,  $\lambda_H$  – коэффициенты теплоемкости и теплопроводности скелета грунта, воды и нефти соответственно.

После некоторых преобразований можно получить

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \{ c T \} + \text{div}\{ [c \vec{v}^s + m s \rho_w c_w (\vec{v}^w - \vec{v}^s) + m(1-s)\rho_H c_H (\vec{v}^H - \vec{v}^s)] T \} = \\ & = \text{div}\{ \lambda \text{grad}(T) \} \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ c T \} + \text{div}\{ \vec{Q} T \} = \text{div}\{ \lambda \text{grad}(T) \}, \quad (10)$$

где средняя теплоемкость грунта записывается в виде

$$c = (1-m)\rho_s c_s + m s \rho_w c_w + m(1-s)\rho_H c_H,$$

средняя теплопроводность грунта – в виде

$$\lambda = (1-m)\lambda_s + m s \lambda_w + m(1-s)\lambda_H,$$

а вектор  $\vec{Q}$  представляется как

$$\vec{Q} = c \vec{v}^s + m s \rho_w c_w (\vec{v}^w - \vec{v}^s) + m(1-s)\rho_H c_H (\vec{v}^H - \vec{v}^s)$$

или

$$\vec{Q} = c \vec{v}^s - \Phi k \text{grad}(P) + \chi k \vec{g},$$

где введены обозначения

$$\Phi = \frac{f_w}{\mu_w} \rho_w c_w + \frac{f_H}{\mu_H} \rho_H c_H,$$

$$\chi = \frac{f_w}{\mu_w} \rho_w^2 c_w + \frac{f_H}{\mu_H} \rho_H^2 c_H.$$

В проекциях уравнение теплопроводности можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \{cT\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \{Q_i T\} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right\}.$$

Через  $d_{ij}$  обозначим скорость деформаций частиц скелета грунта:

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} \right).$$

Тогда вариационная форма уравнений (1), (9), (10) будет следующей

$$\int_V \sigma_{ij}^{tot} \delta d_{ij} dV = \int_{S_\sigma} \sigma_i^* \delta v_i^s dS + \int_V \delta_{ij} g \rho \delta v_i^s dV,$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{tot} n_j &= \sigma_i^*, \quad S_\sigma, \\ \int_V \beta \frac{\partial P}{\partial t} \delta \dot{P} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i^s) \delta \dot{P} dV - \int_{S_H} k H_n^* \delta \dot{P} dS + \\ + \int_V k \psi \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta \dot{P}) dV - \int_V k \varphi \delta_{i3} g \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta \dot{P}) dV &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} k \frac{f_w(s)}{\mu_w} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} (P) - \rho_w g \delta_{i3} \right) n_i + k \frac{f_H(s)}{\mu_H} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} (P) - \rho_H g \delta_{i3} \right) n_i = \\ = k \frac{f_w(s)}{\mu_w} H_n^w + k \frac{f_H(s)}{\mu_H} H_n^H = k H_n^*, \\ \int_V \frac{\partial}{\partial t} \{cT\} \delta \dot{T} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left( c v_i^s - \Phi k \frac{\partial}{\partial x_i} (P) + \chi k g \delta_{i3} \right) T \right\} \delta \dot{T} dV = \\ \int_{S_q} q^* \delta \dot{T} dS - \int_V \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta \dot{T}) dV, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i = q^*, \quad S_q. \quad (13)$$

Уравнения (11), (12), (13) можно записать в линеаризованном виде

$$\begin{aligned} \int_V \left( \sigma_{ij}^{ef} \delta d_{ij} + \sigma_{ij}^{ef} \delta d_{ij} + \frac{dP}{dt} \delta \dot{\theta}_0 + (\sigma_{ij}^{ef} \delta d_{ij} + P \delta \dot{\theta}_0) \dot{\theta}_0 \right) dV - \int_V \rho \vec{g} \delta \vec{v}^s \dot{\theta} dV - \\ - \int_{S_\sigma} (\vec{\sigma}_n^* \delta \vec{v}^s + \vec{\sigma}_n^* \delta \vec{v}^s \dot{\theta}_0) dS + \int_V (\sigma_{ij}^{ef} \delta d_{ij} + P \delta \dot{\theta}_0) dV - \int_V \rho \vec{g} \delta \vec{v}^s dV - \int_{S_\sigma} \vec{\sigma}_n^* \delta \vec{v}^s dS = 0, \\ \int_V k \left\{ \left[ \frac{\partial \dot{P}}{\partial x_m} \frac{\partial \delta \dot{P}}{\partial x_m} + \left( \frac{\partial P}{\partial x_m} \frac{\partial v_n^s}{\partial x_m} - \frac{\partial P}{\partial x_m} d_{mn} \right) \frac{\partial \delta \dot{P}}{\partial x_m} \right] + \varphi \left( -\frac{\partial v_m^s}{\partial x_n} g_n + \frac{\partial v_n^s}{\partial x_n} g_m \right) \frac{\partial \delta \dot{P}}{\partial x_m} \right\} dV - \\ - \int_{S_H} \left( \dot{H}_n^* \delta \dot{P} + H_n^* \frac{\partial v_n^s}{\partial x_n} \delta \dot{P} \right) dS + \int_V \left[ \beta \frac{\partial P}{\partial t} \delta \dot{P} + \frac{\partial v_m^s}{\partial x_m} \delta \dot{P} + k \left( \psi \frac{\partial P}{\partial x_m} - \varphi g_m \frac{\partial \delta \dot{P}}{\partial x_m} \right) \right] dV - \end{aligned}$$

$$-\int_{S_H} q^* \delta \dot{P} dS = 0,$$

$$\int_V \left\{ c \dot{T} \delta \dot{T} + \left[ T \left( s v_m^s - k \Phi \frac{\partial P}{\partial x_m} + k \chi g_m \right) + \lambda \frac{\partial T}{\partial x_m} \right] \frac{\partial \delta \dot{T}}{\partial x_n} \right\} dV + \int_{S_q} q^* \delta \dot{T} dS = 0.$$

Запишем уравнения состояния пористой упруго-вязко-пластической среды. Тогда девиатор скорости деформаций можно представить в виде

$$d'_{ij} = d_{ij} - \delta_{ij} d_0 = d_{ij} - \delta_{ij} \frac{\dot{\theta}}{3}.$$

Согласно принципу аддитивности деформаций можно записать

$$d_{ij} = d_{ij}^e + d_{ij}^T + d_{ij}^p + d_{ij}^c,$$

где индексы  $e$ ,  $T$ ,  $p$  и  $c$  соответствуют параметрам упругого, температурного, пластического и вязкого состояний. Тогда подобные соотношения можно записать для девиаторной и шаровой частей тензора скоростей деформаций в виде

$$d'_{ij} = d'_{ij}{}^e + d'_{ij}{}^T + d'_{ij}{}^p + d'_{ij}{}^c$$

и

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}^e + \dot{\theta}^T + \dot{\theta}^p + \dot{\theta}^c.$$

Будем считать, что соотношения для шаровых тензоров и девиаторов эффективных напряжений и скоростей деформаций независимы.

В этом случае для упругих деформаций в случае изотропного грунта определяющие соотношения примут вид

$$\dot{\theta}^e = \beta \dot{\sigma}_0^{ef} - \beta_s \left( \dot{P} + v_i^s \frac{\partial P}{\partial x_i} \right), \quad d'_{ij}{}^e = \frac{1}{2G} \dot{\sigma}'_{ij}{}^{ef},$$

где  $G$  – модуль сдвига грунта.

Считая, что при изменении температуры будут изменяться только линейные деформации, для температурных деформаций справедливой будет запись

$$\dot{\theta}^T = \alpha_s \dot{T}, \quad d'_{ij}{}^T = 0,$$

где  $\alpha_s$  – коэффициент теплового расширения.

Для описания вязкого поведения пористой матрицы примем закон Кельвина-Фойгта, тогда для скоростей вязких деформаций можно записать

$$\dot{\theta}^c = \eta_0 \sigma_0^{ef}, \quad d'_{ij}{}^c = \eta \sigma'_{ij}{}^{ef},$$

где  $\eta_0$  и  $\eta$  – соответствующие коэффициенты вязкости.

В процессе моделирования грунтов вводят специальные характеристики прочности [5], которые определяют их несущую способность. К ним относятся: сцепление  $c^*$ , которое характеризует прочность грунтовой среды на срез при отсутствии сжимающих напряжений; угол внутреннего трения  $\varphi^*$ , который характеризует повышение прочности на сдвиг при всестороннем сжатии; коэффициент дилатансии  $\Lambda$ , который характеризует разрыхление или уплотнение грунта при девиаторном нагружении. В этом случае соотношения для скоростей пластических деформаций можно записать в виде

$$\dot{\theta}^p = 2\Lambda(c^* - \sigma_0^{ef} \operatorname{tg} \varphi^*) \dot{\lambda}, \quad d'_{ij}{}^p = \dot{\lambda} \sigma'_{ij}{}^{ef},$$

где  $\Lambda$  – коэффициент дилатансии,  $c^*$  – сцепление,  $\varphi^*$  – угол внутреннего трения.

Условием возникновения предельного состояния будет являться соотношение

$$\sigma_\tau^{ef} = c^* - \sigma_0^{ef} \operatorname{tg} \varphi^*,$$

где

$$2(\sigma_\tau^{ef})^2 = \sigma'_{mn}{}^{ef} \sigma'_{mn}{}^{ef},$$

$\sigma'_{mn}{}^{ef}$  – девиатор тензора эффективных напряжений.

В работе построена система вариационных разрешающих уравнений консолидации грунтовых сред при фильтрации в них нефте-водяной смеси, получена на основе Эйлера подхода к описанию движения. Связь между напряжениями в разных фазах определяется принципом напряжений Терцаги. Закон фильтрации записывается по отношению к разности приведенных скоростей жидкости и скелета грунта в форме Дарси-Герсеванова. Рассмотрен случай квазистатического движения грунтовой среды, когда ускорениями частиц фильтрующей жидкости и скелета грунта можно пренебречь.

## Литература

1. Зарецкий Ю.К. Лекции по современной механике грунтов / Ю.К. Зарецкий. – Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1989. – 607 с.
2. Терцаги К. Теоретическая механика грунтов / К. Терцаги. – М.: Стройиздат, 1961. – 507 с.
3. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидодинамика / В.Н. Николаевский. – М.: Недра, 1996. – 448 с.
4. Цытович Н.А. Механика грунтов / Н.А. Цытович. – М.: Госстройиздат, 1963. – 636 с.
5. Николаевский В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред / В.Н. Николаевский. – М.: Недра, 1984. – 232 с.

## DEVELOPMENT OF THEORETICAL BASES OF PROCESS OF EXTRACTION OF SOLID OIL PRODUCTS AT THERMAL INFLUENCE

L.R. Sekaeva

*The purpose of the real work is development of theoretical bases of modeling of process of the movement in breed of solid hydrocarbons at temperature influence.*

Keywords: mechanics, soil.

УДК 519.61

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

П.А. Стахурская<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [palmira.stahurskaya@gmail.com](mailto:palmira.stahurskaya@gmail.com); Кубанский государственный университет

*В статье обсуждается вычислительная сторона проблемы Коллатца и рассматриваются аспекты, связанные с теорией чисел.*

**Ключевые слова:** теория чисел, экспериментальная математика, пакеты компьютерной алгебры.

Гипотеза Коллатца появилась на свет благодаря венгерскому математику Лотару Коллатцу, от которого и получила своё название.

**Суть данной проблемы.** Имеется любое натуральное число  $n$ . Если оно нечётное, то умножается на 3 и к произведению прибавляется 1, т.е.  $n$  переходит в  $3n + 1$ . Если число чётное, то делится на 2, т.е.  $n$  переходит в  $n/2$ . Далее с новым получившимся числом  $n$  повторяется то же самое.

В ходе предыдущих исследований была написана программа, благодаря которой были вычислены плотности распределения цепочек Коллатца на заданном промежутке. На основе полученных статистических данных были построены графики распределения цепочек Коллатца.

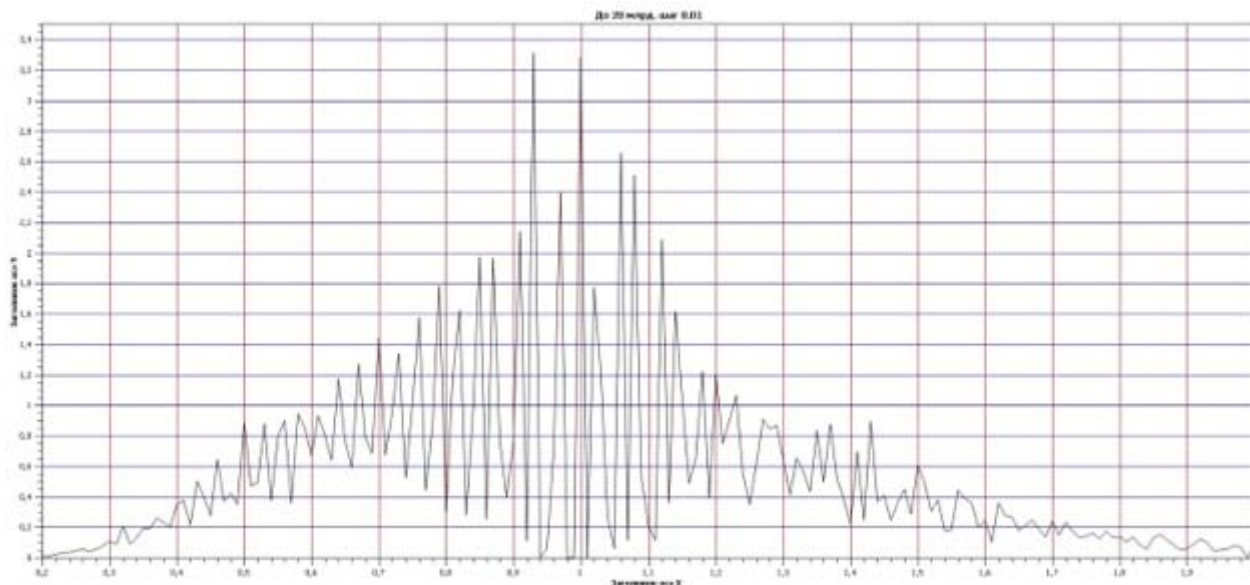


Рис.1: График распределения до 20 млрд.

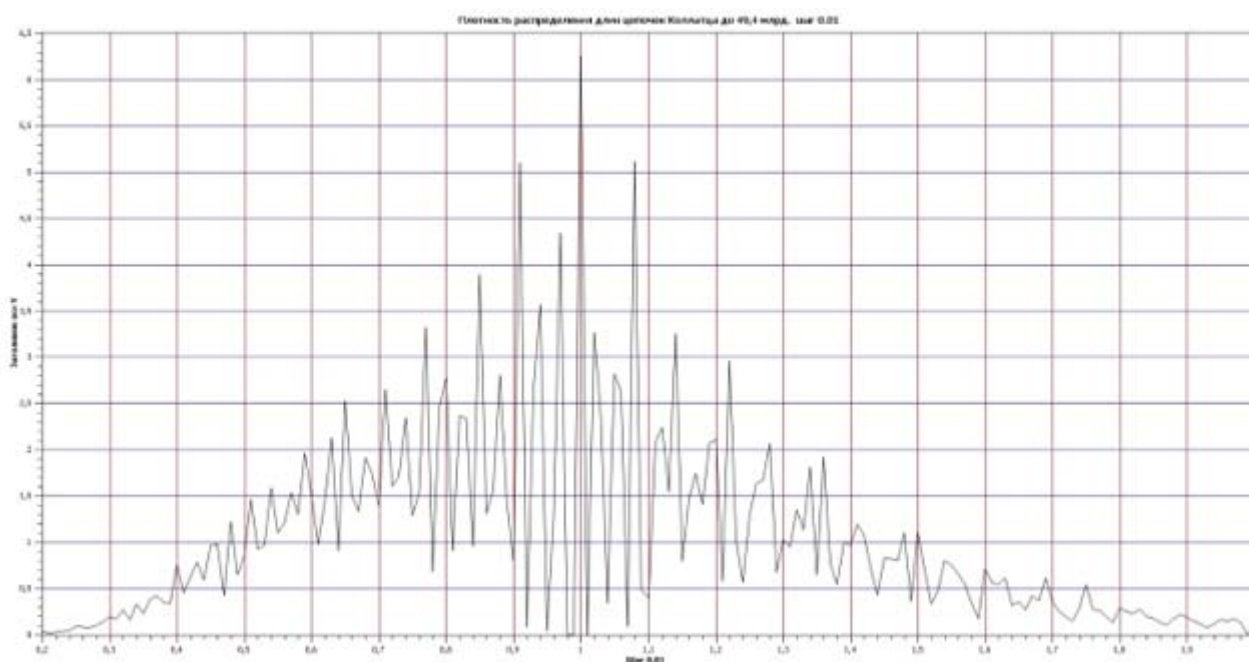


Рис.2: График распределения до 49.4 млрд.

Как видно по графикам, большинство чисел попадают в промежутки около единицы. При этом на графиках наблюдаются существенные скачки, что говорит о случайном распределении чисел.

Также можно заметить, что график очень похож на амплитудную модуляцию в радиотехнике. И самое главное, совершенно неожиданным оказался тот факт, что некоторые длины цепочек Коллатца просто запрещены. Это видно по вероятности, которая либо близка к нулю, либо ноль.

Это, возможно, является новым результатом. Во всяком случае не удалось найти ничего, что намекало бы на такую запредельно неоднородную плотность распределения длин цепочек Коллатца.

Также рассмотрим некоторые леммы. Но прежде, чем их сформулировать, необходимо ввести несколько определений.

**Определение 1.** Множество нечётных чисел обозначим  $N_1$ , а множество чётных чисел, не кратных 3, обозначим как  $N_3$ .

**Определение 2.** Функцию Коллатца обозначим как  $K$ . Нечётному числу  $n$  ставится в соответствие нечётное число  $t$ , которое получено из числа  $3n + 1$  путём деления на максимально возможную степень числа 2.

Таким образом

$$K: N_1 \rightarrow N_1$$

Следуя введённым в этих определениях обозначениям, сформулируем гипотезу Коллатца.

**Гипотеза Коллатца.** Для любого нечётного числа  $t$  найдётся такое натуральное  $n$ , что  $K_n(m) = 1$ .

Теперь можем сформулировать леммы.

**Лемма 1.**  $K(N_1) \subseteq N_3$ .

Эта лемма очевидна, так как первое преобразование  $n \rightarrow 3n + 1$ , поэтому чисел, кратных 3 в образе быть не может.

**Лемма 2.**  $K(N_3) = N_3$ , более того, каждый образ  $t \in N_3$  имеет бесконечно много прообразов в  $N_3$ .

**Доказательство.** Чтобы доказать, что  $K(N_3) = N_3$  нужно проверить, что для любого нечётного числа, не делящегося на 3, найдётся прообраз. Легко заметить, что нечётные числа, не делящиеся на 3, имеют вид  $6b + 1$  или  $6b + 5$ .

*Случай 1.* Ищем прообраз для  $6b + 1$ .

По определению отображения Коллатца, чтобы  $a$  был прообразом, необходимо и достаточно, чтобы

$$3a + 1 = 2^k(6b + 1);$$

$$a = 2^k * 6b + 2^k - 1/3;$$

$$a = 2^k + 1 * b + (2^k - 1)/3.$$

Нужно так подобрать  $k$ , чтобы  $2^k - 1$  делилось на 3.

Пусть  $k > 0$ . Несложно заметить, что  $k$  должно быть чётным.

$$3a + 1 = 4^k(6b + 1);$$

$$a = 2b + 4^k - 1/3.$$

Результат:

$$K^{-1}(6b + 1) = \{a = 2 * 4^k * b + (4^k - 1)/3, k \in N\}.$$

*Случай 2.* Ищем прообраз для  $6b + 5$ .

Чтобы  $a$  был прообразом необходимо и достаточно, чтобы

$$3a + 5 = 2^k(6b + 5);$$

$$a = (2^k * 6b + 2^k * 5 - 5)/3;$$

$$a = 2^k + 1 * b + (2^k * 5 - 5)/3.$$

Нужно подобрать  $k$  так, чтобы  $2^k * 5 - 5$  делилось на 3. Заметим, что  $k$ , так же как и в первом случае, должно быть чётным.

$$3a + 5 = 4^k(6b + 5);$$

$$a = 4^k * 2b + (4^k * 5 - 5)/3.$$

Результат:

$$K^{-1}(6b + 1) = \{a = 4^k * 2b + (4^k * 5 - 5)/3, k \in N\}.$$

**Лемма 3.** Существуют сколь угодно длинные цепочки, подтверждающие гипотезу Коллатца.

Эту лемму можно проиллюстрировать примером. Для любого натурального  $n$  имеет место:

$$K(2n - 1) = 5 * 2^{n-1} - 1, \text{ поэтому длина цепочки до } 1 \text{ не менее, чем } n.$$

Проверим несколько чисел: 5, 16, 87.

$$n = 5 \Rightarrow K(31) = 47;$$

$$n = 16 \Rightarrow K(65535) = 98303;$$

$$n = 87 \Rightarrow$$

$$K(154742504910672534362390527) = 232113757366008801543585791.$$

Чтобы не просчитывать вручную, посчитаем результат в системе компьютерной алгебры GAP.



```

gap> Tr:=function(a)
> local x;
> x:=3*a+1;
> repeat x:=x/2;
> until x mod 2 =1;
> return(x);
> end;
function( a ) ... end
gap> Tr( 31 );
47
gap> Tr( 65535 );
98303
gap> Tr( 154742504910672534362390527 );
232113757366008801543585791
gap> |

```

Рис.3: Результат вычислений в GAP

**Лемма 4.** *Прообраз  $K^{-1}(1)$  бесконечен и состоит из чисел  $(4^k - 1)/3, k \in \mathbb{N}$ .*

**Доказательство.** Основываясь на предыдущей лемме, найти прообраз для  $K^{-1}$  не составляет трудности.

Чтобы  $3a + 1 = 2^k$ ;

$$a = (2^k - 1)/3.$$

Подбираем такие  $k$ , чтобы  $2^k - 1$  делилось на 3. Получаем, что  $k$  должно быть чётным.

$$3a + 1 = 4^k;$$

$$a = (4^k - 1)/3.$$

Результат:

$$K^{-1}(1) = \{a = (4^k - 1)/3, k \in \mathbb{N}\}.$$

**Лемма 5.** *Чётное число делится в среднем на 4.*

**Доказательство.** Все чётные числа делятся на 2, то есть на  $2^1$ , каждое второе чётное число ещё дополнительно на 2, то есть на  $2^2$ , и так далее.

Вычислим средний показатель степени, на который делится чётное число. В итоге мы получаем сумму:

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^m + \dots$$

Заметим, что члены этой суммы являются геометрической прогрессией, тогда вычислим сумму по формуле

$$S = (b_1)/(1 - q), \text{ где } q - \text{знаменатель геометрической прогрессии и равен } 1/2.$$

$$\text{Тогда подставим } S = 1/(1 - 1/2) = 2.$$

$$\text{В итоге получаем: } 1 + 1/2 + 1/4 + \dots = 2.$$

Поэтому, в среднем, после преобразования, исходное число делится на  $2^2$ , то есть на 4.

**Вывод из леммы 5.** В среднем после преобразования Коллатца, исходное число  $m$  умножается на 3 и делится на 4, следовательно, станет равно 1 примерно через  $\log_{4/3}(n)$  шагов. Этот вывод был использован в программе, которая вычисляет плотности распределения длин цепочек, делённых именно на эту величину -  $\log_{4/3}(n)$ .

Все эти исследования стали возможны благодаря моему научному руководителю, профессору Кубанского государственного университета, доктору физико-математических наук Рожкову Александру Викторовичу.

## Литература

1. Рожков А.В. Преподавание математики и информатики в ведущих университетах мира и опыт КубГУ / А.В.Рожков, М.В.Рожкова / Университеты в системе поиска и поддержки математически одаренных детей и молодежи. Материалы I Всероссийской научно-практической конференции. – Майкоп, 2015. – С.116-121.
2. Рожков А.В. Стратегия DPS - Debian-Python-Sage: Проблемно-ориентированные вычислительные среды на открытом коде / А.В.Рожков / Труды V-я Междунар.науч.-практич.конф. «Информационные технологии в образовании и науке» (ИТОН – 2016). – Казань: КФУ, 2016. – С.172-179.

3. Рожков А.В. Экспериментальная (вычислительная) теория чисел / А.В.Рожков, М.В.Рожкова / Новые информационные технологии в образовании и науке: материалы X междунар. науч.-практ. конф. (Екатеринбург, 27 февраля-3 марта 2017г.). // ФГАОУ ВО «Рос. гос. проф.-пед. ун-т». – Екатеринбург, 2017. – С. 413-417.

#### COMPUTING ASPECTS OF THE EXPERIMENTAL THEORY OF NUMBERS

P.A. Stahurskaya

*In article the computing side of the problem of Kollatts is discussed and the aspects connected with the theory of numbers are considered.*

Keywords: theory of numbers, experimental mathematics, packages of computer algebra.

УДК 372.862

#### РАЗРАБОТКА МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ КУРСА ПО ОСНОВАМ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СРЕДСТВАМИ РОБОТОТЕХНИКИ

Р.Ш. Хакова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [reggha@yandex.ru](mailto:reggha@yandex.ru); МБОУ «Школа №4» г. Муравленко, ЯНАО

*В работе представлен разработанный автором практический курс конструирования и программирования роботов, для решения математических задач. Курс предназначен для организации внеурочной деятельности учащихся 5-6 классов по техническому направлению «Образовательная робототехника». Основой концепции курса является идея создания роботов для демонстрации условия и решения математических задач. По мере расширения знаний учащихся возрастает сложность создаваемых роботов и решаемых математических задач.*

**Ключевые слова:** образовательная робототехника, Mindstorms EV3, моделирование, внеурочная деятельность.

В настоящее время робототехника является новым и в то же время эффективным направлением организации внеурочной деятельности школьников. Многие образовательные учреждения имеют комплекты для конструирования и моделирования роботов. Данное направление, в основном, осуществляется через кружковую деятельность. В МБОУ «Школа №4» г. Муравленко во внеурочной деятельности используют образовательные конструкторы Lego Mindstorms EV3. Интерес учащихся к занятиям робототехникой высокий. Методики обучения конструированию и программированию роботов с помощью таких конструкторов широко известны. Созданные модели и их технические характеристики могут служить основой практического решения многих математических задач. Однако существует необходимость в создании новых методических решений в данном направлении.

Целью настоящей работы является создание методических материалов для курса внеурочной деятельности по основам конструирования и программирования роботов и их практического применения для решения математических задач.

Учебный курс рассчитан на учащихся средней школы 5 - 6 классов. В качестве технической базы курса выбрана платформа Lego Mindstorms EV3. При выборе платформы учитывалась возможность развития навыков программирования.

Основой концепции курса является идея создания роботов для демонстрации условия и решения математических задач. По мере расширения знаний учащихся возрастает сложность создаваемых роботов и решаемых математических задач. Результатом цикла занятий является некоторая модель робота, спроектированная учеником самостоятельно, обладающая набором определенных свойств, необходимых для решения определенной математической задачи. С увеличением знаний учащегося, робот усложняется и учится выполнять новые задачи.

Роль учителя направлена на оказание помощи в случае необходимости для дальнейшей реализации проекта.

Важная роль отводится разработке конструкции модели и его частей. Конструкция должна быть построена с учетом необходимости решать определенную задачу. По мере расширения и углубления знаний также возрастает сложность построенной модели и способ программирования

## Литература

1. Образовательная робототехника во внеурочной учебной деятельности: учебно-метод. пособие / Л.П. Перфильева, Т.В. Трапезникова, Е.Л. Шаульская, Ю.А. Выдрина, рук. В.Н. Халамов. — Челябинск: Взгляд, 2011. — 88 с.
2. Шимов И.В. Применение робототехнических устройств в обучении программированию школьников / И.В. Шимов // Педагогическое образование в России, 2013. — № 1. — С.185-188.
3. Образовательная робототехника: учебно-методический комплекс дисциплины / сост. А.С. Соболевский, Э.Ф. Шарипова. — Челябинск: Изд-во Челяб.гос.пед.ун-та, 2014. — 31 с.
4. Григорьев Д.В. Внеурочная деятельность школьников. Методический конструктор: пособие для учителя. / Д.В. Григорьев, П.В. Степанов — М.:Просвещение, 2010. — С.113-132.

### THE DESIGNING OF COURSE TEACHING MATERIALS ON MATHEMATICAL PROBLEMS BY MEANS OF ROBOT DESIGNING

R.S. Khakova

*The author presents a practical course of designing and programming robots designed for solving mathematical problems. The course is designed for the organization of extracurricular activities of students of grades 5-6 in the technical of "educational robotics". The basis of the concept of the course is the idea of creating robots to demonstrate the conditions and solve mathematical problems. With the expansion of knowledge of pupils increases the difficulty of the generated robots and solve mathematical problems.*

Keywords: educational robotics, modeling, extracurricular activities.

УДК 372.862

### РАЗРАБОТКА МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ К РАЗДЕЛУ «РОБОТ В ЛАБИРИНТЕ» ДЛЯ КУРСА РОБОТОТЕХНИКИ

З.Р. Харисова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> zemfirahariso@yandex.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*Целью работы является разработка комплекса учебно-методических материалов для решения задач, связанных с прохождением лабиринта роботом на платформе LEGO MINDSTORMS EV3. Комплекс предназначен для сопровождения занятий по образовательной робототехнике. В рамках комплекса изучается правило «правой руки», а также использование одометрии для прохождения лабиринта.*

**Ключевые слова:** образовательная робототехника, методические материалы, Lego Mindstorms EV3, Small Basic, правило правой руки, одометрия.

В настоящее время образовательная робототехника завоевывает все более прочные позиции в системе образования. Вместе с активным развитием образовательной робототехники растет и потребность в новых методических решениях, кроме того, в настоящее время наблюдается необходимость в подготовке квалифицированных специалистов в этой области.

Целью работы является разработка комплекса учебно-методических материалов для изучения раздела «Робот в лабиринте». Комплекс предназначен для сопровождения занятий по робототехнике в школах и кружках робототехники, также комплекс может быть использован для самостоятельной подготовки к участию в соревнованиях по робототехнике.

В рамках комплекса рассматриваются алгоритмы прохождения лабиринта роботом на платформе LEGO MINDSTORMS EV3. Для программирования робота используется язык Small Basic [1].

Первая часть комплекса посвящена реализации прохождения роботом лабиринта по правилу «правой руки» [1]. Для прохождения лабиринта по правилу «правой руки», требуется установить два датчика расстояния: первый датчик будет направлен вправо для контроля наличия стены справа, второй будет направлен вперед для контроля наличия стены спереди, с помощью него робот сможет выбраться из тупика. Конец лабиринта обозначен красной линией, ориентируясь на нее, робот будет понимать, что цель достигнута.

Вторая часть комплекса посвящена использованию одометрии в решении задачи прохождения лабиринта. Необходимость использования данного метода обусловлена тем, что правило «правой руки» не является достаточно эффективным методом прохождения лабиринта. Алгоритм прохождения лабиринта в данном случае заключается в задании координатной плоскости на лабиринте и разбиении пути прохождения на вектора, длину которых робот должен рассчитывать сам, используя свое текущее местоположение.

Комплекс оформлен в виде набора интерактивных учебных материалов, включающих в себя необходимые теоретические сведения, инструкции по сборке, примеры программ, наборы задач и решения к ним, справочные материалы.

## Литература

1. EV3 Basic [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://sites.google.com/site/ev3basic/>
2. Филиппов С.А. Робототехника для детей и родителей / С.А. Филиппов. – СПб.: Наука, 2013. – 319 с.

### DEVELOPMENT OF EDUCATIONAL MATERIALS "ROBOT IN THE MAZE" FOR THE COURSE OF ROBOTICS

Z.R. Harisov

*The aim of the work is to develop a set of educational materials associated with the section "Robot in the Maze" for robots on the LEGO MINDSTORMS EV3 platform. The complex is designed to accompany classes in educational robotics. The rule of the right hand and the use of odometry for the passage of the maze are considered.*

Keywords: educational robotics, teaching materials, Lego Mindstorms EV3, Small Basic, right hand rule, odometry.

УДК 517.958

### УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В MAPLE: НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, ПОЛУЧЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ И ЕГО АНИМАЦИЯ В MAPLE

З.Р. Харисова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [zemfiraharisova@yandex.ru](mailto:zemfiraharisova@yandex.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*В статье рассматриваются начально-краевые условия для уравнения параболического типа и анимация общего решения в СКМ Maple.*

**Ключевые слова:** уравнения математической физики, уравнения параболического типа, СКМ Maple, уравнение теплопроводности.

#### 1. Уравнение теплопроводности

Уравнения с частными производными 2-ого порядка наиболее часто встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии. Простейшее уравнение параболического типа

$$u_{xx} - u_y = 0 (y = a^x t)$$

обычно называют уравнением теплопроводности.

#### 2. Постановка краевых задач

Для выделения единственного решения уравнения теплопроводности необходимо к уравнению присоединить начальные и граничные условия. Начальное условие состоит лишь в задании значений функции  $u(x, t)$  в начальный момент  $t_0$ .

Граничные условия могут быть различны в зависимости от температурного режима на границах. Рассматриваются три основных типа граничных условий.

*Первый тип граничных условий*

На конце стержня  $x = 0$  задана температура:

$$u(0, t) = \mu(t),$$

где  $\mu(t)$  - функция, заданная на некотором промежутке  $t_0 \leq t \leq T$ , причем  $T$  есть промежуток времени, в течение которого изучается процесс.

*Второй тип граничных условий*

На конце стержня  $x = l$  задана температура:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(l, t) = v(t).$$

К этому условию мы приходим, если задана величина теплового потока  $Q(l, t)$ , протекающего через торцевое сечение стержня,

$$Q(l, t) = -k \frac{\partial}{\partial x} u(l, t)$$

откуда  $\frac{\partial}{\partial x} u(l, t) = v(t)$ , где  $v(t)$  - известная функция, выражающаяся через заданный поток  $Q(l, t)$  по формуле

$$v(t) = -\frac{Q(l, t)}{k}$$

*Третий тип граничных условий*

На конце стержня  $x = l$  задано линейное соотношение между производной и функцией

$$\frac{\partial}{\partial x} u(l, t) = -\lambda (u(l, t) - \theta(t)).$$

Это граничное условие соответствует теплообмену по закону Ньютона на поверхности тела с окружающей средой, температура которой  $\theta$  известна. Пользуясь двумя выражениями для теплового потока, вытекающего через сечение  $x = l$ ,

$$Q = h(u - \theta)$$

и

$$Q = -k \frac{\partial}{\partial x} u$$

получаем математическую формулировку третьего граничного условия в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} u(l, t) = -\lambda (u(l, t) - \theta(t)),$$

где  $\lambda = \frac{h}{k}$  - коэффициент теплообмена,  $\theta(t)$  - некоторая заданная функция. Для конца  $x = 0$  стержня  $(0, l)$  третье граничное условие имеет вид

$$u(x, 0) = \phi(x), 0 \leq x \leq l,$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), u(l, t) = \mu_2(t), 0 \leq t \leq T.$$

*Первая краевая задача*

Первая краевая задача состоит в отыскании решения  $u = u(x, t)$  уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

при

$$0 < x < l, 0 < t \leq T,$$

удовлетворяющего условиям

$$u(x, 0) = \phi(x), 0 \leq x \leq l,$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), u(l, t) = \mu_2(t), 0 \leq t \leq T,$$

где  $\phi(x)$ ,  $\mu_1(t)$  и  $\mu_2(t)$  - заданные функции.

**Алгоритм нахождения общего решения первой краевой задачи с ненулевыми граничными условиями**

1. Имеем уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial}{\partial t} u - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0$$

с граничными условиями

$$u(x, 0) = \phi(x), 0 \leq x \leq l,$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), u(l, t) = \mu_2(t), 0 \leq t \leq T.$$

2. Непосредственно метод Фурье не применим из-за неоднородности условий  $u(0, t) = \mu_1(t)$  и  $u(l, t) = \mu_2(t)$ . Введем новую неизвестную функцию  $V(x, t)$ , такую что

$$V(x, 0) = \phi(x), V(0, t) = 0, V(l, t) = 0.$$

Получим

$$V(x, t) = u(x, t) - \mu_1(t) - \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)).$$

Отсюда

$$u(x, t) = V(x, t) + \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)). \quad (1)$$

3. Задача преобразуется в следующую: найти функцию  $V(x, t)$  удовлетворяющую условиям:

$$\frac{\partial}{\partial t} V - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} V = 0, \quad (2)$$

$$V(x, 0) = \phi(x), V(0, t) = 0, V(l, t) = 0.$$

Будем искать решение задачи в виде:

$$V(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad (3)$$

4. Подставляя (3) в уравнение (2), получим :

$$X \cdot \frac{\partial}{\partial t} T = a^2 \cdot T \cdot \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} X \right),$$

преобразуем

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T_t}{T} = \frac{X_{xx}}{X}.$$

Левая часть последнего равенства не зависит от  $x$ , а правая – от  $t$ , следовательно, оба эти отношения могут быть только постоянной величиной, причем отрицательной, иначе получим тривиальные решения, т.е.

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T_t}{T} = \frac{X_{xx}}{X} = -\lambda^2.$$

5. Для  $X$  получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} X + \lambda^2 \cdot X = 0,$$

причем

$$X(0) = X(l) = 0.$$

Следовательно,

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l},$$

отсюда

$$X_k = A_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right).$$

6. Для  $T$  получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} T + a^2 \cdot \lambda_k^2 \cdot T = 0,$$

отсюда

$$T_k(t) = C_k e^{-\frac{ak\pi t}{l}}.$$

7.

$$V(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) e^{-\frac{ak\pi t}{l}}$$

8. Обратимся к начальному условию  $V(x, 0) = \phi(x)$ . Получим

$$V(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \cdot e^{-(\frac{ak\pi}{l}) \cdot 0} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) = \phi(x), \text{ т.е.}$$

т.е.  $\alpha_k$  - коэффициенты Фурье функции  $\phi(x)$ .

$$\alpha_k = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(\xi) \sin\left(\frac{k\pi \xi}{l}\right) d\xi$$

Таким образом,

$$V(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) e^{-\frac{ak\pi t}{l}} \cdot \frac{2}{l} \int_0^l \phi(\xi) \sin\left(\frac{k\pi \xi}{l}\right) d\xi$$

9. Подставим найденное значение в (1):

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) e^{-\frac{ak\pi t}{l}} \cdot \frac{2}{l} \int_0^l \phi(\xi) \cdot \sin\left(\frac{k\pi \xi}{l}\right) d\xi + \mu_1(t) + \frac{x}{l} (\mu_2(t) - \mu_1(t)).$$

### Общее решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности

>restart;

with(inttrans):

Введем с помощью команды *alias* сокращенные обозначения для образа (U) и прообраза (u) искомой функции температуры:

>alias(u=u(x,t),U=U(k,t)):

Запишем уравнение теплопроводности:

>Eq0:=diff(u,t)-c^2\*diff(u,x\$2)=0;

Выделим левую часть уравнения теплопроводности:

>Eq:=lhs(Eq0);

и найдем фурье-образ по переменной  $x$  этого выражения:

```
>Eq_F:=subs(fourier(u,x,k)=U,fourier(Eq,x,k));
```

Решим это уравнение относительно фурье-образа  $U$ :

```
>UU:=dsolve(Eq_F,U);
```

Здесь  $F_1(k)$  - произвольная пока функция. Так как при  $t = 0$   $U(k,0) = F_1(k)$ , - отсюда следует, что  $F_1(k)$  - фурье образ начального распределения температуры,  $F(k)$ :

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-I k x} dx$$

Поэтому подставим в полученный фурье-образ эту величину:

```
>SU:=subs(_F1(k)=F(k),UU);
```

и определим обратное преобразование Фурье:

```
>Su:=u=invfourier(rhs(SU),k,x);
```

и конвертируя полученное выражение в интеграл для получения явной записи:

```
>convert(Su,int);
```

Запишем теперь выражение для Фурье-образа функции  $u(x,0)$ :

```
>assume(c>0):assume(k>0):assume(t>0):
```

```
>F1(k):=int(f(xi)*exp(-I*xi*k),xi=-infinity..infinity);
```

Подставим теперь это значение в интеграл  $Su$ :

```
>SSu:=convert(subs(F(k)=F1(k),Su),int);
```

Вычислим интеграл по переменной  $k$ :

```
>Int_k:=int(exp(-I*xi*k)*exp(-c^2*k^2*t)*exp(k*x*I),
k = -infinity .. infinity);
```

Таким образом, получим окончательно:

```
>SSSu:=u=simplify(1/(2*Pi)*
int(f(xi)*Int_k,xi=-infinity..infinity));
```

### Процедура решения первой краевой задачи методом Фурье

```
>restart:
```

```
>solve_eq:=proc(m1,m2,a,l,phi)
```

```
local v,u:
```

```
if m1=0 and m2=0 then
```

```
u:=sum(sin((k*Pi*x)/l)*exp(-t*((a*k*Pi)/l))^2/l*int(phi*sin((k*Pi*x)/l),x=0..l),k=1..infinity):
```

```
else
```

```
v:=sum(sin((k*Pi*x)/l)*exp(-t*((a*k*Pi)/l))^2/l*int(phi*sin((k*Pi*x)/l),x=0..l),k=1..infinity):
```

```
u:=v+m1+x/l*(m2-m1):
```

```
end if:
```

```
end proc:
```

```
>m1:=0:
```

```
m2:=0:
```

```
a:=6:
```

```
l:=1:
```

```
phi:=x^2:
```

```
solve_eq(m1,m2,a,l,phi);
```



*Краевое условие, выражающее уравнение теплового баланса*

Пусть на конце  $x = 0$  стержня помещена сосредоточенная теплоемкость  $C_1$  (например, тело с большей теплопроводностью, вследствие чего температуру по всему объему этого тела можно считать постоянной) и происходит теплообмен с внешней средой по закону Ньютона. Тогда краевое условие при  $x = 0$  (выражающее уравнение теплового баланса) будет иметь вид

$$C_1 \frac{\partial}{\partial t} u = k \frac{\partial}{\partial x} u - h(u - u_0),$$

где  $u_0$  - температура внешней среды. Это условие содержит производную  $\frac{\partial}{\partial t} u$  (или  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u$ , если учесть уравнение  $u_t = a^2 u_{xx}$ ).

*Краевая задача в неоднородной среде*

Если среда неоднородна и коэффициенты уравнения являются разрывными функциями, то промежуток  $(0, l)$ , в котором ищется решение задачи, разбивается точками разрыва коэффициентов на несколько частей, внутри которых функция  $u$  удовлетворяет уравнению теплопроводности, а на границах - условиям сопряжения.

В простейшем случае эти условия заключаются в непрерывности теплового потока

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t),$$

$$k(x_i - 0) \frac{\partial}{\partial x} u(x_i - 0, t) = k(x_i + 0) \frac{\partial}{\partial x} u(x_i + 0, t),$$

где  $x_i$  - точка разрыва коэффициентов.

*Предельный случай (вырождение) основных краевых задач*

### **Задача Коши о распределении температуры на бесконечной прямой**

Рассмотрим процесс теплопроводности в очень длинном стержне. В течение небольшого промежутка времени влияние температурного режима, заданного на границе, в центральной части стержня сказывается весьма слабо, и температура на этом участке определяется в основном лишь лишь начальным распределением температуры. В этом случае точный учет длины стержня не имеет значения, так как изменение длины стержня не окажет существенного влияния на температуру интересующего нас участка; в задачах подобного типа обычно считают, что стержень имеет бесконечную длину. Таким образом ставится задача с начальными условиями (задача Коши) о распределении температуры на бесконечной прямой:

найти решение уравнения теплопроводности в области  $-\infty < x < +\infty$  и  $t \geq t_0$ , удовлетворяющее условию

$$u(x, t_0) = \phi(x) (-\infty < x < +\infty)$$

где  $\phi(x)$  - заданная функция.

### **Задача Коши для полубесконечного стержня**

Если участок стержня, температура которого нас интересует, находится вблизи одного конца и далеко от другого, то в этом случае температура практически определяется температурным режимом близкого конца и начальными условиями. В задачах подобного типа обычно считают, что стержень полу бесконечен, и координата отсчитываемая от конца, меняется в пределах  $0 < x < +\infty$ . В качестве примера приведем формулировку первой краевой задачи для полубесконечного стержня:

найти решение уравнения теплопроводности в области  $0 < x < +\infty$  и  $t \geq t_0$ , удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} u(x, t_0) = \phi(x) (-\infty < x < +\infty), \\ u(0, t) = \mu(t) (t \geq t_0), \end{cases}$$

где  $\phi(x)$  и  $\mu(t)$  - заданные функции.

### Краевая задача без начальных условий

Влияние начальных условий при распространении температуры по стержню ослабевает с течением времени. Если интересующий нас момент достаточно удален от начального, то температура стержня практически определяется граничными условиями, так как изменение начальных условий не изменило бы температурного состояния стержня в пределах точности наблюдения. В этом случае практически можно считать, что опыт продолжался бесконечно долго, и начальные условия тем самым отпадают.

Таким образом, мы приходим к краевым задачам без начальных условий, когда ищется решение уравнения теплопроводности для  $0 \leq x \leq l$  и  $-\infty < t$ , удовлетворяющее условиям

$$u(0, t) = \mu_1(t),$$

$$u(l, t) = \mu_2(t).$$

### 3. Визуализация (Задача об остывании ограниченного стержня)

#### Формулировка задачи

Сформулируем задачу об остывании ограниченного стержня длиной  $l$ :

Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  температура стержня была распределена по закону:  $u(x, 0) = \phi(x)$ . Концы стержня приложены к термостату и на них поддерживается постоянная, например, нулевая, температура. Требуется найти распределение температуры по стержню в каждый момент времени, т.е., решить уравнение теплопроводности.

#### Алгоритм решения задачи об остывании ограниченного стержня методом Фурье

1. Имеем уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial}{\partial t} u - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u(x, 0) = \phi(x), 0 \leq x \leq l,$$

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0.$$

2. Будем искать решение задачи в виде:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (2)$$

3. Подставляя (2) в уравнение (1), получим :

$$X \cdot \frac{\partial}{\partial t} T = a^2 \cdot T \cdot \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} X \right),$$

преобразуем

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T_t}{T} = \frac{X_{xx}}{X}.$$

Левая часть последнего равенства не зависит от  $x$ , а правая – от  $t$ , следовательно, оба эти отношения могут быть только постоянной величиной, причем отрицательной, иначе получим тривиальные решения, т.е.

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T_t}{T} = \frac{X_{xx}}{X} = -\lambda^2.$$

4. Для  $X$  получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} X + \lambda^2 \cdot X = 0,$$

причем

$$X(0) = X(l) = 0.$$

Следовательно,

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l},$$

отсюда

$$X_k = A_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right).$$

5. Для  $T$  получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} T + a^2 \cdot \lambda_k^2 \cdot T = 0,$$

отсюда

$$T_k(t) = C_k e^{-\frac{ak\pi t}{l}}.$$

6.

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) e^{-\frac{ak\pi t}{l}}$$

7. Обратимся к начальному условию  $u(x, 0) = \phi(x)$ . Получим

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \cdot e^{-(\frac{ak\pi}{l}) \cdot 0} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) = \phi(x), \text{ т.е.}$$

т.е.  $\alpha_k$  - коэффициенты Фурье функции  $\phi(x)$ .

$$\alpha_k = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(\xi) \sin\left(\frac{k\pi \xi}{l}\right) d\xi$$

Таким образом,

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) e^{-\frac{ak\pi t}{l}} \cdot \frac{2}{l} \int_0^l \phi(\xi) \sin\left(\frac{k\pi \xi}{l}\right) d\xi$$

*Постановка задачи*

```
>restart;
with(plots):
with(plottools):
>assume(l>0);
>eq:=diff(u(x,t),t)-a^2*diff(u(x,t),x$2)=0;
0<x,x<l,t>0;
```

с начальными условиями (initial conditions - начальные условия):

```
>init_c:=u(x,0)=phi(x);
```

и граничными условиями (boundary conditions - граничные условия)

```
>bound_c:=u(0,t)=0,u(l,t)=0;
```

*Разделение переменных*

Будем решать задачу методом разделения переменных с помощью команды *pdsolve*:

```
>sol:=pdsolve(eq,HINT='*');
```

Выпишем эти уравнения отдельно, извлекая их из полученной системы с помощью команды *op*:

```
>Eq_0:=op(1,sol);
Eq_1:=op(2,sol);
Eq_t:=op(1,Eq_1[1]);
Eq_x:=op(2,Eq_1[1]);
```

Таким образом, мы получили два обыкновенных дифференциальных уравнения.

Сформулируем теперь для них соответствующую задачу Штурма-Лиувилля:

Чтобы привести уравнения к стандартной форме, заменим в них константу разделения  $c_1$  на  $-\lambda$ , находим общее решение этих уравнений и сформируем систему линейных однородных алгебраических уравнений по граничным условиям (как известно, в случаях, когда правая часть уравнений равна нулю, эту правую часть в пакете Maple можно опускать):

```
>subs(_c[1]=-lambda, Eq_x);
EQ_x:=lhs(%)-rhs(%)
```

Поскольку, как известно, для обеспечения ограниченности решений, необходимо, чтобы константа разделения была положительной ( $\lambda > 0$ ), полагаем:

```
>assume(lambda>0);
>sol_x:=dsolve(EQ_x, _F1(x));
```

*Граничные условия и собственные функции*

Для задания граничных условий используем команду *unapply(expr, x, y, ...)* - задания функции пользователя:

```
>_F1:=unapply(rhs(sol_x), x);
e1:=_F1(0)=0;
e2:=_F1(l)=0;
bound_s:={e1, e2};
```

Решим систему граничных условий относительно констант  $C_1, C_2$ . Поскольку - это система однородных алгебраических уравнений, для ее нетривиального решения необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы обращался в нуль, что дает условие на константу разделения. Итак, матрица системы равна:

```
>A:=linalg[genmatrix](bound_s, {_C1, _C2});
```

Определитель этой матрицы равен:

```
>Delta:=linalg[det](A);
```

Для нахождения всех решений уравнения  $\delta(\lambda) = 0$  используем опцию: *EnvAllSolutions:= true*:

```
>_EnvAllSolutions:=true;
Lambda0:=solve(Delta=0, lambda);
```

С помощью  $Z$  в Maple обозначаются произвольные целые числа. Для удобства пользования произведем здесь замену  $Z_1 \rightarrow k$ :

```
>Lambda:=subs(_Z1='k', Lambda0);
```

и введем пользовательскую функцию:

```
>ev:=unapply(Lambda, 'k');
```

Хотя можно и непосредственно определить константы  $C_1$  и  $C_2$  и затем подставить их и найденные значения  $\lambda$  в полученное решение, методически проще найти его заново из уравнения  $EQ_x$ , куда необходимо подставить найденные константы разделения:

```
>_F1:='_F1';
assume(k, posint);
```

(учли, что  $k$ -положительное число)

```
>EQ_X:=subs(lambda=ev(k), EQ_x)=0;
```

Решаем полученное уравнение с граничными условиями:

```
>X_k:=dsolve({EQ_X,_F1(0)=0,_F1(L)=0},_F1(x));
>X_k;
>X:=(K,C,X)->subs({k=K,_C1=C,x=X},rhs(X_k));
>X(p,2,xi);
```

Это и есть система собственных функций уравнения теплопроводности с данными граничными условиями. По теории эта система функций автоматически ортогональна на заданном отрезке. Но ее необходимо сделать ортонормированной, чтобы по этой системе функций можно было разложить произвольную функцию. Нормируем эти функции: сначала найдем нормировочный множитель, он равен:

$$\sqrt{\int Xk^2 dx}$$

```
>Int_Xk2:=int(X(k,C,x)^2,x=0..L);
>Coef:=simplify(sqrt(Int_Xk2),radical,symbolic);
```

Таким образом, получим ортонормированную систему собственных функций  $\Xi(x, k)$  на отрезке  $[0, l]$ , т.е.,

$$(\Xi(x, k), \Xi(x, m)) = \int_0^1 \Xi(x, k) \Xi(x, m) dx = \delta_{km}.$$

```
>Xi:=(x,k)->X(k,C,x)/Coef;
Xi(x,k);
>simplify(int(Xi(x,k)*Xi(x,2),x=0..L));
```

### Временные функции

Найдем теперь общее решение временного дифференциального уравнения, куда необходимо подставить найденные константы разделения.

```
>EQ_t:=subs(_c[1]=-Lambda,Eq_t);
>T:=(t,k)->subs(_C1=C(k),dsolve(EQ_t,_F2(t)));
T(t,k);
```

### Общее решение

Общее решение исходной задачи ищем в виде ряда частных решений (значение  $k = 0$  исключаем, так как решению с  $k = 0$  соответствует  $\Xi(x, 0) = Const$ , которое не удовлетворяет граничным условиям).

```
>Gen_u:=sum(Xi(x,k)*rhs(T(t,k)),k=0..infinity);
```

Согласно общей теории коэффициенты,  $C(k)$ , этого ряда определяются по формуле:

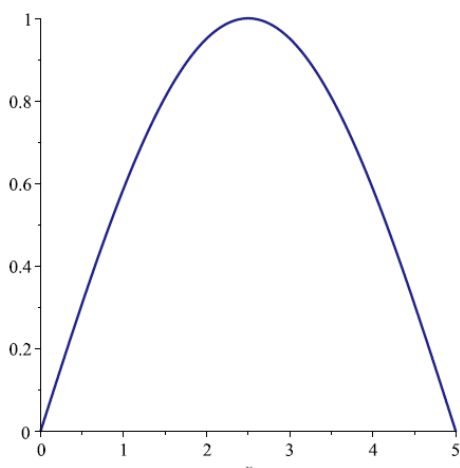
$$C(k) = \int_0^1 \phi(x) \Xi(x, k) dx.$$

Таким образом:

```
>C0:=(k)->int(phi(x)*Xi(x,k),x=0..L);
C:=(k)->value(C0(k));
```

Зададим конкретную функцию  $\phi(x)$  в виде синусоиды:

```
>phi1:=(x)->sin(Pi*x/L);
phi1(x);
L:=5;
G0:=plot(subs(L=L_,phi1(x)),x=0..L_,color=navy,thickness=2);
```



```
>C01:=(k)->subs(phi(x)=phi1(x),C0(k));
C01(k);
>C1(k):=value(C01(k));
```

Подставим найденные значения коэффициентов в общую формулу:

```
>u1:=(x,t)->subs(C(k)=C1(k),Gen_u);
u1(x,t);
```

Таким образом, мы получили решение поставленной задачи. Преобразуем несколько полученное решение, учитывая, что вклад в сумму дают лишь нечетные значения  $k$ . Поэтому положим  $k = 2j + 1$  (где  $j$  - целое число, *integer*):

```
>um:=(x,t)->subs(k=2*j+1,op(1,u1(x,t)));
um(x,t); assume(j, integer);
```

Упростим это выражение:

```
>uj:=(X,T,j,A,L)->subs({a=A,l=L,t=T,x=X},simplify(subs(((−1)^(2*j+1)−1)=
−2,um(x,t)),trig));
uj(xi,tau,j,a,l);
>U:=(x,t,a,l)->evalf(sum(uj(x,t,j,a,l),j=0..infinity));
U(1,tau,alpha,lambdа);
>U(1,1,1,10);
```

*Числовое решение и анимация*

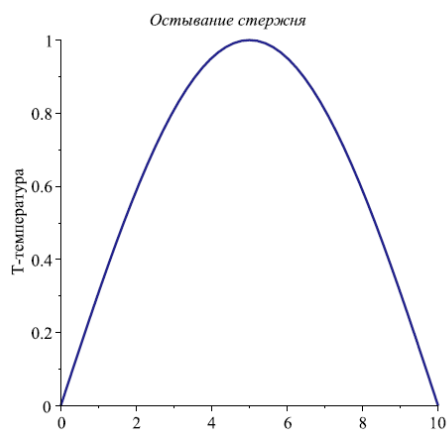
Ограничим суммирование в точном решении до  $j = 20$ :

```
>U1_p:=(x,t,a,l)->evalf(sum(uj(x,t,j,a,l),j = 0 .. 20),6);
U1_p(xi,tau,a,l)
```

Построим теперь анимированную модель процесса остывания ограниченного стержня:

```
>plots[animate](U1_p(x,t,1/2,10),x=0..10,t=0..200,color=NAVY,
thickness=2,frames=64,title='Остывание стержня', labels=['x','T-температура'],
labeldirections=[HORIZONTAL,VERTICAL]);
```

```
>GG:=proc(a,l,T,N) local k,FF,dt,UU,UP,tt:
UP:=(X,T)->evalf(subs({x=X,t=T},U1_p(x,t,a,l)))/maximize(sin(Pi*x/l_),3):
dt:=T/N:tt:=(k)->evalf(k*dt,3):
UU:=(y,k)->evalf(UP(y,tt(k),a,l),3):
```

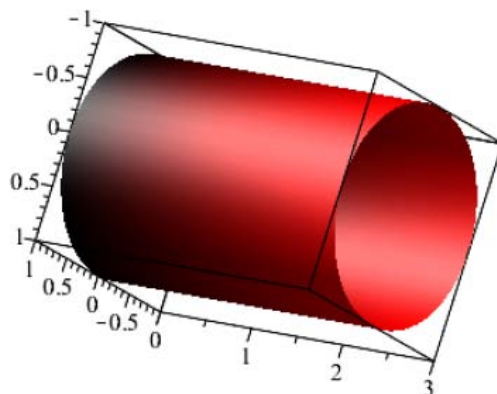


```

FF:=(k)->plot3d([cos(phi),y,sin(phi)],y=0..3,phi=0..2*Pi,
color=COLOR(RGB,UU(y,k),0,0),scaling=CONSTRAINED,
style=patchnogrid,title=convert(t=tt(k),string)):
plots[display](seq(FF(k),k=0..N),insequence=true):
end proc:
>GG(0.5,10,70,24);

```

t = 0.



## Литература

1. Горюнов А.Ф. Уравнения математической физики в примерах и задачах: Учебное пособие / А.Ф. Горюнов. – Часть 1. – М.: МИФИ, 2008. – 616 с.
2. Свешников А.Г. Лекции по математической физике: Учеб. пособие / А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов. – М.: Изд-во МГУ, 1993. – 352 с.
3. Сочнева В.А. Введение в математическую физику: Методическое пособие / В.А. Сочнева. – Казань: Казанский университет. – 2014. – 75 с.
4. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
5. Чупров И.Ф. Уравнения параболического типа и некоторые методы их решения: Учеб. пособие / И.Ф. Чупров, Е.А. Канева. – Ухта: УГТУ, 2012. – 103 с.

PARABOLIC EQUATIONS IN MAPLE: INITIAL-BOUNDARY CONDITIONS FOR A PARABOLIC EQUATION,  
OBTAINING A GENERAL SOLUTION AND ITS ANIMATION IN MAPLE

Z.R. Kharisova

*The article discusses the initial-boundary conditions for the equation of parabolic type and the animation of the general solution in the SCM Maple.*

Keywords: equations of mathematical physics, parabolic equations, SCM Maple, heat equation.

УДК 517.958

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В MAPLE: МЕТОД ФУРЬЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ  
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, АНИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ

Ю.М. Хрисанова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *hrisanovayulia@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*В статье рассматривается решение уравнения параболического типа методом Фурье, его анимация и применение в СКМ Maple.*

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения, уравнения параболического типа, метод Фурье, визуализация.

## 1. Общие формулы

*Уравнения параболического типа*

Дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка называется соотношение между неизвестной функцией  $u(x, y)$ , её частными производными до второго порядка включительно и независимыми переменными  $x$  и  $y$ .

Уравнение называется линейным, если оно линейно как относительно старших производных  $u_{xx}$ ,  $u_{xy}$ ,  $u_{yy}$ , так и относительно функции  $u$  и ее первых производных  $u_x$ ,  $u_y$ :

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0$$

,где  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$ , ...,  $c$ ,  $f$  являются функциями только от  $x$  и  $y$ .

Рассмотрим уравнение вида

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (1)$$

,чтобы определить классификацию уравнений мат физики. Уравнение  $a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0$  называется характеристическим для уравнения (1). Решая его, получаем два уравнения (характеристики):

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \quad (2)$$

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения (1): Уравнение вида (2) будем называть в точке  $M$  уравнением

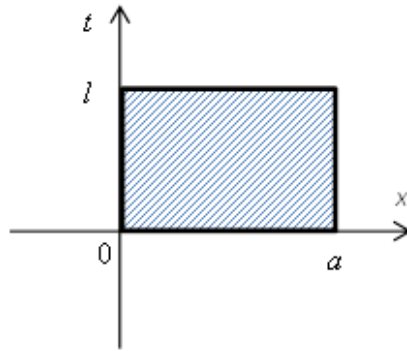
гиперболического типа, если в точке  $M$   $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ ,

эллиптического типа, если в точке  $M$   $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ ,

параболического типа, если в точке  $M$   $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ .

В различных точках области определения уравнение может принадлежать различным типам. Для уравнений параболического типа характеристики действительны и совпадают между собой.





### Постановка задачи об охлаждении пластины

Пусть  $u(x, y, t)$  – температура прямоугольной пластины толщиной  $a$  и высотой  $l$  в точке  $x$  в момент времени  $t$ . И пусть в начальный момент времени  $t = 0$  температура распределена по закону:  $u(x, y, 0) = f(x, y)$

Необходимо исследовать процесс остывания пластины при условии, что стенки поддерживаются при нулевой температуре, т.е., зависимость  $T(x, t)$ .

Процессы переноса тепла описываются так называемым уравнением теплопроводности, которое является уравнением параболического типа и в одномерном случае имеет вид:

$$\Delta u - \frac{c\rho du}{kdt} = 0, 0 < x < a, t > 0 \quad (1)$$

С математической точки зрения исследование процесса остывания прямоугольной пластины сводится к решению первой краевой задачи для уравнения параболического типа с нулевыми условиями концах пластины, т.е., к решению уравнения теплопроводности с начальным условием:  $u(x, y, 0) = f(x, y)$  и нулевыми граничными условиями:

$$u(0, y, t) = f(a, y, t) = 0$$

$$u(x, 0, t) = f(x, l, t) = 0$$

, где  $f(x, y)$  – любая интегрируемая на бесконечном интервале заданная функция, удовлетворяющая условиям  $f(0, y) = f(a, y) = f(x, 0) = f(x, l)$ . Первая краевая задача. Первая краевая задача состоит в отыскании решения  $u = u(x, t)$  уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < a, t_0 \leq t$$

Удовлетворяющего условиям

$$u(x, t_0) = \varphi(x), 0 < x < a$$

$$u(0, t) = \mu(t), t \geq t_0,$$

, где  $\varphi(x)$   $\mu(t)$  – заданные функции.

Решение уравнения методом Фурье. Прежде чем решать уравнение (1) при начальном условии  $u(x, y, 0) = f(x, y)$ , мы несколько упростим задачу, введя вместо времени  $t$  новую переменную  $\tau = \frac{kt}{c\rho}$ , где  $k$  – коэффициент теплопроводности,  $c$  – удельная теплоёмкость,  $\rho$  – удельная плотность материала стержня.

Тогда уравнение теплопроводности примет вид:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} - \frac{du}{d\tau} = 0, 0 < x < a, 0 < y < l, 0 < \tau$$

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} \quad (2)$$

, не зависящее от физических свойств пластины. Начальное условие примет вид:  $u(x, y, 0 = f(x, y)$ , при  $\tau = 0$

Поиск частных решений уравнения

Необходимо найти частные решения уравнения (2), имеющие вид  $X(x)Y(y)T(\tau)$ . Подставляя это произведение вместо  $u$  в уравнение (2), получим:

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad (3)$$

где обе части уравнения должны быть постоянными, поскольку его левая часть не зависит от  $x, y$ , а правая - от  $t$ , т.е. ни левая, ни правая части не могут зависеть ни от  $x, y$ , ни от  $\tau$ .

Обозначим:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\mu$$

В силу граничных условий будем иметь также  $X(0) = 0, X(a) = 0, Y(0) = Y(l) = 0$ .

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$X'' + \lambda X = 0, X(0) = 0, X(a) = 0. \quad (4)$$

Нас интересует нетривиальное решение, поэтому

$$X(x) = A_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + B_1 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

А также задачу

$$Y'' + \mu Y = 0, Y(0) = 0, Y(l) = 0. \quad (5)$$

Нас интересует нетривиальное решение, поэтому

$$Y(y) = A_2 \cos(\sqrt{\mu}y) + B_2 \sin(\sqrt{\mu}y)$$

Из граничных условий находим

$$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0, X(a) = 0 \Rightarrow B \sin(\sqrt{\lambda}a) = 0$$

Считая, что  $B \neq 0$ , имеем  $\sin(\sqrt{\lambda}a) = 0$  (аналогично  $\sin(\sqrt{\mu}l) = 0$ ). Откуда находим собственные значения задач (4,5):

$$\lambda_k = \frac{k\pi^2}{a^2}, k = 1, 2, \dots (k \in N)$$

$$\mu_n = \frac{n\pi^2}{l^2}, n = 1, 2, \dots (n \in N)$$

Собственными функциями задач (4,5) будут следующие функции, которые определяются с точностью до постоянного множителя:

$$X_k(x) = B_k \sin\left(\frac{\pi k x}{a}\right), k = 1, 2, \dots$$

$$Y_n(y) = B_n \sin\left(\frac{\pi n y}{l}\right), n = 1, 2, \dots$$

При  $\lambda = 0, \mu = 0$  получаем тривиальное решение уравнения (4,5).

Рассмотрим теперь второе уравнение

$$T + \left(\frac{k\pi}{a} + \frac{n\pi}{l}\right)^2 T = 0 \quad (6)$$

Общий интеграл уравнения (6) примет вид:  $T_{nk}(\tau) = C_{nk} e^{-\left(\frac{k\pi}{a} + \frac{n\pi}{l}\right)^2 \tau}$

Таким образом, получили бесконечное множество частных решений исходного уравнения:

$$u = u_{kn} = M_{kn} e^{-\left(\frac{k\pi}{a} + \frac{n\pi}{l}\right)^2 \tau} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi k y}{a}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Каждое из этих решений удовлетворяет исходному уравнению (2) и граничным условиям, не удовлетворяет начальному условию (3.1)

Воспользуемся принципом суперпозиции и составим формальный ряд:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_{kn} \right), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < l \quad (7)$$

Основываясь на теории рядов Фурье и допуская, что  $\phi$ -я  $f(x, y)$  разлагается в ряд Фурье, можно записать:

$$M_{kn} = \frac{4}{al} \int_0^l \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi k}{a} y\right) dx dy$$

## 2. Программа

### Постановка задачи

Сформулируем задачу об остывании прямоугольной пластины длиной  $l$  и высотой  $m$ . Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  температура пластины была распределена по закону  $u(x, y, 0) = \phi(x, y)$ .

Концы пластины приложены к термостату и на них поддерживается постоянная, например, нулевая, температура. Требуется найти распределение температуры по пластине в каждый момент времени, т.е., решить уравнение теплопроводности:

```
> restart;
> assume(l>0, m>0):
> eq:=diff(u(x,y,t),t)-a^2*(diff(u(x,y,t),x$2)+diff(u(x,y,t),y$2))=0;
0<x,x<l, 0<y,y<m, t>0:
```

с начальными условиями (initial conditions - начальные условия):

```
> init_c:=(x,y)->u(x,y,0)=phi(x):
```

и граничными условиями (boundary conditions - граничные условия)

```
> bound_c:=u(0,y,t)=0, u(l,y,t)=0, u(x,0,t)=0, u(x,m,t)=0:
```

### Разделение переменных

Будем решать задачу методом разделения переменных с помощью команды `pdsolve(PDE, f, HINT, INTEGRATE, build)`, где PDE - уравнение в частных производных, (опция) уравнение вида (hint-рекомендация, подсказка) HINT = argument, где аргумент есть '+', '\*\*', для какого-либо алгебраического выражения, или 'strip' для ввода пользовательской рекомендации. Мы используем алгебраический hint

```
> sol:=pdsolve(eq, HINT='*');
```

Этот ответ должен быть прочитан следующим образом: Решение  $sol$  равно  $_F1(x)_F2(y)_F3(t)$ , где функции  $_F1(x)$ ,  $_F2(y)$  и  $_F3(t)$  удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{d^2}{dx^2} _F1(x) = -c1\_F1(x)$$

$$\frac{d^2}{dy^2} _F2(y) = -c2\_F2(y)$$

$$\frac{d}{dt}F3(t) = a^2_{c1}F3(t) + a^2_{c2}F3(t)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  - константы разделения.

Выпишем эти уравнения отдельно, извлекая их из полученной системы с помощью команды `оп`:

```
>Eq_0:=op(1, sol);
Eq_1:=op(2, sol);
```

и извлечем полученные уравнения из-под двойных скобок:

```
>Eq_t:=op(1, Eq_1[1]);
Eq_x:=op(2, Eq_1[1]);
Eq_y:=op(3, Eq_1[1]);
```

Таким образом, мы получили два обыкновенных дифференциальных уравнения. Сформулируем теперь для них соответствующую задачу Штурма-Лиувилля: чтобы привести уравнения к стандартной форме, заменим в них константы разделения  $c_1$  на  $\lambda$ ,  $c_2$  на  $\mu$ , находим общее решение этих уравнений и сформируем систему линейных однородных алгебраических уравнений по граничным условиям (как известно, в случаях, когда правая часть уравнений равна нулю, эту правую часть в пакете Maple можно опускать):

```
>subs(_c[1]=-lambda, Eq_x);
EQ_x:=lhs(%)-rhs(%);
>subs(_c[2]=-mu, Eq_y);
EQ_y:=lhs(%)-rhs(%);
```

Поскольку, как известно, для обеспечения ограниченности решений, необходимо, чтобы константы разделения были положительными ( $\lambda > 0, \mu > 0$ ), полагаем:

```
>assume(lambda>0):
assume(mu>0):
>sol_x:=dsolve(EQ_x, _F1(x));
sol_y:=dsolve(EQ_y, _F2(y));
```

#### *Граничные условия и собственные функции*

Для задания граничных условий используем команду `unapply(expr,x,y,..)`- задания функции пользователя:

```
>_F1:=unapply(rhs(sol_x), x);
e1:=_F1(0)=0;
e2:=_F1(l)=0;
bound_s:={e1, e2};
>_F2:=unapply(rhs(sol_y), y);
e3:=_F2(0)=0;
e4:=_F2(m)=0;
bound_s1:={e3, e4};
```

Решим систему граничных условий относительно констант  $C_1, C_2$ . Поскольку - это система однородных алгебраических уравнений, для ее нетривиального решения необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы обращался в нуль, что дает условие на константу разделения. Итак, матрица системы равна:

```
>A:=linalg[genmatrix](bound_s, {_C1, _C2});
>B:=linalg[genmatrix](bound_s1, {_C1, _C2});
```

Определители этих матриц равны:

```
>Delta:=linalg[det](A);
>Delta2:=linalg[det](B);
```

Для нахождения всех решений уравнения  $\Delta\lambda = 0$  используем опцию: `EnvAllSolutions:=true`:

```
>_EnvAllSolutions:=true;
Lambda0:=solve(Delta=0,lambda);
>_EnvAllSolutions:=true;
Mu0:=solve(Delta2=0,mu);
```

С помощью `_Z` в Maple обозначаются произвольные целые числа. Для удобства пользования произведем здесь замену `_Z1 -> k`:

```
>Lambda:=(L,K)->subs(l=L,_Z1=K,Lambda0);
>Lambda(l,k);
>Mu:=(M,N)->subs(m=M,_Z2=N,Mu0);
>Mu(4,5);
```

и введем пользовательскую функцию:

```
>ev:=unapply(Lambda(l,k),'k','l');
>ev2:=unapply(Mu(m,n),'n','m');
>ev2(n,m);
ev(k,l);
```

Хотя можно и непосредственно определить константы `_C1` и `_C2` и затем подставить их и найденные значения  $\lambda$  и  $\mu$  в полученное решение, методически проще найти его заново из уравнений  $EQ_x, EQ_y$ , куда необходимо подставить найденные константы разделения:

```
>_F1:='_F1';
_F2:='_F2';
assume(k,posint);
assume(n,posint);
>EQ_Y:=subs(mu=ev2(n,m),EQ_y)=0;
```

(учли, что  $k, n$ -положительные числа)

```
>EQ_X:=subs(lambda=ev(k,l),EQ_x)=0;
```

Решаем полученное уравнение с граничными условиями:

```
>X_k:=dsolve({EQ_X,_F1(0)=0,_F1(L)=0},_F1(x));
>X:=(K,C,X,L)->subs({k=K,_C1=C,x=X,l=L},rhs(X_k));
>X(p,2,xi,10);
>Y_k:=dsolve({EQ_Y,_F2(0)=0,_F2(m)=0},_F2(y));
>Y_k(10,3);
>Y:=(N,C,Y,M)->subs({n=N,_C1=C,y=Y,m=M},rhs(Y_k));
>Y(p,2,xi,5);
```

Это и есть система собственных функций уравнения теплопроводности с данными граничными условиями. По теории эта система функций автоматически ортогональна на заданном отрезке. Но ее необходимо сделать ортонормированной, чтобы по этой системе функций можно было разложить произвольную функцию. Нормируем эти функции. Сначала найдем нормировочный множитель, он равен:

$$\sqrt{\int X_k^2 dx}$$

```
>Int_Xk2:=int(X(k,C,x,l)^2,x=0..l);
>Coef1:=(c,L)->subs(l=L,C=c,simplify(sqrt(Int_Xk2),radical,symbolic));
>Coef1(5,6);
>Int_Yk2:=int(Y(n,C,y,m)^2,y=0..m);
>Coef2:=(c,M)->subs(m=M,C=c,simplify(sqrt(Int_Yk2),radical,symbolic));
>Coef2(3,5);
```

Таким образом, получим ортонормированную систему собственных функций  $\Xi(x, k)$ ,  $Yi(y, m)$  на отрезке  $[0, l]$ ,  $[0, m]$  т.е.

$$\Xi(x, k), Yi(y, m) = \int_0^m \int_0^l \Xi(x, k) Yi(y, m) dx dy = \delta_{km}$$

```
>Xi:=(x,k,l)->(X(k,C,x,l)/Coef1(C,l));
Xi(x,k,l);
>Xi(4,5,1);
Xi(7,4,3);
>Yi:=(y,n,m)->(Y(n,C,y,m)/Coef2(C,m));
Yi(x,k,l);
>Yi(3,10,3);
```

### Временные функции

Найдем теперь общее решение временного дифференциального уравнения, куда необходимо подставить найденные константы разделения.

```
>Eq_t;
>EQ_t:=(t,c1,c2)->subs(_c[1]=-Lambda(l,k),_c[2]=-Mu(m,n),Eq_t);
>dsolve(EQ_t(t,k,n),_F3(t));
>T:=(Tau,K,N,M,L,A)->subs({t=Tau,k=K,n=N,m=M,l=L,a=A,_C1=C(k,n,m,l)},
dsolve(EQ_t(t,k,n),_F3(t)));
>#T:=(Tau,K,N,M,L)->subs({t=Tau,k=K,n=N,m=M,l=L},rhs(T));
>T(t,1,2,5,1,a);
```

### Общее решение

Общее решение исходной задачи ищем в виде ряда частных решений (значение  $k = 0, n = 0$ ) исключаем, так как решению с  $k = 0$  соответствует  $\Xi(x, 0) = Const, Yi(y, 0) = Const$ , которое не удовлетворяет граничным условиям.

```
> Gen_u:=(Tau,K,N,M,L,A)->subs({t=Tau,k=K,n=N,m=M,l=L,a=A},
sum((sum(Xi(x,k,l)*rhs(T(t,k,n,m,l,a))*Yi(y,n,m),
k=1..infinity)),n=1..infinity));
>Gen_u(t,k,n,m,l,a);
>Gen_u(t,k,n,3,4,3);
```

Согласно общей теории коэффициенты,  $C(k)$ , этого ряда определяются по формуле:

$$C(k, n) = \int_0^m \int_0^l \phi(x) \Xi(x, k) Yi(y, m) dx$$

Таким образом:

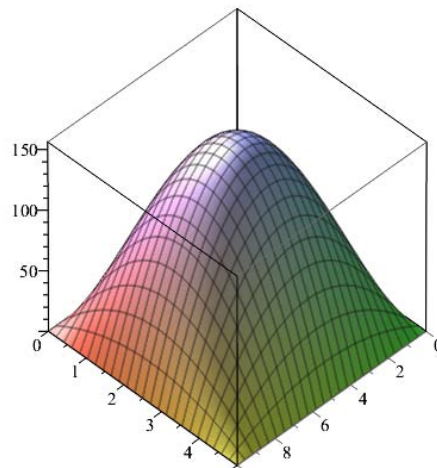
```
>Xi(10,5,3);
>P:=(K,N,M,L)->subs({k=K,n=N,m=M,l=L},Int((Int(phi(x,y)*Xi(x,k,l)
*Yi(y,n,m),x=0..l)),y=0..m));
C0:=(K,N,M,L)->subs({k=K,n=N,m=M,l=L},P(K,N,M,L));
C:=(K,N,M,L)->subs({k=K,n=N,m=M,l=L},value(C0(k,n,m,L)));
>C0(k,n,4,3);
>C(k,n,2,5);
```

Зададим конкретную функцию  $\phi(x, y)$  в виде параболоида:

```

>#l:=10:#длина пластины
#m:=5:#высота пластины
a:=9:#коэффициент диф. уравнения
phi1:=(X,Y)->subs(x=X,y=Y,x*(10-x)*y*(5-y));
phi1(x,y);
G0:=plot3d(phi1(x,y),x=0..10,y=0..5,thickness=2);
plot3d(phi1(x,y),x=0..10,y=0..5,thickness=2);

```



```

>C01:=(K,N,M,L)->subs({k=K,n=N,m=M,l=L},subs({phi(x,y)=
phi1(x,y)},C0(k,n,m,l)));
>C01(k,n,5,10);
>C1:=(k,n,m,l)->value(C01(k,n,m,l));
>C1(k,n,5,10);

```

Подставим найденные значения коэффициентов в общую формулу:

```

>u1:=(t,k,n)->subs(C(k,n,5,10)=C1(k,n,5,10),
Gen_u(t,k,n,5,10,9));
>u1(t,k,n);
>uj:=(X,T,Y,j,i)->subs({t=T,x=X,y=Y},simplify(subs({(-1)^(2*j+1)=-1,
(-1)^(2*i+1)=-1},um2(t,x,y)),trig));
>uj(xi,tau,yi,j,i);
>U:=(t,x,y)->evalf(sum(sum(uj(x,t,y,j,i),j=0..20),i=0..20));

```

Таким образом, мы получили решение поставленной задачи.

### 3. Визуализация

Построим теперь анимационную модель решений. Для этого заменим точное решение приближенным, ограничиваясь первыми сорока членами ряда:

```

>U1_p:=(t,x,y)->evalf((sum(sum(uj(x,t,y,j,i),j=0..20),i=0..20)),6);
>U1_p(1,2,2);

```

$$4.06552 \times 10^{-18}$$

```

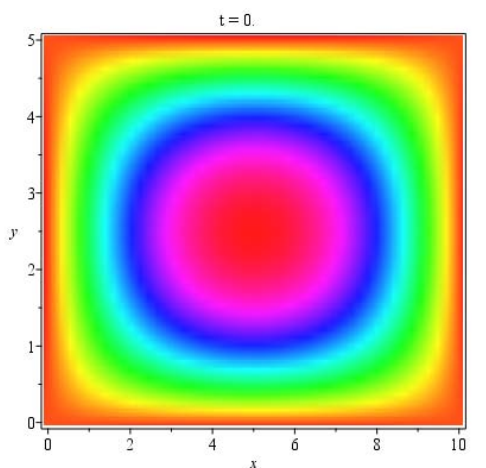
>plots[animate3d](U1_p(t,x,y),x=0..10,y=0..5,t=0..2,color=NAVY,
thickness=2,frames=32,orientation=[90,150]);
>cinema:=proc(T,N) local d,i,tt,uu,cadr:
>d:=evalf(T/N,3):

```

```

>tt:=(i)->evalf(d*i,3):
>uu:=(i)->U1_p(tt(i),x,y):
>cadr:=(i)->plots[densityplot](uu(i), x = 0 .. 10, y = 0 .. 5,
axes = boxed, colorstyle = HUE,title=convert(t=tt(i),string),
style=PATCHNOGRID):
>plots[display](seq(cadr(i),i=0..N),insequence=true):
>end proc:
cinema(1,12);

```



## Литература

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
2. Араманович И.Г. Уравнения математической физики / И.Г. Араманович, В.И. Левин. – М.: Наука, 1964. – 288 с.
3. Арсенин В.Я. Математическая физика / В.Я. Арсенин – М.: Наука, 1966. – 367 с.
4. Костецкая Г.С. Методы математической физики. Уравнение теплопроводности: Учебное пособие / Г.С. Костецкая, Т.Н. Радченко. – 2016.
5. Мартинсон Л.К. Дифференциальные уравнения математической физики / Л.К. Мартинсон, Ю.И. Малов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 368 с.

## PARABOLIC EQUATIONS IN MAPLE: FOURIER METHOD FOR SOLVING PARABOLIC TYPE EQUATIONS, SOLUTION ANIMATION

Y.M.Khrisanova

*The article discusses the solution of the parabolic type equation by the Fourier method, its animation and its use in CKM Maple.*

Keywords: differential equations, parabolic equations, Fourier method, visualization.



УДК 519.872

## СУММАРНОЕ КОЛИЧЕСТВО ЗАЯВОК В СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ СРЕДНИМ ВРЕМЕНЕМ ПРЕБЫВАНИЯ ЗАЯВКИ В ОЧЕРЕДИ

Чан Куанг Куи<sup>1</sup>, А.П. Кирпичников<sup>2</sup><sup>1</sup> *tranquanguy88@gmail.com*; Казанский национальный исследовательский технологический университет<sup>2</sup> *kirpichnikov@kstu.ru*; Казанский национальный исследовательский технологический университет

*Представлена математическая модель открытой многоканальной системы массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания заявки в очереди и вычислено среднее число заявок, одновременно находящихся в системе.*

**Ключевые слова:** система массового обслуживания, поток требований, очередь, обслуживающее устройство.

В работах [1-4] рассмотрена система массового обслуживания (СМО), в которой на каждую заявку, находящуюся в очереди, действует своего рода «поток уходов» с интенсивностью  $\nu = 1/\bar{t}$ . Интенсивность обслуживания заявки в системе при этом обозначается как  $\mu$ , а интенсивность поступающего в систему потока заявок как  $\lambda$ . В работе [1] рассмотрен такой вариант постановки задачи, в котором так называемые «нетерпеливые» заявки покидают очередь лишь до достижения некоторого фиксированного значения длины очереди. Это значение в дальнейших расчётах мы будем обозначать буквой  $E$ . После того, как перед требованием, находящимся в очереди на обслуживание, осталось  $E$  заявок, требования перестают покидать очередь и в любом случае дожидаются начала обслуживания. В этом случае приведённая интенсивность потока поступающих в систему заявок равна  $\rho = \lambda/\mu$ . Физический смысл этой величины заключается, очевидно, в том, что она показывает, какое число заявок в среднем поступило в систему за среднее время обслуживания в системе одной заявки.

В работах [1, 2] были впервые получены формулы для вероятностных характеристик системы массового обслуживания такого рода, в частности, для вероятности полного простоя системы  $p_0$ , для вероятностей стационарных состояний системы и вероятности ожидания обслуживания вновь поступившей в систему заявкой, то есть вероятности того, что поступающее требование найдет все каналы занятыми (вне зависимости от того, будет оно дожидаться обслуживания или нет). Эта вероятность определяется формулой

$$p_{\text{ожид}} = \frac{\rho^m p_0}{(m-1)!(m-\rho)} \left[ 1 - \left(\frac{\rho}{m}\right)^E \right] + \frac{\rho^{m+E-1} p_0}{(m-1)!m^E} [\Gamma(m/\beta) E_1(\alpha; m/\beta) - 1].$$

В этом соотношении  $\beta = \nu/\mu$  – приведённая интенсивность ухода «нетерпеливых» заявок из очереди – величина, которая показывает, сколько в среднем заявок покидает систему необслуженными за среднее время обслуживания системой одной заявки.

При малых значениях параметра  $\beta$ , имеет место разложение

$$p_{\text{ожид}} \approx p_{\text{ожид}}(0) \left\{ 1 - \left(\frac{\rho}{m}\right)^E \left[ \frac{\rho}{(m-\rho)^2} \beta - \frac{\rho(m+2\rho)}{(m-\rho)^4} \beta^2 \right] \right\}.$$

В данной, завершающей работе этого цикла публикаций, находятся статистические характеристики для общего количества требований, одновременно находящихся в системе массового обслуживания данного типа. То есть находятся во-первых, среднее количество требований, одновременно находящихся в системе в целом, и во-вторых, дисперсию общего числа заявок системе.

Ясно, что общее количество заявок в системе массового обслуживания открытого типа складывается из заявок (требований), находящихся в обслуживающем устройстве и заявок (требований), находящихся в очереди в ожидании начала обслуживания. В этом случае среднее количество требований в системе в целом с учётом формул, полученных в работах [3-4] определяется выражением

$$\begin{aligned} \bar{k} = \bar{m} + \bar{l} &= \rho - (m-\rho) [p_{\text{ожид}}(0) - p_{\text{ожид}}] + \\ &+ \frac{\rho p_{\text{ожид}}(0)}{m-\rho} \left[ 1 - \left(\frac{\rho}{m}\right)^E \right] + \left(\frac{m-\rho}{\beta} - E\right) [p_{\text{ожид}}(0) - p_{\text{ожид}}] = \\ &= \rho + \frac{\rho p_{\text{ожид}}(0)}{m-\rho} \left[ 1 - \left(\frac{\rho}{m}\right)^E \right] + \left[ \frac{1-\beta}{\beta} (m-\rho) - E \right] [p_{\text{ожид}}(0) - p_{\text{ожид}}]. \end{aligned}$$

В первом предельном случае, при  $E = 0$ , отсюда, очевидно, следует известное соотношение [5, 6]:

$$\bar{k} = \bar{m} + \bar{l} = \rho + \frac{1-\beta}{\beta}(m-\rho)[p_{\text{ожид}}(0) - p_{\text{ожид}}] = \rho + (1-\beta)\bar{l}.$$

Во втором предельном случае, при  $\beta \rightarrow 0$ , в согласии с разложением (7), имеем

$$\bar{k} \approx \rho + \frac{\rho p_{\text{ожид}}(0)}{m-\rho} \left\{ 1 - \frac{1}{m-\rho} \left( \frac{\rho}{m} \right)^E \left( m - \rho + \frac{m+2\rho}{m-\rho} + E \right) \beta \right\},$$

откуда при  $\beta = 0$ , как и следовало ожидать, вытекает формула [5, 6]:

$$\bar{k} = \bar{m} + \bar{l} = \rho + \bar{l} = \rho + \frac{\rho p_{\text{ожид}}}{m-\rho} = \frac{\rho(m-\rho + p_{\text{ожид}})}{m-\rho}$$

(модель M/M/m). Соответственно второй центральный момент общего числа заявок в системе имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_k^2 = \sigma_m^2 + \sigma_l^2 + 2K_{ml} = \rho - \rho p_{\text{ожид}} - (m - \bar{m})(\rho - \bar{m} - 2\bar{l}) + \\ + \frac{\rho p_{\text{ожид}}(0)}{(m-\rho)^2} \left\{ m + \rho - \left( \frac{\rho}{m} \right)^E [m + \rho + E(m-\rho)] \right\} + \frac{\rho p_{\text{ожид}} - (m-\rho)\bar{l}}{\beta} \left( 1 - \frac{E}{m-\rho} \beta \right) - \bar{l}^2. \end{aligned}$$

В первом предельном случае, при  $E = 0$ , как и должно быть, отсюда, имеем соотношение

$$\sigma_k^2 = \rho - \rho p_{\text{ожид}} - (2 + \beta)(m - \bar{m})\bar{l} + \frac{\rho p_{\text{ожид}} - (m-\rho)\bar{l}}{\beta} - \bar{l}^2.$$

Во втором предельном случае, используя асимптотику [2], несложно образом можно показать, что при значении параметра  $\beta$  формула переходит в соответствующее соотношение модели без «нетерпеливых» заявок (по классификации Дж. Кендалла – модель M/M/m), при этом

$$K_{ml} = (m - \rho)\bar{l}(0) = \rho p_{\text{ожид}}(0);$$

$$\sigma_k^2 = \rho + \rho p_{\text{ожид}} + \frac{(m + \rho)\bar{l}(0)}{m - \rho} - \bar{l}(0)^2.$$

## Литература

1. А.П. Кирпичников Вероятностные характеристики открытой многоканальной системы массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания в очереди / А.П. Кирпичников, Нгуен Тхань Банг, Чан Куанг Куи // Вестник Казанского технологического университета. – 2016. – Т. 19. - № 8. – С. 123-126.
2. А.П. Кирпичников Вероятность ожидания начала обслуживания в системе массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания заявки в очереди / А.П. Кирпичников, Нгуен Тхань Банг, Чан Куанг Куи // Вестник Казанского технологического университета. – 2016. – Т. 19. - № 21. – С. 144-147.
3. А.П. Кирпичников Расчёт коэффициента загрузки системы массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания заявки в очереди / А.П. Кирпичников, Нгуен Тхань Банг, Чан Куанг Куи // Вестник Казанского технологического университета. – 2017. – Т. 20. - № 2. – С. 88-92.
4. А.П. Кирпичников, Прикладная теория массового обслуживания. – Казань: Изд-во Казанского гос. университета, 2008. – 112 с.
5. А.П. Кирпичников, Методы прикладной теории массового обслуживания. – Казань: Изд-во Казанского университета, 2011. – 200 с.

AVERAGE NUMBER OF REQUESTS IN THE QUEUING SYSTEM WITH BOUNDED MEAN RESIDENCE TIME IN THE QUEUE

Tran Quang Quy, A.P. Kirpichnikov

*Presented the mathematical model of multi-channel queuing system of open type with bounded mean residence time in the queue and calculated average number of requests currently queued for service.*

Keywords: queuing system, flow of requirements, queue, serving device.

УДК 372.862

**ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ПРОЕКТ «БАЛАНСИРУЮЩИЙ РОБОТ»**Э.В. Чеботарева<sup>1</sup>, Р.Н. Абдрахманова<sup>2</sup><sup>1</sup> elvchb@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет<sup>2</sup> abd\_railya.94@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В работе приводится описание образовательного проекта, целью которого является создание балансирующего робота на базе платформы Arduino Uno. В ходе выполнения проекта учащиеся знакомятся с такими датчиками как гироскоп и акселерометр, изучают принцип работы шагового двигателя. Материалы предназначены для преподавателей робототехники в детских образовательных учреждениях.*

**Ключевые слова:** образовательная робототехника, балансирующий робот, платформа Arduino.

В условиях интенсивного развития образовательной робототехники сохраняется необходимость в разработке методических материалов для образовательных проектов учащихся, занимающихся робототехникой.

Результатом настоящей работы является разработка учебно-методических материалов для сопровождения проектной деятельности учащихся по направлению «Робототехника». Целью проекта является создание командой учащихся робота, который балансируя на двух колесах сохраняет положение неустойчивого равновесия, а также способен передвигаться.

Учебно методические материалы поделены на несколько разделов. Первый раздел «Теория» представит фундаментальную теоретическую основу проекта и включает в себя следующие темы: самобалансирующие устройства и их применение; обратный маятник; принцип работы гироскопа; принцип работы акселерометра; устройство и принцип работы шаговых двигателей; фильтрация показаний датчиков; ПИД-регулятор.

Следующий раздел «Электроника» включает в себя темы: подключение гироскопа к контроллеру Arduino Uno; получение данных гироскопа; подключение акселерометра к контроллеру Arduino Uno; получение данных акселерометра; подключение шаговых двигателей к контроллеру Arduino Uno; управление шаговыми двигателями; подключение Bluetooth модуля к контроллеру Arduino Uno; дистанционное управление с помощью Bluetooth. В этом разделе представлены схемы и пояснения к работе с электронными компонентами робота, а также базовые примеры программ для работы с электронными составляющими робота.

Третий раздел «Программирование» содержит следующие темы: фильтрация показаний акселерометра; реализация ПИД-регулятора; балансирование на месте; движение вперед. В данном разделе представлены примеры программ, пояснения к работе с необходимыми библиотеками, алгоритмы и блок-схемы. Используя сведения, представленные в данном разделе, учащиеся смогут создать программу, реализующую работу балансирующего робота.

Четвертый раздел «Моделирование и дизайн» содержит материалы и инструкции по темам: 3D-моделирование; 3D-печать; лазерная резка. Сведения представленные в этом разделе помогут учащимся спроектировать и построить детали корпуса робота.

Материалы предназначены для преподавателей робототехники в школах и учреждениях дополнительного образования, а также подходят для самостоятельной работы учащихся.

**Литература**

1. Филиппов С.А. Робототехника для детей и родителей / С.А. Филиппов. – СПб.: Наука, 2013. – 319 с.
2. Warren J.D. Arduino Robotics / J.D. Warren, J Adams, H. Molle. – New York: Apress, 2011. – 628 p.
3. Pan T. Designing Embedded Systems with Arduino. A Fundamental Technology for Makers / T. Pan, Y. Zhu. – Singapore: Springer Verlag, 2017. – 228 p.

EDUCATIONAL PROJECT "BALANCING ROBOT"

E.V. Chebotareva, R.N. Abdrahmanova

*The paper describes the educational project, the purpose of which is to create a balancing robot based on the Arduino Uno*

platform. In the course of the project, students are introduced to such sensors as a gyroscope and an accelerometer, and they study the principle of operation of a stepper motor. The materials are intended for teachers of robotics in educational organizations.

Keywords: educational robotics, balancing robot, Arduino platform.

УДК 517.958

## УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В MAPLE: МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ В MAPLE

Н.А. Чугунова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> chugunova.nata@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В статье излагаются основные принципы метода разделения переменных решение краевых задач для уравнений в частных производных. Приведены примеры решения.

**Ключевые слова:** уравнения гиперболического типа, СКМ Maple.

### 1. Уравнение гиперболического типа

Семейства  $\varphi(x, y) = const$  и  $\psi(x, y) = const$  можно рассматривать как общие интегралы уравнения

$A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2 = 0$  - эти уравнение распадается на два уравнения

$$(1) y' = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \text{ и } (2) y' = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

Правые части (1) и (2) действительны и различны.

Следовательно, согласно указанной теореме, функции

$$z = \varphi(x, y) \text{ и } z = \psi(x, y)$$

являются решениями уравнения в частных производных

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 2B\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + C\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Функции  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  линейно независимы.

Поэтому, возвращаясь к уравнению

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0, \text{ мы можем в нем сделать замену переменных по}$$

формулам  $\xi = \varphi(x, y)$  и  $\eta = \psi(x, y)$ .

Так как функции  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  удовлетворяют уравнению  $A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2 = 0$ , то в результате этой замены переменных окажется  $\bar{A} = 0$  и  $\bar{C} = 0$ . Следовательно, уравнение  $A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0$  преобразуется к виду:

$$2\bar{B}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \Phi(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0, \text{ или, после деление на } 2\bar{B} \text{ и переноса в другую часть равенства к виду:}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \bar{\Phi}(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) \quad (1)$$

представляет собой канонической формой уравнения гиперболического типа.

Иногда пользуются другой канонической формой уравнения гиперболического типа. Сделаем в уравнении 1 замену переменных по закону  $\xi = t + \tau$  и  $\eta = t - \tau$  где  $t, \tau$  - новые переменные.

В результате этого преобразования уравнение 1 примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \bar{\Phi}, \text{ где } \bar{\Phi} = 4\bar{\Phi}.$$

### 2. Постановка задачи для свободных колебаний конечной струны

Рассмотрим свободные колебания конечной струны. Для этого решается однородное уравнение  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = a^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x))$  с начальными условиями  $u(0, x) = F(x)$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} u(0, x) = f(x)$  и граничными условиями (струна закреплена с двух сторон)  $u(t, 0) = 0$ ,  $u(t, L) = 0$ . Здесь  $u(t, x)$ - функция, описывающая

отклонение струны от положения равновесия,  $L$  - длина струны,  $F(x)$  - начальное положение струны,  $f(x)$  - начальное колебание струны.

*Программа*

```
> restart;
```

Однородное уравнение и его решение методом разделения переменных :

```
> PDE:=diff(u(t,x),t,t)=a^2*diff(u(t,x),x,x);
```

```
> struc:=pdsolve(PDE,HINT=T(t)*X(x));
```

```
> dsolve(diff(T(t),'$(t,2))=_c[1]*T(t));
```

```
> dsolve(diff(X(x),'$(x,2))=_c[1]*X(x)/a^2);
```

Сделаем замену постоянной разделения переменных:  $c1 = -\lambda^2$

```
> dsolve(diff(T(t),'$(t,2)) = -lambda^2*T(t));
```

```
> dsolve(diff(X(x),'$(x,2)) = -lambda^2*X(x)/a^2);
```

Второе уравнение решим, учитывая первое граничное условие:  $X(0) = 0$

```
> dsolve({diff(X(x),'$(x,2)) = -lambda^2*X(x)/a^2, X(0)=0}, X(x));
```

Теперь учтем второе граничное условие:  $X(L) = 0$

```
> _EnvAllSolutions := true:
solve(sin(lambda*L/a)=0,lambda);
```

или, в обычном виде,

```
> lambda:=Pi*n*a/L;
```

Поэтому для каждого  $n$  получаем:

```
> T[n](t):=C1[n]*cos(lambda*t)+C2[n]*sin(lambda*t);
```

```
X[n](x):=sin(lambda/a*x);
```

```
> u[n](t,x):=T[n](t)*X[n](x);
```

В результате общее решение имеет вид:

```
> u(t,x):=Sum(u[n](t,x), n=1..infinity);
```

Для определения коэффициентов  $C1[n]$  и  $C2[n]$  воспользуемся начальными условиями:  $u(0, x) = F(x)$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} u(0, x) = f(x)$ .

Эти равенства означают, что  $C1[n]$  и  $C2[n]$  являются коэффициентами разложения функций  $F(x)$  и  $f(x)$  в ряды Фурье.

Программа численного вычисления определенного интеграла методом Симпсона ( $ff=[x,f(x)]$ ,  $LL=[x1,x2]$ ).

```
> IntegralS:=proc(ff,LL,N) local n,a,b,h,FF,x0,i,Eq,Fa,Fb,x:
```

```
n:=2*N:
```

```
a:=LL[1]:
```

```
b:=LL[2]:
```

```
h:=evalf((b-a)/n):
```

```
x:=(i)->a+h*i:
```

```
FF:=(x0)->evalf(subs(ff[1]=x0,ff[2])):
```

```
Fa:=sum(FF(x(i)),i=0..0):
```

```

Fb:=sum(FF(x(i)),i=n..n):
evalf(h/3*(Fa+2*sum(FF(x(2*i)),i=1..N-1)+4*sum(FF(x(2*i-1)),i=1..N)+Fb)):
end proc:
> IntegralS([t, sin(t)^2],[0,Pi],100);
> C1[n]:=(2/L)*IntegralS([t, F(t)*sin(Pi*n/L*t)],[0,L],100):
  C2[n]:=(2/(L*lambda))*IntegralS([t, f(t)*cos(Pi*n/L*t)],[0,L],100):

```

Наконец, выпишем общее решение в развернутом виде:

```

> u(t,x) := Sum((C1[n]*cos(Pi*n*a/L*t)+C2[n]*sin(Pi*n*a/L*t))*
sin(Pi*n/L*x),n = 1 .. infinity);

```

Для решения воспользуемся формулой:

```

> restart;
> F(x):=0;
  f(x):=x->piecewise(x<l1,0, x<l2,v0, x>L,0);

```

Коэффициенты разложения:

```

> C1[n]:=(2/L)*int(F(x)*sin(Pi*n/L*x),x=0..L);
  C2[n]:=(2/(L*(Pi*n*a/L)))*int(v0*cos(Pi*n/L*x),x=l1..l2);

```

Решение уравнения:

```

> u(t,x) := Sum((2*IntegralS([t, F(t)*sin(Pi*n*t)], [0, 1], 100)*
cos(Pi*n*t)+2*IntegralS([t, f(t)*cos(Pi*n*t)], [0, 1], 100)*
sin(Pi*n*t)/lambda)*sin(Pi*n*x), n = 1 .. infinity);
> a:=1;
  L:=1;
  v0:=10;
  l1:=L/4-L/100;
  l2:=L/4+L/100;
u(t,x) := Sum(-2/Pi^2/n^2/a*v0*L*(sin(Pi*n/L*l1)-sin(Pi*n/L*l2))*
sin(Pi*n*a/L*t)*sin(Pi*n/L*x),n = 1 .. infinity);

```

Сделаем замену переменной и преобразование подинтегральной функции:

```

>simplify(subs({xi=-v*a*t^(1/2)+x,lambda=w/(a*sqrt(t))}
,exp(-lambda^2*a^2*t)*cos(-lambda*x+lambda*xi)));

>Int(exp(-lambda^2*a^2*t)*cos(-lambda*x+lambda*xi),
lambda = -infinity .. infinity)=(1/(a*sqrt(t)))*int(exp(-w^2)*cos(w*v),
w = -infinity .. infinity);

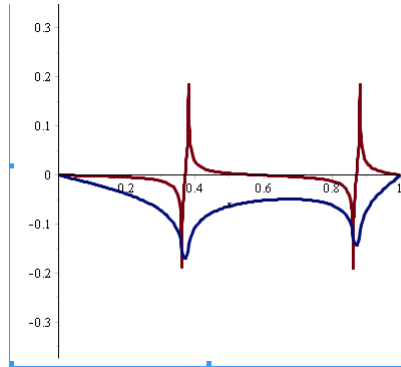
>Int(exp(-lambda^2*a^2*t)*cos(-lambda*x+lambda*xi),
lambda=-infinity..infinity)= subs(v=(x-xi)/a/t^(1/2),
1/a/t^(1/2)*Pi^(1/2)*exp(-1/4*v^2));

```

*Визуализация*

Представим полученные решения в виде двумерных анимированных графиков:

```
> with(plots):
  u(t,x):=Sum(-(20*(sin((6/25)*Pi*n)-sin((13/50)*Pi*n)))*sin(Pi*n*t)*
  sin(Pi*n*x)/(Pi^2*n^2),n=1..1000);
  ut(t,x):=diff(u(t,x),t);
  animate(plot,[{u(t,x),ut(t,x)/40},x=0..1], t=0..2, frames=30,
  thickness=3, title="Волны на струне");
```

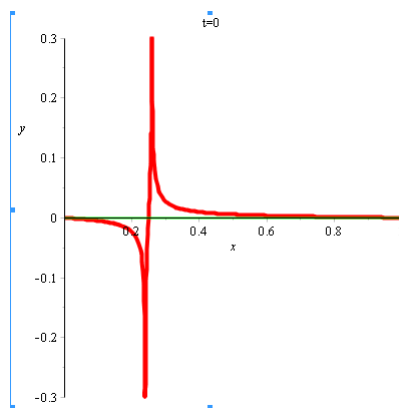


Представим полученное решение в виде двумерных графиков для нескольких моментов времени:

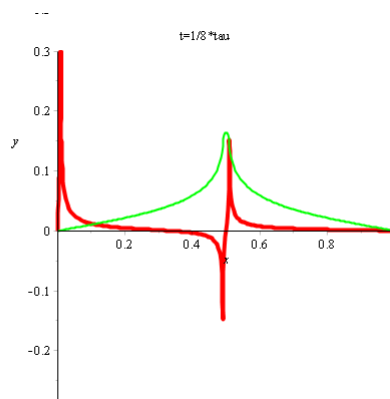
```
> tau:=2*Pi/(Pi*a/L):
```

```
u_1(x):=subs(t=tau*0,u(t,x)):      ut_1(x):=subs(t=tau*0,ut(t,x)):
u_2(x):=subs(t=tau*(1/8),u(t,x)): ut_2(x):=subs(t=tau*(1/8),ut(t,x)):
u_6(x):=subs(t=tau*(5/8),u(t,x)): ut_6(x):=subs(t=tau*(5/8),ut(t,x)):
```

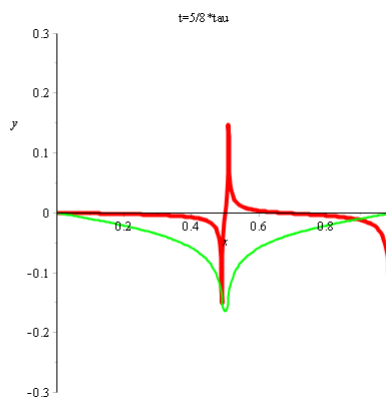
```
plot({u_1(x),ut_1(x)/50},x=0..1,y=-.3..0.3,title="t=0",color=[red,green],
thickness=[4,2]);
```



```
plot({u_2(x),ut_2(x)/50},x=0..1,y=-.3..0.3,title="t=1/8*tau",
color=[red,green],thickness=[4,2]);
```



```
plot({u_6(x),ut_6(x)/50},x=0..1,y=-.3..0.3,title="t=5/8*tau",
color=[red,green],thickness=[4,2]);
```



## Литература

1. Горюнов А.Ф. Уравнения математической физики в примерах и задачах: Учебное пособие / А.Ф. Горюнов. – Часть 1. – М.:МИФИ, 2008. – 616 с.

HYPERBOLIC EQUATIONS IN MAPLE: A METHOD FOR SEPARATING VARIABLES AND ITS IMPLEMENTATION IN MAPLE

N.A. Chugunova

*In the article the basic principles of the method of separation of variables solution of boundary value problems for partial differential equations. Examples of solutions and examples for independent work are given.*

Keywords: hyperbolic equations, program Maple.



УДК 37.026.4

## ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ПРОЕКТ ПОСТРОЕНИЯ ФРАКТАЛОВ

О.А. Широкова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> oshirokova@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В статье рассматривается создание объекта фрактальной графики на примере построения геометрического фрактала Ковер Серпинского.*

**Ключевые слова:** объектно-ориентированный проект, фрактальная графика, фрактал Ковер Серпинского.

В статье представлен материал некоторых разделов практикума по курсу «Фрактальная графика». В основе данного курса лежит объектно-ориентированное проектирование программного продукта, при помощи которого пользователю предоставляется возможность изучить особенности фрактальной графики ([1]-[2]).

Показана эффективность использования объектно-ориентированных проектов ([3]-[4]) интегрированной среды разработки Delphi при демонстрации фрактальной графики. В настоящее время объектно-ориентированный стиль применяется при разработке широкого круга приложений ([3]-[4]).

В статье рассматривается создание объекта фрактальной графики на примере построения геометрического фрактала Ковер Серпинского.

Ковер Серпинского строится следующим образом: берётся квадрат со стороной равной единице, затем каждая сторона квадрата делится на три равные части, а весь квадрат, соответственно, на девять одинаковых малых квадратов со стороной равной  $1/3$ . Из полученной фигуры вырезается центральный квадрат. Затем такой же процедуре подвергается каждый из 8 оставшихся малых квадратов и т. д.

Приведем ниже фрагмент проекта с процедурой построения фрактала:

```
procedure TForm1.Serp(x1, y1, x2, y2: Real; n: Integer);
var
x1n, y1n, x2n, y2n: Real;
begin
if n > 0 then
begin
//Задаем формулы начальных значений:
x1n := 2*x1/3 + x2 / 3;
x2n := x1/3 + 2*x2 / 3;
y1n := 2*y1/3 + y2 / 3;
y2n := y1/3+2*y2 / 3;
Form1.Image1.Canvas.Pen.Color:=clBlack;
Form1.Image1.Canvas.Rectangle(Round(x1n), Round(y1n), Round(x2n), Round(y2n));
//Рекурсивно вызываем функцию:
Serp(x1, y1, x1n, y1n, n-1);
Serp(x1n, y1, x2n, y1n, n-1);
Serp(x2n, y1, x2, y1n, n-1);
Serp(x1, y1n, x1n, y2n, n-1);
Serp(x2n, y1n, x2, y2n, n-1);
Serp(x1, y2n, x1n, y2, n-1);
Serp(x1n, y2n, x2n, y2, n-1);
Serp(x2n, y2n, x2, y2, n-1)
end
end;
....
else if PageControl1.ActivePage = TabSheet5 then
begin
```

```

n:=strtoint(Edit14.text);
//Задаем фактические параметры для рисования ковра Серпинского:
Form1.Image1.Canvas.Rectangle(55, 55, 610, 570);
Serp(55, 55, 610, 570, n);
end

```

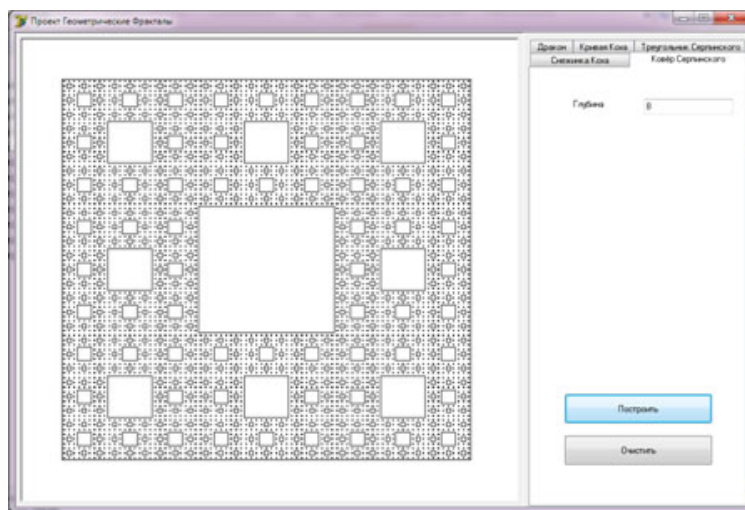


Рис. 1. Ковёр Серпинского

В результате освоения курса учащиеся должны знать основные технологии создания, редактирования, сохранения, объектов фрактальной графики различного типа с помощью программных средств Delphi.

### Литература

1. Кроновер, Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / Р. М. Кроновер. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
2. Ильяшенко, Ю.С. Аттракторы и их фрактальная размерность / Ю.С. Ильяшенко. – М.: МЦНМО, 2004. – 16 с.
3. Широкова О.А. Особенности обучения программированию на основе общности и различия принципов / О.А. Широкова // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 1, с.1757. – Режим доступа: <http://www.science-education.ru/121-17896>
4. Широкова О.А. Технология программирования. Практикум по технологии программирования MDI-приложения с реализацией в DELPHI. / О.А. Широкова // Коллективная монография «Избранные вопросы современной науки», ч. 14, Научный ред. д.п.н., проф. Г.Ф. Гребенщиков. – М.:Издательство «Спутник+», 2014. --- 136-158 с.

### OBJECT-ORIENTED FRACTAL CONSTRUCTION PROJECT

O.A. Shirokova

*The article deals with the creation of the object of fractal graphics on the example of the construction of the geometric fractal Carpet Sierpinsky.*

Keywords: object-oriented design, fractal graphics, fractal is the Sierpinski Carpet.

## АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

<b>К</b>	Кирсанов М.Н. .... 25
Kazantsev A.V. .... 143	Копарова М.Э. .... 158
Kinder M.I. .... 143	Коростелева Д.М. .... 166
<b>А</b>	<b>М</b>
Абдрахманова Р.Н. .... 303	Маерина Ю.Д. .... 125
Абрамский М.М. .... 58	Михайлов И.Д. .... 170
Авачева Т.Г. .... 60	Моисеева Е.С. .... 176
Александров Д.С. .... 62	Муртазин Ш.А. .... 181
Амосова А.Д. .... 64	Мухаметшина Л.А. .... 182
	Мухин Н.А. .... 139
<b>Б</b>	<b>Н</b>
Белянкин Н.А. .... 67	Нигмедзянова А.М. .... 186
Бойко А.Ю. .... 67	
Большаков А.В. .... 209	<b>О</b>
	Ощепков Е.Д. .... 197
<b>В</b>	<b>П</b>
Васильева А.А. .... 72	Плясова А.А. .... 67
	Попов И.Н. .... 199
<b>Г</b>	Попова Н.М. .... 206
Гайнутдинова Т.Ю. .... 166	Потапова Н.В. .... 209
Гайфаров К.Ф. .... 90	
Галицкова Д.В. .... 82	<b>Р</b>
Гафурова П.О. .... 102	Разумова О.В. .... 215
Гибадуллина А.И. .... 103	Рапенкова А.В. .... 206
Голоскоков Д.П. .... 7	Рожкова М.В. .... 218, 221, 225
	Романова Е.Е. .... 230
<b>Д</b>	<b>С</b>
Драйчиков И.А. .... 221	Сабитова З.Ф. .... 233
Дьячкова Т.А. .... 105, 106	Сабитова Н.Г. .... 206
	Садькова Е.Р. .... 64
<b>Е</b>	Сайфуллина А.Р. .... 240
Ефремова Е.А. .... 116	Самигуллина А.Р. .... 256
	Секаева Л.Р. .... 260, 264, 269
<b>З</b>	Стахурская П.А. .... 274
Завитаев Э.В. .... 125	
Зайцева Н.В. .... 127, 129	
	<b>Х</b>
<b>И</b>	Хайдаров Ш.М. .... 129
Ибрагимова Э.Р. .... 130	Хакова Р.Ш. .... 278
Иванова И.И. .... 135	Харисова З.Р. .... 279, 280
Иорданский М.А. .... 139	Хрисанова Ю.М. .... 292
	<b>Ч</b>
<b>К</b>	Чан Куанг Куи .... 301
Кадырова Э.А. .... 60	Чеботарева Э.В. .... 52, 303
Кашкин Г.В. .... 225	Чугунова Н.А. .... 304
Киндер М.И. .... 151	
Кирпичников А.П. .... 301	

**Ш**

Широкова О.А. ....	309
Шмонова М.А. ....	60

**ЛЕКЦИИ  
МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ  
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ  
В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ –  
«KAZCAS-2018»**

**МАТЕРИАЛЫ  
МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ  
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ  
В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ –  
«KAZCAS-2018»**

**и  
МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ  
КОНФЕРЕНЦИИ – «ИТОН–2018»**

Разработка авторского LaTeX-стиля оформления - **А.А. Агафонов**

Техническая редакция, набор и верстка: **А.А. Агафонов, Л.А. Бикбаева, Н.Н. Исметова,  
Н.В. Зайцева, И.А. Кох, А.М. Нигмедзянова, А.Р. Самигуллина, Э.В. Чеботарева**

Оформление обложки - **А.А. Агафонов**

Набор сборника осуществлен в издательском пакете LaTeX2 $\epsilon$  в учебно - научной лаборатории «Информационных технологий в математическом образовании» Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского университета

В сборнике трудов опубликованы **55** статей, посвященных современным проблемам математического и компьютерного моделирования в системах компьютерной математики, а также информатизации образования

Подписано в печать 24.10.18. Формат 60×84/8  
Печать цифровая. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 36,27  
Общий тираж 500 экз. Первый завод 100 экз. Заказ № 24.10/18-1

Отпечатано с готового оригинал-макета  
В типографии издательства  
Академии наук Республики Татарстан  
420111, г. Казань, ул. Баумана, 20.