

---

РОССИЙСКОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ОБЩЕСТВО  
РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
ТАТАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

# РОССИЙСКАЯ ЛЕТНЯЯ ШКОЛА

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ И ЯВЛЕНИЙ В  
СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ»

# РОССИЙСКИЙ СЕМИНАР

«НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЯ И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СТАТИСТИКА  
В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ И КОСМОЛОГИИ»

6-10 сентября 2010 г., Казань-Яльчик

**ТРУДЫ СЕМИНАРА**



---

Казань  
Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет  
ООО «Фолиантъ»  
2010

УДК 530.12+531.51+517.944+519.713+514.774  
ББК 22.632  
В87

РОССИЙСКОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ОБЩЕСТВО  
РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
ТАТАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук,  
*проф. Ю.Г.Игнатъева*

**В87** **Труды Российской летней школы «Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики» (ММ СКМ2) и Российского семинара «Нелинейные поля и релятивистская статистика в теории гравитации и космологии», 6-10 сентября 2010 г., Казань-Яльчик. - Казань: Изд-во «Фолиантъ», 2010. - 218 с.**

В сборник вошли труды Российской летней школы-семинара Gracos, посвященные математическому моделированию фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики (СКМ) и современным теоретическим проблемам нелинейной физики, в частности, релятивистской теории гравитации и космологии. Материалы, содержащиеся в сборнике, представляют оригинальные статьи и обзоры специалистов из различных научных центров России и ближнего Зарубежья, а также работы начинающих исследователей. Первый Российский семинар по математическому моделированию в СКМ проходил в Казани, в 2007 году.

Материалы сборника трудов предназначены для научных работников и аспирантов, специализирующихся в области математического и компьютерного моделирования, релятивистской теории гравитации, квантовой теории поля и космологии, а также для студентов старших курсов физико-математических отделений университетов.

ISBN 978-5-94990010-9

© 2010 Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет

© 2009 Лаборатория информационных технологий в математическом образовании Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета

© ООО «Фолиантъ», оформление, 2010

---

*Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований*

# Оглавление

## ЧАСТЬ 1. МАТЕРИАЛЫ ШКОЛЫ.

7

Г.Р. Адиятуллина// <i>Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатъев/</i> Разработка математической модели системы аналитического тестирования в СКМ Maple 13 . . . . .	7
Т.Е. Владимирова. Фрактальная модель межкультурной коммуникации . . . . .	13
Д.П. Голоскоков. Первая краевая задача нестационарной теплопроводности в полупространстве . . . . .	17
Д.П. Голоскоков, А.П. Нырков, Т.П. Кныш, А.В. Васин, А.А. Кардаков, С.С. Соколов. Математические модели прикладных NP-полных задач . . . . .	20
В.П. Дьяконов. Компьютерная математика в теоретических и экспериментальных научных исследованиях . . . . .	27
Ю.Г. Игнатъев, Х.Х. Абдулла. Комплекс программ для математического моделирования нелинейных обобщенно-механических систем в системе компьютерной математики Maple . . . . .	32
О.В. Ибушева. Управление движением мобильного робота с обходом подвижных препятствий . . . . .	46
Э.Г. Исрафилова// <i>Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатъев/</i> Компьютерное моделирование математических структур линейной алгебры и геометрии . . . . .	47
С.В. Капустин. Моделирование поверхностей специальных видов в среде Mathematica . . . . .	50
Т.В. Капустина. Задачи геометрии дифференцируемых многообразий в среде Mathematica . . . . .	56
М.Н. Кирсанов, С.В. Выльева. Генетический алгоритм для решения задачи Коши . . . . .	58
Р.Е. Кристалинский. Определение методом А.Н. Крылова приближенного периодического решения уравнения математического маятника . . . . .	60
А. В. Матросов. Вычислительно неустойчивые алгоритмы механики в Maple . . . . .	61
Р.В. Матухин, О.В. Ибушева. Влияние парадокса дней рождения на криптографическую стойкость хеш-функций . . . . .	68
М.Л. Михайлов// <i>Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатъев/</i> Тензорные вычисления в пакете Maple для плоско-симметричного пространства электровакуума . . . . .	69
А.А. Мухалёва. Решение дифференциальных уравнений в Mathematica 6.0 . . . . .	72
Р.Г. Мухарлямов, О.В. Ибушева, А.А. Ахметов. Управление динамикой систем, содержащих элементы различной физической природы . . . . .	72
А.М. Нигмедзянова. Исследование краевых задач $N$ для одного вырождающегося эллиптического уравнения первого рода методом потенциалов . . . . .	73
Е.А. Осипов. Сумматорные и интегральные уравнения двоякопериодических задач дифракции упругих волн в пространстве . . . . .	79
Л.И. Розакова// <i>Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатъев/</i> Математическое моделирование объектов элементарной математики и их анимация в СКМ Maple . . . . .	87
А.Р. Самигуллина// <i>Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатъев/</i> Математическое моделирование структур линейной алгебры и аналитической геометрии и их графическая интерпретация в СКМ Maple . . . . .	94
О.А. Сачкова// <i>Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатъев/</i> Компьютерное моделирование объектов векторной алгебры и стереометрии в системе компьютерной математики Maple . . . . .	101
Д.Н. Тумаков, А.Р. Тухватова . Дифракция электромагнитной волны на щели между полубесконечными пластинами . . . . .	106
Ф.А. Хотова// <i>Научный руководитель проф. В.П. Дьяконов/</i> Спектральный анализ реальных осциллограмм в системе MATLAB . . . . .	115
В.В. Черкасова// <i>Научный руководитель проф. О.В. Мантуров/</i> Разработка компьютерной модели задачи о качении шара средствами системы компьютерной математики Maple . . . . .	122

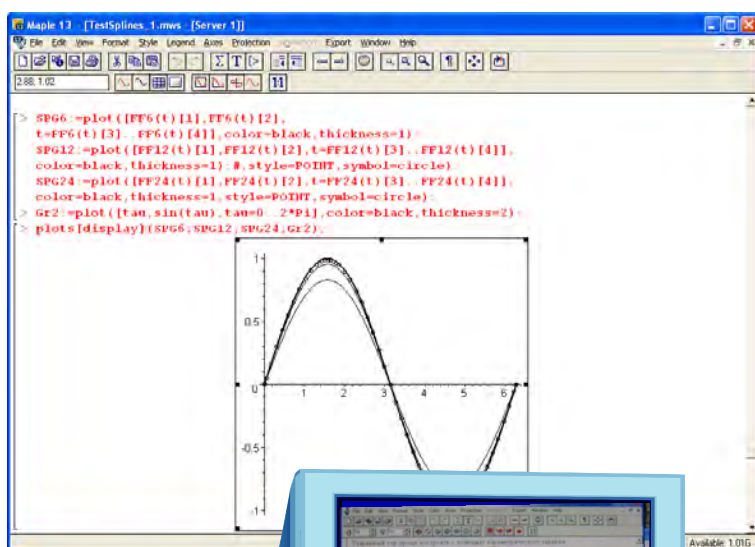
<b>О.А. Шапошникова</b> // <i>Научный руководитель проф. В.П. Дьяконов</i> / Новые пакеты расширения по моделированию электронных схем в системе MatLab 2009b . . . . .	126
<b>О.А. Широкова.</b> <i>Метод возмущений в плоских задачах нелинейной фильтрации</i> . . . . .	130
<b>А.Г.Ширяев</b> // <i>Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатъев</i> / Тензорные вычисления в пакете Maple для пространства электровакуумной плоской гравитационной волны . . . . .	130

## ЧАСТЬ 2. ТРУДЫ СЕМИНАРА.

<b>134</b>	
<b>О.В. Бабурова, К.Н. Липкин, Б.Н. Фролов.</b> <i>Переменный космологический член в теории гравитации со скалярным полем в пространстве Вейля–Картана в формализме внешних форм</i> .	134
<b>А.Б. Балакин, Э.С. Пранцузова.</b> <i>О движении частиц с изоспином в поле неминимального монополя Ву-Янга</i> . . . . .	134
<b>А.М. Баранов.</b> <i>О фазовом переходе гравитационного поля в жидком шаре</i> . . . . .	139
<b>А.М. Баранов, В.А. Иванов.</b> <i>О некоторых примерах применения эрмитовых и кэлеровых многообразий в ОТО</i> . . . . .	143
<b>А.М. Баранов, А.Ю. Осипов.</b> <i>Моделирование астрофизических объектов со слоистой структурой в ОТО</i> . . . . .	148
<b>А.М. Баранов, А.А. Шейкин.</b> <i>Об одной двуслойной модели гравитирующего статического шара</i>	150
<b>К.М. Белоцкий, А.А. Кириллов, С.Г. Рубин.</b> <i>О возможности обнаружения кластеров первичных черных дыр</i> . . . . .	153
<b>B. Saha, Yu.P. Rybakov, G.N. Shikin, Yu.A. Popov.</b> <i>Electromagnetic field with induced massive term: Case with spinor field</i> . . . . .	154
<b>Е.И. Бобровских, В.Ф. Панов.</b> <i>Нестационарные космологические модели с вращением типа II по Бьянки</i> . . . . .	159
<b>С.В. Волохов.</b> <i>Конформные преобразования в моделях Калуцы-Клейна с компактификацией на тор</i>	160
<b>К.А. Бронников.</b> <i>Кротовые норы - некоторые новые результаты</i> . . . . .	160
<b>К.А. Bronnikov, M.V. Skvortsova, A.A. Starobinsky.</b> <i>Notes on wormhole existence in scalar-tensor and <math>f(R)</math> gravity</i> . . . . .	161
<b>К.А. Bronnikov, M.S. Chernakova.</b> <i>On a general class of brane-world black holes and wormholes</i> . .	161
<b>Ю.С. Владимиров.</b> <i>Состояние и перспективы реляционного подхода к физике и геометрии</i> . . . .	161
<b>В.В. Гутин</b> // <i>Научный руководитель В.Ф. Панов</i> / Проблема $T$ -симметрии: понижение порядка уравнений движения . . . . .	163
<b>Bogdan G. Dimitrov.</b> <i>Perturbative Gravity Theory on a Curved Background and Its Importance for Gravitational Light - Ray Deflection Experiments</i> . . . . .	164
<b>У.Н. Закиров.</b> <i>Уравнения возмущенного движения сосредоточенной переменной массы (СПМ) в теории Калуца-Клейна</i> . . . . .	169
<b>Ф.Ш. Зарипов.</b> <i>Обобщение уравнений теории индуцированной гравитации</i> . . . . .	170
<b>Д.Ю. Игнатъев.</b> <i>Космологическая эволюция неравновесной анизотропной плазмы</i> . . . . .	171
<b>Ю.Г. Игнатъев, А.А. Агафонов.</b> <i>Точное решение самосогласованной системы уравнений релятивистской магнитной гидродинамики для анизотропной плазмы на фоне метрики Бонди-Пирани-Робинсона</i> . . . . .	171
<b>Ю.Г. Игнатъев, Р.Ф. Мифтахов.</b> <i>Математическое моделирование космологической эволюции вырожденной Ферми-системы со скалярным взаимодействием частиц в СКМ Mathematica</i> . . .	185
<b>П.О. Казинский, М.А. Шипуля.</b> <i>Неэкстенсивные поправки в однопетлевой <math>\Omega</math>-потенциал квантовых полей с квадратичным законом дисперсии</i> . . . . .	188
<b>А.С. Киселев, В.Г. Кречет, Б.Н. Фролов.</b> <i>Применение компьютерных символьных вычислений при исследовании 5-мерной модели физических взаимодействий</i> . . . . .	194
<b>S.M. Kozyrev.</b> <i>Mathematical modelling composite stars an wormholes in Einstein and Jordan-Brans-Dicke</i>	195
<b>А.С. Кубасов.</b> <i>Новый метод построения инфляционных решений в киральной космологической модели</i>	200
<b>О.Н. Кучумов</b> // <i>Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатъев</i> / Математическое моделирование спонтанного нарушения симметрии в релятивистской статистической системе в СКМ Maple . .	202
<b>Е.В. Кувшинова, В.Ф. Панов.</b> <i>Квантовое рождение вселенной типа IX по Бьянки со сдвигом</i> . .	204
<b>Е.В. Кувшинова, В.Ф. Панов, О.В. Сандакова.</b> <i>Квантовое рождение вселенной с вращением типа VIII по Бьянки</i> . . . . .	204
<b>В.Н. Мельников.</b> <i>Гравитация, космология и переход к новым определениям единиц СИ</i> . . . . .	205
<b>I.S. Nurgaliev.</b> <i>Accelerating expansion as local isotropic rotation</i> . . . . .	205
<b>I.S. Nurgaliev.</b> <i>Not singular and not dark universe</i> . . . . .	206

<b>А.А. Попов.</b> <i>Self-force on a scalar point charge in the long throat</i> . . . . .	206
<b>В.С. Рихвицкий, С. Биджан, М. Вишинеску.</b> <i>Аналитические вычисления в дифференциальной геометрии и качественный анализ космологических моделей с нелинейными источниками</i> . . . . .	212
<b>Ю.А. Свистунова, С.В. Червон.</b> <i>Метод изометрических погружений: точные космологические решения, полученные в рамках сферически-симметричной нелинейной сигма модели</i> . . . . .	213
<b>S.V. Sushkov.</b> <i>Cosmological models with non-minimal derivative coupling</i> . . . . .	214
<b>С.В. Червон, О.Г. Панина.</b> <i>Влияние полей темного сектора на структуру Вселенной</i> . . . . .	214
<b>Ю.А. Портнов.</b> <i>Ускоренное расширение Вселенной без темной энергии</i> . . . . .	214
<b>Информация о конференции</b>	<b>216</b>

**ЧАСТЬ 1. МАТЕРИАЛЫ ШКОЛЫ**  
**«Математическое моделирование**  
**фундаментальных объектов и явлений в**  
**системах компьютерной математики»**



## РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО ТЕСТИРОВАНИЯ В СКМ MAPLE 13

Г.Р. Адиятуллина<sup>1</sup>

Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатьев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Татарский государственный гуманитарно - педагогический университет,  
Россия, Казань

<sup>2</sup>Татарский государственный гуманитарно - педагогический университет,  
Россия, Казань

---

<sup>1</sup>E-mail: gulshaton@mail.ru, <sup>2</sup>E-mail: ignatev\_yu@rambler.ru

**Аннотация.** Построена математическая модель системы аналитического тестирования знаний на основе Maple-приложений в СКМ Maple.

### Идея аналитического тестирования

В последнее время при анализе компетентности, профессиональных способностей сотрудников, знаний учащихся все чаще применяется тестирование. В связи с этим актуальным становится вопрос адекватности тестирования уровню знаний. Стандартное жесткое тестирование мало эффективно для оценки глубины понимания материала тестируемыми, особенно при анализе знаний по физико-математическим предметам. Этим объясняется необходимость построения математической модели гибкой системы тестирования, которая позволила бы осуществлять более глубокое зондирование профессиональных качеств тестируемого.

Интеллектуальные программы типа пакетов компьютерной математики, которые могут проводить аналитические вычисления, пригодны для осуществления идеи аналитического тестирования[1]. Эта идея заключается в сравнении ответа, полученного тестируемым и эталонного ответа, полученного средствами СКМ.

### Сравнение ответов

Сравнение ответов происходит путем нахождения разности их формульных или числовых выражений. При этом ответ может быть представлен в одном из многочисленных эквивалентных выражений. Программа тестирования устанавливает эквивалентность выражений ответа тестируемого и эталонного ответа, полученного средствами СКМ. В случае, если разность равна нулю, ответ, полученный тестируемым, считается верным. Пусть  $F(x_1, x_2, \dots)$  - ответ тестируемого, а  $F0(x_1, x_2, \dots)$  - эталонный ответ, полученный средствами СКМ. Сравнение ответов происходит по алгоритму:

```
if simplify(F-F0)=0
then F - верный ответ
else F - неверный ответ
end if
```

Процедура simplify осуществляет упрощение выражения. Приведем пример реализации алгоритма в виде процедуры, созданной в СКМ Maple и содержащейся в пользовательской библиотеке CheckResult. В данной процедуре происходит проверка координат точек максимума. Параметрами процедуры являются: исследуемая функция, переменная, координаты точек максимума, найденные тестируемым. Координаты задаются в виде упорядоченного двумерного списка  $[[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots]$ .

```
>CheckResult[CheckCoorMax]:=proc(g,x,Z) local K,n,m,l,i,n1,Z1,V,j,V1:
```

Сначала находятся верные координаты точек максимума исследуемой функции и их количество.

```
K:=PartResearch[CoorMax](g,x): n:=PartResearch[QuantMax](g,x):
```

Далее задаются необходимые переменные.

```
Z1:=convert(Z,Matrix):
n1:=LinearAlgebra[RowDimension](Z1):
V:=Matrix(1..n1,1..n):
V1:=Vector(1..n1):
```

В следующем цикле производится сравнение эталонных и найденных тестируемым координат:

```

if n>0 then
for i from 1 to n1 do
for j from 1 to n do
if
(simplify(K[j,1]-Z1[i,1])=0) and (simplify(K[j,2]-Z1[i,2])=0)
then
V[i,j]:=1: else V[i,j]:=0:
fi: od: od:

```

Далее производится подсчет числа верно найденных координат и вывод результата:

```

l:=0:
for i from 1 to n1 do m:=0:
for j from 1 to n do
if V[i,j]=1
then m:=m+1:
fi: od:
if m>0 then V1[i]:=1: l:=l+1: else V1[i]:=0:
fi: od:
print('Количество верно найденных координат=',l);
else
print('Количество точек максимума найдено неверно');
fi: end proc:

```

## Возможности Maple применительно к аналитическому тестированию

### Пользовательские процедуры и библиотеки процедур

Система компьютерной математики Maple обладает возможностями, необходимыми для создания комплекса программ для аналитического тестирования и самотестирования. Данная система позволяют формировать собственные процедуры и библиотеки процедур.

СКМ Maple содержит большое количество встроенных команд, процедур и функций. Тем не менее они не покрывают всех потребностей пользователей. Кроме этого, в некоторых случаях встроенные функции дают неверный результат. Очень часто они несут лишнюю информацию, выдают неудобочитаемый результат, запрашивают много параметров. Кроме этого, встроенные функции являются закрытыми, то есть пользователь не может проверить, посмотреть ход решения, вычисления. Поэтому в таких случаях целесообразным является создание собственных процедур и функций. В этом случае пользователь может создать процедуру или функцию, выдающую ответ в нужном ему виде. Также пользователь будет иметь возможность исправлять процедуру или функцию, если ему это понадобится. Для создания функции используется следующая конструкция [2]:

```
Fname := (x, y, ...) -> expr
```

После этого вызов функции осуществляется в виде Fname(x, y, ...), где (x, y, ...) - список формальных параметров функции пользователя с именем Fname. Переменные, указанные в списке формальных параметров, являются локальными. При подстановке на их место фактических параметров они сохраняют их значения только в теле функции (expr). Описанные таким образом функции пользователя фактически являются процедурами-функциями с несколько упрощенной структурой.

Простейшая форма задания процедуры следующая:

```
Pname := proc(Параметры) Тело процедуры end;
```

Пользовательские процедуры и функции можно объединять в библиотеки пользовательских процедур. Такие библиотеки предусматривают закрытость их содержания. Процедуры, содержащиеся в них, могут быть использованы наравне с основными процедурами, заложенными разработчиками математического пакета, и доступны любым пользователям. Библиотека пользовательских процедур задается следующим образом:

```

> restart:
Library := table():
Library[f1] := proc(Параметры) Тело процедуры
f1 end:
Library[f2] := proc(Параметры) Тело процедуры f2 end:
Library[f3] := proc(Параметры) Тело процедуры f3 end:
save(Library, 'c:/Library.m');

```



где `Library` - имя библиотеки, `f1, f2, f3` - процедуры, входящие в библиотеку. Команда `save` осуществляет сохранение библиотеки в файле.

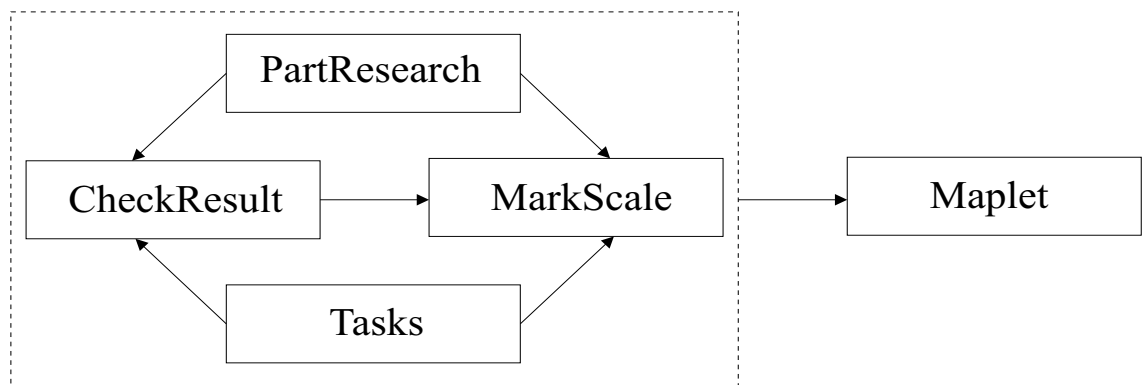
## Maplet-приложения

Организовать работу с пользовательскими библиотеками можно с помощью пакета `Maplets`. `Maplets` - пользовательские программы, которые облегчают процесс ввода и восприятия информации с помощью диалогового окна, которое может функционировать без запуска программы `Maple`. Графический интерфейс `Maplet Builder` позволяет разрабатывать достаточно сложные `Maplet`-приложения. Имеется возможность с помощью мыши вставлять в окно проекта кнопки, элементы прокрутки, графические окна и другие элементы интерфейса. Кроме этого можно выбором из списка устанавливать свойства для каждого из элементов, использовать встроенные стили для настройки внешнего вида, использовать предварительный просмотр в процессе создания проекта. Также `Maplet`-приложения можно создавать программными средствами `Maple` без использования `Maplet Builder`.

Создание библиотек пользовательских процедур приводит к необходимости запоминания большого количества новых названий процедур и их параметров. Кроме этого необходимо знать порядок ввода этих параметров и диапазоны их значений, что часто вызывает сложности как у преподавателей, так и у студентов. Применение `maplets` избавляет пользователя от необходимости запоминать большое количество достаточно сложной информации, тем самым уменьшая количество возможных ошибок ввода данных. Кроме этого, с помощью пакета `Maplets` можно создавать окна, диалоги и другие визуальные объекты, которые помогут пользователю, не знакомому с тонкостями программы `Maple`, получать все преимущества от использования приложения.

## Блок-схема системы аналитического тестирования

Разработанная нами система аналитического тестирования имеет следующую структуру. Имеется несколько специализированных пользовательских библиотек, которые взаимосвязаны между собой. Все они используются при работе `Maplet`-приложения. Библиотека `PartResearch` содержит процедуры, предназначенные для нахождения эталонного решения задачи. Эта библиотека создана для преподавателей. Она позволяет подготавливать индивидуальные задания для студентов и наглядные материалы для проведения занятий (подбирать красивые примеры). Библиотека `CheckResult` содержит процедуры, предназначенные для проверки решений, полученных студентами. Эти процедуры обращаются к процедурам библиотеки `PartResearch` для нахождения эталонного решения, а затем проверяют правильность проверяемого решения путем нахождения разности двух решений. Данная библиотека предназначена для преподавателей и студентов. Преподавателям она помогает проверять выполненную студентами работу, а студентам - осуществлять самоконтроль в процессе решения индивидуальных заданий. Библиотека `Tasks` содержит индивидуальные задания для студентов. Данная библиотека наполняется преподавателем, а используется студентами. В будущем для накопления и хранения заданий планируется использование базы данных. Библиотека `MarkScale` предназначена для преподавателей. Она содержит процедуры, позволяющие определить вес задачи, задать шкалу оценивания, а также выставить студенту окончательную оценку. При работе процедур данной библиотеки происходит обращение к процедурам библиотек `PartResearch` и `CheckResult` и `Tasks`. `Maplet` обращается к той или иной библиотеке, в зависимости от выбранной траектории. Планируется создать две траектории - преподавателей и студентов, которым соответствуют две подсистемы. При входе в подсистему преподавателя будет запрошен пароль. Преподаватель будет иметь доступ к получению готовых решений, проверке решений студентов, а также к заданию шкалы оценивания и выставлению оценки. Студент будет иметь возможность получать индивидуальные задания, а также проверять свои результаты в процессе решения.



## Пример моделирования пользовательских библиотек и Maplelet-приложения

Ранее в работе [3] была описана система аналитического тестирования, включающая несколько специализированных библиотек.

Рассмотрим подробнее библиотеку `PartResearch`. Каждая из процедур, входящих в данную библиотеку, представляет собой один шаг в исследовании функции. Все вместе они осуществляют полное аналитическое исследование функции действительного переменного и построение ее графика, а именно проверяют на четность, находят координаты пересечения графика функции с осью  $OX$ , находят промежутки знакопостоянства функции, находят количество точек минимума и максимума, координаты точек экстремума, промежутки монотонности функции, количество точек перегиба, их координаты, промежутки выпуклости и вогнутости, асимптоты, а также строят график исследуемой функции. Все процедуры соответствуют стандартной схеме исследования функции одной переменной, принятой в России [4]. Процедуры данной библиотеки используются затем в библиотеке `CheckResult`, а также при вычислении веса задачи. Библиотека предназначена для преподавателей.

```
[ExtremeCoorX, QuantExtreme, ExtremeCoorY, ExtremeCoorXY,
QuantMin, QuantMax, CoorMin, CoorMax, SegmentMin, SegmentMax,
CoorPosInflectX, QuantPosInflect, CoorPosInflectY,
CoorPosInflectXY, QuantInflect, CoorInflect, ConcavInterval,
MonotonyInterval, SignConstInterval, CrossOX, EvenOddFunc, TopY,
BottomY, TopX, BottomX, DrawMax, DrawMin, DrawInflect,
DrawAsymptote, Graph, CompleteResearch]
```

Библиотека `CheckResut` содержит процедуры, позволяющие проверить правильность результатов, полученных студентами в процессе решения. А именно, проверка количества и координат точек максимума, точек минимума, точек перегиба. Библиотека предназначена для студентов и преподавателей. Используется при вычислении результата (оценки) студента, а также для самотестирования студентов.

```
[CheckQuantExtreme, CheckQuantMax, CheckQuantMin,
CheckQuantInflect, CheckCoorMax1, CheckCoorMax, CheckCoorMin,
CheckCoorInflect]
```

Библиотека `Tasks` содержит индивидуальные задания студентов по вариантам: [T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7, T8, T9, T10] Кроме проверки решения, существует проблема оценки данного решения. Например, если студент нашел часть точек экстремума. В данном случае необходимо более гибко оценить работу студента с учетом веса правильно выполненной работы. Для этого разработана библиотека `MarkScale`, которая содержит процедуры определения веса задачи, задания шкалы оценивания, вычисления оценки.

Маплет играет роль связующего звена между библиотеками и пользователями (преподавателями, студентами). Рассмотрим, процесс создания маплета. Работа над маплетом начинается с подключения специального пакета `Maplet[Elements]`, который содержит процедуры, необходимые для работы маплета [5]. После этого необходимо осуществить чтение пользовательских библиотек.

```
> with(Maplets[Elements]):
> read('./CheckResult.m'):
  with(CheckResult):
> read('./PartResearch.m'):
  with(PartResearch):
> read('./Tasks.m'):
  with(Tasks):
```

Далее идет описание отображаемых элементов маплета. Например, главное окно "CAT" маплета содержит пять кнопок, каждая из которых позволяет осуществить переход к другому окну маплета (окну "Получение заданий", окну "Решение задачи", окну "Проверка решения задачи", окну "О программе") или осуществить действие (завершить работу маплета).

```
Window['Win1']("CAT",
[Button("Получение заданий", 'onclick'=Action(RunWindow('WV'))),
Button("Решение задачи", 'onclick'=Action(RunWindow('WR'))),
Button("Проверка решений задачи", 'onclick'=Action(RunWindow('WP'))),
Button("О программе", 'onclick'=Action(RunWindow('WI'))),
Button("Выход", Shutdown())
],
...
)
```

В окне "Решение задачи" представлены на выбор шаги исследования функции. Таким образом, можно найти только ту информацию, которая необходима на данный момент, - например, координаты точек максимума. Переход к нужному элементу задачи происходит при нажатии соответствующей кнопки.

```
Window['WR']("Решение задачи",
[Button("Координаты точек экстремума", 'onclick'=Action(RunWindow('WR2'))),
Button("Количество минимумов", 'onclick'=Action(RunWindow('WR3'))),
Button("Количество максимумов", 'onclick'=Action(RunWindow('WR4'))),
Button("Координаты минимумов", 'onclick'=Action(RunWindow('WR5'))),
Button("Координаты максимумов", 'onclick'=Action(RunWindow('WR6'))),
Button("Количество точек перегиба", 'onclick'=Action(RunWindow('WR7'))),
Button("Координаты точек перегиба", 'onclick'=Action(RunWindow('WR8'))),
Button("Промежутки выпуклости", 'onclick'=Action(RunWindow('WR9a'))),
Button("Промежутки вогнутости", 'onclick'=Action(RunWindow('WR9b'))),
Button("Промежутки монотонности (возр.)", 'onclick'=Action(RunWindow('WR10a'))),
Button("Промежутки монотонности (убыв.)", 'onclick'=Action(RunWindow('WR10b'))),
Button("Промежутки знакопост-ва  $f(x)>0$ ", 'onclick'=Action(RunWindow('WR11a'))),
Button("Промежутки знакопост-ва  $f(x)<0$ ", 'onclick'=Action(RunWindow('WR11b'))),
Button("Нули функции", 'onclick'=Action(RunWindow('WR12'))),
Button("Четность функции", 'onclick'=Action(RunWindow('WR13'))),
Button("Выход", 'onclick'=Action(CloseWindow('WR')))]
), ...
```

Рассмотрим одно из окон для нахождения готового решения на примере окна "Координаты максимумов". Здесь необходимо ввести исследуемую функцию и нажать кнопку Вычислить. В поле "Координаты максимумов" появятся сами координаты.

```
... Window['WR6']("Координаты максимумов", [ [ "Введите
f(x):", TextField['TF61']('width'=30)], [ "Координаты максимумов:",
TextBox['TF62']('width'=30, 'height'=10, 'font'=Font("Times new
roman", italic, 14)), [ Button("Вычислить",
Evaluate('TF62'='convert(PartResearch[CoorMax](TF61,x),
'listlist'))),
Button("Выход", 'onclick'=Action(CloseWindow('WR6')))] ] ), ...
```

В окне "Проверка решений задачи" имеется возможность проверить полученные студентом результаты. Каждый шаг исследования проверяется отдельно. Для перехода к нужному элементу нужно нажать на соответствующую кнопку.

```
Window['WP']("Проверка решени_ задачи",
[Button("Проверка
количества точек максимума", 'onclick'=Action(RunWindow('WP2'))),
Button("Проверка координат точек максимума",
'onclick'=Action(RunWindow('WP3'))),
Button("Проверка количества
точек минимума", 'onclick'=Action(RunWindow('WP4'))),
Button("Проверка координат точек минимума",
'onclick'=Action(RunWindow('WP5'))),
Button("Проверка количества
точек перегиба", 'onclick'=Action(RunWindow('WP6'))),
Button("Проверка координат точек перегиба",
'onclick'=Action(RunWindow('WP7'))),
Button("Выход",
'onclick'=Action(CloseWindow('WP')))] ), ...
```

Рассмотрим пример проверки координат точек максимума. Для этого необходимо ввести исследуемую функцию, затем ввести полученные координаты и нажать кнопку "Проверить". В поле "Ответ" появится соответствующий результат.

```
Window['WP3']("Проверка координат точек максимума (несколько
пар)",
[ [ "Функция:", TextField['WP3TF1']('width'=30)], [
"Координаты точек максимума:", TextField['WP3TF2']('width'=20)], [
"Ответ:", TextField['WP3TF3']('width'=30)],
```

```
[ Button("Проверить",
Evaluate('WP3TF3'='CheckResult[CheckCoorMax](WP3TF1,x,WP3TF2)' )),
Button("Выход", 'onclick'=Action(CloseWindow('WP3')))] ]
),
```

В окне "Получение заданий" студенты смогут получить задания по вариантам. Для того чтобы получить задание, необходимо ввести вариант и нажать кнопку "Получить задание".

```
Window['WV']("Получение заданий",
[ [ "Ваш вариант:",
TextField['WVTF1']('width'=5)],
[ Button("Получить задание",
Evaluate('WVTV2'='Tasks[T](WVTF1)' )), [
TextBox['WVTV2']('width'=20, 'height'=5, 'font'=Font("Times new
roman",italic,14))] ] ), ...
```

Кроме всего описанного, на главном окне предусмотрена инструкция пользователя, позволяющая разобраться, как работать с данным приложением. Для запуска маплета необходимо после описания содержимого маплета ввести оператор `Display`.

```
> Maplets[Display](maplet);
```

Работа над маплетом завершается сохранением файла с расширением `.maplet`. После этого можно запускать сохраненный файл, который уже будет работать без запуска Maple.

## Оценка веса задачи, шкала оценивания

Оценка веса задачи осуществляется следующим образом. Задача разбивается на пункты - мелкие, промежуточные задачи. Затем вычисляется количество этих пунктов. Чем больше это число, тем больше вес задачи. Вес задачи необходимо вычислять для того, чтобы составлять эквивалентные (равные) по весу контрольные работы и наборы индивидуальных заданий. Вес каждого пункта выражается в процентах от веса самой задачи. Поэтому при проверке решения, полученного тестируемым, можно легко определить процент правильно найденных ответов пунктов. Благодаря процентному выражению веса пунктов, решение, полученное тестируемым, можно оценить с использованием любой шкалы оценивания, которая может быть и пятибалльной, и 100-балльной, и любой другой системой. Таким же образом можно осуществлять оценку решения группы задач. В этом случае сами задачи будут выступать в роли пунктов.

Таким образом, аналитическое тестирование знаний, проводимое с применением Maple-приложений будет обладать следующими основными достоинствами:

- более интуитивным интерфейсом, предоставляющим возможность начинающему пользователю быстро разобраться в приложении;
- простотой использования и привлекательным графическим интерфейсом, позволяющими повысить мотивацию для работы с приложением как у преподавателей, так и у студентов;
- сокращением затрат времени преподавателей при подготовке и проверке заданий;
- интерактивностью приложения, обеспечивающей удобство и функциональность работы.

## Литература

- [1] Игнатъев Ю.Г. Использование аналитических возможностей пакета Maple для создания программ аналитического тестирования, самотестирования и генерации индивидуальных заданий в курсах высшей математики // Проблемы информационных технологий в математическом образовании: Учебное пособие под ред. Ю.Г.Игнатъева. - Казань: ТГГПУ, 2005, с.9-24.
- [2] Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании - М.: СОЛОН-Пресс, 2006.
- [3] Адиятуллина Г.Р. Библиотеки пользовательских процедур в СКМ по курсу математического анализа: "Функции" // "Системы компьютерной математики и их приложения" Материалы международной конференции. - Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2009, с.11-12.
- [4] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. - М.: Физматлит, 2002, 432с.
- [5] Кирсанов М.Н. Maple 13 и Maple. Решение задач механики - М.:Физматлит, 2010.

## ФРАКТАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ МЕЖКУЛЬТУРНОЙ КОММУНИКАЦИИ

Т.Е. Владимирова<sup>1</sup>Центр международного образования МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва<sup>1</sup>E-mail: -

С развитием психолингвистики, прагматики, лингвокультурологии и теории коммуникации изучение языка как системы было существенно расширено и дополнено. Это объясняется тем, что язык – это не только код, но «код плюс его движение» (Ю.М. Лотман) и, следовательно, в нем отражаются и действительность, и социокультурная жизнь общества, и субъективные факторы говорящего / пишущего. Более того, внимание к событийному контексту языка / речи повлекло за собой понимание языка и речи как создающих дискурс.

Вбирая в себя речевую/текстовую деятельность вместе с соответствующим социокультурным контекстом, **дискурс** выступает как главный хранитель общего опыта, знаний, мыслей, ценностных представлений и переживаний. Поэтому в оценке себя и личностного бытия человек исходит не только из собственного Я и характера взаимоотношений внутри своего круга общения, но и из дискурса, который также дает определенную оценку как той действительности, которая находит в нем свое выражение, так и самой личности, унаследовавшей его идейно-духовные представления.

Особую значимость обращение к «совокупности всего говоримого и понимаемого в определенной конкретной обстановке в ту или иную эпоху жизни данной общественной группы» (Л.В. Щерба) приобретает при рассмотрении **межкультурной коммуникации**. Это объясняется тем, что представители различных лингвокультурных общностей усваивают ценностные представления, нормы и правила общения, сценарии «строительства отношений» и номенклатуру ролей прежде всего из дискурса, который носит этноспецифичный характер. Если в монокультурном общении процесс восприятия собеседника носит «свернутый» характер в силу тождественности или близости предшествующего опыта, то при взаимодействии с носителем иного языка и иной культуры оно может осложняться действием **языкового, коммуникативного, ценностно-смыслового и других барьеров**. Поэтому в межкультурной коммуникации знание дискурса собеседника обеспечивает восприятие ценностных представлений и речеповеденческих особенностей собеседника как освященных традицией и, следовательно, как естественных и ожидаемых.

Для **русского дискурса**, фиксирующего особенности обыденного сознания носителей языка, характерно понимание общения как включающего не только обмен информацией (*разговор*), но и представление о характере общности (*друзья*), о взаимопроникновении (*беседа по душам*) и о положительном отношении к общению в целом (*возможность высказаться и обрести душевное равновесие*). Свойственные русскому дискурсу **задушевность, искренность, доверительность и интенсивность отношений** нередко воспринимаются представителями иных лингвокультурных общностей как нежелательные и обременительные (в оценке представителей западноевропейской культуры) или даже шокирующие (с точки зрения представителей восточноазиатской культуры).

Неодобрительное отношение как правило вызывают **установка на достижение взаимности и эмоционально-оценочная модальность общения**, отличающие русский межличностный дискурс. С другой стороны, достижение взаимопонимания может быть также осложнено подчеркнутой этикетностью общения и непривычным для русских строгим контролем за мимикой лица, который присущ всем представителям восточноазиатского региона. Поэтому одним из условий достижения взаимопонимания в межкультурной коммуникации является осмысление и сопоставление национальных особенностей тех дискурсов, которые лежат в основе речевого поведения коммуникантов.

Так, например, косвенное, ненавязчивое выражение мыслей и чувств и особая деликатность, исключаяющая внесение в разговор какого-либо диссонанса, которые особенно ярко проявляются в **японском дискурсе**, плохо согласуются со свойственной русскому общению непосредственностью. Но в затруднительном положении может оказаться и носитель русского языка, заметив, что высказанные в адрес японца справедливые замечания вызывают у него улыбку. Вместе с тем, в японской речевой культуре улыбка выражает уверенность в способности исправить создавшуюся ситуацию и, следовательно, является правомерной. Не принимаются японцами и эмоциональное восхищение или одобрение в свой адрес, характерные для русского дружеского дискурса. Согласно японской этике, дружеское поведение должно быть жестко направлено на ранжирование взаимоотношений в зависимости от статусных ролей: *Этикет надо соблюдать даже в дружбе*. Поэтому японский дискурс включает базовую понятийную сетку, определенным образом программирующую дружеское взаимодействие: *shinyu* "близкий

друг”, *tomodachi* ”друг”, *yujin* ”друг” (более официальный эквивалент), *doryo* ”товарищ по работе, имеющий тот же статус,” и *pasata* ”товарищ по игре, интересам и т. п.”

Что же касается русского дискурса, то для него характерен следующий эмоционально-оценочный ряд: *друг/подруга*, *товарищи*, *приятель/приятельница*, *знакомый/знакомая*. Примечательно, что «Толковый словарь живого великорусского языка» В.И. Даля раскрывает следующим образом понятие друг: ”такой же, равный, другой я, другой ты; ближний, всякий человек другому”. Этимологи отмечают также близость концепта *дружба* понятиям родства, товарищества и любви, отражающим процесс дифференциации и взаимопроникновения инструментальных (практическая взаимопомощь и выручка) и эмоционально-экспрессивных (взаимная симпатия, эмоциональная привязанность, сочувствие, взаимопонимание) функций. Таким образом, данный концепт не только органично объединяет в себе определенную ценностную иерархию и то, что понимается, чувствуется и переживается носителями языка. В нем находит выражение своеобразный стиль мышления и самобытный способ существования русской языковой личности, раскрывающийся в общении.

**Этнокультурная специфика** языковой и речеведческой картин мира и унаследованного дискурса предопределяет формирование национально самобытной **экзистенциальной** (от позднелат. *existentia* – имеющий отношение к существованию) **картины мира**, своего рода «экзистенциальной пространственности» (М. Хайдеггер), в которой разворачивается личностное бытие носителей языка. Поэтому рассмотрение межкультурной коммуникации с необходимостью включает анализ этикопсихолингвистических особенностей дискурса как важнейшего феномена, принадлежащего одновременно языку, культуре и сформировавшейся в их пределах личности.

”Культура, – писал Ю.М. Лотман, – не беспорядочное накопление текстов, а сложная, иерархически организованная, работающая система” [Лотман, 1992: 155]. Межличностный дискурс как часть культуры также представляет собой определенным образом организованную целостность. Более того, являясь предметом изучения едва ли не всех гуманитарных наук, ”диалог личностей” нуждается в разработке единого концептуального подхода, базирующегося на антропологической концепции личности.

В качестве исходного смыслообраза при построении модели использовался картезианский символ дерева, с помощью которого философ раскрыл смысл учености, сравнив его корни с познаниями в области метафизики, ствол – в области физики, а ветви – со знаниями во всех прочих науках. Аналогичным образом способность к общению была уподоблена дереву, у которого корни и ствол соотносятся с ее этической и психологической сторонами, а ветви – с лингвистической стороной, где тесно переплетаются язык, речь и дискурс как наиболее полное выражение национально обусловленных особенностей общения. В качестве аналога этикетной общности (<Я – Вы/Ты>) предлагается пирамида в форме тетраэдра (модель 1 порядка). Основание данной пирамиды уподоблено способности к общению, характерной для русской языковой личности, а боковые грани соответствуют взаимодействующим в ней психологической (1), лингвистической (2) и этической (3) сторонам общения.

Развитие диалогических отношений сопровождается постепенным раскрытием психологической, лингвистической и этической сторон общения. Следовательно, модель 1-го порядка может быть дополнена тремя тетраэдрами, построенными на ее боковых гранях как на основаниях.

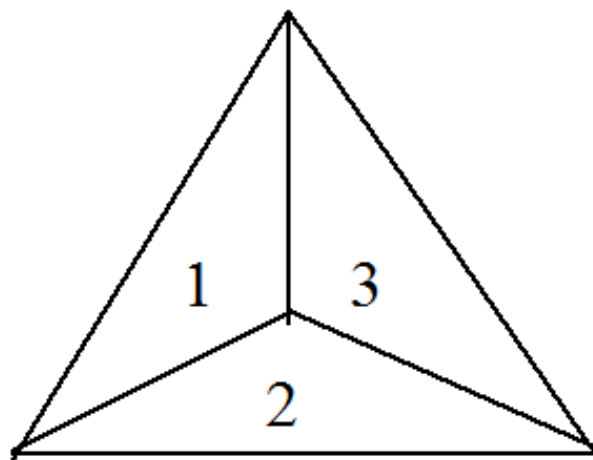
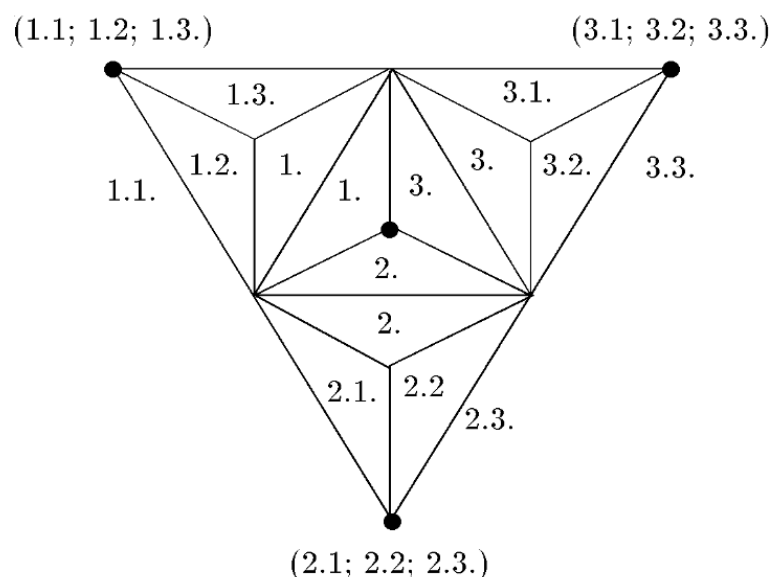


Рис.1. Модель 1-го порядка

**Психологическая** (1) сторона раскрывается целостным взаимодействием перцептивного (1.1), коммуникативного (1.2) и интерактивного (1.3) планов.



**Рис.2.** Модель 2-го порядка

**Лингвистическая** (2) сторона может быть представлена триединством речи (2.1), языка (2.2) и дискурса (2.3).

**Этическая** (3) сторона представляет собой единство народных (3.1), философских (3.2) и вероучительных (3.3) представлений о речевом поведении.

Аналогом межличностного взаимодействия, достигающего уровня общего «модуса существования», является модель 3-го порядка, которая возникает как результат "раскрытия" каждой из 9 граней модели 2-го порядка триединством составляющих ее аспектов.

**Перцептивный план** интерпретируется как триединство аффективного (1.1.1.), когнитивного (1.1.2) и мотивационно-смыслового (1.1.3) аспектов формирования образа собеседника.

**Коммуникативный план** раскрывается как целостный процесс самовыражения (1.2.1), интерпретации передаваемой информации (1.2.2) и следования принятой этике общения (1.2.3).

**Интерактивный план** может быть представлен триадой, включающей взаимодействие (1.3.1), взаимопонимание (1.3.2) и взаимоотношения (1.3.3).

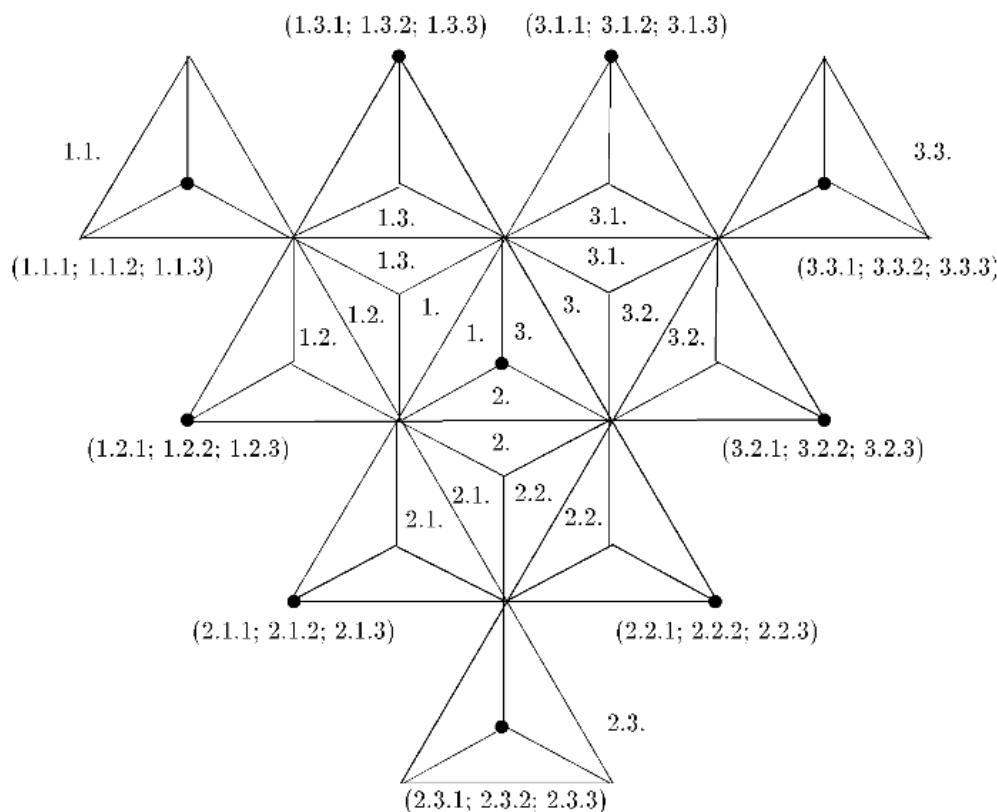


Рис.3. Модель 3-го порядка

**Речь** характеризуется триединством локутивного (2.1.1), иллюкутивного (2.1.2) и перлокутивного (2.1.3) аспектов.

**Языковой план** находит выражение в целостном единстве семантики (2.2.1), синтактики (2.2.2) и прагматики (2.2.3).

**Дискурс** раскрывается триадой интенционального (2.3.1), коммуникативного (2.3.2) и аксиологического аспектов (2.3.3).

**Народные этические представления** – триединством натуралистически-родовых (3.1.1), каритативных (3.1.2) и ритуалистических (3.1.3) стереотипов должного поведения.

**Философские представления** характеризуются взаимодействием этического учения о принятии "иного" (3.2.1), о нравственных принципах (3.2.2) и о свободе воли (3.2.3).

**Вероучительные представления** – триединством, включающим заповеди отношения к самому себе (3.3.1), к ближнему (3.3.2) и к Богу (3.3.3).

Последовательное раскрытие характерной для русской языковой личности способности к общению привело к построению композиционно сложной структуры. Построение же полной модели межкультурного личностного взаимодействия предполагает разработку аналогичной модели с позиции представителя иной лингвокультурной общности. Соединив обе модели по принципу зеркального отображения, можно получить самое общее представление об "априорных условиях коммуникации" (К.О. Апель). А поскольку программы коммуникативного поведения у представителей различных культур могут отличаться, данная модель ориентирована на осмысление культуры другого народа.

Данная модель может быть использована при рассмотрении межкультурной коммуникации, поскольку с ее помощью возможно анализировать национально-самобытное речевое поведение на единой методологической основе. Охарактеризованный способ моделирования представляет собой логический переход от преимущественно эмпирического изучения русского речевого общения к его теоретическому осмыслению. Кроме того, полученная модель может рассматриваться как возможный вариант концептуализации речевого общения представителей различных лингвокультурных общностей.

Разумеется, содержательная сторона предложенной модели требует уточнения и дальнейшей разработки. Но и в представленном виде она может рассматриваться как достаточно полное описание начальных условий межкультурной коммуникации.

«Абсолютной модели, и в частности, абсолютной модели языка (речевой деятельности), не бывает,



- писал И.А. Мельчук. – Всякое описание, всякая модель объясняет, «покрывает» его лишь частично, «освещая» в нем то, что важно с определенной точки зрения» [цит. по: Леонтьев, 1974, с. 40]. Предъявленная модель – это логический переход от преимущественно эмпирического изучения межличностного дискурса инофонов к его теоретическому осмыслению. В описанной модели очевидно стремление автора к построению целостной концепции межкультурной коммуникации. И хотя модель данная имеет поисковый характер, полученный на ее основе смыслообраз будет способствовать, как нам кажется, более глубокому и адекватному пониманию речевого взаимодействия с представителем иной лингвокультурной общности.

## ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Д.П. Голоскоков<sup>1</sup>

Санкт-Петербургский государственный университет водных коммуникаций, г.  
Санкт-Петербург

<sup>1</sup>E-mail: -

**Аннотация.** В статье получено аналитическое решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в полупространстве. Решение строится с помощью последовательного применения интегральных преобразований Фурье-Бесселя и синус-преобразования Фурье. Рассмотрен пример задания начальной и граничной функций.

### 1. Постановка задачи для уравнения теплопроводности в полупространстве

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности в полупространстве: найти функцию  $u(r, z, t)$ , удовлетворяющую уравнению теплопроводности в полупространстве  $0 < r < \infty, z > 0$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad z > 0, \quad t > 0; \quad (1)$$

граничным условиям

$u|_{r \rightarrow 0}$  – ограничена,  $u|_{\sqrt{r^2+z^2} \rightarrow \infty}$  – ограничена;

$$u|_{z=+0} = f(r, t) \quad (2)$$

и начальному условию

$$u|_{t=+0} = g(r, z). \quad (3)$$

### 2. Преобразование Фурье-Бесселя

Преобразованием Фурье-Бесселя функции  $\varphi(r)$  называется интеграл [1], [2]

$$\Phi(\nu) = \int_0^{\infty} \varphi(r) r J_0(\nu r) dr, \quad 0 < \nu < +\infty. \quad (4)$$

Формула обращения

$$\varphi(r) = \int_0^{\infty} \Phi(\nu) \nu J_0(\nu r) d\nu, \quad 0 < r < +\infty.$$

Здесь  $J_0(x)$  – функция Бесселя первого рода с нулевым индексом

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}, \quad |x| < \infty.$$

Заметим, что если функция  $\varphi(r)$  такая, что  $\varphi(r) = O(r^\alpha)$  при  $r \rightarrow 0, \alpha > -2$  и  $\varphi(r) = O(r^\beta)$  при  $r \rightarrow \infty, \beta < -\frac{3}{2}$ , то интеграл (4) сходится [2].

Применим к уравнению (1) преобразование Фурье-Бесселя

$$U(\nu, z, t) = \int_0^{\infty} u(r, z, t) r J_0(\nu r) dr, \quad 0 < \nu < +\infty.$$

Получим

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial U(\nu, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(\nu, z, t)}{\partial z^2} - \nu^2 U(\nu, z, t), \quad (5)$$

причем

$$U|_{z=+0} = F(\nu, t) \quad (6)$$

$$U|_{t=+0} = G(\nu, z). \quad (7)$$

где

$$F(\nu, t) = \int_0^{\infty} f(r, t) r J_0(\nu r) dr, \quad 0 < \nu < +\infty, \quad (8)$$

$$G(\nu, z) = \int_0^{\infty} g(r, z) r J_0(\nu r) dr, \quad 0 < \nu < +\infty. \quad (9)$$

### 3. Синус-преобразование Фурье

Применим к уравнению (5) синус-преобразование Фурье [1]

$$W(\nu, s, t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} U(\nu, z, t) \sin(sz) dz, \quad 0 < s < +\infty.$$

Формула обращения

$$U(\nu, z, t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} W(\nu, s, t) \sin(sz) ds, \quad 0 < z < +\infty. \quad (10)$$

Получим

$$\frac{1}{a^2} \frac{dW(\nu, s, t)}{dt} + (\nu^2 + s^2) W(\nu, s, t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} s F(\nu, t). \quad (11)$$

Аналогично преобразуем начальное условие (7)

$$W|_{t=+0} = \bar{G}(\nu, s), \quad (12)$$

причем

$$\bar{G}(\nu, s) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} G(\nu, z) \sin(sz) dz, \quad 0 < s < +\infty. \quad (13)$$

Общее решение уравнения (11) легко находится

$$W(\nu, s, t) = C(\nu, s) e^{-(\nu^2 + s^2)a^2 t} + W^*(\nu, s, t),$$

где  $W^*(\nu, s, t)$  — какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения (11),  $C(\nu, s)$  — произвольная постоянная интегрирования, которая может зависеть от параметров  $\nu, s$ . Такое решение можно получить, например, методом вариации произвольных постоянных

$$W^*(\nu, s, t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} s a^2 e^{-(\nu^2 + s^2)a^2 t} \int F(\nu, t) e^{(\nu^2 + s^2)a^2 t} dt. \quad (14)$$

Используя начальное условие (12), находим произвольную постоянную  $C(\nu, s)$

$$C(\nu, s) = \bar{G}(\nu, s) - W^*(\nu, s, 0).$$

Таким образом, решение уравнения (11), удовлетворяющее начальному условию (12), имеет вид

$$W(\nu, s, t) = [\bar{G}(\nu, s) - W^*(\nu, s, 0)] e^{-(\nu^2 + s^2)a^2 t} + W^*(\nu, s, t). \quad (15)$$

Остается только последовательно обратить формулы с помощью обратных преобразований — обратного синус-преобразования Фурье (10) и обратного преобразования Фурье-Бесселя

$$u(r, z, t) = \int_0^{\infty} U(\nu, z, t) \nu J_0(\nu r) d\nu, \quad 0 < r < +\infty. \quad (16)$$

Итак, получено формальное решение задачи (10), (15) и (16), которое можно записать одной формулой

$$u(r, z, t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \nu J_0(\nu r) d\nu \int_0^{\infty} W(\nu, s, t) \sin(sz) ds, \quad 0 < r < +\infty, \quad 0 < z < +\infty, \quad t > 0.$$

#### 4. Пример

Пусть начальная  $g(r, z)$  и граничная  $f(r, t)$  функции заданы выражениями

$$g(r, z) = T_0 e^{-\frac{r}{R}} \quad (17)$$

$$f(r, t) = \begin{cases} T_1, & r < \rho; \\ 0, & r > \rho. \end{cases} \quad (18)$$

где  $T_0, T_1$  — константы. Очевидно, функции (15) и (16) удовлетворяют всем условиям существования интегралов (8) и (9). Имеем

$$\begin{aligned} F(\nu, t) &= \int_0^{\rho} T_1 r J_0(\nu r) dr = \frac{T_1 \rho J_1(\nu \rho)}{\nu}, \\ G(\nu, z) &= \int_0^{\infty} T_0 e^{-\frac{r}{R}} r J_0(\nu r) dr = \frac{T_0 R^2}{(1 + \nu^2 R^2)^{3/2}}, \\ \bar{G}(\nu, s) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} G(\nu, z) \sin(sz) dz = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{T_0 R^2}{s(1 + \nu^2 R^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Здесь  $J_1(x)$  — функция Бесселя первого рода с единичным индексом

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!}, \quad |x| < \infty.$$

А тогда

$$W^*(\nu, s, t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} s a^2 e^{-(\nu^2+s^2)a^2 t} \int F(\nu, t) e^{(\nu^2+s^2)a^2 t} dt = \frac{\sqrt{2} T_1 \rho}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{s J_1(\nu \rho)}{\nu(s^2 + \nu^2)}.$$

И, следовательно,

$$\begin{aligned} W(\nu, s, t) &= \left[ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{T_0 R^2}{s(1 + \nu^2 R^2)^{3/2}} - \frac{\sqrt{2} T_1 \rho}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{s J_1(\nu \rho)}{\nu(s^2 + \nu^2)} \right] e^{-(\nu^2+s^2)a^2 t} + \frac{\sqrt{2} T_1 \rho}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{s J_1(\nu \rho)}{\nu(s^2 + \nu^2)}. \\ U(\nu, z, t) &= \frac{T_0 R^2 e^{-\nu^2 a^2 t}}{s(1 + \nu^2 R^2)^{3/2}} \Phi\left(\frac{z}{2a\sqrt{t}}\right) - \frac{2T_1 \rho e^{-\nu^2 a^2 t}}{\pi \nu} \int_0^{\infty} \frac{e^{-s^2 a^2 t} s J_1(\nu \rho) \sin(sz)}{(s^2 + \nu^2)} ds + \frac{T_1 \rho J_1(\nu \rho)}{\nu} e^{-\nu z}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} u(r, z, t) &= T_0 R^2 \Phi\left(\frac{z}{2a\sqrt{t}}\right) \int_0^{\infty} \frac{e^{-\nu^2 a^2 t} \nu J_0(\nu r)}{(1 + \nu^2 R^2)^{3/2}} d\nu - \\ &- \frac{2T_1 \rho}{\pi} \int_0^{\infty} J_1(\nu \rho) J_0(\nu r) d\nu \int_0^{\infty} \frac{e^{-(s^2+\nu^2)a^2 t} s \sin(sz)}{(s^2 + \nu^2)} ds + \\ &+ T_1 \rho \int_0^{\infty} e^{-\nu z} J_1(\nu \rho) J_0(\nu r) d\nu. \end{aligned}$$

Здесь  $\Phi(x)$  — интеграл вероятности

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

## 5. Примечание

Все аналитические выкладки выполнялись с использованием системы аналитических вычислений Maple 13. Следует отметить, что в системе Maple предусмотрено несколько иное преобразование Ханкеля, чем то, которое использовалось в данной работе, а именно

$$\Phi(\nu) = \int_0^{\infty} \varphi(r) \sqrt{\nu r} J_0(\nu r) dr, \quad 0 < \nu < +\infty,$$

причем, формула обращения

$$\varphi(r) = \int_0^{\infty} \Phi(\nu) \sqrt{\nu r} J_0(\nu r) d\nu, \quad 0 < r < +\infty.$$

В работе использовано преобразование (4). Это преобразование приводит к более простым формулам при вычислении конкретных интегралов.

Относительно терминологии — мы придерживались определений, приведенных в книгах [3], [4]. Преобразование (4) — преобразование Фурье-Бесселя — частный случай общего преобразования Ханкеля с функцией Бесселя первого рода с нулевым индексом  $J_0(\nu r)$ .

## Литература

- [1] *Голоскоков Д.П.* Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. — СПб.: Питер, 2004. — 539 с.: ил.
- [2] *Диткин В.А., Прудников А.П.* интегральные преобразования и операционное исчисление.—М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. — 524 с.
- [3] *Сnedдон И.* Преобразования Фурье. — М.: Изд-во Иностран. лит-ры, 1955. — 668 с.
- [4] *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. — М.-Л.: Гос. Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963. — 360 с.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРИКЛАДНЫХ NP-ПОЛНЫХ ЗАДАЧ

*Д.П. Голоскоков, А.П. Нырков, Т.П. Кныш, А.В. Васин, А.А. Кардаков,  
С.С. Соколов<sup>1</sup>*

*Санкт-Петербургский государственный университет водных коммуникаций, г.  
Санкт-Петербург*

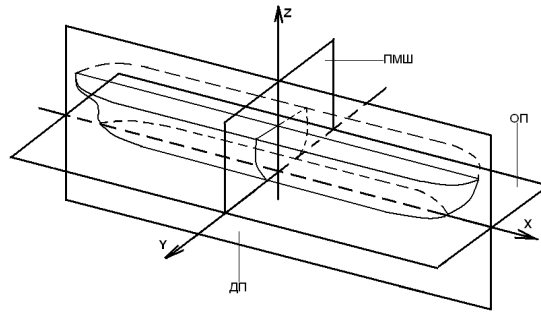
---

<sup>1</sup>E-mail: -

Среди множества NP-полных задач особую значимость на практике приобрела “задача о ранце”. В представленной статье рассмотрена прикладная задача — являющаяся частным случаем “задачи о ранце” — рациональное размещение груза на судне.

Рассмотрим построение проекций судна для определения основных точек направленного воздействия сил в процессе эксплуатации. Основные координатные плоскости судна:

- диаметральной плоскость (ДП) — плоскость, рассекающая судно вдоль, ДП — является продольной плоскостью симметрии;
- плоскость мидель-шпангоута (ПМШ) — рассекает судно поперек, перпендикулярно ДП на середине расчетной длины судна;
- основная плоскость (ОП) — плоскость, перпендикулярная ДП и ПМШ, проходящая через тоску пересечения этих плоскостей с теоретической поверхностью судна в днищевой части (см. рис.1)



**Рис.1.** Основные координатные плоскости судна

Сечения поверхности судна, параллельные ДП — батоксы, параллельные ПМШ — шпангоуты, параллельные ОП — ватерлинии.

Определим основные величины, характеризующие судно, которые будут использоваться в расчетах:

$L$  — длина между перпендикулярами — расстояние между точками пересечения грузовой ватерлинии (ГВЛ — уровень воды по отношению к судну при штиле и полной загрузке);

$B$  — наибольшая ширина судна — расстояние по ширине между плоскостями, параллельными ДП и касательными к корпусу судна в крайних его точках; обычно наиболее широким является мидель-шпангоут, но бывает и смещение наиболее широкого шпангоута в сторону кормы;

$H$  — высота борта — расстояние между ОП и линией палубы в ПМШ;

$T$  — средняя осадка судна — величина углубления судна, определяется как сечение, проходящее через центр тяжести площади ватерлинии;

$T_m$  — углубление судна, измеряется на мидель-шпангоуте; при осадке судна на ровный киль  $T = T_m$ ;

$F$  — высота надводного борта -  $F = H - T_m$ ;

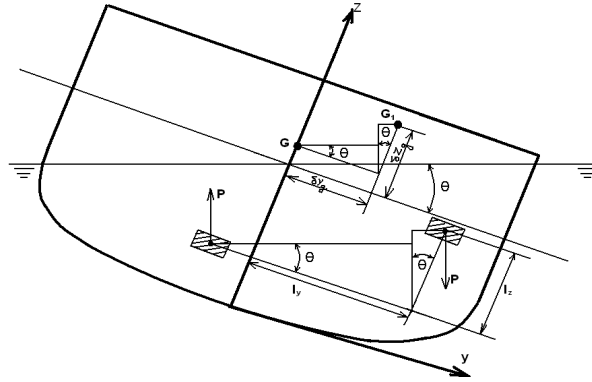
$D$  — масса судна.

Пусть на судне некоторый груз  $P$  массой  $m$  перенесен так, что центр тяжести (ЦТ) этого груза переместился из точки  $A_0\{x_0, y_0, z_0\}$  в точку  $A_1\{x_1, y_1, z_1\}$ . Тогда масса всего судна не изменится, но изменится положение его ЦТ. Разлагая фактическое перемещение на три взаимно ортогональных перемещения параллельно осям координат, рассмотрим перемещение продольное  $l_x = x_1 - x_0$ , поперечное  $l_y = y_1 - y_0$  и вертикальное  $l_z = z_1 - z_0$ .

Перемещение ЦТ судна можно найти с помощью теоремы теоретической механики о статических моментах, согласно которой:

$$\begin{aligned} \delta x_g &= Pl_x/D \\ \delta y_g &= Pl_y/D \\ \delta z_g &= Pl_z/D \end{aligned} \quad (1)$$

В результате перемещения появятся две дополнительные пары сил. Одна из них будет действовать в ДП, вызывая дифферент. Плечо ее будет равно  $\delta x_g \cos \psi + \delta z_g \sin \psi$ , где  $\psi$  - угол дифферента. Другая же будет действовать в поперечной плоскости, параллельной ПМШ, вызывая крен. Плечо ее будет равно  $\delta y_g \cos \theta + \delta z_g \sin \theta$  (рис. 2).



**Рис.2.** Перемещение груза внутри судна

Моменты этих пар равны:  
дифферентующий

$$\delta M_{\text{диф}} = D(\delta x_g \cos \psi + \delta z_g \sin \psi);$$

кренящий

$$\delta M_{\text{кр}} = D(\delta y_g \cos \theta + \delta z_g \sin \theta).$$

Подставляя в эти формулы выражения (1)

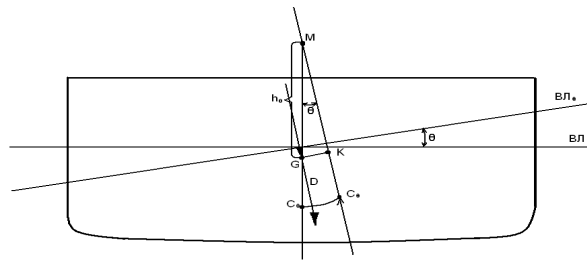
$$\left. \begin{aligned} \delta M_{\text{диф}} &= P(l_x \cos \psi + l_y \sin \psi); \\ \delta M_{\text{кр}} &= P(l_y \cos \theta + l_z \sin \theta). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

При достаточно малых углах наклона  $\sin \psi \approx \psi$ ;  $\cos \psi \approx 1$ ;  $\sin \theta \approx \theta$ ;  $\cos \theta \approx 1$ . Это допустимо, если сила тяжести или перемещения груза достаточно малы. Тогда формулы (2) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta M_{\text{диф}} &= P(l_x + l_y \psi); \\ \delta M_{\text{кр}} &= P(l_y + l_z \theta). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Согласно условиям равновесия, действие этих моментов уравновесится действием восстанавливающих моментов.

При равнообъемном наклонении ЦТ судна не меняет своего положения по отношению к системе координат  $Oxyz$ , связанной с судном, а центр величины (ЦВ – точка приложения приведенной сил плавучести) переместится в сторону наклона (в случае динамического использования судна, например, в момент движения по курсу, вместо ЦВ используется центр вращения (ЦВР) – точка пересечения координатных осей вращения судна). Вес судна и сила поддержания  $pgV$  образуют пару (рис. 5).



**Рис.3.** Определение поперечной метацентрической высоты

Плечо этой пары  $\overline{GK} = l$  называется плечом статической остойчивости. Определим величину плеча статической остойчивости из  $\triangle MGK$ :  $\overline{GK} = \overline{MG} \sin \theta$ . Восстанавливающий момент получится равным

$$M_B = Dh_0 \sin \theta \quad (4)$$

Величина  $\overline{MG}$  обозначим  $h_0$  – это поперечная метацентрическая высота. Как было сказано ранее: для малых углов можно предположить  $\sin \theta \approx \theta$ , а формула (4) переписется в виде

$$M_B = Dh_0 \theta \quad (5)$$

При наклонении около поперечной высоты также определим продольную метацентрическую высоту  $\mu_1 G = H_0$  (рис. 7). Определение поперечной метацентрической высоты

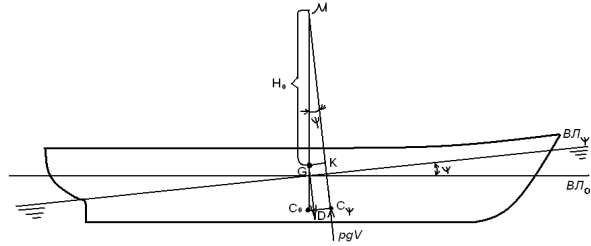


Рис.4. Определение продольной метацентрической высоты

В этом случае продольный восстанавливающий момент выражается в виде:

$$\mu_B = DH_0\psi. \quad (6)$$

Приравняв полученные выражения для дифференцирующего и кренящего моментов, получим:

$$P(l_x + l_z\psi) = DH_0\psi; P(l_y + l_z\theta) = Dh_0\theta \quad (7)$$

Отсюда угол дифферента, возникающий вследствие переноса груза, равен:

$$\psi = \frac{Pl_x}{D(H_0 - \frac{P}{D}l_z)}, \quad (8)$$

а угол крена:

$$\theta = \frac{Pl_y}{D(h_0 - \frac{P}{D}l_z)}, \quad (9)$$

Согласно формуле (1), вычитаемое, стоящее в знаменателях этих формул – это вертикальное смещение ЦТ судна, которое приводит к смещению метацентрических высот. Следовательно, выражения для метацентрических высот, измененных вследствие перемещения груза, примут вид:

$$\begin{aligned} H_1 &= H_0 + \delta H; \\ h_1 &= h_0 + \delta h, \end{aligned} \quad (10)$$

Поправки для к метацентрическим высотам одинаковые, т.е.  $\delta H = \delta h = -\frac{P}{D}l_z$ . Для большинства судов на практике продольная высота много больше поперечной, отсюда можно предположить, что  $H_1 \approx H_0$ . Подставляя (10) в (8) и (9), получим:

$$\psi = \frac{Pl_x}{DH_0}; \theta = \frac{Pl_y}{Dh_1} \quad (11)$$

Рассмотрим возможные варианты переноса груза на судне: Если имеем перемещение груза в носовую часть, то

$$x_1 > x_0, l_x > 0, \psi > 0, \quad (12)$$

значит, судно получает дифферент в нос. Если же груз переносится в корму, то

$$x_1 < x_0, l_x < 0, \psi < 0, \quad (13)$$

т.е. судно дифферентует на корму. Если перенос груза осуществляется на правый борт, то

$$y_1 > y_0, l_y > 0, \theta > 0. \quad (14)$$

Если имеем перенос груза на левый борт, то

$$y_1 < y_0, l_y < 0, \theta > 0. \quad (15)$$

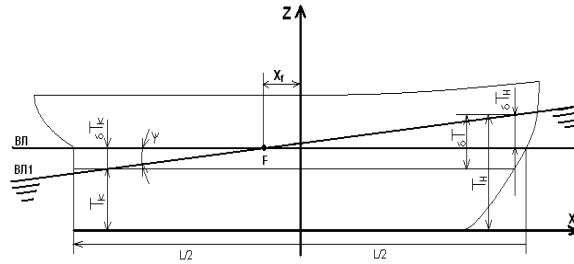
Если груз переносится вниз, то

$$z_1 < z_0, l_z < 0, \delta h > 0, \quad (16)$$

т.е. начальная остойчивость увеличится. Если груз переносится вниз, то

$$z_1 > z_0, l_z > 0, \quad (17)$$

т.е. начальная остойчивость снижается. Используя теорему Эйлера, определим изменение осадок носом и кормой. Для этого проведем через точку F – ЦТ площади ватерлинии (ВЛ) судна, находящегося в прямом положении – наклонную ВЛ1 под углом дифферента  $\psi$ .



**Рис.5.** Изменение осадок носом и кормой при перемещении груза

Для изменения осадок носом  $\delta T_{\text{н}}$  и кормой  $\delta T_{\text{к}}$  можно записать

$$\delta T_{\text{н}} = \left( \frac{L}{2} - x_f \right) \psi; \delta T_{\text{к}} = - \left( \frac{L}{2} + x_f \right) \psi, \quad (18)$$

где положительные значения  $\delta T_{\text{н}}$  и  $\delta T_{\text{к}}$  соответствуют увеличению осадок носом  $\delta T_{\text{н}}$  и кормой  $\delta T_{\text{к}}$ , а отрицательные – их уменьшению. Дифферент (в метрах) определяется выражением:

$$\Delta = \delta T = \delta T_{\text{н}} - \delta T_{\text{к}} = \frac{PLl_x}{DH_0} \quad (19)$$

Таким образом, необходимо соблюдение требования

$$\Delta \rightarrow \min. \quad (20)$$

Пусть  $v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_k$  - массы контейнеров, следовательно, для массы переносимого груза  $m = \sum_{k=1}^i v_k$  и продольного перемещения  $l_x$  должны выполняться условия:

$$\left. \begin{array}{l} l_x \rightarrow \min, \\ \sum_{k=1}^i v_k \rightarrow \min \end{array} \right\} \quad (21)$$

В результате получаем математическую модель, представляющую систему основных физико - математических ограничений, соблюдение которых позволит обеспечить безопасную эксплуатацию судна с точки зрения соблюдения требования остойчивости: Расчет углов крена и дифферента, при перемещении груза – формулы (8), (9). Возможные отклонения судна от положения равновесия – формулы (12)-(17). Расчетная формула для дифферента судна при перемещении груза – (19) и система практических требований по эксплуатации судна – формулы (20), (21).

На практике следует избегать случаев переноса груза, при которых метацентрическая высота станет равной нулю или будет отрицательной, так как это противоречит правилам безопасной эксплуатации судов. Для обеспечения безопасного судоходства и оперативного реагирования на чрезвычайные ситуации, связанные с изменением осадки и угла наклона судна (крена, дифферента и уход с курса), достаточно часто требуется решить обратную задачу: определение возможного перемещения груза, зная углы крена и дифферента (по показаниям кренометра и дифферентометра, соответственно).



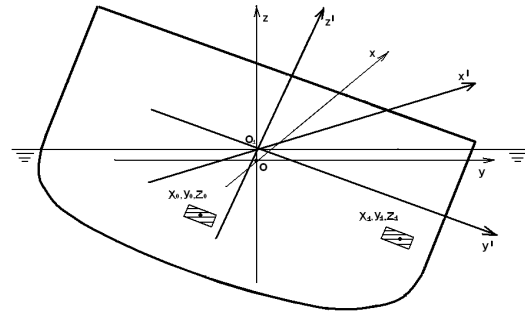
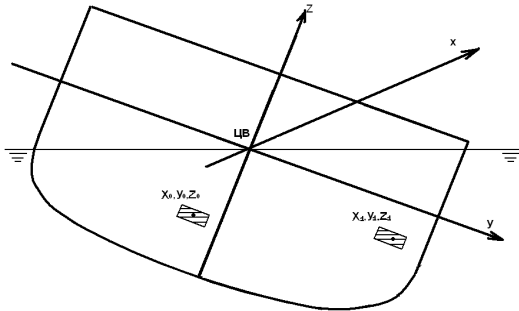
Угол дифферента, возникающий вследствие переноса груза, равен:

$$\psi = \frac{Pl_x}{D(H_0 - \frac{P}{D}l_z)}, \quad (22)$$

а угол крена:

$$\theta = \frac{Pl_y}{D(h_0 - \frac{P}{D}l_z)}, \quad (23)$$

Расположим начало координат в ЦВ (в случае динамического функционирования – ЦВР) судна. Любое перемещение груза можно разложить по осям OX, OY, OZ. Начальные координаты груза на судне:  $\{x_0, y_0, z_0\}$ , конечные координаты:  $\{x_1, y_1, z_1\}$ .



**Рис.6.** Перемещение груза в координатной плоскости судна

**Рис.7.** Сдвиг системы координат при перемещении судна

Определим длину перемещения груза в пространственных координатах:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \quad (24)$$

На практике отклонение по оси OX (т.е. отклонение от заданного курса), имеет небольшое по величине значение, поэтому им можно пренебречь и основными по-прежнему остаются значения крена дифферента.

При перемещении груза заданная пространственная система координат поворачивается относительно всех трех осей и сам груз изменяет свое положение. Точку ЦВ (ЦВР) назовем точкой O, а центр новой системы координат - O'. Первая система координат будет определяться базисными векторами:  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ , а вторая -  $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$ . Обозначим через a, b, c координаты центра второй системы, тогда

$$\overline{OO'} = ai + bj + ck. \quad (25)$$

Выразим местоположение груза (до перемещения) во второй системе координат, беря за точку центр тяжести груза - T. Заметим, что координаты  $x_0, y_0, z_0$  совпадают с координатами вектора  $\overline{OT}$  в разложении его по базису  $ijk$ , а координаты  $x_1, y_1, z_1$  совпадают с координатами вектора  $\overline{O_1T}$  в разложении по базису  $i_1j_1k_1$ , т.е.

$$\overline{OT} = x_0i + y_0j + z_0k \quad (26)$$

$$\overline{O_1T} = x_1i_1 + y_1j_1 + z_1k_1. \quad (27)$$

Так как любой вектор можно разложить по базису  $ijk$ , то найдется девять чисел  $\alpha_{lm}$  ( $l = 1, 2, 3; m = 1, 2, 3$ ) таких, что

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \alpha_{11}i + \alpha_{12}j + \alpha_{13}k \\ j_1 &= \alpha_{21}i + \alpha_{22}j + \alpha_{23}k \\ k_1 &= \alpha_{31}i + \alpha_{32}j + \alpha_{33}k \end{aligned} \right\}. \quad (28)$$

В силу правил треугольника сложения векторов

$$\overline{OT} = \overline{OO_1} + \overline{O_1T}. \quad (29)$$

Вставляя в правую часть формулы (27) значения  $i_1, j_1, k_1$ , определяемые формулами (26), и после этого подставляя в (29) значения  $\overline{OT}, \overline{OO_1}, \overline{O_1T}$ , определяемые формулами (26), (27) и (28), и группируя относительно  $i, j, k$  получим

$$x_0i + y_0j + z_0k = (a + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}y_1 + \alpha_{13}z_1)i + (b + \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}y_1 + \alpha_{32}z_1)j + (c + \alpha_{13}x_1 + \alpha_{23}y_1 + \alpha_{33}z_1)k \quad (30)$$

В силу единственности разложения вектора по базису из равенства (30) получим искомые формулы преобразования координат:

$$\begin{aligned} x_0 &= a + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}y_1 + \alpha_{31}z_1, \\ y_0 &= b + \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}y_1 + \alpha_{32}z_1, \\ z_0 &= c + \alpha_{13}x_1 + \alpha_{23}y_1 + \alpha_{33}z_1. \end{aligned} \quad (31)$$

Однако сам груз перемещается в пространстве, т.е.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 + l_x \\ y_1 &= y_0 + l_y \\ z_1 &= z_0 + l_z \end{aligned} \right\}. \quad (32)$$

Таким образом, подставляя (31) в (32), получим

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}y_1 + \alpha_{31}z_1 + l_x \\ y_1 &= b + \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}y_1 + \alpha_{32}z_1 + l_y \\ z_1 &= c + \alpha_{13}x_1 + \alpha_{23}y_1 + \alpha_{33}z_1 + l_z \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Рассматриваемые углы отклонения судна от положения равновесия в аналитической геометрии называются углами Эйлера, их значения могут быть использованы при нахождении коэффициентов формулы (11):  $\alpha_{lm} (l = 1, 2, 3; m = 1, 2, 3)$ .

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi, \\ \alpha_{12} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi, \\ \alpha_{13} &= \sin \theta \sin \varphi, \\ \alpha_{21} &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi, \\ \alpha_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi, \\ \alpha_{23} &= \sin \theta \cos \varphi, \\ \alpha_{31} &= \sin \varphi \sin \theta, \\ \alpha_{32} &= -\cos \varphi \sin \theta, \\ \alpha_{33} &= -\cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Как было сказано ранее, углом отклонения судна от курса, в силу его небольшой величины можно пренебречь, т.е.  $\sin \varphi \approx \varphi, \cos \varphi \approx 1$ . В результате формулы расчета координат возможного перемещения груза, зная углы отклонения судна от положения равновесия будут выглядеть следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a + (\cos \psi - \varphi \sin \psi \cos \theta)x_1 + (-\varphi \cos \psi - \sin \psi \cos \theta)y_1 + z_1 + l_x \\ y_1 &= b + (\sin \psi + \varphi \cos \psi \cos \theta)x_1 + (-\varphi \sin \psi)y_1 + (-\cos \psi \sin \theta)z_1 + l_y \\ z_1 &= c + (\varphi \sin \theta)x_1 + (\sin \theta)y_1 + (\cos \theta)z_1 + l_z \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Полученные зависимости могут быть использованы на практике для прогнозирования, предупреждения, оперативного реагирования и ликвидации последствий внештатных аварийных ситуаций.

## Литература

- [1] Математика и её приложения: Межвузовский сборник научных трудов/ Под редакцией Д.П. Голоскокова, А.Р. Шкадовой. – Выпуск 2 (2009) – СПб.: СПГУВК, 2009. – «Трёхмерная модель рационального размещения грузов на складских площадях» - 185 с.
- [2] Р.В. Борисов, В.В. Луговский, Б. В. Мирохин, В.В. Рождественский. – Статика корабля: Учебное пособие/. – 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: Судостроение, 2005. – 256 с.

## КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА В ТЕОРЕТИЧЕСКИХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

В.П. Дьяконов<sup>1</sup>

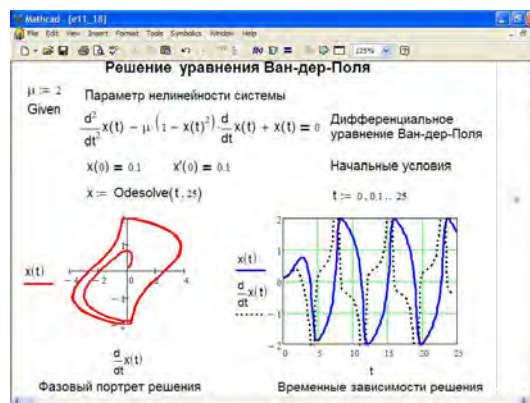
Смоленский государственный университет, г. Смоленск

<sup>1</sup>E-mail: -

На протяжении веков математика и математические методы были основой большой науки. Без них невозможно развитие физики и химии, астрономии и космонавтики, вычислительной техники, техники связи, энергетики и машиностроения и иных областей науки и техники. Порою даже не имеющих отношения к техническим наукам – например, биологии и медицины. Это привело к накоплению огромного багажа знаний в области математических методов и порою затруднило их применение. Некоторые из этих методов стали основой крупных отраслей науки и техники. Например, теория поля и преобразования Фурье легли в основу радиотехники и средств связи, матричные методы, графы и методы численного решения дифференциальных уравнений стали основой математического моделирования самых различных процессов, систем и технических устройств.

Но в последнее время намечились тревожные явления в развитии фундаментальных наук. В период мирового кризиса финансирование научных исследований заметно сократилось во всем мире. И это уже дает о себе знать - сокращены многие космические программы (например, освоения Луны и создания космических челноков), возникли крупные техногенные катастрофы на объектах атомной и гидро- энергетики и на ряде шахт, загрязнение нефтью мексиканского залива из-за аварии на нефтяной платформе и т.д. С развалом СССР в начале 90-х годов ушедшего 20-го века наука в России и разработка наукоемких приборов были практически разрушены и до их восстановления очень далеко.

К счастью есть и положительные моменты. К таким можно отнести возникновение в 80-х годах компьютерной математики и программных систем компьютерной математики (СКМ). Эти системы резко облегчают труд многих тысяч ученых, инженеров, преподавателей, аспирантов и студентов университетов самого различного профиля. Столетия математика помогала ученым в их трудном и почетном труде открывателей нового. Теперь появились средства, способные помочь самой математике и всем, кто использует ее средства в интересах развития своих наук и экономики в целом – рис. 1. В недалеком прошлом компьютерную математику нередко представляли как курс обычной математики для студентов по специальности информатика и вычислительная техника. На наш взгляд, это ошибочная трактовка! Ныне компьютерную математику следует рассматривать как совокупность аппаратных и программных средств для решения математических задач любого уровня с высокой эффективностью, нередко превосходящей возможности достаточно опытных математиков-аналитиков. Уже в силу этого системы компьютерной математики могут быть отнесены к системам искусственного интеллекта, способным предоставлять пользователям знания в области математики и математических наук.



**Рис.1.** Пример решения нелинейного дифференциального уравнения Ван-дер-Поля в окне системы Mathcad 11

Компьютерная математика, как теоретическая наука, использует не только весь багаж математических познаний за многие века развития математики, но и новые и пока малоизвестные методы автоматических математических преобразований, специально созданные для решения математических задач

на компьютерах – прежде всего персональных. К сожалению, специфические методы компьютерной математики относятся к ноу-хау фирм, разработчиков систем компьютерной математики (СКМ) и потому закрытых и мало известных.

Из аппаратных средств компьютерной математики стоит отметить программируемые научные калькуляторы с встроенными системами компьютерной алгебры для аналитических вычислений (например, фирмы Texas Instruments), математические сопроцессоры для быстрого вычисления множества элементарных и специальных функций, графические сопроцессоры для синтеза и математической обработки сложных изображений, микросхемы для систем глобального позиционирования на местности (реализующие сложные тригонометрические вычисления), чипы для быстрого преобразования Фурье и вейвлет-преобразований и др. устройства [1]. Появились и новейшие технические устройства, основанные на использовании средств компьютерной математики, например это цифровые осциллографы и анализаторы спектров сигналов.

Но, наибольшие успехи были достигнуты, несомненно, в области разработки специализированных программных продуктов – СКМ. Вначале СКМ делились на два принципиально различных класса: системы для численных и символьных (аналитических) вычислений. К первым обычно относили системы Eureka, Mathcad, MATLAB, электронные таблицы, например, Excel. Ко вторым относились системы Derive, MuPAD, Mathematica и Maple. Одним из первых программных средств для выполнения аналитических расчетов был язык программирования Аналитик малых советских ЭВМ класса Мир.

В настоящее время такое деление является излишним и даже ошибочным. Все указанные выше системы получили дальнейшее развитие как универсальные математические системы, обеспечивающие автоматизацию как численных, так и аналитических вычислений с высочайшим уровнем графической, а то и мультимедийной визуализацией, например сопровождением вычислений анимационной графикой, звуком и даже видео-материалами. Роль СКМ с широкими возможностями символьных вычислений наиболее высока в проведении и проверке теоретических исследований. Известны случаи весьма полезного применения СКМ лауреатами Нобелевских премий (в свое время это натолкнуло S. Wolfram на создание СКМ Mathematica и организацию фирмы Wolfram Research Inc.).

Среди универсальных СКМ надо отметить программы Derive, MuPAD, Mathcad, Maple, Mathematica и MATLAB [1]. Первые две программы создавались как средства автоматизации учебных расчетов. Самая малая по объему кодов система Derive создавалась средствами языка искусственного интеллекта MuLISP, большинство других СКМ построено на основе языка C и его модификаций. Все системы имеют собственный входной язык общения с пользователями и язык программирования.

Ныне компьютерная математика и СКМ получили широчайшую известность в Интернете. Число ссылок на них составляет многие миллионы. Результаты поиска Интернет-страниц по СКМ весьма показательны. В мире первое место принадлежит системе Maple [2], которая является университетской разработкой, изначально ориентированной на применение в системе образования. Ныне Maple мощная универсальная СКМ, способная решать весьма широкий класс задач и лидирующая в области аналитических (символьных вычислений).

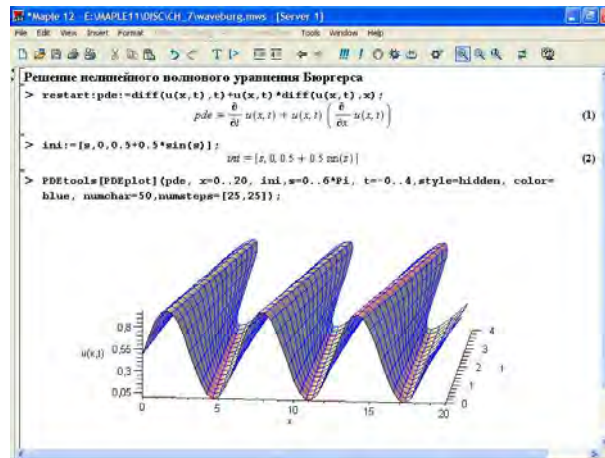
Лидер среди систем компьютерной алгебры СКМ Maple в последние годы бурно развивалась. Наиболее популярными стали последние версии Maple 9.5 и Maple 10, описанные в книге автора [2], ставшей победителем всероссийского конкурса “Лучшая научная книга 2007”. Следом уже появилась версия Maple 11, 12 и 13. Развитие новых версий Maple шло в нескольких направлениях:

- совершенствования интерфейса, который в максимальной степени должен быть приемлемым даже для начинающих пользователей;
- увеличение числа маплетов – специальных диалоговых окон для предельно простого решения конкретных задач;
- расширения числа пакетов расширения системы.

Число функций ядра Maple возросло с 2500 до более чем 4000. Для приверженцев “классического” Maple, наряду со стандартной версией интерфейса поставляется и система с классическим интерфейсом. Большинство вычислений в нем выполняется заметно быстрее, чем в варианте со стандартным интерфейсом – рис. 2. Увы, полной совместимости между ними не предусмотрено. В поставку входит также графический калькулятор, возможности которого, однако, намного скромнее возможностей в целом этой мощной системы.

Довольно неожиданно с очень малым отрывом от Maple в мире стала лидировать малая система Derive (последняя версия Derive 6.2). Ее резко возросшая популярность связана с удачным слиянием разработчика системы (небольшой компании Soft Warehouse, Inc.) с крупной корпорацией Texas

Instruments, Inc. – разработчиком популярных микрокалькуляторов, в том числе имеющих встроенную систему Derive (TI-89, TI-92, TI-92 Plus и др.). Их массовый выпуск способствовал росту популярности этой очень интересной и полезной системы. Однако, кризис ударил по этой маленькой жемчужине компьютерной математики – недавно корпорация Texas Instruments отказалась от дальнейшей ориентации своих научных калькуляторов на нее.



**Рис.2.** Пример решения нелинейного дифференциального уравнения Бюргера в частных производных описывающего возникновение ударной волны при распространении лазерного излучения в нелинейной среде

Третье место в мировом Интернете заслуженно заняла система MATLAB [4-6], явно лидирующая в области численных вычислений и в математическом моделировании. Это самая громоздкая из описываемых СКМ – ее последние версии MATLAB R2009b и R2010a занимают на жестком диске ПК свыше 3 Гбайт памяти. Однако столь большой объем памяти не случаен – система поставляется с более чем 80-ю пакетами расширения в самых новых областях науки и технике, таких как вейвлеты, средства обработки изображений и сигналов, нейронные сети, нечеткая логика, биоинформатика и др. Все это быстро вывело эту мощную матричную систему в число лидеров, причем бесспорных в области технических вычислений и визуально-ориентированного блочного математического моделирования. Последнее реализуется с помощью главного пакета расширения - Simulink. В новые версии MATLAB введены пакеты расширений по биоинформатике, моделированию электронных схем и др. Они существенно дополнили уже имеющиеся пакеты расширения по обработке сигналов и изображений, электроэнергетики, сплайнам и вейвлетам и т.д. и т.п. Великолепная графическая визуализация вычислений характерна для этой мощной системы.

В России положение с популярностью СКМ резко отличается от описанного и характерного для мировой популярности систем. Так, бесспорным лидером у нас стала система MATLAB, а затем система Maple. До недавних пор явно лидирующая система Mathcad опустилась на третье место. Впрочем, надо отметить, что на форумах (например, Exponenta.Ru) Mathcad уступает по популярности лишь СКМ MATLAB.

Падение интереса к системе Mathcad порождено многими факторами. Изначально система Mathcad была системой для массовых численных расчетов (см. пример на рис. 1). Однако тут, несмотря на удобство интерфейса и множество поклонников, она объективно уступает куда более мощной системе MATLAB. Символьные вычисления появились в Mathcad давно – начиная с версии Mathcad 3.0 for Windows. Они базировались не на средствах собственного ядра символьных вычислений, а на использовании заметно урезанного ядра системы Maple. При этом доступ осуществлялся всего к паре десятков функций ядра Maple (из более чем 3000 функций, встроенных в ядро и доступных в СКМ Maple). Впрочем, это не касается промежуточных вычислений, в которых могут быть задействовано большинство функций ядра Maple. Наиболее удачной для символьных вычислений оказалась версия Mathcad 11, в дальнейших версиях доступ к функциям ядра символьных вычислений был сильно урезан.

Вторым фактором стали метания корпорации MathSoft, Inc. – разработчика системы Mathcad. Когда стало ясно, что Mathcad уступает по математическим возможностям более мощным системам Mathematica, Maple и MATLAB, корпорация MathSoft решила занять место на рынке программных средств для образования. Она была переименована в Mathsoft Engineering and Education. Однако, место на этом рынке тоже не пустовало – там давно обосновались Derive и MuPAD. Несколько лет назад

корпорация прекратила свое существование и волилась в компанию РТС, занимающуюся поддержкой систем автоматизированного проектирования (САПР).

Насколько полноценно Mathcad волеется в ряды САПР пока не вполне ясно. Корпорация РТС явно упустила время на совершенствование системы Mathcad, которая оказалась для нее не родной. Последняя версия Mathcad 14, к сожалению, лишилась мощного ядра символьных вычислений от СКМ Maple. Видимо, это связано с ограничением сроков лицензии на применение этого ядра и переходом MapleSoft, Inc. к коммерческому использованию ее продуктов. В Mathcad 14 применено ядро от СКМ MuPAD – неплохой системы учебного характера, но имеющей последнее место в рейтинге СКМ и возможности, сильно уступающие возможностям ядра Maple, увы так и не реализованным в Mathcad. К разработке Mathcad 15 приступила новая команда разработчиков из РТС и насколько удачен будет ее проект пока неясно. В России нет книг по системе MuPAD, но она достаточно полно описана в монографии [1]. Система Mathcad 14 с 2007 года не содернизировалась, тогда как версии других СКМ обновлялись ежегодно, причем фирма MathWorks обновляла свою СКМ МАТЛАВ дважды и даже трижды каждый год.

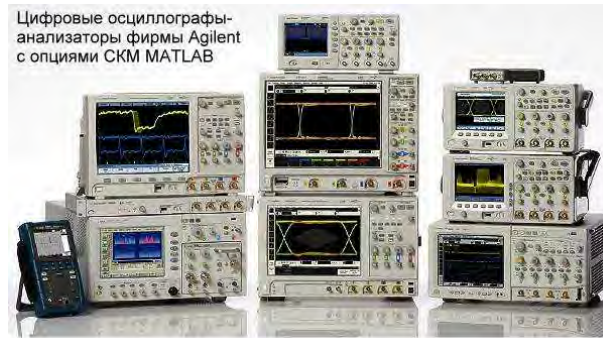
Некоторое оживление вокруг Mathcad вызвала защита В. Ф. Очковым докторской диссертации и использованием им средств Mathcad в Интернете. Впрочем, работа СКМ в Интернете реализована и в ряде других систем, например Mathematica. Это направление рассматривается как перспективное для развития СКМ, но это мнение далеко не бесспорно – представляется, что основная масса пользователя предпочтет прямое общение с установленными на ПК СКМ “дешевому” использованию их возможностей через Интернет.

Представляется, что СКМ Mathematica [7, 8], занявшая в приведенном рейтинге четвертое место как в мире, так и у нас, явно недооценивается. Наши исследования, в частности работы [9,10] показали, что в ряде случаев Mathematica дает решение задач, которое не удавалось получить в системе Maple. Впрочем, в более редких случаях, наблюдалась и обратная ситуация. Mathematica уже с версии Mathematica 5.2 обеспечила поддержку новейших многоядерных процессоров, дав реальное ускорение многомерных вычислений в несколько раз. Очередной рывок этой системы произошел в последние пару лет, когда появились новейшие версии Mathematica 6 и 7, уже выпущенные на рынок

Новые версии Mathematica реализуют концепцию динамической интерактивности, для изменения переменных и динамической графики. Эта графика в Mathematica 6 и 7 решена очень изящно, превращая любой рисунок (кстати, как и любое формульное преобразование) в простой и эффективный мультимедийный проигрыватель. Трудно переоценить эти возможности в системе образования, где наглядность представления результатов вычислений (как на экране мониторов компьютеров, так и на интерактивных досках) имеет огромное значение. Число функций в новых версиях этой системы достигло 4000 и практически сравнялось с “чемпионом мира” по этому параметру – системой Maple. радует неизмеримо большое число наглядных практических примеров, введенных в новые версии системы. Их число составляет многие тысячи и легкий доступ возможен с просто и изящно организованной справочной системы. Уже вышли первые книги по Mathematica 6 и 7.

В начале нынешнего века резко возросла роль СКМ в экспериментальных исследованиях. Они уже давно плодотворно используются для математической обработки данных таких исследований, в частности, статистической. Но ныне речь уже идет о реализации средств СКМ в новейших цифровых измерительных приборах, таких как мультиметры, осциллографы и анализаторы спектра (в том числе реального времени) – рис. 3. При этом используются методы дискретизации и цифровой обработки сигналов, Фурье-преобразования (в том числе коротко-окожные) для получения спектров и спектрограмм, средства решения дифференциальных уравнений и т.д.

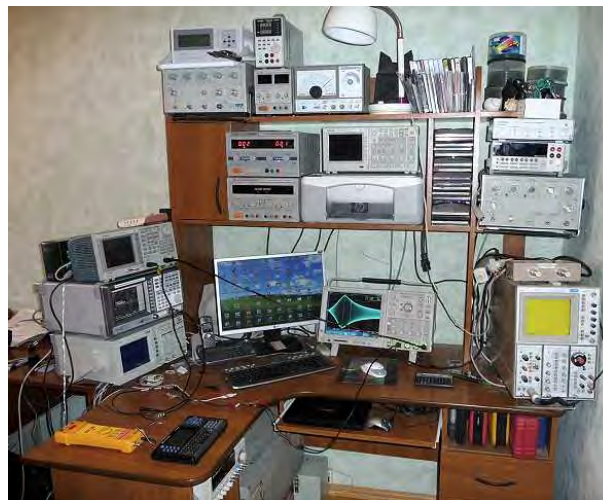
СКМ получили широкое применение и для управления (в том числе дистанционного и через Интернет) современными измерительными приборами и комплексами, что резко повышает эффективность использования современной инструментальной базы, особенно на таких крупных научных объектах как исследовательские атомные реакторы, астрономические комплексы на Земле и на орбитах, радиолокационные системы и системы управления крупными промышленными и энергетическими объектами.



**Рис.3.** Измерительные приборы фирмы Agilent Technologies с опцией - устанавливаемой в них СКМ MATLAB

Смоленский государственный университет многие годы выполняет крупную программу по изучению и пропаганде средств компьютерной математики и СКМ. Проведено уже 11 международных научных конференций "Системы компьютерной математики и их приложения" - последняя проведена в мае 2010 г. Опубликованы десятки известных книг по этой тематике, многие из них широко используются научными работниками, инженерами, преподавателями, аспирантами и студентами вузов. Последние годы особенно широко развиваются работы по интеграции средств компьютерной математики с современными измерительными приборами и применению СКМ в экспериментальных исследованиях.

На рис. 4 показана научная лаборатория автора данного доклада, оснащенная современными цифровыми приборами и ПК со всеми современными СКМ. Она ориентирована на исследование возможностей совместного применения современных цифровых измерительных приборов с СКМ. Уже опубликован ряд статей по этому важному направлению [11-18]. Среди них стоит особо отметить работы по применению нового математического базиса приближения произвольных зависимостей – вейвлетов [17, 18].



**Рис.4.** Научно-исследовательская лаборатория с современными цифровыми приборами и компьютерами с СКМ

## Литература

- [1] Дьяконов В. П. Компьютерная математика. Теория и практика. М.: Нолидж.- 2001.
- [2] Дьяконов В. П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. М.: СОЛОН-Пресс.-2006.
- [3] Дьяконов В. П. Mathcad 11/12/13 в математике. Справочник. М.: Горячая линия. Телеком.- 2007.
- [4] Дьяконов В. П. MATLAB R2006/2007/2008 + Simulink 5/6.7. Основы применения, 2-ое издание, дополненное и переработанное. М.: СОЛОН-Пресс.- 2008.

- [5] Дьяконов В. П. Simulink 5/6/7. Самоучитель. М.: ДМК-Пресс.- 2008.
- [6] Дьяконов В. П., Пеньков А. А. MATLAB и Simulink в электроэнергетике. Справочник. М.: Горячая линия-Телеком.- 2009.
- [7] Дьяконов В. П. Mathematica 5.1/5.2/6.0 в математических и научно-технических расчетах. Изд. 2-е переработанное и дополненное. М.: СОЛОН-Пресс.-2008.
- [8] Дьяконов В. П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство. М.: ДМК-Пресс.- 2009.
- [9] Кристалинский Р. Е., Кристалинский В. Р. Преобразования Фурье и Лапласа в системах компьютерной математики. Учебное пособие для вузов. М.: Горячая линия. Телеком.- 2006.
- [10] Кристалинский Р. Е., Шапошников Н. Н. Решение вариационных задач строительной механики в системе Mathematica. СПб.-Краснодар, Лань, 2010.
- [11] Афонский А. А., Дьяконов В. П. Цифровые анализаторы спектра, сигналов и логики. Под ред. проф. В. П. Дьяконова. М.: СОЛОН-Пресс.- 2009.
- [12] Дьяконов В. П. Современные цифровые анализаторы спектра. Компоненты и технологии, № 5, 2010.
- [13] Дьяконов В. П. Современные методы Фурье- и вейвлет-анализа и синтеза сигналов. Контрольно-измерительные приборы и системы, № 2, 2009.
- [14] Дьяконов В. П. Компьютерная математика в измерительной технике. Контрольно-измерительные приборы и системы, № 5, 2009.
- [15] Дьяконов В. П. Генерация и генераторы сигналов. М. ДМК-Пресс, 2008.
- [16] Дьяконов В. П., Круглов В. В. MATLAB 6.5 SP1/7/7 SP1/7SP2 + Simulink 5/6. Инструменты искусственного интеллекта и биоинформатики. М.: СОЛОН-Пресс.- 2006.
- [17] Дьяконов В. П. MATLAB – новые возможности в технологии осциллографии. Компоненты и технологии, № 10, 2009.
- [18] Дьяконов В. П. Вейвлеты. От теории к практике. Издание второе, переработанное и дополненное. М.: СОЛОН-Р.- 2004.

**КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ  
НЕЛИНЕЙНЫХ ОБОБЩЕННО-МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СИСТЕМЕ  
КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE**

Ю.Г. Игнатьев<sup>1</sup>, Х.Х. Абдулла<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, г.  
Казань, <sup>2</sup>Татарский государственный гуманитарно-педагогический  
университет, г. Казань

---

<sup>1</sup>E-mail: [ignatjev\\_yu@rambler.ru](mailto:ignatjev_yu@rambler.ru), <sup>2</sup>E-mail: [khaled\\_alyfee@yahoo.com](mailto:khaled_alyfee@yahoo.com)

## Введение

Объектом исследования этой статьи является математическое моделирование нелинейных обобщенно-механических систем, (НОМС), в среде компьютерной математики Maple. Такие системы в наиболее общем случае описываются системой нелинейных ОДУ, разрешенных относительно старших производных функций  $y_i(t)$ , вида:

$$y_i^{(n_i)} = F_i(y_1, \dots, y_N, y_1', \dots, y_N', y_1'', \dots, y_N'', \dots, y_1^{(n_i-1)}, t); \quad (i = \overline{1, N}), \quad (1)$$



где  $y^{(n)} = d^n f / dt^n$  – обозначение  $n$ -той производной функции  $f$  по независимой переменной  $t$ , – времени, а  $F_i$  – непрерывно-дифференцируемые функции своих переменных. В большинстве случаев  $n=2$ , однако, например, при рассмотрении движения релятивистской заряженной частицы в магнитном поле с учетом магнито-тормозного излучения  $n=3$  (см., например, [2]); а в ряде случаев  $n$  может достигать и значения 4. В дальнейшем к обобщенно-механическим системам мы будем относить в дальнейшем любые системы, которые полностью описываются уравнениями вида (15). Будем в дальнейшем полагать выполненными начальные условия для системы (15):

$$y_i^{(k)}(t) \Big|_{t=t_0} = C_i^k; \quad (k = \overline{1, n_i - 1}; i = \overline{1, N}), \quad (2)$$

соответствующие стандартной задаче Коши, где  $C_i^k$  – начальные значения производных  $k$ -го порядка функций  $y_i(t)$ .

Как известно, достаточно эффективных и общих методов аналитического исследования поведения НОМС, описываемых задачей Коши (15)-(16), не существует. Применение методов качественной теории дифференциальных уравнений требует, во-первых, автономность системы (15), а, во-вторых, с увеличением числа степеней свободы,  $S$ , системы (15)  $S = \sum_{i=1}^N n_i$  сложность исследования с помощью качественной теории дифференциальных уравнений, а тем более, их визуализации, резко возрастает при  $S > 2$ <sup>1</sup>. Фактически, единственным надежным методом исследования нелинейных механических систем является численное решение задачи Коши, которое сводится обычно к численному интегрированию нормальной системы ОДУ, соответствующей системе (15) с соответствующими начальными условиями, полученными из (16). Целью нашего исследования является разработка алгоритмов и пакетов (комплекса) программ в СКМ Maple для компьютерного исследования нелинейных обобщенно-механических систем и построения многопараметрических программных процедур визуализации математических моделей этих систем, в том числе, и процедур динамической визуализации (анимации) математических моделей НОМС. Отметим, что важной идеей построения пакета программ явилась идея использования сплайновой и В-сплайновой интерполяции функций, позволившей создать автоматизированный вывод численных решений ОДУ в форме кусочно-заданных функций.

## 1. Блок-схема комплекса программ

Для обеспечения гибкой работы с численными решениями были созданы специальные внутренние программные процедуры, позволяющие проводить стандартные операции анализа функции одной переменной со сплайнами, а также конвертировать их в кусочно-заданные функции. В результате был получен программный аппарат аналитического (приближенного) исследования НОМС в СКМ Maple. Важным достоинством разработанного комплекса программ является его независимость от версии Maple, начиная с версии 1997 года Maple5.5 и кончая версией 2009 года Maple14. Представленный комплекс программ состоит из двух независимых пакетов программ (Рис. 2). Пакет программ Difeq содержит программы распознавания введенных системы дифференциальных уравнений и начальных условий а, программы автоматического преобразования введенных данных в задачу Коши для нормальной системы относительно унифицированных переменных, б, программы численного решения задачи Коши на заданном интервале с возможностью контроля и переключения метода численного интегрирования при заданном значении независимой переменной, с. Пакет программ Splines содержит программы генерации равномерных кубических сплайнов и В-сплайнов по заданной функции на заданном интервале, d, f, программы конвертирования сплайнов и В-сплайнов в кусочно-непрерывные функции и обратные операции, e, g, программы операций над сплайнами h. Операции указанных пакетов интегрируются в программе конвертирования численных решений в кусочно-заданные функции, i. Ниже мы опишем основные алгоритмы разработанного комплекса программ и продемонстрируем на примерах исполнение программных процедур.

<sup>1</sup> см., например, [3, 4].

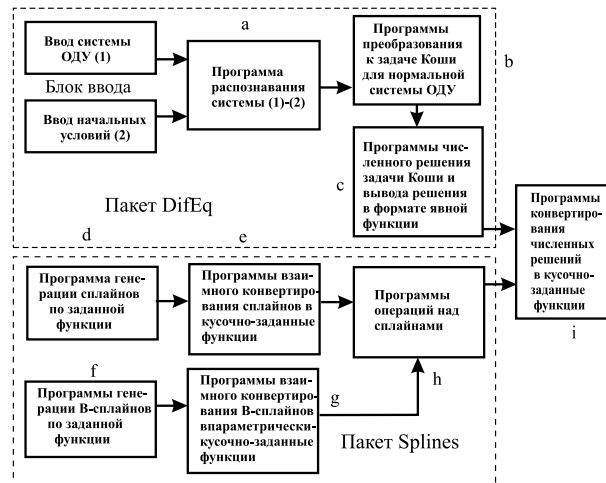


Рис.1. Блок-схема комплекса программ исследования нелинейных обобщенно - механических систем.

## 2. Пакет программ преобразования системы уравнений и решения задачи Коши (DifEq)

### Распознавание информации об ОДУ

Рассмотрим ОДУ  $n$ -го порядка, разрешенного относительно старшей производной функции  $y(x)$ :

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (3)$$

Для задания  $n$ -той производной функции  $y(x)$  по переменной  $x$  в СКМ Maple существуют две альтернативные процедуры: `diff(y(x), x$n)` и `(D@@n)(y)(x)`. Вторая из этих процедур предусматривает возможность вычисления производной в заданной точке, что весьма удобно для задания начальных условий. Создадим программную процедуру `DifEq[DiffOp]`, позволяющую извлечь полную информацию о старшей производной в правой части уравнения (25)<sup>2</sup>:

```
> DifEq[DiffOp]:=proc(X) local var,s,i,ss,ff,tt:
if op(0,X)=diff then:
var:=op(X)[2];s:=op(X)[1];
for i from 1 do if(nops(s)=1) then ff:=(op(0,s));
tt:=(op(1,s)); break: else s:=op(s)[1];
end if; end do: [diff,i,ff,tt]: elif
op(1,op(0,op(0,X)))=D then
[D,op(2,op(0,op(0,X))),
op(-1,op(0,X)),op(-1,X)]:
elif op(0,op(0,X))=D then
[D,1,op(-1,op(1,op(0,X))),op(-1,X)]:
else ff:=
op(0,X):tt:=op(-1,X): [0,ff,tt]:
end if:end proc:
```

Продемонстрируем исполнение этой процедуры на двух примерах:

```
[>DifEq[DiffOp]((D@@4)(F)(tau));
[D,4,F,tau]
[>DifEq[DiffOp](diff(Sigma(zeta),zeta));
[diff,1,Sigma,zeta]
```

Таким образом, при действии на производную данная программная процедура создает упорядоченный список - тип оператора производной, порядок производной, имя неизвестной функции и имя

<sup>2</sup>Идею этого алгоритма подсказал А.В. Матросов, которому Ю.Г. Игнатев выражает признательность.

независимой переменной. Это позволяет перейти в дальнейшем от обозначений пользователя к некоторым унифицированным внутренним именам зависимых и независимых переменных, что позволяет автоматизировать процессы работы с уравнениями.

**Приведение задачи Коши для системы ОДУ произвольного порядка к задаче Коши для нормальной системы ОДУ с унифицированными именами переменных**

Блок (b) включает три программные процедуры, осуществляющие поэтапное конвертирование системы ОДУ (15) с начальными условиями (16) к задаче Коши для нормальной системы ОДУ с унифицированными именами переменных. Знание информации о старшей производной уравнения (25) позволяет конвертировать это уравнение к нормальной системе ОДУ с унифицированными обозначениями, что обеспечивает автоматизацию манипуляций с этими уравнениями. Договоримся о следующем порядке присвоения унифицированных имен зависимых переменных. Для этого рассмотрим упорядоченный список `DifEq[MatAlf]` из восьми имен: `[X,Y,Z,U,V,W,Phi,Theta]`, который, конечно, можно продолжить, но для этого нет никаких причин практического характера. Обозначим переменную, введенную пользователем, посредством `X`, ее первую производную – `Y`, вторую производную – `Z`, и т.д., а независимую переменную посредством `t`. Полученная система и будет являться искомой нормальной системой ОДУ с унифицированными именами переменных:

$$\frac{dX_i^1}{dt} = X_i^2; \frac{dX_i^2}{dt} = X_i^3; \dots; \frac{dX_i^{n_i-1}}{dt} = F_i, \quad (i = \overline{1, N}) \tag{4}$$

где  $F = F(t, X_1^1, \dots, X_N^{n_N})$  и для краткости положено  $X^k = \text{DifEq}[\text{MatAlf}]_k \rightarrow X^1 = X, X^2 = Y, \dots$  и системой начальных условий для этих уравнений, соответствующих начальным условиям (16) :

$$X_i^k(t_0) = C_i^k; \quad (k = \overline{1, n_i - 1}; i = \overline{1, N}), \tag{5}$$

**Приведение ОДУ произвольного порядка к нормальной системе ОДУ с унифицированными именами переменных**

Первый из указанных алгоритмов - алгоритм приведения ОДУ произвольного порядка к нормальной системе ОДУ ОДУ произвольного порядка к нормальной системе ОДУ реализуется программной процедурой `DifEq[Oden_ConvNorm]`.

Процедура `DifEq[Oden_ConvNorm]` использует две промежуточные процедуры, `DifEq[DiffOp]` и `DifEq[MatAlf]`. Рассмотрим исполнение этой процедуры на примере уравнения в обозначениях пользователя:

$$S^{IV}(\xi) = (S^{III}(\xi))^2 S^3(\xi) + S'(\xi) + \sin \xi. \tag{6}$$

Пользователь может ввести это уравнение в такой, например, форме:

`>Eq1:=(D@@4)(S)(xi)=((D@@3)(S)(xi))\^{}2*S(xi)\^{}3+D(S)(xi)+sin(xi);`

Результат применения нашей процедуры к уравнению (13) получается следующим:

`>DifEq[Oden_ConvNorm](Eq1, 2);`

$$\left[ [4, S, \xi, D], [X_2, Y_2, Z_2, U_2], \left[ S(\xi) = X_2(t), D(S)(\xi) = Y_2(t), (D^{(2)})(S)(\xi) = U_2(t), \xi = t \right], \left[ \frac{d}{dt} X_2(t) = Y_2(t), \frac{d}{dt} Y_2(t) = U_2(t), \frac{d}{dt} U_2(t) = U_2(t)^2 X_2(t)^3 + Y_2(t) + \sin(t) \right] \right]$$

- он состоит из упорядоченного списка четырех упорядоченных списков: первый - содержит: [порядок уравнения, искомую функцию, независимую переменную, тип дифференциального оператора], введенные пользователем. Второй список содержит упорядоченную систему новых функций. Третий список содержит правила замены переменных в ОДУ, четвертый список содержит упорядоченную нормальную систему ОДУ. Как видно, процедура `DifEq[Oden_ConvNorm]` содержит два обязательных параметра, первый – дифференциальное уравнение, а второй, `k`, – любое имя или число, необходимое для пометки уравнения и входящих в него переменных. Соответствующая метка помещается как нижний индекс у соответствующих величин. В рассмотренном примере `k=2`. В частности, если мы хотим отказаться от индексирования функций, достаточно вместо индекса ввести “ - два апострофа.

### Приведение системы ОДУ произвольного порядка к нормальной системе ОДУ с унифицированными именами переменных

Аналогично вводится и однопараметрическая процедура приведения системы ОДУ (15) к нормальной системе ОДУ `DifEq[Sys0den_ConvNorm]`.

Результат применения этой процедуры, который для краткости мы не приводим, представляется в виде трех упорядоченных списков: в первом содержится один элемент  $S$  - число уравнений нормальной системы (число степеней свободы НОМС); во втором – преобразования пользовательских функций к унифицированным функциям нормальной системы; третий список - есть упорядоченная нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений, причем первые  $S-N$  уравнений представляют собой результат стандартной замены переменных вида  $y' = z$ .

### Приведение задачи Коши (15)-(16) к задаче Коши для нормальной системы ОДУ с унифицированными именами переменных

На основе программ распознавания системы ОДУ (блок “a”) и программ приведения ОДУ к нормальному виду строится двухпараметрическая программная процедура

`DifEq[SysCauchy_ConvNorm](SystemODE, Inits Conditions)`

приведения системы ОДУ произвольного порядка (15) с начальными условиями (16) к задаче Коши для нормальной системы ОДУ относительно унифицированных переменных  $X_i^k(t)$  (5) с начальными условиями (12), т.е., к задаче Коши для нормальной системы ОДУ. Результат применения процедуры выводит упорядоченный список из шести упорядоченных списков: в первом содержится два числа:  $S$  - число уравнений нормальной системы и  $M = \max(n_1, \dots, n_N)$  - максимальный порядок уравнений в исходной системе уравнений, во втором - упорядоченные списки новых переменных, - число этих списков равно  $M$ , выбранных по следующему принципу - в первом списке содержатся новые переменные,  $X[i]$ , полученные из независимых функций пользователя, во втором - первые производные от этих переменных,  $Y[i]$ , если вторые производные от этих переменных содержатся в системе ОДУ, и т.д., - до  $M - 1$ -го списка. Таким образом, количество внутренних списков независимых функций совпадает с максимальным порядком уравнений исходной системы,  $M$ . Третий список содержит преобразования пользовательских функций к унифицированным функциям нормальной системы, четвертый список - есть упорядоченная нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений, причем первые  $S - N$  уравнений представляют собой результат стандартной замены переменных вида  $y' = z$ , в пятом - начальные условия для нормальной системы ОДУ в форме (12), в шестом - один элемент - начальное значение независимой переменной. Созданная процедура удобна для извлечения различной информации об исходной системе дифференциальных уравнений и начальных условий.

### Программные процедуры численного решения задачи Коши для системы (15)

Блок “с” содержит две программные процедуры численного решения системы ОДУ (15) с начальными условиями (16), - трехпараметрическую программную процедуру

`DifEq[NumDsolve](System ODE, Inits Conditions, Method)` и пятипараметрическую процедуру

`DifEq[ReNumDsolve](System ODE, Inits Conditions, Method1, x1, Method2)`. Первая команда создает процедуру решения системы ОДУ с помощью метода `Method`, встроенного в пакет Maple; значение этого параметра 45 соответствует методу Рунге-Кутты 4-5 порядков, 78 – методу Рунге-Кутты 7-8 порядков, *rosenbrock* – методу Розенброка, *stiff* – методу *stiff* интегрирования жестких уравнений, *classic* – классическому методу (по умолчанию методом Эйлера), *taylor* – методом разложения в ряды Тейлора (см., например [17,18]). При этом вывод решений осуществляется в виде упорядоченного списка вложенными в него  $M$  упорядоченными списками. При этом первый упорядоченный список содержит численные значения  $N$  искомых функций:  $[X[1](t), \dots, X[N](t)]$ , порядок записи значений функций в списке совпадает с порядком записи дифференциальных уравнений системы. Второй упорядоченный список содержит значения первых производных тех функций, производные которых не ниже второго порядка содержатся в системе ОДУ. Порядок записи значений первых производных функций в списке совпадает с порядком записи дифференциальных уравнений системы - при этом пропускаются значения производных тех функций, производные выше первого порядка которых не содержатся в системе ОДУ. Третий упорядоченный список содержит значения первых производных тех функций, производные которых не ниже третьего порядка содержатся в системе ОДУ. Порядок записи значений вторых производных функций в списке совпадает с порядком записи дифференциальных уравнений систе-

мы - при этом пропускаются значения вторых производных тех функций, производные выше второго порядка которых не содержатся в системе ОДУ, и т.д..

Для демонстрации формата ввода системы и вывода решений рассмотрим *пример интегрирования существенно нелинейной системы ОДУ* с максимальным 3-м порядком производных:

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = \Phi \frac{d^2 Z}{dx^2}; \quad \frac{d^3 Z}{dx^3} = -F^2; \quad \frac{d\Phi}{dx} = F^3 = \sin x \quad (7)$$

с начальными условиями:

$$F(\pi) = 1; F'(\pi) = 0; Z(\pi) = 1; Z'(\pi) = -1; Z''(\pi) = -1/3; \Phi(\pi) = 0. \quad (8)$$

Систему (14) пользователь может ввести, например, таким способом<sup>3</sup>:

```
>ODE1:=[(D@@2)(F)(x)=Phi(x)*(D@@2)(Z)(x),(D@@3)(Z)(x)=-F(x)^2,D(Pi)(x)=
F(x)^3+sin(x)];
```

а начальные условия (8) для этой системы вводятся следующим образом:

```
>Inits1:=[F(Pi)=1,D(F)(Pi)=0,Z(Pi)=1,D(Z)(Pi)=-1,(D@@2)(Z)(Pi)=1/3,Phi(Pi)=0];
```

Процедура решения системы (14) с начальными условиями (8) методом Розенброка осуществляется командой:

```
>SS:=DifEq[NumDsolve](Eqs,Inits1,rosenbrock);
```

- при этом решению мы произвольно присвоили имя SS. Тогда численное решение выводится функцией SS(x):

```
>S(1);
[-1.56150852237610560, 5.32544568814217101, -2.15254989920542972],
[3.95149696118901738, -3.48591778864530966], [1.81299087038185602]]
```

В данном случае список решений состоит из трех внутренних списков ( $M = 3$ ), в первом из них содержится 3 числа ( $N = 3$ ) – это значения функций  $[F(1), Z(1), \Phi(1)]$ , во втором списке содержится два числа, поскольку в системе (14) содержатся лишь две производные не ниже 2-го порядка, – это значения первых производных  $[F'(1), Z'(1)]$ , наконец, третий список содержит лишь одно число – это значение второй производной функции  $Z''(1)$ . Для вывода одного из этих списков,  $i$ -го, достаточно применить процедуру  $SS(1)[i]$ :

```
>SS(1)[1];
[-1.56150852237610560, 5.32544568814217101, -2.15254989920542972]
```

График траектории системы в конфигурационном пространстве  $E_3 : \{X_1 = F, X_2 = Z, X_3 = \Phi\}$  можно получить простой командой Maple, как и для трехмерного графика обычной функции:

```
>plots[spacecurve](SS[1](t),t=0..10,color=black,axes=BOXED,
labels=['X[1]', 'X[2]', 'X[3]']);
```

Программная процедура  $DifEq[ReNumDsolve](Eqs, Inits, Method1, x1, Method2)$  построена на основе рассмотренной выше процедуры  $DifEq[NumDsolve]$  и встроенной в Maple программной процедуры  $piecewise(x > x_0 \text{ and } x < x_1, f_1, x > x_1, f_2)$  кусочно-заданной функции, так что на интервале  $[x_0, x_1]$  при численном интегрировании системы ОДУ применяется метод  $Method1$ , а на интервале  $(x_1, \dots)$  – метод  $Method2$ . При этом начальными условиями для численного интегрирования методом  $Method2$  являются результаты численного интегрирования системы ОДУ в точке  $x_1$ , полученные методом  $Method1$ . Указанный метод можно назвать *методом интегрирования с перезагрузкой начальных условий*. Данный метод следует применять в тех случаях, когда на некотором отрезке стандартные методы интегрирования не дают хороших результатов. Следует отметить, что программные процедуры  $DifEq[NumDsolve]$  и  $DifEq[ReNumDsolve]$  не требуют выполнения пользователем предварительных операций по приведению системы ОДУ к нормальному виду, так как эти операции являются встроенными процедурами в указанные, – нормирование системы ОДУ и извлечение всей необходимой информации производится автоматически.

<sup>3</sup>Уравнения вводятся упорядоченным списком.

### Точность и скорость вычислений

Для тестирования пакета программ `DifEq` на точность вычислений, а также выяснения немаловажно-го для задач компьютерного моделирования вопроса о скорости вычислений различными численными методами можно провести численное интегрирование различных точно решаемых нелинейных систем ОДУ различными методами с помощью программных процедур `DifEq[NumDsolve]` и `DifEq[ReNumDsolve]`. При этом реальное время, необходимое для интегрирования системы и представления численных результатов в графическом виде можно вычислить с помощью встроенной в Maple функции `time()`, которая определяет точное время в секундах по встроенному в компьютер таймеру. Точность и скорость вычислений тестировались по целому ряду точно решаемых нелинейных систем ОДУ, примеры которых можно найти, во многих учебниках по дифференциальным уравнениям. Рассмотрим следующий пример задачи Коши для нелинейной системы ОДУ [19]:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}; \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{y}{z} \quad (9)$$

с начальными условиями:

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}; \quad z\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (10)$$

Указанная задача Коши точно решается:

$$y(x) = x; \quad z(x) = \sqrt{1-x^2}; \quad (z \geq 0), \quad (11)$$

так что  $x^2 + y^2 = 1$ , т.е. конфигурационной траекторией системы является окружность единичного радиуса. Хотя найденное точное решение задачи Коши имеет весьма простой вид, с точки зрения применения численных методов интегрирования система (8) является достаточно неудобной: она не является автономной и имеет особые точки при  $x=0, z=0$ . Поэтому система ОДУ (8) и подобные ей удобны для тестирования численных методов решения ОДУ. Рассмотрим пример численного решения задачи Коши (8)-(9) и манипуляции с этими решениями. Сразу оговоримся, что для созданного комплекса программ исследование системы (8)-(9) является элементарной задачей, но мы продемонстрируем на этой задаче все особенности применения пакета программ, чтобы не загромождать изложение громоздкими выражениями. Далее, хотя система (9) уже является нормальной, тем интереснее будет проверить для этого случая исполнение процедур преобразования ее к задаче Коши для нормальной системы с унифицированными именами переменных:

```
[>DifEq[SysCauchy_ConvNorm]([diff(y(x),x)=y(x)/x,
diff(z(x),x)=-y(x)/z(x)], [y(1/2)=1/2,z(1/2)=sqrt(3)/2]);
```

$$\left[ [2, 1], [[X_1(t), X_2(t)], [], [y(x) = X_1(t), z(x) = X_2(t)], \left[ \frac{d}{dt} X_1(t) = \frac{X_1(t)}{t}, \right. \right. \\ \left. \left. \frac{d}{dt} X_2(t) = -\frac{X_1(t)}{X_2(t)} \right], \left[ X_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, X_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \right], \frac{1}{2} \right]$$

Следует заметить, что исполнение данной команды не является обязательным для решения системы уравнений, но оно хорошо демонстрирует структуру внутренних программных процедур. Само численное решение, например, методом Розенброка сразу достигается командой:

```
[> SS1:=DifEq[NumDsolve]([diff(y(x),x)=y(x)/x,diff(z(x),x)=-y(x)/z(x)],
[y(1/2)=1/2,z(1/2)=sqrt(3)/2], rosenbrock);
```

и выводится в функциональном списочном виде, соответствующем векторной функции скалярного аргумента. Продemonстрируем построение *конфигурационной траектории* системы (8)-(9)  $\mathbf{r} = [y(x), z(x)] = [X_1(t), X_2(t)]$  при интегрировании методом Розенброка. Построение траектории достигается простой стандартной командой Maple, в которой мы указали две необязательные опции: `scaling=CONSTRAINED` – для сохранения масштаба, и `color=black`, для определения цвета кривой:

```
[>plot([SS4(t)[1,1],SS4(t)[1,2],t=-1..1],scaling=CONSTRAINED,color=black);
```

Заметим, что визуально изменение фазовых траектории в зависимости от применяемых из перечисленных выше методов численного интегрирования обнаружить не удастся. Для выяснения вопроса о точности методов интегрирования будем вычислять логарифм модуля разности численного,  $Z(t)$ , и точного,  $Z_0(t)$ , решений (10):

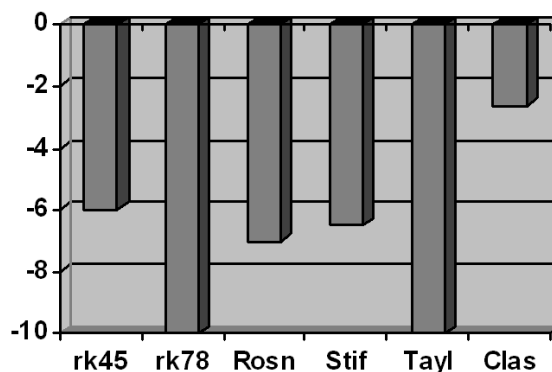
$$L(t) = \lg |Z(t) - Z_0(t)|. \quad (12)$$

Сравнительная точность методов численного интегрирования показаны на гистограмме Рис. 6. Время  $T$  - расчета и построения конфигурационных диаграмм типа Рис. 5 можно вычислить с помощью встроенной в Maple команды `time()`. На гистограмме Рис. 6 показана зависимость времени выполнения данной операции от метода численного интегрирования (см. [14-16]). Вычисления проводились на компьютере AMD Athlon 64×2 Dual Core Processor 4200+ 2.2 ГГц 2,00 ГБ ОЗУ. Данные о скорости вычислений методом разложения в ряды Тейлора, `taylor`, не приведены на гистограмме Рис. 9, поскольку это время несопоставимо велико по сравнению с другими методами. Так, например, время, затрачиваемое на вычисления с помощью метода Рунге-Кутты составляет для рассмотренного примера порядка 0,062 сек, в то время, как эта же операция, выполненная с помощью метода Тейлора занимает 66,2 сек, т.е., в 1000 раз больше. Классический метод дает слишком плохие результаты для нелинейных систем ОДУ. Таким образом, оптимальными методами вычислений (достаточно хорошая точность при высокой скорости вычислений можно признать методы Розенброка и `stiff`-метод, а методом, дающим наибольшую точность при средней скорости вычислений можно признать метод Рунге-Кутта 7-8 порядков.

### 3. Программные процедуры сплайновой интерполяции функций

#### Сплайны

Опишем теперь алгоритмы и программные процедуры пакета программ `Splines`, позволяющие автоматически получать решение задачи Коши для нелинейной системы ОДУ произвольного порядка в форме равномерных кубических сплайнов и В-сплайнов. Для создания аппарата аналитического исследования решений нелинейной системы ОДУ и проведение компьютерного моделирования нелинейных обобщенно-механических систем были созданы специализированные программные процедуры, позволяющие выполнять над сплайнами алгебраические и интегро-дифференциальные операции, а также операции взаимного конвертирования сплайнов и В-сплайнов в кусочно- и кусочно-параметрически- заданные функции. Таким образом, удалось добиться важного результата – создать комплекс программ, позволяющий проводить аналитическое компьютерное исследование нелинейных обобщенно-механических систем.



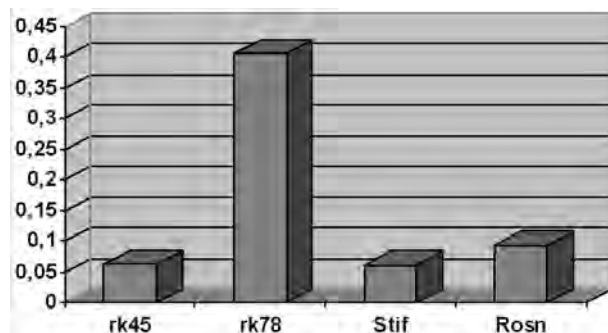
**Рис.2.** Зависимость среднего логарифма абсолютной погрешности,  $\langle L \rangle$ , от метода численного решения задачи Коши: *rk45* – метод Рунге-Кутта 4-5 порядков, *rk78* – метод Рунге-Кутта 7-8 порядков, *Rosn* – метод Розенброка, *Stif* – метод `stiff`, *Tayl* – метод разложений Тейлора, *Clas* – классический метод.

В пакете `CurveFitting` системы Maple имеются встроенные процедуры построения сплайновой интерполяции `Spline` (см., например, [3]), которые могут иметь формат

`Spline(xydata, v, dgr, endpts)` или `Spline(xdata, ydata, v, dgr, endpts)`, где `xydata` – двумерный массив вида  $[\dots, [x_i, y_i], \dots]$ ; `xdata, ydata` – одномерные массивы вида

$$[\dots, x_i, \dots], [\dots, y_i, \dots];$$

`v` – имя независимой переменной, `dgr` – необязательный параметр, задание которого осуществляется в форме `degree=p`, где  $p \in \mathbb{Z}$  – наивысшая степень интерполяционных полиномов. По умолчанию  $p=3$ , и получается кубический сплайн. Наконец, `endpts` – необязательный параметр, управляющий типом сплайна, например, `endpoints='natural'` дает натуральный сплайн. Применение процедуры `Spline` к двумерному или двум одномерным массивам генерирует сплайн, который в СКМ Maple, представляется, фактически, кусочно-заданной функцией с вертикальным форматом вывода ее кусков.



**Рис.3.** Зависимость среднего времени,  $T$  (в секундах), расчета и построения конфигурационной диаграммы для системы (9)-(10) от методов численного решения задачи Коши: *rk45* – метод Рунге-Кутты 4-5 порядков, *rk78* – метод Рунге-Кутты 7-8 порядков, *Rosn* – метод Розенброка, *Stif* – метод *stiff*, *Clas* – классический метод.

Несмотря на то, что программные процедуры сплайновой интерполяции функций системы Maple весьма достоверно и надежно осуществляют построение сплайновой интерполяции числовых баз данных указанных массивов, программный аппарат действий со сплайнами в СКМ отсутствует, что не позволяет непосредственно применять результаты сплайновой интерполяции численных решений для аналитических исследований моделей. Поэтому для создания эффективного аппарата компьютерного моделирования нелинейных обобщенно-механических систем в СКМ необходимо разработать программное обеспечение операций над сплайнами.

### Процедуры конвертирования сплайнов

Используя процедуру `Spline`, создадим необходимую в дальнейшем промежуточную 6-ти параметрическую обратную к `Spline` простую процедуру генерации равномерных  $n$ -кусочных кубических сплайнов относительно функции  $f(x)$ , заданной на отрезке  $[a, b]$ ,

`Splines[SplineF](f, x, a, b, n, z)`,

с передачей имени  $z$  ее независимому аргументу:

```
>Splines[SplineF]:=proc(f,x,a,b,n,z) local F,X,Basa: F:=(X)->subs(x=X,f):
Basa:=[seq([a+i*(b-a)/n,eval(F(a+i*(b-a)/n))],i=0..n)]:
CurveFitting[Spline](Basa,z): end proc:
```

Введем предварительно трехпараметрическую процедуру `Splines[Conv_List](sp, t, z)` конвертирования сплайна  $sp$  функции  $f$  на заданном отрезке в упорядоченный список, состоящий из четного числа элементов, в котором каждая пара представляет собой упорядоченный набор элементов, первый из которых – неравенство, устанавливающее верхнюю границу интервала, а второй – сплайн на данном интервале. Заметим, что процедура автоматически распознает параметры сплайна. Создадим также и обратную процедуру конвертирования списка в кусочно-заданную функцию, `piecewise`.

```
>Splines[Conv_Piece]:=proc(Ls,t,z) local T,LS0,LSS0: LS0:=(T)->subs(t=T,Ls):
LSS0:=(t)->subs(op(-2,LS0(t))=NULL,LS0(t)): piecewise(op(LSS0(z))): end proc:
```



Здесь применена встроенная процедура Maple NULL – команда пустого множества  $\emptyset$ . В качестве примеров генерации сплайнов, на которых мы будем демонстрировать применение более сложных операций рассмотрим следующие три:

```
>PPS6:=(z)->Splines[SplineF](sin(x),x,0,2*Pi,6,z):
PPS12:=(z)->Splines[SplineF](sin(x),x,0,2*Pi,12,z):
PPS24:=(z)->Splines[SplineF](sin(x),x,0,2*Pi,24,z):
```

Все три сплайна созданы по отношению к функции  $f(x) = \sin(x)$  на отрезке  $[0, 2\pi]$  с именем независимой переменной  $z$ : сплайн PPS6 содержит 6 интервалов, PPS12 – 12 интервалов и PPS24 – 24 интервала. Результат генерации сплайнов мы не приводим из-за его громоздкости. Заметим только, что уже 6-кусочный сплайн, PPS6, дает график, который визуально невозможно отличить от графика порождающей его функции  $\sin(x)$ . Эффективную проверку корректности созданных программных процедур можно провести, дважды конвертируя сгенерированный сплайн с помощью процедур `Splines[Conv_List]` и `Splines[Conv_Piece]`. Проверка показывает результаты, которые графически неотличимы от оригинала.

## Программные процедуры операций над сплайнами

### Процедура дифференцирования сплайнов

Операция вычисления производной  $n$ -го порядка в точке  $t_0$  от сплайна можно ввести простой программной процедурой с помощью встроенной в Maple программной процедурой `convert(DSP(T), piecewise, T)`, конвертирующей сплайн в кусочно-заданную функцию:

```
> Splines[SplineDiff]:=proc(spline,t,t0,n) local F,X,T,DSP,DS:
F:=(X)->subs(t=X,spline):DSP:=(T)->subs(X=T,diff(F(X),X$n)):
DS:=(T)->convert(DSP(T),piecewise,T):DS(t0):end proc:
```

Вычислим, например, с помощью построенной процедуры первую производную сплайна PPS6 в точке  $\pi/4$ : `>Splines[SplineDiff](PPS6(t),t,Pi/4,1)`;

$$\frac{207\sqrt{3}}{160\pi} \approx 0,7133$$

Прямое вычисление значения  $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \approx 0,7071$ , т.е., отличается от предыдущего в третьем знаке. Однако, уже при увеличении числа интервалов в два раза (сплайн PPS12) точность интерполяции возрастает на порядок:  $\sin(\pi/4) \approx 0,7072$ . Для использования производной от заданного сплайна как функции необходимо теперь просто определить эту функцию:

```
> F:=(x)->Splines[SplineDiff](PPS(t),t,x,1):
```

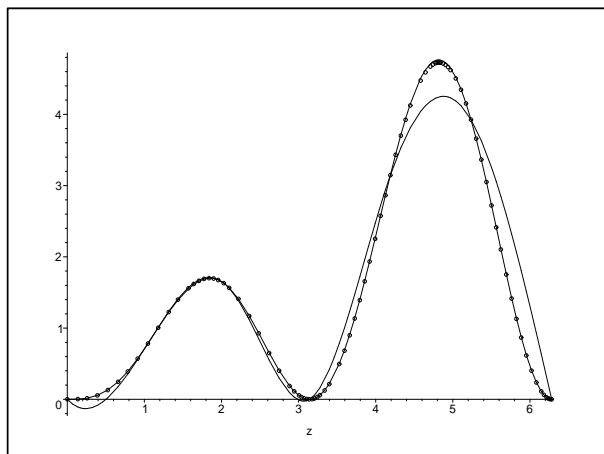
### Процедуры вычисления функций от сплайнов

Процедуры нахождения функции  $f(S, t)$  от сплайна  $S$  можно создать двумя путями. Первый, самый простой, основан на первоначальном конвертировании исходной аппроксимации в список и построении на основе его новой базы для сплайна. Второй, более сложный, состоит в начальном конвертировании исходного сплайна в список, преобразование функций списка и конвертирование этого списка в кусочно-заданную функцию. Полученная вторым способом функция уже не является, строго говоря, сплайном  $n$ -го порядка, так как на каждом интервале представляется уже не многочленом  $n$ -го порядка, а функцией от этого многочлена. Однако, при этом сохраняется принадлежность кусочно-заданной функции  $f(S)$  классу  $C^n$ , если сама функция  $f(x)$  принадлежит этому классу. Первая из указанных процедур 4-х параметрическая процедура `Splines[SplineFunctionPoint]`. Здесь первый параметр есть сплайн, второй – его независимая переменная, третий – функция от сплайна, четвертый – присвоенное новое имя независимой переменной. Вторая из указанных процедур с такими же параметрами:

```
Splines[SplineFunction](sp,t,f,z).
```

Этот результат, как и многие другие, наглядно показывают практически полное совпадение результатов интерполяции функции сплайнов с помощью процедуры `Splines[SplineFunction]` с функцией-оригиналом даже при небольшом числе интервалов и значительное расхождение результатов при применении процедуры `Splines[SplineFunctionPoint]`<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Заметим, что с увеличением числа интервалов процедура `Splines[SplineFunctionPoint]` также начинает давать неплохие результаты.



**Рис.4.** Сравнение функций от 6-ти кусочных сплайнов, полученных процедурами `SplineFunctionPoint` - линия, и `SplineFunction` - кружочки относительно функции  $f(z) = z \cdot \sin^2 z$ . Жирная линия - график самой функции  $f(z)$ .

### Процедура вычисления функций от двух сплайнов

В дальнейшем нам понадобятся функции от двух сплайнов,  $S1$  и  $S2$ , -  $f(S1, S2, t)$ . В частности, такие функции будут полезными при вычислении определенных интегралов, когда по формуле Ньютона необходимо вычислить разность двух сплайнов. Создадим процедуру вычисления таких функций. При этом важно, чтобы сплайны совпадали как внешними, так и внутренними интервалами. Будем предполагать сплайны равномерными. Для ввода процедуры вычисления функции от пары сплайнов, `Splines[BiSplineFunction]`, используем рассмотренный выше второй метод построения программной процедуры вычисления функции от сплайна. Созданная программная процедура `Splines[BiSplineFunction](S1, S2, t)` автоматически распознает вводимые пользователем сплайны  $S1$ ,  $S2$  и при их несоответствии друг другу выдает пользователю сообщение об этом и прекращает выполнение операций.

### Процедура вычисления определенного интеграла от функции сплайна

Создадим теперь процедуру вычисления определенного интеграла от функции  $f$ , заданной в сплайновой интерполяции, вида

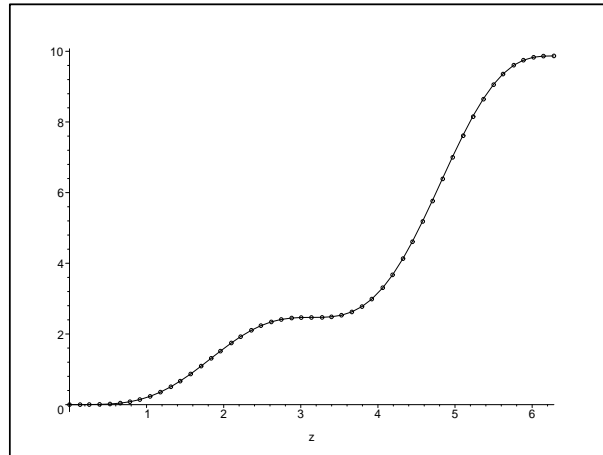
$$\int_a^b f(S, t) dt,$$

где  $S(t)$  – равномерный  $N$ - кусочный сплайн, определенный на некотором отрезке  $[t1, tn]$ , и  $[a, b]$  – произвольный вещественный отрезок. Предварительно введем процедуру вычисления ступенчатой функции, которая в отличие от стандартных Maple-функций хорошо определена на границах интервалов:

```
> Splines[MyHeaviside]:= (x, a, b) ->
piecewise(x < a or x > b, 0, x = a, 1, x = b, 1, x > a and x < b, 1):
```

на основе которой определим 4-х параметрическую программную процедуру вычисления определенного интеграла на отрезке  $[a, b]$  от функции  $f$  сплайна `sp(t)`.

Созданная процедура автоматически распознает параметры сплайна и в случаях, когда границы отрезка  $[a, b]$  выходят за границы определения сплайна, выдает пользователю сообщение и прекращает выполнение операции. Созданная процедура использует промежуточную процедуру приближенного интегрирования методом прямоугольников, `Splines[Integral]`.



**Рис.5.** Вычисление определенного интеграла  $J(z) = \int_0^z x \sin^2(x) dx$ . Сплошная линия -  $J(z)$ , кружочки - `SplineDefInt (PPS12)`.

#### 4. Программные процедуры операций над В-сплайнами

В-сплайном (базисным сплайном) называют сплайн-функцию, имеющую наименьший носитель для заданной степени, порядка гладкости и разбиения области определения. Фундаментальная теорема устанавливает, что любая сплайн-функция для заданной степени, гладкости и области определения может быть представлена как линейная комбинация В-сплайнов той же степени и гладкости на той же области определения (см., например, [20,21]. В СКМ Maple функция вычисления В-сплайнов, `BSplineCurve`, содержится, как и функция `Spline`, в пакете `CurveFitting`. Программная процедура `BSplineCurve` имеет формат ввода, аналогичный формату ввода процедуры `Spline`:

`BSplineCurve(xydata,v,opts)` или `BSplineCurve(xdata, ydata,v,opts)`,

где теперь, необязательные параметры имеют формат `order=k` или `knots =knotlist`, а `knowlist` – список узлов. Однако, формат вывода процедуры `BSplineCurve` существенно отличается от формата вывода процедуры `Spline` – вместо кусочно – заданной на отрезке  $[a,b]$  функции  $S(x)$  `BSplineCurve` выводит два списка кусочно- заданных функций  $S(t)$  и  $x(t)$  в вертикальном формате, где  $t$  – новый параметр, который принимает значения на некотором интервале  $[k,n]$ ,  $n > k$ , где  $k,n \in \mathbb{Z}$ , при этом отрезок  $[k,n]$  разбивается на целочисленные отрезки:

$$[i, i + 1], i = \overline{k, n}.$$

Фактически, формат вывода В-сплайна эквивалентен выводу кусочно-параметрически-заданной функции:

$$x = x(t); S = S(t) \Rightarrow \mathbf{r} = [x(t), S(t)], \quad (13)$$

хотя и не совпадает с ней, что создает большие неудобства для пользователя. Для устранения указанного недостатка СКМ Maple введем 6-ти параметрическую процедуру `Splines[BSplineF(f,x,a,b,n,z)` генерации  $n$ -кусочного В-сплайна на основе заданной на интервале  $[a,b]$  функции  $f(x)$  и последующего конвертирования полученного В-сплайна в кусочно – параметрически заданную функцию вида (20). Также создадим трехпараметрическую процедуру `Splines[ConvBSpline_Piece]` (`BS,x,z`) конвертирования В-сплайна `BS(x)` в кусочно – параметрически заданную функцию с именем  $z$  параметра. Созданные процедуры конвертирования устанавливают связь между В-сплайновым и сплайновым представлениями интерполяции и позволяют использовать мощный аппарат В-сплайнов *анализа* процесса численного интегрирования нелинейных систем ОДУ.

#### 5. Программные процедуры спланового представления численного решения нелинейной системы ОДУ

Интегрируем, наконец, программные процедуры описанного здесь пакета программ `Splines` с программными процедурами пакета `DifEq` в блоке (i)<sup>5</sup> конвертирования численных решений нелинейной

<sup>5</sup>См. Рис. 2.

системы ОДУ в кусочно-заданные функции. Этот блок содержит четыре программные процедуры: `DifEq[ODESpline]`, `DifEq[ODEBSpline]`, `DifEq[ReODESpline]`, `DifEq[ReODEBSpline]`. Процедура автоматизированной сплайновой обработки численного решения задачи Коши для нелинейной системы произвольного числа ОДУ произвольного порядка

`DifEq[ODESpline](Eqs, Inits, Method, x1, n, i, k, x)` содержит 8 параметров: `Eqs` - упорядоченный список системы ОДУ, `Inits` - упорядоченный список начальных условий, `Method` - Метод интегрирования, `x1` - конечная точка интервала интегрирования, `n` - число интервалов сплайна, `i` - порядковый номер выводимой функции<sup>6</sup>, `k` - порядок производной этой функции, `x` - присваиваемое имя независимой переменной.

Аналогично строится и 8-ми параметрическая процедура `DifEq[ODEBSpline]`, но в ней использована процедура `Splines[ConvBSpline_Piece]`, позволяющая автоматически осуществлять вывод решений в виде кусочно-параметрически заданных функций (25). Аналогично строятся и 10-параметрические программные процедуры `DifEq[ReODESpline]` и `DifEq[ReODEBSpline]` с перезагрузкой метода интегрирования в точке `x2`. Заметим, что все рассмотренные в этом разделе процедуры являются конечными и не требуют от пользователя применения каких-либо других процедур для получения решений в системы нелинейных ОДУ в форме сплайнов или В-сплайнов. Кроме того, решения выводятся в формате аналитической функции или упорядоченной пары функций в случае В-сплайна.

## 6. Пример компьютерного исследования системы нелинейных ОДУ

Для демонстрации комплекса программ рассмотрим простой пример получения решения системы ОДУ в виде сплайнов. В качестве системы ОДУ рассмотрим систему

нелинейную систему оду 1-го порядка (8)-(9). Отметим, что выбор простой системы, а также малое количество интервалов сплайна, которое мы собираемся ввести, продиктованы лишь необходимостью краткости изложения. Тестирование показывает весьма хорошие результаты и при большом числе уравнений системы (десятки), высокого порядка уравнений системы (до 6-го) и большом количестве интервалов сплайнов (десятки). Однако, вывод таких результатов занимает весьма большое место, не совместимое с форматом статьи. Вся операция численного решения системы с его сплайновым представлением производится простой командой:

```
>Sp6:=(xi)->Splines[ODESpline]([diff(y(x),x)=y(x)/x,
diff(z(x),x)=-y(x)/z(x)],
[y(-1/2)=-1/2,z(-1/2)=sqrt(3/2)],45,1,6,1,2,xi):
```

В целях экономии места формат вывода результата интегрирования мы также упростим, сократив число выводимых значащих цифр с 10 до 4:

```
>evalf(F6(xi),4);
```

Вычислим, например, вторую производную от полученного решения в точке  $\xi = 1/8$ :

```
>Splines[SplineDiff](Sp6(t),t,1/8,2);
```

-1.210034572

Вычислим, например, определенный интеграл от полученного решения  $\int_0^1 \sin z(\xi) d\xi$ :

```
>Splines[SplineDefInt](Sp6(xi),xi,sin(xi),0,1);
```

0.4596988779;

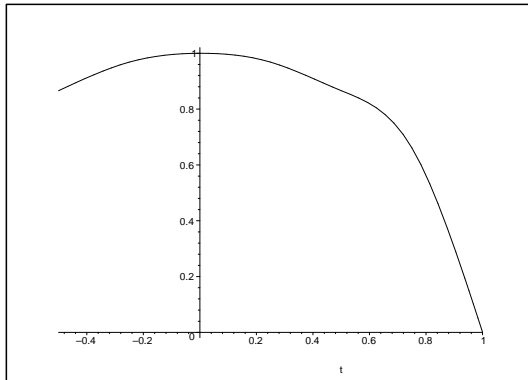
<sup>6</sup>Совпадает с порядковым номером уравнения в системе ОДУ.

$$\left. \begin{array}{ll}
 1.102 + 0.4716 \xi - 1.005 (\xi + 0.5000)^3 & \xi < -0.2500 \\
 1.039 + 0.2830 \xi - 0.7536 (\xi + 0.2500)^2 + 0.5207 (\xi + 0.2500)^3 & \xi < 0. \\
 1.000 + 0.003900 \xi - 0.3630 \xi^2 - 0.6453 \xi^3 & \xi < 0.2500 \\
 1.043 - 0.2988 \xi - 0.8471 (\xi - 0.2500)^2 + 1.628 (\xi - 0.2500)^3 & \xi < 0.5000 \\
 1.075 - 0.4171 \xi + 0.3739 (\xi - 0.5000)^2 - 7.917 (\xi - 0.5000)^3 & \xi < 0.7500 \\
 1.947 - 1.715 \xi - 5.564 (\xi - 0.7500)^2 + 7.420 (\xi - 0.7500)^3 & otherwise
 \end{array} \right\}$$

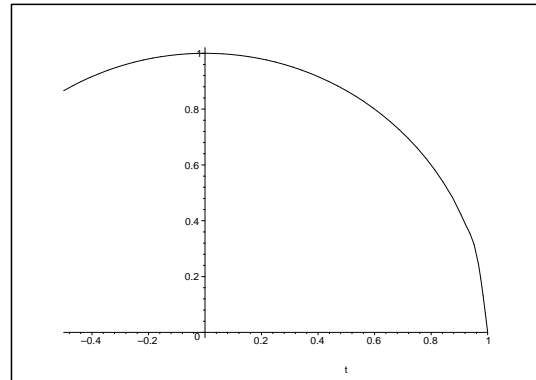
**Рис.6.** Вывод численного решения задачи Коши (8)-(9) на отрезке  $[-1/2, 1]$  методом Рунге-Кутты 4-5 порядков в виде кубического 6-кусочного сплайна с назначением имени независимой переменной  $\xi$ . Выведена функция  $z(x) = X_2(\xi)$ .

Графическое представление решения интервале  $[-1/2, 1]$  черным цветом в нерастяжимом формате производится стандартной командой Maple:

```
>plot(Sp6(t), t=-1/2..1, color=black, scaling=CONSTRAINED);
```



**Рис.7.** Решение уравнений (8) с начальными условиями (9) в формате 6-ти кусочного сплайна.



**Рис.8.** Решение уравнений (8) с начальными условиями (9) в формате 40-ка кусочного сплайна.

### Заключение

Подводя результаты, отметим, что нами создан в системе компьютерной математики Maple система алгоритмов и комплекс программ автоматизированного численного решения задачи Коши для нелинейной системы произвольного числа обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка, разрешенных относительно старших производных и его аналитического представления в виде сплайнов и В-сплайнов. Одновременно создан комплекс программ, позволяющий осуществлять аналитические алгебраические и интегро - дифференциальные операции над сплайнами. Таким образом, комплекс представленный программ можно рассматривать как инструмент численно-аналитического исследования математических моделей нелинейных обобщенно-механических систем.

В заключение Авторы выражают признательность проф. В.П. Дьяконову и Д.П. Голоскокову за полезное обсуждение результатов статьи, а проф. М.Н. Кирсанову и А.В. Матросову за ряд ценных замечаний по алгоритмизации процедуры определения параметров дифференциальных операторов в пакете Maple.

## Литература

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1973, 504 с.
- [2] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т.Фоменко. Современная геометрия. – М.: Наука, 1979, 769 с.
- [3] Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. т. 1. М.: Итоги науки и техники, 1985, 244 с.
- [4] Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. – М.: Наука, 1980, 320 с.
- [5] Абдулла Х.Х. Программные процедуры численного решения задачи Коши для нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в пакете компьютерной математики Maple. // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского– Казань: Казанское математическое общество, 2009, т. 39, с. 388.
- [6] Игнатъев Ю.Г. Пользовательские графические процедуры для создания анимационных моделей нелинейных физических процессов. // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2009, Выпуск 10, с. 43.
- [7] Абдулла Х.Х. Визуализация математических моделей нелинейных механических систем в системах компьютерной математики. // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2009, Выпуск 10, с. 108.
- [8] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Бинوم, 2001, 525 с.
- [9] Fox L. and Mayers D.F. Numerical Solution of Ordinary Differential Equations for Scientists and Engineers. - New-York: Springer, 1987, 624 p.
- [10] Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск.: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000, 176 с.
- [11] Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. — М.: Мир, 2001, 452 с.
- [12] Корнейчук Н.П., Бабенко В.Ф., Лигун А.А. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. — К.: Наукова думка, 1992. — 304 с.

### УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ МОБИЛЬНОГО РОБОТА С ОБХОДОМ ПОДВИЖНЫХ ПРЕПЯТСТВИЙ

*О.В. Ибушева<sup>1</sup>*

*Нижекамский химико-технологический институт, г. Нижнекамск*

<sup>1</sup>E-mail: -

Рассматривается задача управления движением мобильного робота с обходом подвижных препятствий на горизонтальной плоскости. Шасси робота моделируется трехколесной системой, управление которой осуществляется моментами, приложенными к колесам задней оси и к рулевому приводу. Для решения задачи обхода препятствий составляются кинематические уравнения движения по заданной траектории с помощью метода построения неавтономной системы дифференциальных уравнений по заданным частным интегралам, изложенного в [1]. Полученные кинематические уравнения движения задают уравнения дифференциальных связей. Динамика шасси мобильного робота моделируется уравнениями Воронца, которые обеспечивают устойчивость программного движения, определенного уравнениями связей. Для стабилизации связей вводятся уравнения программных связей [2]. В работе определяются аналитические выражения управляющих сил, действующих на систему с целью обеспечения движения мобильного робота в соответствии с заданной программой. Определение выражений управляющих моментов и построение системы дифференциальных уравнений динамики системы проводилось с помощью средств аналитических вычислений программного пакета Maple. Решение системы дифференциальных уравнений было получено численным методом при заданных начальных условиях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, номер проекта 10-01-00381.

## Литература

- [1] *Ибушева О.В., Мухарлямов Р.Г.* Построение неавтономной системы дифференциальных уравнений по заданной совокупности частных интегралов в многомерном пространстве. // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. - 2008. - Т. 150. - Кн. 3. - С. 133-139.
- [2] *Мухарлямов Р.Г.* Стабилизация движения механических систем на заданных многообразиях фазового пространства. // Прикладная математика и механика. - 2006. - Т. 70. № 2. - С. 236-249.
- [3] *Мухарлямов Р.Г., Киргизбаев Ж.К.* Управление программным движением и обратные задачи динамики систем с переменной массой. - Шымкент, 2008. - 180 с.

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СТРУКТУР ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ

Э.Г. Исрафилова<sup>1</sup>

Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатьев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Татарский Государственный Гуманитарно-Педагогический Университет,  
Казань

<sup>2</sup>Татарский Государственный Гуманитарно-Педагогический Университет,  
Казань

---

<sup>1</sup>E-mail: elina88@yandex.ru, <sup>2</sup>E-mail: ignatev\_yu@rambler.ru

**Аннотация.** Рассматриваются программные процедуры реализации математических структур линейной алгебры и аналитической геометрии в СКМ Maple

## Введение

Построение канонического базиса<sup>1</sup> для матрицы самосопряженного линейного оператора является одним из важнейших этапов математического моделирования. Решение этой задачи сводится, в свою очередь, к нахождению собственных векторов и собственных значений самосопряженного оператора и последующего за этим процесса Грамма-Шмидта ортонормирования системы собственных векторов. С точки зрения вычислений процесс этот сводится к громоздким вычислениям, поэтому на этом этапе системы компьютерной математики могут значительно облегчить построение математических моделей. Однако, к сожалению, до сих пор вычислительные алгоритмы систем компьютерной математики допускают ошибки при вычислениях. Поскольку сами вычислительные процедуры СКМ недоступны пользователю, то в этих случаях для достижения правильных результатов необходимо самостоятельно переопределять вычислительные процедуры. Продемонстрируем это на примере пакета Maple. Зададим симметрическую матрицу оператора A с помощью команды `array([[[]],[[]],[[]]])`, где во внутренних скобках задаются элементы матричной строки и проверим является ли матрица самосопряженной:

```
>with(linalg):
>A:=array(1..3,1..3,[[1,2,3],[2,-6,8],[3,8,-1]]):
>AT:=transpose(A):
>matadd(A,AT,1,-1):
>A1:=convert(a,Matrix):
```

## 1. Собственные векторы и собственные значения

При вычислении собственных векторов и собственных значений оператора возникают ошибки. Собственные значения матрицы A1 находятся с помощью команды `eigenvalues(A1)`:

```
>evalf(eigenvalues(A1));
```

$$\begin{bmatrix} 7.032493196 + 0.I \\ -11.88379259 - 0.173205080810^{-8}I \\ -1.148700603 + 0.173205080810^{-8}I \end{bmatrix} \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>Т.е., такого базиса, в котором матрица самосопряженного оператора имеет диагональный вид.

Из теоремы о собственных значениях самосопряженного оператора следует, что собственные значения симметрической матрицы должны быть вещественными. В нашем же случае собственные значения получаются комплексными. Из этого следует, что команда Maple "eigenvalues", ответственная за вычисление собственных значений матрицы, работает некорректно. Чтобы достичь правильного результата, мы самостоятельно определяем вычислительные процедуры нахождения собственных значений матрицы:

```
> with(linalg):
```

Зададим симметричную матрицу A:

```
> A:=array(1..3,1..3,[[1,2,3],[2,-6,8],[3,8,-1]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & 8 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Транспонированием проверяем является ли она симметричной:

```
> AT:=transpose(A);
```

$$AT := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & 8 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> matadd(A,AT,1,-1);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> B:=[1,2,3];
```

$$B := [1, 2, 3]$$

```
> A1:=convert(A,Matrix);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & 8 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

## 2. Ошибки при вычислениях в Maple

Приведем некоторые примеры ошибок вычислений в Maple и методы их исправления.

```
> with(LinearAlgebra):
```

```
> evalf(Eigenvalues(A1));
```

$$\begin{bmatrix} 7.032493196 + 0. I \\ -11.88379259 - 0.1732050808 \cdot 10^{-8} I \\ -1.148700603 + 0.1732050808 \cdot 10^{-8} I \end{bmatrix},$$

$$[1.015435586 + 0. I, 0.017012174 + 0.1144956512 \cdot 10^{-8} I, \\ -2.730560970 + 0.2583434693 \cdot 10^{-9} I]$$

$$[1., 1., 1.]$$

$$[1.375202753 + 0.1 \cdot 10^{-9} I, -0.7397271175 - 0.5027454790 \cdot 10^{-9} I, \\ 1.289052667 + 0.1519204836 \cdot 10^{-9} I]$$

Как известно, собственные значения самосопряженного оператора являются вещественными числами.

Вычислим собственные значения симметричной матрицы A1 с помощью процедуры Maple Eigenvalues(A1):

```
> evalf(Eigenvalues(A1));
```

```
> delta:=(i,k)->if i=k then 1 else 0 end if:
```

$$\begin{bmatrix} 7.032493196 + 0. I \\ -11.88379259 - 0.1732050808 \cdot 10^{-8} I \\ -1.148700603 + 0.1732050808 \cdot 10^{-8} I \end{bmatrix}$$

Как видно, в результате вычислений получились комплексные числа, т.е. Maple выдал ошибочный результат. Поэтому возникает необходимость создания пользовательской процедуры правильного нахождения собственных значений самосопряженного оператора. Опишем эту процедуру:

```
> dd:=(i,n)->[seq(delta(i,k),k=1..n)]:
```



```

> dd(2,5);
                                [0, 1, 0, 0, 0]
> E:=proc(n)local i,k,d;
> d:=(i,n)->[seq(delta(i,k),k=1..n)]:
> array(1..n,1..n,[seq(d(i,n),i=1..n)]):
> end proc;
> E(4);
                                [ 1  0  0  0 ]
                                [ 0  1  0  0 ]
                                [ 0  0  1  0 ]
                                [ 0  0  0  1 ]

```

Создадим процедуру AL(x) и опробуем ее на примере:

```

> AL:=(lambda)->matadd(A,E(3),1,lambda):
> AL(x);
                                [ 1+x  2  3 ]
                                [ 2  -6+x  8 ]
                                [ 3  8  -1+x ]
> ADET:=(lambda)->det(AL(lambda));
> ADET(X);

```

$$ADET := \lambda \rightarrow \det(AL(\lambda))$$

$$96 - 78X - 6X^2 + X^3$$

```

> XX:=[fsolve(ADET(x),x)];
                                XX := [-7.032493195, 1.148700603, 11.88379259]
> lambda1:=XX[1];
                                lambda1 := -7.032493195

```

```

> AL(lambda1);
                                [ -6.032493195  2.  3. ]
                                [ 2.  -13.03249320  8. ]
                                [ 3.  8.  -8.032493195 ]

```

```

> X:=Vector([x,y,z]):X;
                                [ x ]
                                [ y ]
                                [ z ]
> op(convert(transpose(convert(X,Matrix)),listlist));
                                [x, y, z]

```

```

> multiply(A,X);
                                [x + 2y + 3z, 2x - 6y + 8z, 3x + 8y - z]

```

```

> Eq:=(lambda,A,X)->matadd(multiply(A,X),op(convert(transpose(convert(X
,Matrix)),listlist)),1,-lambda);
                                Eq := (\lambda, A, X) \rightarrow
                                matadd(multiply(A, X), op(convert(transpose(convert(X, Matrix)), listlist)), 1, -\lambda)
> Eq(lambda,A,X);
                                [x + 2y + 3z - \lambda x, 2x - 6y + 8z - \lambda y, 3x + 8y - z - \lambda z]
> Eq(lambda1,A,X);
                                [8.032493195 x + 2y + 3z, 2x + 1.032493195 y + 8z, 3x + 8y + 6.032493195 z]

```

Т.о., нами получен правильный алгоритм вычисления собственных значений оператора.

## Литература

- [1] В.Дьяконов. Maple 7. Учебный курс. СПб: Питер, 2002.
- [2] Матросов А. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. Изд-во "БХВ-Петербург", Санкт-Петербург, 2001.

- [3] Ю.Г.Игнатъев. *Курс лекций для студентов математического факультета проф. Ю.Г. Игнатъева. Аналитическая геометрия. Часть II. Аффинные и Евклидовы пространства. Учебное пособие. II семестр.* - Казань: ТГГПУ, 2006,-188 с.
- [4] С. Львовский: *TEX* - Москва, 1996.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ СПЕЦИАЛЬНЫХ ВИДОВ В СРЕДЕ МАТЕМАТИКА

С.В. Капустин<sup>1</sup>

Елабужский педуниверситет, г. Елабуга

<sup>1</sup>E-mail: srg\_kapst@mail.ru

**Аннотация.** Изучаются способы конструирования, исследования и визуализации поверхностей специальных видов (развёртывающихся, полярных, винтовых, резных, каналовых) в трёхмерном евклидовом пространстве средствами компьютерной системы *Mathematica*.

### Введение

Изучение классической дифференциальной геометрии становится более эффективным при использовании современных информационных технологий, а именно геометрического моделирования и компьютерной графики. Покажем на примере теории поверхностей, сколь эффективно могут применяться информационные технологии на основе компьютерной системы *Mathematica* при исследовании геометрических объектов.

Фундаментальный теоретический материал теории поверхностей, естественно, не допускает никакого другого способа изложения, кроме традиционного (за исключением иллюстрирующих его примеров). В противоположность этому соответствующий практический материал не может быть эффективно и полно представлен без применения информационных технологий. Объясняется это громоздкостью символьных вычислений даже в самых простых случаях и совершенной невозможностью визуализировать трёхмерные геометрические образы без компьютера. И в целях решения этих проблем такие программные продукты, как *Mathematica* и *Maple*, совершенно незаменимы.

### Поверхности, связанные с пространственной кривой

#### Развёртывающиеся поверхности, образованные касательными

Для пространственной кривой, заданной параметрическим уравнением  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , развёртывающаяся поверхность, состоящая из точек касательных к этой кривой, будет иметь уравнение  $\vec{R} = \vec{r}(t) + v \cdot \vec{r}'(t)$  (см., например, [2]).

Программа для составления параметрических уравнений развёртывающейся поверхности, образованной касательными к пространственной кривой (здесь `curve` — произвольная кривая, то есть список правых частей её параметрических уравнений):<sup>1</sup>

```
tors[curve_][t_, v_] := curve[t] + v D[curve[t], t]
```

Задаём коническую винтовую линию  $x = t \cos t, y = t \sin t, z = 3t$ :

```
curve1[t_] := {t Cos[t], t Sin[t], 3 t}
```

Получим параметрические уравнения развёртывающейся поверхности, образованной касательными к конической винтовой линии:

```
tors[curve1][t, v]
{t Cos[t] + v (Cos[t] - t Sin[t]), t Sin[t] + v (t Cos[t] + Sin[t]), 3 t + 3 v}
```

Если составить параметрические уравнения этой поверхности несложно и «вручную», то построить эту поверхность без компьютера невозможно. Визуализируем эту поверхность.

```
ParametricPlot3D[{t Cos[t] + v (Cos[t] - t Sin[t]), t Sin[t] + v (t Cos[t] + Sin[t]), 3 t + 3 v}, {t, -1.5 Pi, 2.5 Pi}, {v, -3, 3}, Boxed -> False, Axes -> False]
```

<sup>1</sup>Все входные ячейки печатаем полужирным шрифтом, выходные — светлым.

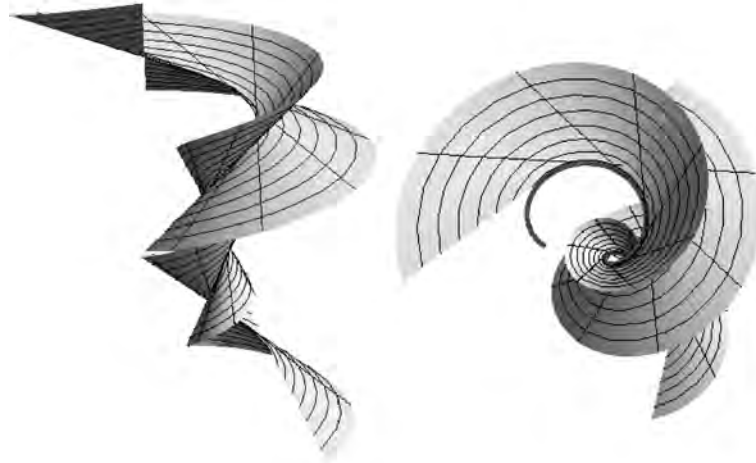


Рис.1. Развёртывающаяся поверхность в двух ракурсах

На Рис.9 показана развёртывающаяся поверхность, образованная касательными к конической винтовой линии. На полученном изображении ясно видно, как выглядит ребро возврата развёртывающейся поверхности.

## Полярная поверхность

Полярной поверхностью данной кривой называется огибающая семейства её нормальных плоскостей [2]. Поскольку образующие полярной поверхности — это прямые, проходящие через центры кривизны точек кривой и параллельные бинормальям в этих точках, то параметрическое уравнение полярной поверхности кривой  $\vec{r} = \vec{r}(u)$  можно получить так:

$$\vec{R} = \vec{r}(u) + \frac{1}{k} \cdot \vec{\nu}(u) + v \vec{\beta}(u).$$

Здесь  $k$  — кривизна кривой,  $\vec{\nu}$  — единичный вектор главной нормали,  $\vec{\beta}$  — единичный вектор бинормали.

Однако реализация программы в функциональном стиле для получения параметрического уравнения полярной поверхности произвольной кривой уже приводит к довольно громоздким вычислениям. Поэтому, во-первых, будем получать уравнение полярной поверхности по определению (как огибающей семейства нормальных плоскостей), во-вторых, изложим алгоритм получения уравнения полярной поверхности на примере.

Введём параметрические уравнения кривой (списком правых частей):

```
rr[u_] := {Cos[u], Sin[u], 1/2 Sin[2 u]}
```

Касательный вектор кривой (производная радиус-вектора по параметру кривой):

```
tangrr[u_] := D[rr[u], u]
```

Левая часть уравнения нормальной плоскости кривой в произвольной точке (или однопараметрического семейства нормальных плоскостей):

```
eqn1[u_] := tangrr[u].{x, y, z} - rr[u] // Expand
```

Производная предыдущего выражения по параметру:

```
eqn2[u_] := D[eqn1[u], u] // Expand
```

Решение системы уравнений (первое — уравнение семейства нормальных плоскостей, второе — уравнение, полученное дифференцированием первого по параметру):

```
Solve[{eqn1[u] == 0, eqn2[u] == 0}, {x, y}] // Simplify
```

```
{{x -> y Cot[u] + z Cos[2 u] Csc[u] - 1/4 Csc[u] Sin[4 u]}}
```

Верём аппликату за второй параметр полярной поверхности:

```
% /. z -> v
```

```
{{x -> y Cot[u] + v Cos[2 u] Csc[u] - 1/4 Csc[u] Sin[4 u]}}
```

Подставляя вместо  $x$  и  $y$  их выражения из параметрических уравнений данной кривой, получим список правых частей параметрических уравнений полярной поверхности этой кривой:

```
polar1[u_, v_] := {1/8 (-5 Cos[3 u] - 3 Cos[5 u] - 4 v (3 Sin[u] + Sin[3 u])), 1/2 (-3 v Cos[u] + Cos[3 u] + 2 (2 + 3 Cos[2 u]) Sin[u]^3), v}
```

Визуализируем полученную полярную поверхность:

```
ParametricPlot3D[{1/8 (-5 Cos[3 u] - 3 Cos[5 u] - 4 v (3 Sin[u] + Sin[3 u])), 1/2 (-3 v Cos[u] + Cos[3 u] + 2 (2 + 3 Cos[2 u]) Sin[u]^3), v}, {u, 0, 2 [Pi]}, {v, -3, 3}, Boxed -> False, Axes -> False, PlotPoints -> 50]
```

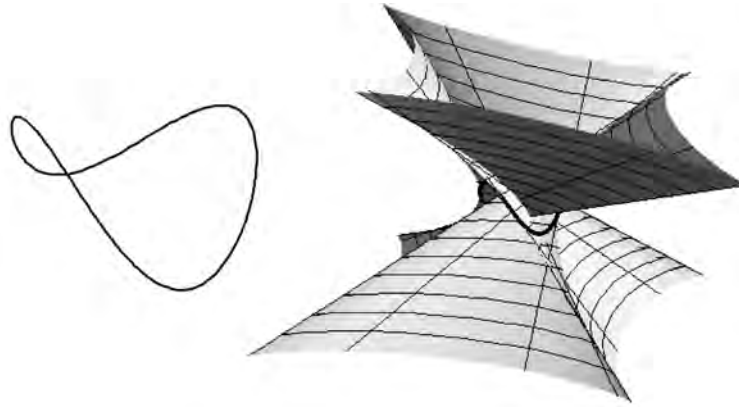


Рис.2. Изображение пространственной кривой и совмещённое изображение этой кривой и её полярной поверхности.

## Обобщения поверхности вращения

### Винтовые поверхности

Если плоская кривая равномерно вращается вокруг оси, расположенной в её плоскости, и одновременно движется равномерно и поступательно в направлении этой оси, то она описывает при этом винтовую поверхность [2].

Можно обобщить это определение, взяв в качестве профиля не плоскую, а пространственную кривую. Тогда, если параметрические уравнения этой кривой  $x = x(u)$ ,  $y = y(u)$ ,  $z = z(u)$ , то, принимая за ось вращения  $Oz$ , получим параметрические уравнения винтовой поверхности в виде

$$\vec{R} = x(u)\vec{e}(v) + y(u)\vec{g}(v) + (z(u) + av)\vec{k}.$$

Здесь  $\vec{k}$  — орт оси ( $Oz$ ),  $\vec{e}(v)$  и  $\vec{g}(v)$  — векторные круговые функции.

Программа для составления параметрических уравнений обобщённой винтовой поверхности:

```
vintr[curve_][u_, v_][a_] := {Part[curve[u], 1] Cos[v] -
  Part[curve[u], 2] Sin[v], Part[curve[u], 1] Sin[v] +
  Part[curve[u], 2] Cos[v], Part[curve[u], 3] + a v}
```

Рассмотрим кривую (пространственную полукубическую параболу)

```
curve2[u_] := {u, u^2, u^3}
```

и составим параметрические уравнения винтовой поверхности, взяв эту параболу в качестве профиля:

```
vintr[curve2][u, v][1]
{u Cos[v] - u^2 Sin[v], u^2 Cos[v] + u Sin[v], u^3 + v}
```

Визуализируем эту поверхность:

```
ParametricPlot3D[{u Cos[v] - u^2 Sin[v], u Sin[v] + u^2 Cos[v],
  u^3 + v}, {u, -1.3, 1.3}, {v, -2, 2}, Boxed -> False, Axes -> False]
```

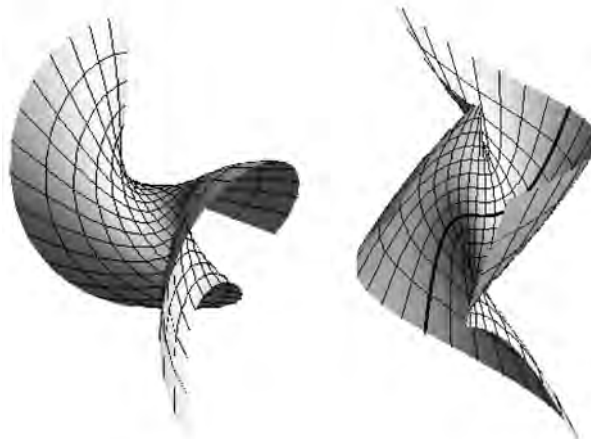


Рис.3. Изображение обобщённой винтовой поверхности в двух ракурсах

## Резные поверхности

Резной поверхностью называется поверхность, состоящая из ортогональных траекторий однопараметрического семейства плоскостей. Ортогональные траектории называются параллелями, а сечения поверхности плоскостями семейства — меридианами. Если начальную параллель задать параметрическим уравнением  $\vec{r} = \vec{r}(u)$  ( $u$  — натуральный параметр), то уравнение резной поверхности будет иметь вид

$$\vec{R} = \vec{r}(u) + \vec{\eta}(v)\vec{p}(u) + \vec{\zeta}(v)\vec{q}(u).$$

Здесь векторы  $\vec{p}(u)$  и  $\vec{q}(u)$  — орты, лежащие в нормальной плоскости начальной параллели и образующие углы  $\theta$  и  $\theta + \pi/2$  (соответственно) с вектором  $\vec{\nu}$  главной нормали параллели, а угол  $\theta$  определяется формулой  $\theta = -\int \kappa ds$  ( $\kappa$  — кручение).

Составлять программу вывода уравнения резной поверхности для произвольной кривой нецелесообразно; лучше разработать алгоритм решения этой задачи на конкретном примере.

Рассмотрим пространственную кривую  $x = 2 \operatorname{ch} t, y = 2 \operatorname{sh} t, z = 2t$ . Найдём уравнения резной поверхности, для которой эта кривая будет одной из параллелей. Предварительно нужно отнести уравнения кривой к натуральному параметру. Введём параметрические уравнения этой кривой:

**rr[t\_] := {2 Cosh[t], 2 Sinh[t], 2 t}**

Касательный вектор кривой:

**D[rr[t], t]**  
{2 Sinh[t], 2 Cosh[t], 2}

Длина касательного вектора:

**Sqrt[TrigFactor[{2 Sinh[t], 2 Cosh[t], 2} . {2 Sinh[t], 2 Cosh[t], 2}]]**  
2 Sqrt[2] Sqrt[Cosh[t]^2]

Длина дуги как функция параметра:

$\int_0^t 2\sqrt{2} \operatorname{Cosh}[t] dt$   
2 Sqrt[2] Sinh[t]

Выразив параметр  $t$  через длину дуги как  $t = \operatorname{Arsh}s/(2\operatorname{Sqrt}[2])$ , заменим его в параметрических уравнениях:

**r[s\_] := {Sqrt[(8 + s^2)/2], s/Sqrt[2], 2 ArcSinh[s/(2 Sqrt[2])]}**

Единичный вектор касательной:

**tau[s\_] := D[r[s], s] // Together**  
**tau[s]**  
{s/(Sqrt[2] Sqrt[8 + s^2]), 1/Sqrt[2], 2/Sqrt[8 + s^2]}  
**ka[s\_] := Sqrt[D[tau[s], s].D[tau[s], s]] // Together**  
**ka[s]**  
2/(8 + s^2)

Кривизна и кручение этой кривой равны:  $k = \kappa = \frac{2}{8 + s^2}$

Единичный вектор главной нормали:

**nu[s\_] := D[tau[s], s]/ka[s] // Together**  
**nu[s]**  
{(2 Sqrt[2])/Sqrt[8 + s^2], 0, -s/Sqrt[8 + s^2]}

Единичный вектор бинормали найдём как векторное произведение ортов касательной и главной нормали:

**Cross[{s/(Sqrt[2] Sqrt[8 + s^2]), 1/Sqrt[2], 2/Sqrt[8 + s^2]}, {(2 Sqrt[2])/(8 + s^2)^(1/2), 0, -s/(8 + s^2)^(1/2)}]**  
{-s/(Sqrt[2] Sqrt[8 + s^2]), (4 Sqrt[2])/(8 + s^2) + s^2/(Sqrt[2] (8 + s^2)), -2/Sqrt[8 + s^2]}

Упростим это выражение:

**bt[s\_] := {-s/(Sqrt[2] Sqrt[8 + s^2]), 1/Sqrt[2], -2/Sqrt[8 + s^2]}**

Найдём выражение для  $\theta$ :  $\theta = \int_0^s \frac{2 ds}{8 + s^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{s}{2\sqrt{2}}$

Составим выражения для  $\vec{p}(s)$  и  $\vec{q}(s)$ :

**p[s\_] := N[Cos[ArcTan[s/(2 Sqrt[2])]/Sqrt[2]]] nu[s] -**  
**N[Sin[ArcTan[s/(2 Sqrt[2])]/Sqrt[2]]] bt[s]**  
**q[s\_] := N[Sin[ArcTan[s/(2 Sqrt[2])]/Sqrt[2]]] nu[s] +**  
**N[Cos[ArcTan[s/(2 Sqrt[2])]/Sqrt[2]]] bt[s]**

Параметрические уравнения резной поверхности:

**rho[s\_, v\_] := {Sqrt[(8 + s^2)/2], s/Sqrt[2],**  
**2 N[ArcSinh[s/(2 Sqrt[2])]]} + N[Cos[v]] p[s] + N[Sin[v]] q[s]**

Визуализация резной поверхности:

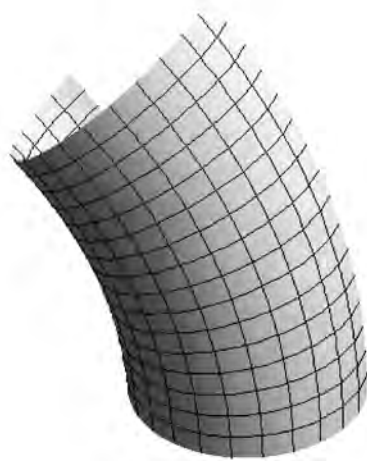


Рис.4. Резная поверхность

## Каналовые поверхности

Каналовой поверхностью называется огибающая однопараметрического семейства сфер.

Получить неявное уравнение каналовой поверхности можно, рассмотрев систему уравнений, одно из которых — уравнение семейства сфер, другое получено дифференцированием обеих частей первого по параметру, а затем исключив параметр из этой системы. Однако для визуализации поверхности неявное уравнение не подходит, поэтому приходится переходить к параметризации. А поскольку система содержит одно линейное относительно  $x, y, z$  уравнение и одно квадратное, то в большинстве случаев возникают вычислительные трудности, которые сказываются при визуализации. Рассмотрим пример.

Уравнение однопараметрического семейства сфер возьмём в виде:

$$(x - 2 \cos u)^2 + (y - 2 \sin u)^2 + (z - u)^2 = 1 + \sin^2 u.$$

Дифференцируем левую часть, предварительно приведя уравнение к виду  $F(x, y, z, u) = 0$ :

```
D[(x - 2 Cos[u])^2 + (y - 2 Sin[u])^2 + (z - u)^2 - Sin[u]^2 - 1, u]
-2 (-u + z) - 4 Cos[u] (y - 2 Sin[u]) + 4 (x - 2 Cos[u]) Sin[u] - 2 Cos[u] Sin[u]
%/2
u - z - 2 y Cos[u] + 2 x Sin[u] - Cos[u] Sin[u]
```

Составим и решим относительно  $x, z$  систему уравнений для нахождения параметрических уравнений огибающей поверхности:

```
Solve[{(x - 2 Cos[u])^2 + (y - 2 Sin[u])^2 + (z - u)^2 - Sin[u]^2 - 1 == 0, u - z - 2 y Cos[u] + 2 x Sin[u] - Cos[u] Sin[u] == 0}, {x, z}]
```

Выходную ячейку ввиду её громоздкости не приводим. Получив два решения, выражающие  $x$  и  $z$  через  $u$  и  $y$ , составляем параметрические уравнения каналовой поверхности в виде совокупности систем  $x = x_1(u, y), y = y, z = z_1(u, y)$  и  $x = x_2(u, y), y = y, z = z_2(u, y)$ . Визуализируя отдельно каждую систему и совмещая изображения с помощью встроенной функции **Show**, получим вполне удовлетворительное изображение.

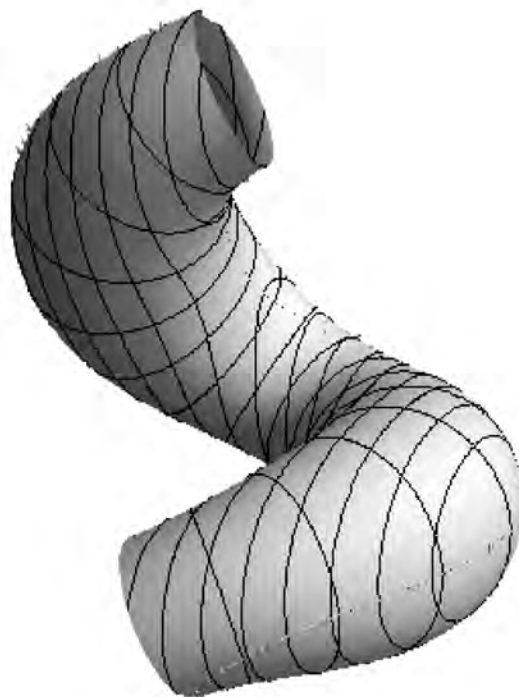


Рис.5. Резная поверхность

---

Аналогично составляются (и получаются проще) уравнения трубчатой поверхности — огибающей однопараметрического семейства сфер постоянного радиуса. Приведём изображение трубчатой поверхности, огибающей семейство сфер равных радиусов с центрами на спирали Архимеда:

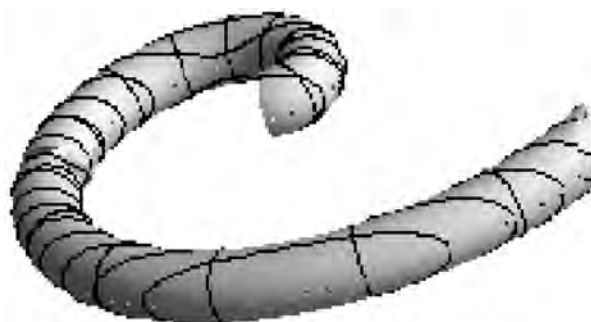


Рис.6. Трубчатая поверхность

---

## Литература

- [1] Воробьёв, Е. М. Введение в систему символьных, графических и численных вычислений «Математика – 5» / Е. М. Воробьёв. – М.: Диалог-МИФИ, 2005. – 368 с.
- [2] Норден, А. П. Теория поверхностей / А. П. Норден. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 260 с.
- [3] Gray, A. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. 2nd ed/ – CRC Press, 1997.

## ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ В СРЕДЕ МАТЕМАТИСА

Т.В. Капустина<sup>1</sup>

Елабужский педуниверситет, г. Елабуга

---

<sup>1</sup>E-mail: tv\_kapustina@mail.ru

**Аннотация.** В среде *Mathematica* составлены программы для вычисления символов Кристоффеля метрики многомерного пространства, ковариантной производной тензора смешанного типа, а также для вычисления тензора кривизны и тензора Риччи. Приведены примеры.

Компьютерная система *Mathematica* позволяет автоматизировать вычисления различных видов. Особенно эффективно это достигается с помощью программирования на языке *Mathematica*. Будем использовать функциональное программирование, характерное тем, что программа составляется по шагам с использованием объекта “шаблон” (обобщение понятия “переменная величина”). Каждый шаг задаёт некоторую внешнюю функцию среды *Mathematica*, причём новые функции, как правило, составляются с использованием предыдущих.

Приведём программу (точнее, связанную последовательность программ в функциональном стиле) для вычисления символов Кристоффеля, ковариантной производной тензора, для вычисления координат тензора кривизны и координат тензора Риччи пространства Вейля ([2], с. 153). К сожалению, составить программу, предполагающую размерность пространства произвольной, весьма затруднительно. Поэтому для простоты рассмотрим случай, когда размерность пространства равна 3. Эта же программа без труда может быть адаптирована для случая другого (но конкретного) значения размерности.

Обозначим через  $x$  список координат произвольной точки рассматриваемого дифференцируемого многообразия. Введение этой строчки будет необходимым стартом запуска нашей программы. В этой строчке не только содержатся обозначения координат, которые будут использоваться во всех без исключения последующих программах-однострочниках, но из неё также будет понятно, какова размерность рассматриваемого пространства. Входные ячейки будем печатать полужирным шрифтом, выходные (если они есть) — светлым.

$x := \{\mathbf{x1}, \mathbf{x2}, \mathbf{x3}\}$

(Здесь выходной ячейки нет, поскольку используется отложенное присвоение.)

Значение размерности пространства:

$n := \text{Length}[x]$

Общий вид метрики (в конкретных примерах эту матрицу нужно будет именовать и вводить в правой части выражения координат поля метрического тензора  $g_{ij}$ , который предполагается симметричным):

$g[\mathbf{x1}_-, \mathbf{x2}_-, \mathbf{x3}_-] := \{\{g11[x1, x2, x3], g12[x1, x2, x3], g13[x1, x2, x3]\},$   
 $\{g21[x1, x2, x3], g22[x1, x2, x3], g23[x1, x2, x3]\},$   
 $\{g31[x1, x2, x3], g32[x1, x2, x3], g33[x1, x2, x3]\}\}$

Обратная матрица (тензора, обратного основному):

$gg[g\_][\mathbf{x1}_-, \mathbf{x2}_-, \mathbf{x3}_-] := \text{Inverse}[g[\mathbf{x1}, \mathbf{x2}, \mathbf{x3}]]$

Коэффициенты связности  $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks} (\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij})$  метрики  $g_{ij}$ :

$\text{cristoffel}[i_-, j_-, k\_][g\_][\mathbf{x1}_-, \mathbf{x2}_-, \mathbf{x3}_-] := 1/2*$   
 $\text{Simplify}[\text{Sum}[gg[g][\mathbf{x1}, \mathbf{x2}, \mathbf{x3}][[k, t]]*(D[g[\mathbf{x1}, \mathbf{x2}, \mathbf{x3}][[t, j]], x[[i]]] +$   
 $D[g[\mathbf{x1}, \mathbf{x2}, \mathbf{x3}][[i, t]], x[[j]]] - D[g[\mathbf{x1}, \mathbf{x2}, \mathbf{x3}][[i, j]], x[[t]]]), t, n]]$

Проверим, как работает программа, взяв метрику трёхмерного пространства Лобачевского [3]:

$gl[\mathbf{x1}_-, \mathbf{x2}_-, \mathbf{x3}_-] := \{\{1/x3^2, 0, 0\}, \{0, 1/x3^2, 0\}, \{0, 0, 1/x3^2\}\}$

Обратная матрица:

$gg[gl][\mathbf{x1}, \mathbf{x2}, \mathbf{x3}]$   
 $\{\{x3^2, 0, 0\}, \{0, x3^2, 0\}, \{0, 0, x3^2\}\}$

Значение  $\Gamma_{33}^3$ :

$\text{cristoffel}[3, 3, 3][gl][\mathbf{x1}, \mathbf{x2}, \mathbf{x3}]$   
 $-1/x3$

Значения всех коэффициентов связности метрики пространства Лобачевского:

$\text{Table}[\text{cristoffel}[i, j, k][gl][\mathbf{x1}, \mathbf{x2}, \mathbf{x3}], \{i, n\}, \{j, n\}, \{k, n\}]$   
 $\{\{\{0, 0, 1/x3\}, \{0, 0, 0\}, \{-1/x3, 0, 0\}\}, \{\{0, 0, 0\}, \{0, 0, 1/x3\}, \{0, -1/x3, 0\}\},$   
 $\{\{-1/x3, 0, 0\}, \{0, -1/x3, 0\}, \{0, 0, -1/x3\}\}\}$

Ковариантное дифференцирование тензора произвольной валентности запрограммировать крайне проблематично, поэтому остановимся на тензоре типа  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ :

$a[\mathbf{x1}_-, \mathbf{x2}_-, \mathbf{x3}_-] :=$   
 $\{\{\{a111[x1, x2, x3], a112[x1, x2, x3], a113[x1, x2, x3]\},$   
 $\{a121[x1, x2, x3], a122[x1, x2, x3], a123[x1, x2, x3]\},$   
 $\{a131[x1, x2, x3], a132[x1, x2, x3], a133[x1, x2, x3]\}\},$   
 $\{\{a211[x1, x2, x3], a212[x1, x2, x3], a213[x1, x2, x3]\},$   
 $\{a221[x1, x2, x3], a222[x1, x2, x3], a223[x1, x2, x3]\},$   
 $\{a231[x1, x2, x3], a232[x1, x2, x3], a233[x1, x2, x3]\}\},$   
 $\{\{a311[x1, x2, x3], a312[x1, x2, x3], a313[x1, x2, x3]\},$   
 $\{a321[x1, x2, x3], a322[x1, x2, x3], a323[x1, x2, x3]\},$   
 $\{a331[x1, x2, x3], a332[x1, x2, x3], a333[x1, x2, x3]\}\}\}$



Ковариантная производная тензора такой валентности:

```
nabla[k][i][j][p][g][a][x1][x2][x3] :=
  D[a[x1, x2, x3][[i, j, p]], x[[k]]] -
  Sum[cristoffel[k, i, s][g][x1, x2, x3] a[x1, x2, x3][[s, j, p]], {s, n}] -
  Sum[cristoffel[k, j, s][g][x1, x2, x3] a[x1, x2, x3][[i, s, p]], {s, n}] +
  Sum[cristoffel[k, s, p][g][x1, x2, x3] a[x1, x2, x3][[i, j, s]], {s, n}]
```

Введём тензор  $b_{ij}^p$  его координатами и найдём ковариантную производную  $\nabla_k b_{ij}^p$ :

```
b[x1][x2][x3] := {{{x1, x2, x1 x2}, {x2, x1, x3}, {x3, 0, 0}},
  {{x1 + x2, x3, 1}, {x3^2, x1, x2}, {0, x3, x3^3}},
  {{x1 + x3, x2 + x3, 0}, {2 x1, 2 x2, 3 x3}, {0, 0, x3}}}
```

Значение  $\nabla_3 b_{23}^3$ :

```
nabla[3][2, 3, 3][g][b][x1, x2, x3]
4 x3^2
```

Все компоненты тензора  $\nabla_k b_{ij}^p$ :

```
Table[nabla[k][i, j, p][g][b][x1, x2, x3], {k, n}, {i, n}, {j, n}, {p, n}]
{{{-(x1 x2)/x3 - (x1 + x3)/x3, -(x2 + x3)/x3, x2 + x1/x3},
  {-1 - (2 x1)/x3, 1 - (2 x2)/x3, -3 + x2/x3}, {x1/x3, x2/x3, (x1 x2)/x3}},
  {{1 - 1/x3, -1, (x1 + x2)/x3 - x3^2}, {-x2/x3, 1, x3},
  {(x1 + x2)/x3 - x3^2, 1, 1/x3}}, {{1 + x1/x3, x2/x3, -1 + (x1 x2)/x3 +
  (x1 + x3)/x3}, {-1 + x2/x3, x1/x3, 1 + (2 x1)/x3},
  {(x1 + x3)/x3, (x2 + x3)/x3, 0}}, {{{0, 1 - (x1 x2)/x3, x1 + x2/x3},
  {0, -1, x1/x3}, {x2/x3, x1/x3, 1}}, {{1 - (x1 + x3)/x3, -1/x3 - (x2 + x3)/x3, 1},
  {-(2 x1)/x3, -1 - (3 x2)/x3, -2 + x1/x3 - x3^2}, {x3, x1/x3 - x3^2, x2/x3}},
  {(x1 + x2)/x3, 2, 1/x3 + (x2 + x3)/x3}, {x3, -1 + x1/x3, -1 + (3 x2)/x3},
  {(2 x1)/x3, (2 x2)/x3, 3 + x3^2}}, {{{x1/x3, x2/x3, (x1 x2)/x3},
  {x2/x3, x1/x3, 2}, {2, 0, 0}}, {{(x1 + x2)/x3, 2, 1/x3}, {3 x3, x1/x3, x2/x3},
  {0, 2, 4 x3^2}}, {{1 + (x1 + x3)/x3, 1 + (x2 + x3)/x3, 0},
  {(2 x1)/x3, (2 x2)/x3, 6}, {0, 0, 2}}}}
```

Тензор кривизны  $R_{rsk}^i$  объекта связности  $\Gamma_{ij}^k$  запрограммируем следующим образом:

```
rcurvature[r][s][k][i][g][x1][x2][x3] :=
  D[cristoffel[s, k, i][g][x1, x2, x3], x[[r]]] -
  D[cristoffel[r, k, i][g][x1, x2, x3], x[[s]]] +
  Sum[cristoffel[r, m, i][g][x1, x2, x3] * cristoffel[s, k, m][g][x1, x2, x3],
  {m, n}] -
  Sum[cristoffel[s, m, i][g][x1, x2, x3] * cristoffel[r, k, m][g][x1, x2, x3],
  {m, n}]
```

Выведем на печать все компоненты тензора кривизны метрики пространства Лобачевского:

```
Table[rcurvature[r, s, k, i][g][x1, x2, x3], {r, n}, {s, n}, {k, n}, {i, n}]
{{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}, {{0, 1/x3^2, 0}, {-1/x3^2, 0, 0}, {0, 0, 0}},
  {{0, 0, 1/x3^2}, {0, 0, 0}, {-1/x3^2, 0, 0}},
  {{{0, -1/x3^2, 0}, {1/x3^2, 0, 0}, {0, 0, 0}},
  {{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}, {{0, 0, 0}, {0, 0, 1/x3^2}, {0, -1/x3^2, 0}},
  {{{0, 0, -1/x3^2}, {0, 0, 0}, {1/x3^2, 0, 0}},
  {{0, 0, 0}, {0, 0, -1/x3^2}, {0, 1/x3^2, 0}}, {{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}}}
```

Программа для тензора Риччи:

```
ric[i][j][g][x1][x2][x3] :=
  Sum[rcurvature[k, i, j, k][g][x1, x2, x3], {k, n}]
```

Тензор Риччи пространства Лобачевского:

```
Table[ric[i, j][g][x1, x2, x3], {i, n}, {j, n}]
{{-2/x3^2, 0, 0}, {0, -2/x3^2, 0}, {0, 0, -2/x3^2}}
```

Аналогичным образом можно программировать другие объекты геометрии дифференцируемых многообразий: тензор кручения, проективные параметры Томаса и т. п. Можно рассматривать и решать уравнения соответствий связностей и метрик (геодезического, конформного и др.)

## Литература

- [1] Воробьёв, Е. М. Введение в систему символьных, графических и численных вычислений «Математика – 5» / Е. М. Воробьёв. – М.: Диалог-МИФИ, 2005. – 368 с.
- [2] Норден, А. П. Пространства аффинной связности / А. П. Норден. – М.: Наука, 1976. – 432 с.

- [3] Широков, П. А. Интерпретация и метрика квадратичных геометрий. Ч. I. Интерпретация неевклидовых геометрий. – В сб.: Избранные работы по геометрии / П. А. Широков. – Казань: Изд-во КГУ, 1966. – С. 77.
- [4] Gray, A. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. 2nd ed/ – CRC Press, 1997.

## ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

М.Н. Кирсанов<sup>1</sup>, С.В. Выльева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский энергетический институт (технический университет), г. Москва,

<sup>2</sup>Московский энергетический институт (технический университет), г. Москва

<sup>1</sup>E-mail: c216@yandex.ru, <sup>2</sup>E-mail: sova\_ws@mail.ru

**Аннотация.** Предлагаются варианты генетического алгоритма для решения начальной задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Обсуждается выбор начальной популяции, метод получения последующих поколений и оценка погрешности полученного решения.

### 1. Введение

Для поиска решения дифференциального уравнения традиционно используются три направления: поиска аналитического решения, численный метод решения и приближенный аналитический. Известные точные решения уравнений собраны в справочниках [1], их можно получить в системах компьютерной алгебры Maple, Mathematica. Поиску численных и приближенных аналитических решений посвящены многочисленные работы, например, [2]. В последнее время для решения различных задач математики и естествознания получили распространение генетические алгоритмы. Суть генетического алгоритма состоит в получении из двух приближенных и хороших в каком-то смысле решений нового, лучшего, решения. В настоящей работе делается попытка применения такого алгоритма к решению дифференциального уравнения.

### 2. Хромосомы

Имеем дифференциальное уравнение

$$y' = F(y, x), \quad (1)$$

где  $y' = dy/dx$ . Начальное условие

$$y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

Решение на интервале  $[x_0, a]$  будем искать в виде суммы  $y = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x)$ ,  $n$  — длина хромосомы. Функции  $\varphi_k(x)$  образуют гены хромосом  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , где  $m$  — размер популяции. От поколения к поколению это число может меняться. Задаются множества функций  $\Phi_k$ , из которых выбираются гены  $\varphi_k \in \Phi_k$ . В общем случае функции  $\varphi_k(x)$  могут и не удовлетворять начальному условию. Пусть  $\varphi_k(x_0) = f_k$ . Коррекция генов по правилу  $\psi_k(x) = \varphi_k(x) - f_k + y_0 \mu_k$  при условии на поправочные коэффициенты  $\sum_{k=1}^n \mu_k = 1$  приводит к выполнению начального условия (2) для функций  $\psi_k(x)$ . Для упрощения поправочные коэффициенты можно выбрать одинаковыми  $\mu_k = 1/n$ ,  $k = 1..n$ .

Степень точности подобранного решения (целевая функция) определяется по формуле

$$Z_j = \sqrt{\left( \max_{i=1..N} (y'_j(x_i) - F(y_j(x_i), x_i)) \right)^2 + \left( \min_{i=1..N} (y'_j(x_i) - F(y_j(x_i), x_i)) \right)^2}, \quad j = 1..n, \quad (3)$$

где  $y_j$  — функции-хромосомы.

Другой вариант целевой функции:

$$Z = \sum_{i=1}^N (y'(x_i) - F(y(x_i), x_i))^2. \quad (4)$$

Точки  $x_0 < x_i < a$ , в которых измеряется квадрат разности, можно расположить равномерно по области определения решения.

Еще один вариант  $Z = \int_{x_0}^a (y'(x_i) - F(y(x_i), x_i))^2 dx$ . В этом случае, при вычислениях в системе Maple, время счета значительно больше.

### 3. Мутация генов

Процедура мутации случайным образом выбирает хромосому  $h_i$ ,  $i = 1..n$  и тип гена  $G_j$ ,  $j = 0..3$ , который будем менять в этой хромосоме. Также случайным образом выбирается ген из начального генотипа аналогичного типа  $G_{j,k}$ ,  $k = 1..n$ . Мутация таким образом состоит в замене некоторого гена в хромосоме  $h_{i,j}$  на другой:  $h_{i,j} = G_{j,k}$ . Стоит отметить, что мутация может и не происходить, если значение  $j = 0$ , причем на каждом этапе рассматривается эта возможность. Будет ген мутировать или нет также определяется случайным образом. В данной реализации мутация не происходит с вероятностью  $1/4$ . С этой же вероятностью определяется, какой именно тип гена будет мутировать.

### 4. Пример

Рассмотрим следующее нелинейное уравнение:

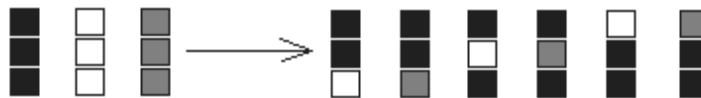
$$xy_x - (2x + 1) \cdot y + y^2 = -x^2. \tag{5}$$

Общее решение этого уравнения:  $y(x) = x + \frac{x}{x + C}$ ,  $C$  — некоторая константа. Рассмотрим следующую задачу Коши

$$xy_x - (2x + 1)y + y^2 = -x^2, \quad y(1) = 1. \tag{6}$$

Множество начальных генов примем в виде  $\Phi_{1,i} = i - 10$ ,  $i = 1..m$ ,  $\Phi_{2,i} = \frac{1}{x^{i-10}}$ ,  $i = 1..m$ ,  $\Phi_{3,i} = \frac{(-1)^i}{x^i + 1}$ ,  $i = 1..m$ ,  $m = 21$ .

Кроссинговер производится по следующей схеме: из данного набора хромосом выбираются некоторые три хромосомы, из них выявляется лучшая, а далее происходит процесс скрещивания генов. Схема кроссинговера приведена ниже:



**Рис.1.** Схема кроссинговера

Как видно, хромосома с наименьшим значением целевой функции (выделена черным цветом), т.е. лучшая из трех имеющихся, занимает привилегированное положение. Ее гены находятся в каждой новой хромосоме, причем по два гена в каждой. Таким образом, гены из лучшей хромосомы точно попадут в следующее поколение:

$$\begin{aligned} h'_{1,j} &= h_{1,j}, \quad j = 1, 2, & h'_{1,j} &= h_{2,j}, \quad j = 3, & h'_{2,j} &= h_{1,j}, \quad j = 1, 2, & h'_{2,j} &= h_{3,j}, \quad j = 3, \\ h'_{3,j} &= h_{1,j}, \quad j = 1, 3, & h'_{3,j} &= h_{2,j}, \quad j = 2, & h'_{4,j} &= h_{1,j}, \quad j = 1, 3, & h'_{4,j} &= h_{3,j}, \quad j = 2, \\ h'_{5,j} &= h_{1,j}, \quad j = 2, 3, & h'_{5,j} &= h_{2,j}, \quad j = 1, & h'_{6,j} &= h_{1,j}, \quad j = 2, 3, & h'_{6,j} &= h_{3,j}, \quad j = 1. \end{aligned}$$

Из полученных шести хромосом выбираем три лучшие хромосомы. Три оставшихся хромосомы отбрасываются и более не участвуют в формировании новых поколений. Аналогичный процесс производим и для оставшихся хромосом из начального набора. После осуществления кроссинговера получаем набор возможных решений уже нового поколения, по количеству совпадающий с начальной популяцией. После нескольких этапов скрещивания получаем решение.

Для поставленной задачи (1) решение было найдено за 5 этапов. Найденное решение имеет вид:  $y(x) = x$  и совпадает с точным.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 08-01-00498-а).

### Литература

[1] Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.  
 [2] Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 1994.  
 [3] Гладков Л.А., В.В.Курейчик, В.М.Курейчик. Генетические алгоритмы — М.: Физматлит, 2006.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕТОДОМ А.Н.КРЫЛОВА ПРИБЛИЖЕННОГО  
ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
МАЯТНИКА**

Р.Е. Кристалинский<sup>1</sup>

Смоленский государственный университет, г. Смоленск

<sup>1</sup>E-mail: -

Применение системы математика весьма эффективно при решении задач, требующих выполнения громоздких символьных вычислений. В качестве примера рассмотрим следующую задачу: Пользуясь методом А.Н.Крылова найти приближённое периодическое решение уравнения математического маятника

$$x'' + \frac{g}{l} \sin[x] = 0 \quad (1)$$

Перепишем это уравнение в следующем виде

$$x'' + \frac{g}{l} + \frac{g}{6l} [6(\sin x - x)] = 0 \quad (2)$$

Функцию  $6(\sin(x) - x)$  заменим отрезком ряда Тэйлора этой функции  $f(x)$  и введём обозначения

$$\frac{g}{l} = k^2, \frac{g}{6l} = \mu \quad (3)$$

Тогда уравнение (1) приближённо заменится следующим уравнением

$$x'' + k^2 x + \mu f(x) = 0 \quad (3)$$

Следуя А.Н. Крылову, решение уравнения (3) приближённо будем искать в следующем виде

$$x(t) = \phi(t) + \sum_{k=1}^6 \mu^k \phi_k(t)$$

$$p^2 = k^2 + \sum_{k=1}^6 h_k \mu^k$$

где  $p$  - частота искомого решения.

Функцию  $x(t)$  подставляем в уравнение (3) и приравниваем нулю коэффициенты при различных степенях  $\mu$ . Мы получаем для нахождения неизвестных функций  $\phi(t), \phi_1(t), \dots, \phi_6(t)$  и постоянных  $h_1, h_2, \dots, h_6$  систему дифференциальных уравнений. Первое из этих уравнений имеет вид

$$\phi'' + p^2 \phi = 0$$

Каждое из следующих дифференциальных уравнений содержит решения предыдущих. Уравнения решаются при следующих начальных условиях

$$\phi(0) = A, \phi'(0) = 0$$

$$\phi_1(0) = A, \phi_1'(0) = 0$$

.....

$$\phi_6(0) = A, \phi_6'(0) = 0$$

$A$  - начальное отклонение маятника.

Постоянные  $h_k$  находятся из условия, состоящего в том, что решение  $k$ -го уравнения не содержит векового члена. Подставляя в выражение для  $p^2$  найденные значения констант  $h_1, h_2, \dots, h_6$ , мы получаем уравнение для определения частоты  $p$

Приведём программу для решения рассматриваемой задачи в системе Mathematica.

```
f[x_]=Normal[Series[Sin[x]-x,{x,0,11}]];
U=x'[t]+k2 x[t]+$mu$ (6
f[x[t]]); n=6;
```

$$x[t_] = \phi[0][t] + \sum_{i=1}^n \phi[i][t] \mu^i$$

$$k = \sqrt{p^2 - \sum_{i=1}^n \mu^i h[i]}$$

```
U0=Coefficient[U,\mu,0];
R0=DSolve[U0==0,\phi[0][0]==A,\phi[0]'[0]==0,\phi[0][t],t];
\phi[0][t_]=\phi[0][t]/.R0[[1]];
Do[U1=Coefficient[U,\mu,i];U1=TrigReduce[U1];
K1=Coefficient[U1,Cos[p t]];R1=Solve[K1==0,h[i]];
h[i]=h[i]/.R1[[1]];R2=DSolve[U1==0,\phi[i][0]==0,
\phi[i]'[0]==0,\phi[i][t],t];\phi[i][t_]=
\phi[i][t]/.R2[[1]],i,1,n] A = \frac{11}{2};
g = 9.81; l = 2; k = \sqrt{\frac{g}{l}}; \mu = \frac{g}{6l};
x[t_]=Chop[N[TrigReduce[x[t]]],10^{-7}];
R=NSolve[p^2 == k^2 + \sum_{i=1}^n \mu^i h[i]
p=Rationalize[p/.R[[2]],10^{-4}]
```

$$\frac{167}{89}$$

```
x[t_]=Rationalize[x[t],10^{-4}]
```

$$\frac{110}{69} \cos\left[\frac{167t}{89}\right] - \frac{3}{125} \cos\left[\frac{501t}{89}\right] + \frac{\cos\left[\frac{835t}{89}\right]}{1610}$$

## Литература

- [1] Крылов А.Н. Вибрация судов: Собр. соч.: В 12 т.-М.-Л.: Изд. АН СССР, 1948. – Т. 10.-403 с.

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНО НЕУСТОЙЧИВЫЕ АЛГОРИТМЫ МЕХАНИКИ В MAPLE

А. В. Матросов<sup>1</sup>

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

<sup>1</sup>E-mail: avmatrosov@mail.ru

**Аннотация.** Обсуждается вычислительная неустойчивость метода начальных параметров и метода начальных функций решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Эти методы универсальны и применяются для решения задач строительной механики и теории упругости. В работе предлагается один из способов устранения указанного недостатка методов — производить вычисления в вещественной арифметике с произвольной мантиссой, используя системы компьютерной математики.

## Введение

Метод начальных параметров является одним из эффективных методов решения краевых задач систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако известно, что для некоторых задач, например, длинная балка на жестком упругом основании Винклера, его алгоритм становится вычислительно неустойчивым.

Метод начальных функций, являющийся обобщением метода начальных параметров на двумерные и трехмерные задачи и применяемый, например, в декартовой системе координат для решения задач изгиба упругих

плит, при его реализации через тригонометрические функции также обладает вычислительной неустойчивостью при больших гармониках с увеличением толщины плиты.

Преодолеть указанный недостаток этих методов при реализации в традиционных системах программирования (C++, Fortran, Pascal) не удастся без привлечения специализированных библиотек работы с вещественной арифметикой с произвольной мантиссой. Системы аналитических вычислений (Maple, Mathematica и др.), являясь мощными инструментами аналитических вычислений, позволяют в тоже время реализовывать алгоритмы вычислительной математики с помощью встроенных в них языков программирования, причем изменение длины мантиссы в вычислениях не требует никакого специального программирования. Задание ее длины выполняется простым присваиванием системной переменной требуемого значения.

В данной работе на примере модифицированного алгоритма метода начальных параметров и метода начальных функций показано использование системы Maple для разработки практического алгоритма метода начальных параметров для решения краевых задач упругой балки на упругом основании Винклера, а также для проведения устойчивых вычислений по методу начальных функций расчета толстых плит, изгибающихся по цилиндрической поверхности.

## 1. Алгоритм метода начальных параметров

Рассмотрим тонкую балку длины  $l$  м с относительно небольшой шириной  $b$  м и с переменной вдоль ее оси жесткостью на изгиб, лежащую на упругом основании Винклера с переменным коэффициентом постели  $c(x)$  Н/м<sup>3</sup> и нагруженную распределенной по всей длине нормальной к оси балки непрерывной нагрузкой  $q(x)$  Н/м. Предполагается свободное без трения проскальзывание балки по плоскости контакта с основанием.

Обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка изгиба балки на упругом основании может быть записано в матричной форме в виде системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\mathbf{W}'(x) = \mathbf{A}(x) \mathbf{W}(x) + \mathbf{B}(x). \quad (1)$$

Здесь

$$\mathbf{W}(x) = \begin{bmatrix} w(x) \\ \theta(x) \\ M(x) \\ N(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI(x)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k(x) & 0 & \frac{T}{EK(x)} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q(x) \end{bmatrix},$$

$w(x)$  — прогиб балки по оси  $z$ ,  $E$  — модуль упругости материала балки,  $I(x)$  — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения,  $k(x) = c(x)b$ ,  $\theta(x)$  — угол поворота сечения  $x$ ,  $M(x)$  и  $N(x)$  соответственно момент и перерезывающая сила в сечении  $x$ .

Завершает постановку задачи задание граничных условий на концах балки — по два на каждом ее конце. Например, в случае свободных концов следует положить равными нулю момент и перерезывающую силу в сечениях  $x = 0$  и  $x = l$ , а если какой-либо конец жестко защемлен, то полагаются нулю прогиб и угол поворота.

Предположим, что все коэффициенты в системе (1) могут быть представлены сходящимися рядами Маклорена на всей длине балки  $x \in [0, l]$

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}_i x^i, \quad \mathbf{B}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{B}_i x^i. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{A}_i$  являются числовыми матрицами размерности  $(4 \times 4)$ , а  $\mathbf{B}_i$  числовыми векторами размерности  $(4 \times 1)$ , компоненты которых определяются из вида соответствующих компонентов матрицы  $\mathbf{A}(x)$  и вектора  $\mathbf{B}(x)$ .

Решение системы дифференциальных уравнений (1) также ищем в виде ряда Маклорена

$$\mathbf{W}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{W}_i x^i \quad (3)$$

с неизвестными коэффициентами  $\mathbf{W}_i$  — числовыми векторами размерности  $(4 \times 1)$ , которые следует определить из условия удовлетворения дифференциальному уравнению задачи и заданным граничным условиям.

После подстановки в систему дифференциальных уравнений (1) разложения в степенные ряды вектора решения (3) и коэффициентов системы в виде (2) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях независимой переменной  $x$  получим систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов в разложении решения  $\mathbf{W}(x)$ . Неизвестные векторы  $\mathbf{W}_i$ ,  $i = 1, \dots, \infty$ , этой бесконечной системы можно представить через вектор начальных параметров  $\mathbf{W}_0$  путем последовательных подстановок в правые части уравнений выражений для входящих в них векторов  $\mathbf{W}_i$  через вектор начальных параметров. Тогда решение (3) системы дифференциальных уравнений изгиба балки (1) может быть записано в виде [1]

$$\mathbf{W}(x) = \left( \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{W}_i^* x^i \right) \mathbf{W}_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{B}_i^* x^i, \quad (4)$$

где матрицы  $\mathbf{W}_i^*$  размерности  $(4 \times 4)$  и векторы  $\mathbf{B}_i^*$  размерности  $(4 \times 1)$  представляются выражениями, в которые входят известные матрицы  $\mathbf{A}_k$  и векторы  $\mathbf{B}_k$  из (2).

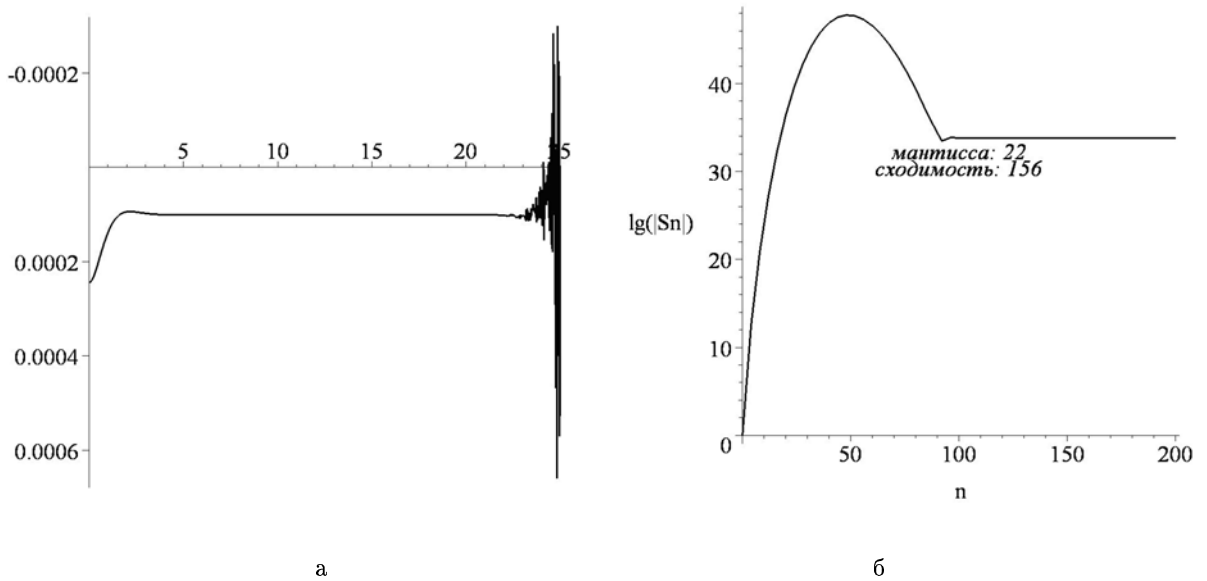


Рис. 1. Прогиб  $w(x)$  балки (а) и частичные суммы (б) ряда (10) при проявлении вычислительной неустойчивости

Завершает решение задачи определение четырех компонентов вектора  $\mathbf{W}_0$  из системы четырех линейных уравнений, получающейся из условия удовлетворения полученного решения граничным условиям задачи (по два на каждом конце балки).

**Модельная задача исследования.** Для исследования вычислительной устойчивости алгоритма метода начальных параметров рассматривалась бетонная ( $E = 20$  ГПа) балка длиной  $l = 25$  м, шириной  $b = 0,1$  м, высотой  $h = 0,15$  м, лежащая на упругом основании Винклера с постоянным коэффициентом постели  $c(x) = 100$  МН/м<sup>3</sup>. На левом конце балки действует нормальная к ее продольной оси сила  $N(0) = 1$  КН, угол поворота сечения равен нулю  $\theta(0) = 0$ . Правый конец балки свободен от нагрузок  $M(l) = 0, N(l) = 0$ . Для исключения отрыва точек подошвы балки от основания, к ней дополнительно приложена равномерно распределенная по всей длине нагрузка интенсивности  $q(x) = 1$  КН/м.

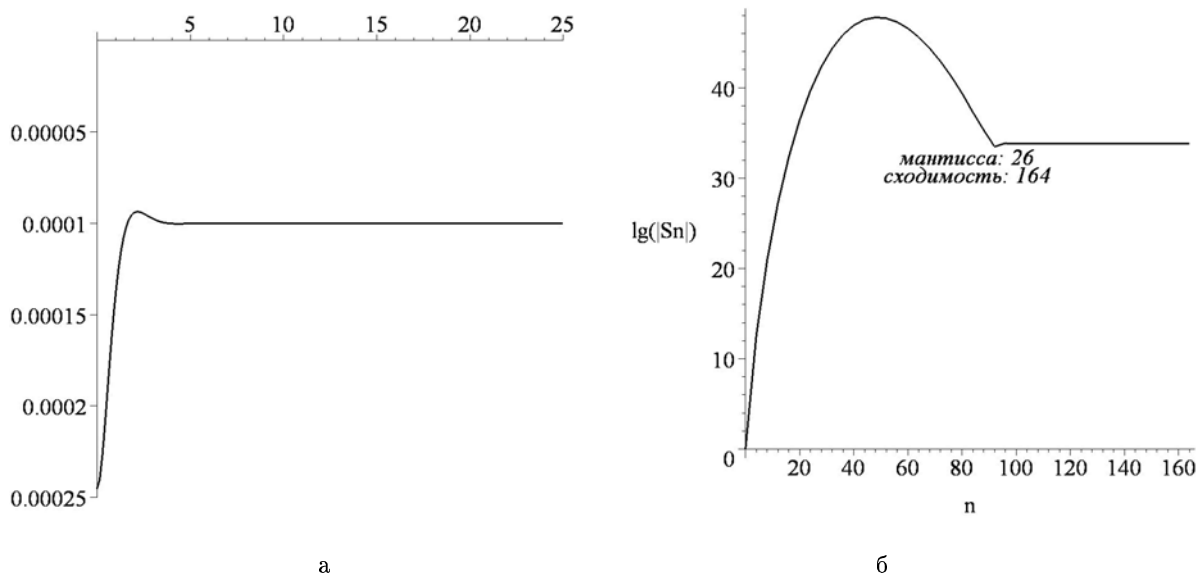
Исследовалось влияние длины мантиссы на достоверное суммирование рядов решения (4) на правом конце балки ( $x = l$ ) на примере ряда

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{W}_{i,1,1}^* l^i \tag{5}$$

в представлении прогиба балки

$$\mathbf{W}_1(x) = \sum_{k=1}^4 \left( \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{W}_{i,1,k}^* x^i \right) \mathbf{W}_{0k} + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{B}_{i,1}^* x^i.$$

**Вычислительные эксперименты.** Природа вычислительной неустойчивости алгоритма метода начальных параметров связана с накоплением ошибки округления при вычислении частичных сумм ряда (5). Характер изменения их при увеличении количества членов таков, что сначала эти суммы возрастают до очень большого значения и убывают в дальнейшем до истинной величины.



**Рис. 2.** Прогиб  $w(x)$  балки (а) и частичные суммы (б) ряда (5) без проявления вычислительной неустойчивости

На рис. 1, а представлена кривая прогиба  $w(x)$  балки при расчетах с 22 цифрами в мантиссе. Ряд (5) для этого случая вычислен с максимально возможной точностью (добавление членов ряда с номерами, большими 156, уже не изменяет полученную сумму ряда). На рис. 1, б показан график его частичных сумм в полулогарифмической шкале и отображен номер члена ряда, добавление которого к вычисленной сумме не изменяет ее значения. Хотя сумма ряда и вычислена с предельно возможной для данного случая точностью, однако она далека от истинного значения, а это и приводит к недостоверным вычислениям на правом конце балки, что и наблюдается на рис. 1, а. Вычисленная сумма ряда  $S = 6806030019080498611941 \cdot 10^{12}$ , тогда как точное значение (вычисленное с мантиссой длиной 100) равняется  $6806030019080479887086655469523254,9806$ . Погрешность составляет величину порядка  $10^{20}$ .

Увеличение длины мантиссы до 26 цифр приводит к достоверным результатам, что можно видеть из графиков рис. 2. В этом случае для вычисления суммы ряда необходимо учесть 164 члена ряда и ее значение равняется  $S = 68060300190804798871363998 \cdot 10^8$ .

## 2. Алгоритм метода начальных функций для плоской задачи теории упругости

Основное соотношение метода начальных функций для линейно-упругого анизотропного тела, находящегося в условиях плоской задачи, в прямоугольной декартовой системе координат может быть получено в следующем виде [2]

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}\mathbf{U}^0. \tag{6}$$

Здесь  $\mathbf{U} = \{u, v, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$  — вектор-столбец перемещений и напряжений в произвольной точке упругого тела,  $\mathbf{U}^0 = \{u^0, v^0, \sigma_x^0, \tau_{xy}^0\}$  — вектор-столбец начальных функций, определенных на грани  $x = 0$ ,  $\mathbf{L} = [L_{ij}]$  ( $i = 1, \dots, 5, j = 1, \dots, 4$ ) — матрица операторов МНФ вида

$$L_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} l_{ij}^k (A_{ps}, \partial_y) x^k. \tag{7}$$

Коэффициенты  $l_{ij}^k (A_{ps}, \partial_y)$  зависят от оператора дифференцирования  $\partial_y$  по переменной  $y$  и упругих постоянных анизотропного тела  $A_{ps}$  из обобщенного закона Гука

$$\sigma = \mathbf{H}\varepsilon. \tag{8}$$

Здесь  $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$  является вектором-столбцом компонентов тензора напряжений,  $\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}$  представляет вектор-столбец компонентов тензора деформаций, а  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}$  — матрица упругих постоянных материала [3].



Если известны все компоненты вектора начальных функций, то соотношение (15) позволяет вычислить все компоненты напряженно-деформированного состояния в любой точке упругого тела. Однако обычно не все начальные функции известны, так как для любой плоской статической задачи на каждой из граней упругого тела известны обычно два компонента напряженно-деформированного состояния. Таким образом на начальной плоскости, если она совмещена с одной из граней тела, из условий задачи обычно известны два компонента. Остальные два можно определить из граничных условий на противоположной грани  $x = h$ . Например, если на начальной линии  $x = 0$  заданы напряжения  $\sigma_x^0(y), \tau_{xy}^0(y)$ , а на грани  $x = h$  напряжения  $\sigma_x^h(y), \tau_{xy}^h(y)$ , то для определения недостающих двух начальных функций  $u^0(y)$  и  $v^0(y)$  можно получить систему двух дифференциальных уравнений бесконечного порядка, вычислив значения соответствующих компонентов напряжений на линии  $x = h$  на основе соотношения (15):

$$\begin{cases} L_{31}|_{x=h} u^0 + L_{32}|_{x=h} v^0 = \sigma_x^h - L_{33}|_{x=h} \bar{\sigma}_x^0 - L_{34}|_{x=h} \tau_{xy}^0 \\ L_{51}|_{x=h} u^0 + L_{52}|_{x=h} v^0 = \tau_{xy}^h - L_{53}|_{x=h} \sigma_x^0 - L_{54}|_{x=h} \tau_{xy}^0 \end{cases} \quad (9)$$

**Решение через тригонометрические функции.** Если упругое тело представляет прямоугольную область со сторонами, параллельными координатным осям, то выбор в качестве начальных функций тригонометрических позволит удовлетворить граничным условиям на двух противоположных гранях тела  $x = 0$  и  $x = h$ , где  $h$  — размер прямоугольной области по координате  $x$ . На двух других гранях  $y = 0$  и  $y = a$ , где  $a$  — размер прямоугольной области по координате  $y$ , граничные условия диктуются выбранным видом начальных функций. По существу это означает, что решается задача о периодическом нагружении бесконечного упругого слоя.

Для тел с произвольной степенью анизотропии операторы матрицы  $\mathbf{L}$  в соотношении (15) замкнуты в случае плоской задачи относительно линейной комбинации тригонометрических функций  $s_m^a = \sin(m\pi y/a)$  и  $c_m^a = \cos(m\pi y/a)$ . Это означает, что если все начальные функции будут представлены в виде суммы тригонометрических рядов по синусам и по косинусам

$$\mathbf{U}^0 = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{U}_m^{0,\sin} + \mathbf{U}_m^{0,\cos},$$

$$\mathbf{U}_m^{0,\sin} = \{b_m^{1,\sin} s_m^a, b_m^{2,\sin} c_m^a, b_m^{3,\sin} s_m^a, b_m^{4,\sin} c_m^a\}, \quad (10)$$

$$\mathbf{U}_m^{0,\cos} = \{b_m^{1,\cos} c_m^a, b_m^{2,\cos} s_m^a, b_m^{3,\cos} c_m^a, b_m^{4,\cos} s_m^a\},$$

то и все компоненты вектора напряженно-деформированного состояния  $\mathbf{U}$  также будут представлены в виде суммы тригонометрических рядов по синусам и косинусам

$$\mathbf{U}_i = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{U}_m^{\sin} + \mathbf{U}_m^{\cos},$$

$$\mathbf{U}_m^{\sin} = \{L_m^{1,\sin} s_m^a, L_m^{2,\sin} c_m^a, L_m^{3,\sin} s_m^a, L_m^{4,\sin} s_m^a, L_m^{5,\sin} c_m^a\},$$

$$\mathbf{U}_m^{\cos} = \{L_m^{1,\cos} c_m^a, L_m^{2,\cos} s_m^a, L_m^{3,\cos} c_m^a, L_m^{4,\cos} c_m^a, L_m^{5,\cos} s_m^a\}.$$

Коэффициенты  $L_m^{i,\sin}$  и  $L_m^{i,\cos}$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) есть степенные ряды по переменной  $x$ , вычисляемые как результат воздействия соответствующих операторов начальных функций (16) на соответствующие тригонометрические функции  $s_m^a$  и  $c_m^a$  согласно соотношению (15) и представлению начальных функций (13) с последующим приведением подобных членов при тригонометрических функциях.

Для ортотропных, трансверсально-изотропных и изотропных тел операторы метода начальных функций замкнуты не только при представлении начальных функций суммой рядов по синусам и косинусам, но и при представлении начальных функций только по синусам ( $\mathbf{U}^0 = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{U}_m^{0,\sin}$ ) или только по косинусам ( $\mathbf{U}^0 = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{U}_m^{0,\cos}$ ). При этом коэффициенты в представлении компонентов вектора напряженно-деформированного состояния  $\mathbf{U}$  представляются намного проще, чем в случае общей анизотропии:

$$L_m^{i,\sin} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^4 b_m^{j,\sin} \tilde{l}_{ij,m}^{k,\sin} x^k, \quad L_m^{i,\cos} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^4 b_m^{j,\cos} \tilde{l}_{ij,m}^{k,\cos} x^k. \quad (11)$$

Причем коэффициенты  $\tilde{l}_{ij,m}^{k,\sin}$  и  $\tilde{l}_{ij,m}^{k,\cos}$  вычисляются как результат воздействия операторов  $l_{ij}^k(A_{ps}, \partial_y)$  из (16) на тригонометрические функции представления начальных функций по синусам или косинусам (13).

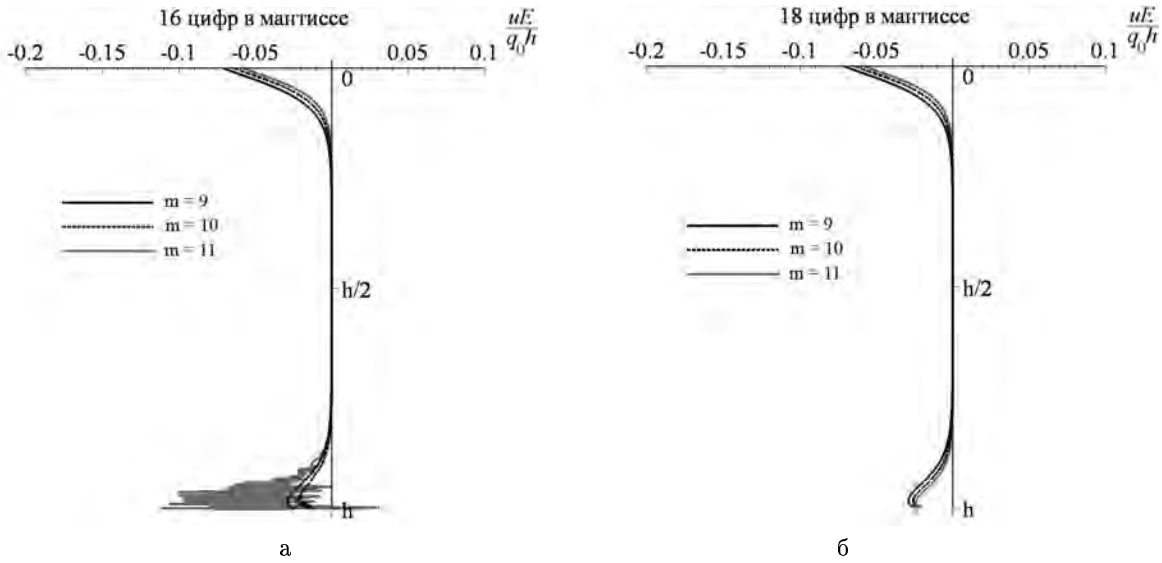
Уравнения типа (12) для вычисления неизвестных начальных функций в этом случае преобразуются в серию систем линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов в их представлениях тригонометрическими рядами — для каждой гармонике своя система:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{l}_{31,m}^{k,\sin} x^k |_{x=h} b_m^{1,\sin} + \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{l}_{32,m}^{k,\sin} x^k |_{x=h} b_m^{2,\sin} = \sigma_{xm}^h - \\ \quad - \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{l}_{33,m}^{k,\sin} x^k |_{x=h} b_m^{3,\sin} - \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{l}_{34,m}^{k,\sin} x^k |_{x=h} b_m^{4,\sin} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{l}_{51,m}^{k,\sin} x^k |_{x=h} b_m^{1,\sin} + \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{l}_{52,m}^{k,\sin} x^k |_{x=h} b_m^{2,\sin} = \tau_{xym}^h - \\ \quad - \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{l}_{53,m}^{k,\sin} x^k |_{x=h} b_m^{3,\sin} - \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{l}_{54,m}^{k,\sin} x^k |_{x=h} b_m^{4,\sin} \end{array} \right. \quad (12)$$

Здесь через  $\sigma_{xm}^h$  и  $\tau_{xym}^h$  обозначены коэффициенты при  $m$ -х гармониках в разложении в ряды Фурье заданных функций напряжений на нижней грани прямоугольной области.

С увеличением номера гармоники оказывается невозможным получить достоверные значения компонентов НДС в области, отдаленной от начальной плоскости. Это связано как с накоплением ошибок при расчете числовых коэффициентов в рядах (16), так и с характером сходимости самих этих рядов, приводящим к катастрофической потере верных цифр в получаемой сумме этих рядов [4], используемых в качестве коэффициентов системы (15), которая становится плохо обусловленной с увеличением номера гармоники. Анализ и решение указанной проблемы показаны на примере модельной задачи деформирования изотропного тела.

**Модельная задача исследования.** Рассмотрим задачу расчета напряженно-деформированного состояния прямоугольного в сечении с размерами  $h \times a$  ( $h/a = 1$ ) изотропного тела ( $E = E_0$ ,  $\nu = 1/3$ ), находящегося в условиях плоской деформации. По грани  $x = 0$  (начальная плоскость) к телу приложены усилия  $\sigma_x^0 = q_0 \sin(m\pi y/a)$ ,  $\tau_{xy}^0 = \tau_0 \cos(m\pi y/a)$  ( $\tau_0 = 0$ ), а по грани  $x = h$  усилия  $\sigma_x^h = q_h \sin(m\pi y/a)$ ,  $\tau_{xy}^h = \tau_h \cos(m\pi y/a)$  ( $q_h = 0$ ,  $\tau_h = q_0$ ). Неизвестные перемещения начальной плоскости  $x = 0$  ищутся в виде  $u^0 = u_0 \sin(m\pi y/a)$ ,  $v^0 = v_0 \cos(m\pi y/a)$  с неопределенными коэффициентами, которые определяются из решения системы уравнений (15), полагая в ней  $b_m^{1,\sin} \equiv u_0$ ,  $b_m^{2,\sin} \equiv v_0$ ,  $b_m^{3,\sin} \equiv q_0$ ,  $b_m^{4,\sin} \equiv \tau_0$ ,  $\sigma_{xm}^h = q_h$  и  $\tau_{xym}^h = \tau_h$ . На двух других гранях тела граничные условия продиктованы выбранными тригонометрическими функциями представления компонентов вектора начальных функций.



**Рис. 3.** Безразмерные перемещения  $uE_0/q_0h$  для различных гармоник при вычислениях с мантиссой длиной 16 (а) и длиной 18 (б)

**Вычислительные эксперименты.** Расчеты НДС с удвоенной точностью представления вещественных чисел (16 цифр в мантиссе) показывают наличие вычислительной неустойчивости при  $m \geq 10$  (графики безразмерных перемещений  $uE_0/q_0h$  рис. 3, а в сечениях  $y = a/2m$ ).

Простое увеличение в расчетах мантиссы вещественных чисел до 18 цифр позволяет получить достоверные результаты при  $m \leq 11$  (рис. 3, б). Но при больших значениях гармоник вычисления продолжают оставаться неустойчивыми.

Это связано с катастрофической потерей верных цифр в вычисляемых суммах рядов (14), являющихся коэффициентами линейной системы (15), число обусловленности которой растет с увеличением гармоники. Накопление ошибок при вычислении сумм степенных рядов связано с характером сходимости последних — их частичные суммы сначала возрастают до чисел больших порядков, а потом убывают до не очень больших значений сумм рядов. Максимальные значения частичных сумм достигают порядка  $10^7$  для перемещений и  $10^{14}$  для напряжений уже при  $m = 10$ , а это и является причиной того, что суммы соответствующих степенных

рядов вычисляются с большой погрешностью (не хватает цифр в мантиссе для их вычисления с необходимой точностью). Более того суммируемые ряды знакопеременны, а это приводит к вычислению разности больших близких величин, определенных с большой погрешностью. На рис. 4, а представлены в логарифмической шкале абсолютные значения частичных сумм степенных рядов (14) для вычисления перемещения  $u$  в горизонтальном сечении  $x = h$  при разных гармониках. Для сравнения на рис. 4, б показаны те же графики, вычисленные точно с использованием мантиссы длиной 90.

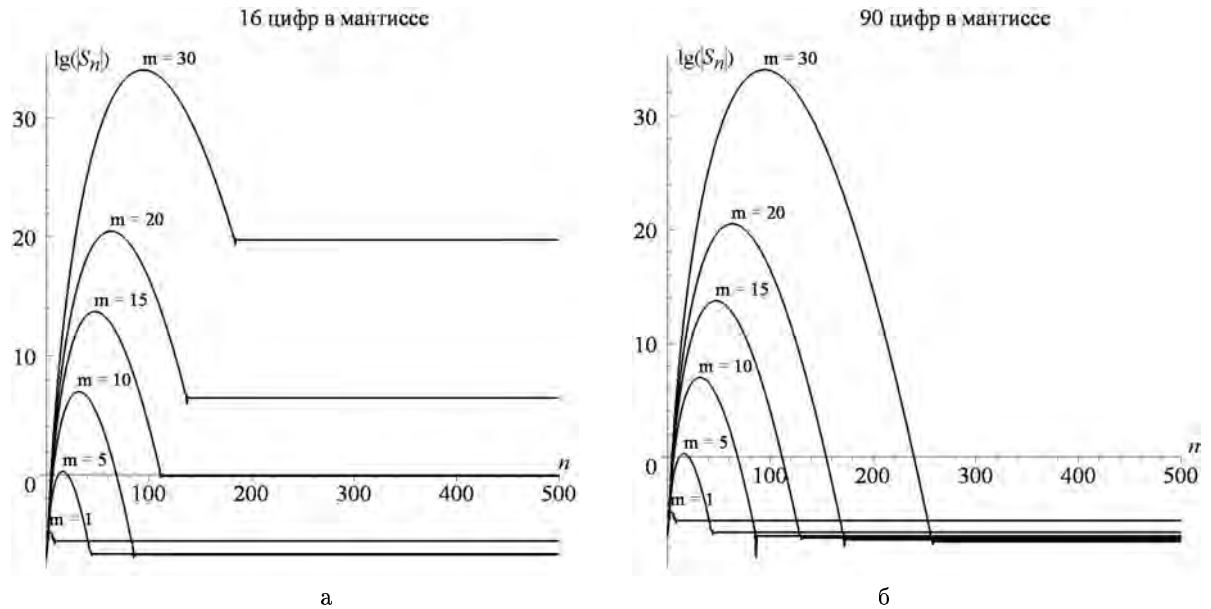


Рис. 4. Графики частичных сумм рядов (14) при вычислениях с мантиссой длиной 16 (а) и 90 (б) для различных гармоник

## Заключение

В работе показаны возможности использования аналитических систем компьютерной математики для реализации вычислительно-неустойчивых алгоритмов. Возможность выполнения расчетов с мантиссой практически неограниченной длины (в Maple максимальное значение длины мантиссы можно устанавливать равным 268435448) по существу снимает проблему вычислительной неустойчивости численных и численно-аналитических алгоритмов. Однако за такое удобство приходится платить скоростью выполнения программ (системы аналитических вычислений интерпретируемы), а для ее увеличения необходимостью наличия на компьютере оперативной памяти большого объема (для некоторых задач до 4Гб).

## Литература

- [1] Матросов А. В. Численно-аналитический алгоритм метода начальных параметров. // Вестник СПбГУ, Сер. 10, 2009, вып. 2. С. 72-81.
- [2] Матросов А. В. Численно-аналитическое решение граничной задачи деформирования линейно-упругого анизотропного прямоугольника // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2007. Вып. 2. С. 55-65.
- [3] Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. - Изд. 2-е. М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1977. 416 с.
- [4] Форсайт Дж., Малькольм М., Моулдер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 279 с.

## ВЛИЯНИЕ ПАРАДОКСА ДНЕЙ РОЖДЕНИЯ НА КРИПТОГРАФИЧЕСКУЮ СТОЙКОСТЬ ХЕШ-ФУНКЦИЙ

Р.В. Матухин<sup>1</sup>, О.В. Ибушева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ОАО «Нижнекамскнефтехим», г. Нижнекамск, <sup>2</sup>Нижнекамский  
химико-технологический институт, г. Нижнекамск

<sup>1</sup>E-mail: -, <sup>2</sup>E-mail: -

Хеш-функция  $H$  – это функция, определенная на битовых строках произвольной длины со значениями в строках битов фиксированной длины. Ее значение часто называют хеш-кодом, хеш-значением или дайджестом. Среди множества существующих хеш-функций принято выделять криптографически стойкие, применяемые в криптографии. Для того, чтобы хеш-функция  $H$  считалась криптографически стойкой, она должна удовлетворять трем основным требованиям:

- необратимость: для заданного значения хеш-функции  $m$  должно быть вычислительно неосуществимо найти блок данных  $X$ , для которого  $H(X) = m$ ;
- стойкость к коллизиям первого рода: для заданного сообщения  $M$  должно быть вычислительно неосуществимо подобрать другое сообщение  $N$ , для которого  $H(N) = H(M)$ ;
- стойкость к коллизиям второго рода: должно быть вычислительно неосуществимо подобрать пару сообщений  $(M, M')$ , имеющих одинаковый хеш.

Следует отметить, что не доказано существование необратимых хеш-функций, для которых вычисление какого-либо прообраза заданного значения хеш-функции теоретически невозможно. Обычно нахождение обратного значения является лишь вычислительно сложной задачей. Парадокс дней рождения – утверждение, гласящее, что если дана группа из 23 или более человек, то вероятность того, что хотя бы у двух из них дни рождения (число и месяц) совпадут, превышает 50%. Задача, представленная парадоксом дней рождения, может быть поставлена в общем виде следующим образом: если даны  $N$  равномерно распределённых случайных чисел в диапазоне от 1 до  $D$ , то какова вероятность  $p(N; D)$  того, что хотя бы два из этих чисел совпадут?

Решение может быть определено следующим образом.

$$p(n; d) = \begin{cases} 1 - \prod_{k=1}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{D}\right), & N \leq D; \\ 1, & N > D; \end{cases}$$

$$p(N; D) \approx 1 - e^{-\frac{N(N-1)}{2D}}.$$

Значение этой вероятности превосходит 0.5 при  $N = 23$  и  $D = 365$ . Парадокс дней рождения в общем смысле применим к криптографическим хеш-функциям. Атака "дней рождения" позволяет находить коллизии для хеш-функции с длиной значений  $N$  битов в среднем за примерно  $2^{N/2}$  вычислений хеш-функции. Поэтому  $N$ -битная хеш-функция считается криптостойкой, если вычислительная сложность нахождения коллизий для нее близка к  $2^{N/2}$ . Для заданной хеш-функции  $H$  целью атаки является поиск коллизии второго рода. Для этого вычисляются значения  $H$  для случайно выбранных блоков входных данных до тех пор, пока не будут найдены два блока, имеющие один и тот же хеш. Таким образом, если  $H$  имеет  $N$  различных равновероятных выходных значений, и  $N$  является достаточно большим, то из парадокса о днях рождениях следует, что, в среднем, после перебора порядка  $\sqrt{N}$  различных входных значений, будет найдена искомая коллизия. В качестве примера использования злоумышленником коллизии второго рода можно рассмотреть простую процедуру аутентификации пользователя, когда к введенному паролю применяется хеш-функция, а результат сравнивается с тем, который хранится в базе данных системы аутентификации. Если злоумышленник сможет найти коллизии для используемой хеш-функции, он найдет поддельный пароль, который будет иметь тот же дайджест, что и пароль пользователя. Одним из методов защиты от атаки "дней рождения" является метод "salt" (соль, затравка). Он заключается в добавлении некоторой случайной последовательности символов или хеш-кода этой последовательности к хэш-коду сообщения и повторном хешировании результата. Пожалуй, самым эффективным методом защиты от атаки "дней рождения" в настоящий момент является использование хеш-функций, обладающих достаточной длиной хеш-кода.

## Литература

- [1] ГОСТ Р 34.11-94 Информационная технология. Криптографическая защита информации. Функция хэширования. [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://protect.gost.ru>, свободный.
- [2] Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. – М.: Институт компьютерных исследований, 1990. – 272 с.
- [3] Шнайер Б. Прикладная криптография. Протоколы, алгоритмы, исходные тексты на языке Си – М.: Триумф, 2002. – 816 с.
- [4] Bruce Schneier. Counterpane Internet Security Inc. Opinion: Cryptanalysis of MD5 and SHA: Time for a new standard [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.computerworld.com>, свободный.
- [5] Xiaoyun Wang, Dengguo Feng, Xuejia Lai. Collisions for Hash Functions MD4, MD5, HAVAL-128 and RIPEMD [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://eprint.iacr.org/2004/199.pdf>, свободный.

**ТЕНЗОРНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ПАКЕТЕ MAPLE ДЛЯ  
ПЛОСКО-СИММЕТРИЧНОГО ПРОСТРАНСТВА ЭЛЕКТРОВАКУУМА**

М.Л.Михайлов<sup>1</sup>

Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатьев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Татарский Государственный Гуманитарно-Педагогический Университет,  
Казань

<sup>2</sup>Татарский Государственный Гуманитарно-Педагогический Университет,  
Казань

---

<sup>1</sup>E-mail: meschgan@mail.ru, <sup>2</sup>E-mail: ignatev\_yu@rambler.ru

**Аннотация.** В пакете Maple вычисляются тензорные соотношения и упрощаются уравнения Эйнштейна для плоско-симметричного пространства электровакуума.

Как известно [1], уравнения Эйнштейна имеют вид:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}R g_{ik} + \Lambda g_{ik} = \kappa_0 T_{ik}, \quad (1)$$

где  $R_{ik}$  - компоненты тензора Риччи,  $R$  - скаляр Риччи,  $T_{ik}$  - компоненты тензора энергии-импульса,  $\Lambda$  - космологическая постоянная,  $\kappa_0$  - гравитационная постоянная. Метрика плоско-симметричного электровакуумного пространства задается в виде:

$$ds^2 = 2e^{2a(u,v)} dudv - L^2(u,v)(e^{2b(u,v)}(dx^2)^2 + e^{-2b(u,v)}(dx^3)^2) \quad (2)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $L$  - некоторые функции от  $u$  и  $v$ . Из (1) выпишем компоненты метрического тензора и с помощью команды *create* библиотеки *tensor* пакета символьной математики Maple создаем метрический тензор.

$$g := \text{table}([\text{index\_char} = [-1, -1], \text{compts} = \begin{bmatrix} 0 & e^{2a(u,v)} & 0 & 0 \\ e^{2a(u,v)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L^2(u,v)e^{2b(u,v)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^2(u,v)e^{-2b(u,v)} \end{bmatrix}]) \quad (3)$$

Тензор Римана, тензор и скаляр Риччи, символы Кристоффеля первого и второго рода вычисляем с помощью встроенных команд библиотеки *tensor*. Неизвестным в уравнении Эйнштейна остается еще тензор энергии-импульса, который определяется следующим образом:

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi}(-F^{il}F_l^k + \frac{1}{4}g^{ik}F_{lm}F^{lm}) \quad (4)$$

где  $F$  тензор электромагнитного поля,  $g^{ik}$  - контравариантный метрический тензор. Для вычисления тензора электромагнитного поля в пакете Maple создаем процедуру:

```

F:=proc(coords,A)local n,j,i,xx,l,Fik,X,S,M,T;
n:=nops(coords);
X:=seq(1,1..n);
xx:=(j) -> op(j,coords);
Fik:=(k) -> [seq(diff(A[k],xx(i))-(diff(A[i],xx(k))),i=1..n)];
S:=seq(Fik(k),k=X);
M:=convert(S,array);
T:=create([-1,-1],op(M))
end proc:

```

Свойства поля характеризуются 4-вектором потенциала  $A_i$ , компоненты которого являются функциями координат и времени. Задавая четырехмерный векторный потенциал поля,  $A_i = [\varphi(u), 0, \psi(u) + av + bx^2 + cx^3, \varphi(u) + ev + dx^2 + fx^3]$ , с помощью данной процедуры найдем тензор электромагнитного поля  $F$ .

$$F := \text{table}(\text{index\_char} = [-1, -1], \text{compts} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\left(\frac{d}{du}\psi(u)\right) & -\left(\frac{d}{du}\varphi(u)\right) \\ 0 & 0 & -a & -e \\ \left(\frac{d}{du}\psi(u)\right) & a & 0 & c-d \\ \left(\frac{d}{du}\varphi(u)\right) & e & d-c & 0 \end{bmatrix}) \quad (5)$$

Тензор энергии-импульса находим из равенства (3). Сделаем это с помощью пакета Maple. Для этих целей напишем процедуру:

```

Tew:=proc(coords,Te1,Te2,Re)local n,X,i,k,S0,S,M,Ew,r;
n:=nops(coords);
X:=seq(r,r=1..n);
S0:=(k)->[seq((1/4)*(-get_compts(Te1)[i,k]+
(1/4)*get_compts(Re)[i,k]*get_compts(T2))/Pi,i=1..n)];
S:=seq(S0(k),k=X);
M:=array(1..4,1..4,[op(S)]);
Ew:=create([1,1],op(M))
end proc:

```

Тензоры входящие в уравнения Эйнштейна найдены. Для задания уравнений Эйнштейна создадим процедуру. В этом случае пакет символьной математики Maple дает альтернативные возможности. Во втором случае воспользуемся встроенной командой библиотеки `tensor lin_com`.

#### 1 способ:

```

UrEin:=proc(coords,Te1,Te2,Te3)local n,X,i,k,S0,S,M,Ew,r;
n:=nops(coords);
X:=seq(r,r=1..n);
S0:=(k)->[seq(get_compts(Te1)[i,k]-(1/2)*get_compts(Te2)[i,k]-
-8*Pi*get_compts(Te3)[i,k],i=1..n)];
S:=seq(S0(k),k=X);
M:=array(1..4,1..4,[op(S)]);
Ew:=create([-1,-1],op(M))
end proc:

```

#### 2 способ:

```

UrEins:=proc(coords,Te1,Te2,Te3)local S0;
S0:=lin_com(1,Te1,-1/2,Te2,-8*Pi,Te3)
end proc:

```

При  $c=d$  выпишем одну из систем уравнений Эйнштейна:

$$\begin{aligned}
& 2(L(u,v))^2 \left( \frac{\partial}{\partial u} b(u,v) \right)^2 + L(u,v) \frac{\partial^2}{\partial u^2} L(u,v) - 2L(u,v) \left( \frac{\partial}{\partial u} a(u,v) \right) \frac{\partial}{\partial u} L(u,v) \\
& + e^{-2b(u,v)} \left( \frac{d}{du} \psi(u) \right)^2 + e^{2b(u,v)} \left( \frac{d}{du} \phi(u) \right)^2 / (L(u,v))^2 = 0 \\
& -(2(L(u,v))^3 \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} L(u,v) + 2(L(u,v))^2 \left( \frac{\partial}{\partial v} L(u,v) \right) \frac{\partial}{\partial u} L(u,v)) / (L(u,v))^4 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2(L(u, v))^2 \left( \frac{\partial}{\partial v} b(u, v) \right)^2 + L(u, v) \frac{\partial^2}{\partial v^2} L(u, v) - 2L(u, v) \left( \frac{\partial}{\partial v} a(u, v) \right) \frac{\partial}{\partial v} L(u, v) + \\
 & \quad + e^{-2b(u, v)} a^2 + e^{2b(u, v)} e^2 / (L(u, v))^2 = 0 \\
 & \quad 2e^{-2a(u, v)} \left( a \frac{d}{du} \phi(u) + \left( \frac{d}{du} \psi(u) \right) e \right) = 0 \\
 & -2e^{(-2a(u, v) - 2b(u, v))} \left( \left( \frac{\partial}{\partial v} L(u, v) \right) L(u, v) \left( \frac{\partial}{\partial u} b(u, v) \right) + L(u, v) \left( \frac{\partial}{\partial v} b(u, v) \right) \left( \frac{\partial}{\partial u} L(u, v) \right) - \right. \\
 & \quad \left. - L(u, v) \left( \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} L(u, v) \right) + L(u, v)^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} b(u, v) \right) - \left( \frac{\partial}{\partial v} L(u, v) \right) \left( \frac{\partial}{\partial u} L(u, v) \right) \right) \\
 & -2e^{(-2a(u, v) - 2b(u, v))} \left( \left( \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} a(u, v) \right) L(u, v)^2 + L(u, v)^2 \left( \frac{\partial}{\partial v} b(u, v) \right) \left( \frac{\partial}{\partial u} b(u, v) \right) + \right. \\
 & \quad \left. + 2L(u, v) \left( \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} L(u, v) \right) + \left( \frac{\partial}{\partial v} L(u, v) \right) \left( \frac{\partial}{\partial u} L(u, v) \right) \right) - e^{(-4b(u, v))} (-2e^{(-2a(u, v) + 4b(u, v))} \cdot \\
 & \quad \cdot e \left( \frac{d}{du} \phi(u) \right) L(u, v)^2 + 2e^{(-2a(u, v))} \left( \frac{d}{du} \psi(u) \right) a L(u, v)^2) / L(u, v)^2 = 0 \\
 & 2e^{(-2a(u, v) + 2b(u, v))} \left( \left( \frac{\partial}{\partial v} L(u, v) \right) L(u, v) \left( \frac{\partial}{\partial u} b(u, v) \right) + L(u, v) \left( \frac{\partial}{\partial v} b(u, v) \right) \left( \frac{\partial}{\partial u} L(u, v) \right) + \right. \\
 & \quad \left. + L(u, v) \left( \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} L(u, v) \right) + L(u, v)^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} b(u, v) \right) + \left( \frac{\partial}{\partial v} L(u, v) \right) \left( \frac{\partial}{\partial u} L(u, v) \right) \right) - \\
 & -2e^{(-2a(u, v) + 2b(u, v))} \left( \left( \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} a(u, v) \right) L(u, v)^2 + L(u, v)^2 \left( \frac{\partial}{\partial v} b(u, v) \right) \left( \frac{\partial}{\partial u} b(u, v) \right) + \right. \\
 & \quad \left. + 2L(u, v) \left( \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} L(u, v) \right) + \left( \frac{\partial}{\partial v} L(u, v) \right) \left( \frac{\partial}{\partial u} L(u, v) \right) \right) - \\
 & \quad - e^{(4b(u, v))} (-2e^{(-2a(u, v) - 4b(u, v))} a \left( \frac{d}{du} \psi(u) \right) L(u, v)^2 + \\
 & \quad + 2e^{(-2a(u, v))} \left( \frac{d}{du} \phi(u) \right) e L(u, v)^2) / L(u, v)^2 = 0
 \end{aligned}$$

Уравнения поля решаются относительно нескольких неизвестных функций. Для полного определения уравнений поля, мы зададим систему уравнений Максвелла. С помощью встроенных команд *cov\_diff* и *contract* библиотеки **tensor** мы продифференцируем и свернем по двум последним индексам. Тем самым получим первую пару уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned}
 & -2 \frac{e^{-2a(u, v) - 2b(u, v)} \left( a \frac{\partial}{\partial u} b(u, v) + \left( \frac{d}{du} \psi(u) \right) \frac{\partial}{\partial v} b(u, v) \right)}{(L(u, v))^2} = 0 \\
 & 2 \frac{e^{-2a(u, v) + 2b(u, v)} \left( e \frac{\partial}{\partial u} b(u, v) + \left( \frac{d}{du} \phi(u) \right) \frac{\partial}{\partial v} b(u, v) \right)}{(L(u, v))^2} = 0
 \end{aligned}$$

При выполнении тех же операций для второй пары уравнений Максвелла мы получим тождественно равный нулю вектор. Таким образом, вычислены основные тензорные соотношения. Следует отметить, что при получении уравнений Эйнштейна рассматривались и альтернативные варианты, что в свою очередь говорит о гибкости языка Maple.

## Литература

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, том 2, "ФИЗМАТЛИТ", Москва, 2006
- [2] Л.П.Эйзенхарт. Риманова геометрия, пер. с англ., «ГИИЛ», Москва, 1948
- [3] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, Гравитация, том 1, пер. с англ., Мир, Москва, 1977
- [4] Игнатъев Ю.Г. "Лаборатория для дипломников" I. Основные инструменты, Казань, КГПУ, 2005.
- [5] Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, "ФИЗМАТЛИТ", Москва, 2002
- [6] П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, "Едиториал УРСС ", Москва, 2006
- [7] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. Современная геометрия. Методы и приложения. том 1. 4-изд. испр., "Едиториал УРСС ", Москва, 1998

## Решение дифференциальных уравнений в Mathematica 6.0

А.А. Мухалёва<sup>1</sup>

Елабужский педуниверситет, Елабуга, Россия

<sup>1</sup>E-mail: egpu-nastya-221@mail.ru

**Аннотация.** Обсуждаются способы решения дифференциальных уравнений и некоторые аспекты методики использования компьютерной системы Mathematica в обучении.

Дифференциальные уравнения широко используются в практике математических вычислений. Они являются основой при решении задач моделирования, особенно в динамике. Немногие системы компьютерной математики имеют реализации численных методов решения систем дифференциальных уравнений. Но система Mathematica имеет средства как для символьного, так и численного решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

```
In[1] := DSolve[Derivative[1][y][x] == 2*a*x^3, y[x], x]
Out[1] = {{y[x] -> (a x^4)/2 + C[1]}}
```

```
In[2] := DSolve[{y1'[x] == 2 x^2, y2'[x] == 3 x}, {y1[x], y2[x]}, x]
Out[2] = {{y1[x] -> (2 x^3)/3 + C[1], y2[x] -> (3 x^2)/2 + C[2]}}
```

В записи дифференциальных уравнений можно ввести граничные условия, которые должны учитываться при решении. Например:

```
In[3] := DSolve[{y''[x] == a*y'[x] + y[x], y[0] == 1, y'[0] == 0}, y, x]
Out[3] = {{y -> Function[{x}, 1/(2 Sqrt[4 + a^2])(a [ExponentialE]^(1/2 (a - Sqrt[4 + a^2]) x) + Sqrt[4 + a^2] [ExponentialE]^(1/2 (a - Sqrt[4 + a^2]) x) - a [ExponentialE]^(1/2 (a + Sqrt[4 + a^2]) x) + Sqrt[4 + a^2] [ExponentialE]^(1/2 (a + Sqrt[4 + a^2]) x))]}
```

С помощью системы Mathematica можно продемонстрировать студентам геометрический смысл дифференциальных уравнений. Интегральная кривая данного дифференциального уравнения первого порядка с заданным начальным условием должна в каждой своей точке касаться поля направлений, определённого этим дифференциальным уравнением. Ниже показано, как получить визуализацию поля направлений дифференциального уравнения  $y' = \sin(x - y)$ .

```
In[4] := << Graphics' \ PlotField.m PlotVectorField[{1, Sin[x - y]}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
```

В итоге, составляя электронные книги по дифференциальным уравнениям с использованием среды Mathematica, можно наглядно показать решение не только в символическом виде, но и графически.

## Литература

- [1] Дьяконов, В. П. Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления / В. П. Дьяконов. – М.: ДМК Пресс, 2008. – 576 с.
- [2] Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. 3-е издание.: Пер. англ. – М.: ООО “И.Д.Вильямс”, 2008. – 1104 с.

## УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИКОЙ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ ЭЛЕМЕНТЫ РАЗЛИЧНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ

Р.Г. Мухарлямов<sup>1</sup>, О.В. Ибушева<sup>2</sup>, А.А. Ахметов<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Российский университет дружбы народов, г. Москва, <sup>2</sup>Нижекамский химико-технологический институт, г. Нижнекамск, <sup>3</sup>Нижекамский химико-технологический институт, г. Нижнекамск

<sup>1</sup>E-mail: babourova@orc.ru, <sup>2</sup>E-mail: kostkin@mail.ru, <sup>3</sup>E-mail: frolovbn@orc.ru

Известные к настоящему времени динамические аналогии позволяют использовать методы классической механики для решения задачи управления системами, содержащими элементы различной



природы, экономическими объектами и производственными системами. Процессы изменения состояния этих систем описываются дифференциально - алгебраическими уравнениями, составленными из кинематических соотношений, целей управления, уравнений связей и уравнений динамики, выраженных в обобщенных координатах или в канонических переменных. Для стабилизации связей, наложенных на обобщенные координаты  $q^i$  и скорости  $v^i = \frac{dq^i}{dt}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , необходимо сформировать такие управляющие воздействия, при которых уравнения связей  $f^\mu(q^i, t) = 0$ ,  $\mu = 1, \dots, m$ ,  $f^\rho(q^i, v^i, t) = 0$ ,  $\rho = m + 1, \dots, r$ , определяют асимптотически устойчивые инвариантные множества системы дифференциальных уравнений динамики. Оценка возможных отклонений от уравнений связей избыточными переменными  $z^\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, m + r$ ,  $z^\mu = f^\mu = (q^i, t)$ ,  $z^{m+\mu} = \frac{df^\mu}{dt}$ ,  $z^{m+\rho} = f^\rho(q^i, v^i, t)$ , позволяет построить расширенную систему, лагранжиан  $L = L(q^i, v^i, z^\alpha, t)$  и диссипативная функция  $D = D(q^i, v^i, z^\alpha, t)$  которой совпадают с соответствующими функциями исходной системы при  $z^\alpha = 0$ . Необходимое условие стабилизации связей сводится к требованию асимптотической устойчивости тривиального решения  $z^\alpha = 0$  уравнений возмущений связей  $\frac{dz^\alpha}{dt} = k_\beta^\alpha z^\beta$ ,  $\beta = 1, \dots, m + r$ . Достаточное условие стабилизации связей обеспечивается соответствующим выбором выражений  $L$  и  $D$ . Разработанные методы стабилизации связей используются для решения задач управления адаптивной оптической системой, манипуляционной и транспортной системами. В частности, в работе представлены результаты решения задачи управления движением мобильного робота с обходом подвижных препятствий. Методы моделирования механических систем с программными связями применены для определения инвестиционных стратегий, необходимых для достижения заданных целей управления производственными системами. В докладе приводятся результаты производственного планирования шинного завода, системы трех химических производств аммиака, меламин и карбамида, условного нефтеперерабатывающего завода.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, номер проекта 10-01-00381.

## ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ N ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

А.М. Нигмедзянова<sup>1</sup>

Татарский Государственный Гуманитарно-Педагогический Университет, г.  
Казань

<sup>1</sup>E-mail: aigmani@rambler.ru

**Аннотация.** В работе доказывается существование и единственность решения задачи N для одного многомерного вырождающегося эллиптического уравнения первого рода методом потенциалов.

### 1. Фундаментальное решение

Пусть  $E_p^+$  — полупространство  $x_p > 0$   $p$ -мерного евклидова пространства точек  $x = (x', x_p)$ ,  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ ,  $D$  — конечная область в  $E_p^+$ , ограниченная открытой частью  $\Gamma_0$  гиперплоскости  $x_p = 0$  и гиперповерхностью  $\Gamma$ .

В  $E_p^+$  рассмотрим вырождающееся эллиптическое уравнение

$$L[U(x)] = x_p^m \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_p^2} = 0, \quad (1)$$

где  $m > 0$ ,  $p \geq 3$ . Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$U(x) = (\rho_1^2)^{-\left(\frac{p-2}{2} + \beta\right)} \omega(\sigma), \quad (2)$$

где  $\sigma = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}$ ,  $\beta = \frac{m}{2(m+2)}$ ,

$$\rho^2 = \sum_{j=1}^{p-1} (x_j - x_{j_0})^2 + \frac{4}{(m+2)^2} \left( x_p^{\frac{m+2}{2}} - x_{p_0}^{\frac{m+2}{2}} \right)^2,$$

$$\rho_1^2 = \sum_{j=1}^{p-1} (x_j - x_{j_0})^2 + \frac{4}{(m+2)^2} \left( x_p^{\frac{m+2}{2}} + x_{p_0}^{\frac{m+2}{2}} \right)^2.$$

Подставляя функцию (2) в уравнение (1), получаем:

$$\sigma(1-\sigma)\omega'' + \left[ \frac{p}{2} - \left( \frac{p}{2} + 2\beta \right) \sigma \right] \omega' - \beta \left( \frac{p-2}{2} + \beta \right) \omega = 0. \quad (3)$$

Известно ([2], стр.40), ([3], гл.V, пп.100,101), что в окрестности точки  $\sigma = 1$  одно из решений уравнения (3) имеет вид:

$$\omega(x, x_0) = F \left( \beta, \frac{p-2}{2} + \beta, 2\beta; 1 - \sigma \right), \quad (4)$$

Подставляя (4) в (2), получаем решение уравнения (1)

$$\mathcal{E}(x, x_0) = a (\rho_1^2)^{-\left(\frac{p-2}{2} + \beta\right)} F \left( \beta, \frac{p-2}{2} + \beta, 2\beta; 1 - \sigma \right), \quad (5)$$

где  $a$  – некоторая постоянная,  $F(a, b, c; z)$  – гипергеометрическая функция. В силу известной формулы ([1], стр.280)

$$F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b; a+b-c+1; 1-z) + (1-z)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z)$$

решение (5) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, x_0) &= a (\rho_1^2)^{-\left(\frac{p-2}{2} + \beta\right)} \left[ \frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(-\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\beta - \frac{p-2}{2}\right)} F \left( \beta, \frac{p-2}{2} + \beta, \frac{p}{2}; \sigma \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma^{-\frac{p-2}{2}} \frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2} + \beta\right)} F \left( \beta, \beta - \frac{p-2}{2}, 2 - \frac{p}{2}; \sigma \right) \right] = \\ &= a (\rho_1^2)^{-\left(\frac{p-2}{2} + \beta\right)} \left[ \frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(-\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\beta - \frac{p-2}{2}\right)} F \left( \beta, \frac{p-2}{2} + \beta, \frac{p}{2}; \sigma \right) + \frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2} + \beta\right)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{\beta\left(\beta - \frac{p-2}{2}\right)}{2 - \frac{p}{2}} \sigma^{2-\frac{p}{2}} + \frac{1}{2!} \frac{\beta(1+\beta)\left(\beta - \frac{p-2}{2}\right)\left(\beta - \frac{p-2}{2} + 1\right)}{\left(2 - \frac{p}{2}\right)\left(1 - \frac{p}{2}\right)} \sigma^{3-\frac{p}{2}} + \dots \right) \right] + \\ &\quad + a \rho^{2-p} \rho_1^{-2\beta} \frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2} + \beta\right)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда следует, что решение (6) имеет степенную особенность вида  $\rho^{2-p}$  и, следовательно, является фундаментальным решением уравнения (1) с особенностью в точке  $x_0$ . С помощью ряда Гаусса, разложения функций

$$\left( 1 + \frac{(m+2)^2 \rho^2}{16 (x_p x_{p_0})^{\frac{m+2}{2}}} \right)^{-\beta}$$

при малых значениях  $\rho$  в степенной ряд, фундаментальное решение (6) запишем в виде

$$\mathcal{E}(x, x_0) = \tilde{\mathcal{E}}(x, x_0) + \mathcal{E}^*(x, x_0), \quad (7)$$

где

$$\tilde{\mathcal{E}}(x, x_0) = a \frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2} + \beta\right)} \frac{(m+2)^{2\beta} (x_p x_{p_0})^{-\frac{m}{4}}}{2^{4\beta}} (\rho^2)^{-\frac{p-2}{2}},$$

$\mathcal{E}^*(x, x_0)$  – регулярная часть фундаментального решения  $\mathcal{E}(x, x_0)$ . Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\xi, x) &= O(1) \quad \text{при} \quad x_p \rightarrow 0, \\ \frac{\partial \mathcal{E}(\xi, x)}{\partial x_p} &= O(x_p^{\frac{m}{2}}) \quad \text{при} \quad x_p \rightarrow 0, \\ \frac{\partial \mathcal{E}(\xi, x)}{\partial x_p} &= O(1) \quad \text{при} \quad \xi_p \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathcal{E}(x, x_0) = O \left( (\rho_0^2)^{-\left(\frac{p-2}{2} + \beta\right)} \right) \quad \text{при} \quad r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2} \rightarrow \infty,$$

$$A[\mathcal{E}(x, x_0)] = O\left(\rho_0^{-p-2\beta}\right) \quad \text{при} \quad r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2} \rightarrow \infty,$$

где  $\rho_0^2 = \sum_{j=1}^{p-1} x_j^2 + \frac{4}{(m+2)^2} x_p^{m+2}$ ,

$$A[\mathcal{E}(x, x_0)] = x_p^m \sum_{j=1}^{p-1} \cos(n, x_j) \frac{\partial \mathcal{E}(x, x_0)}{\partial x_j} + \cos(n, x_p) \frac{\partial \mathcal{E}(x, x_0)}{\partial x_p}$$

– кономальная производная.

## 2. Формулы Грина

Пусть функции  $U, V \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ . Непосредственным вычислением можно убедиться, что имеет место тождество

$$VL[U] + \left( x_p^m \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial x_p} \frac{\partial U}{\partial x_p} \right) = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( x_p^m V \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_p} \left( V \frac{\partial U}{\partial x_p} \right).$$

Интегрируя обе части этого тождества по области  $D$  и пользуясь формулой Остроградского, получаем

$$\int_D VL[U] dx + \int_D \left( x_p^m \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial x_p} \frac{\partial U}{\partial x_p} \right) dx = \int_{\Gamma} VA[U] d\Gamma + \int_{\Gamma_0} VA[U] dx', \quad (9)$$

где

$$A[U] = x_p^m \sum_{j=1}^{p-1} \cos(n, x_j) \frac{\partial U}{\partial x_j} + \cos(n, x_p) \frac{\partial U}{\partial x_p}$$

– кономальная производная,  $n$  – внешняя нормаль к границе.

Формула (9) называется первой формулой Грина для оператора  $L$ . Меняя местами  $U$  и  $V$  в формуле (9), имеем

$$\int_D UL[V] dx + \int_D \left( x_p^m \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_j} + \frac{\partial U}{\partial x_p} \frac{\partial V}{\partial x_p} \right) dx = \int_{\Gamma} UA[V] d\Gamma + \int_{\Gamma_0} UA[V] dx'.$$

Вычитая это равенство из (9), получаем

$$\int_D [VL[U] - UL[V]] dx = \int_{\Gamma} [VA[U] - UA[V]] d\Gamma + \int_{\Gamma_0} [VA[U] - UA[V]] dx'. \quad (10)$$

Формула (10) называется второй формулой Грина для оператора  $L$ .

Пусть функции  $U$  и  $V$  являются решениями уравнения (1) в области  $D$ . Тогда из формулы (10) имеем

$$\int_{\Gamma} [VA[U] - UA[V]] d\Gamma + \int_{\Gamma_0} [VA[U] - UA[V]] dx' = 0.$$

При  $U = V$  из формулы (9) следует, что

$$\int_D \left( x_p^m \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_j} + \frac{\partial U}{\partial x_p} \frac{\partial U}{\partial x_p} \right) dx = \int_{\Gamma} UA[U] d\Gamma + \int_{\Gamma_0} UA[U] dx'.$$

Наконец, из формулы (9), полагая  $V = 1$ , будем иметь

$$\int_{\Gamma} A[U] d\Gamma + \int_{\Gamma_0} A[U] dx' = 0,$$

т.е. интеграл от кономальной производной решения уравнения (1) по границе области равен нулю.

### 3. Интегральное представление и вытекающие из него свойства

Найдем теперь интегральное представление решения уравнения (1) в области  $D$ .

Пусть функция  $U(x) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$  — решение уравнения (1) в области  $D$ , удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x_p} = O(x_p^{\frac{m}{2}}) \quad \text{при } x_p \rightarrow 0, \quad (11)$$

(в следующем пункте будет доказано, что любое ограниченное при  $x_p \rightarrow 0$  решение уравнения (1) удовлетворяет условию (11).)

Зададим в области  $D$  произвольную точку  $x_0$ . Вырежем эту точку шаром  $Q_{x_0\varepsilon}$ . Радиус  $\varepsilon$  возьмем столь малым, чтобы шар  $Q_{x_0\varepsilon}$  целиком находился внутри области  $D$ . В области  $D_\varepsilon = D \setminus \bar{Q}_{x_0\varepsilon}$  фундаментальное решение  $\mathcal{E}(x, x_0)$  уравнения (1) (т.е. (7)) принадлежит классу  $C^2(\bar{D}_\varepsilon) \cap C^1(\bar{D}_\varepsilon)$ . Применяя к функциям  $U(x)$  и  $\mathcal{E}(x, x_0)$  в области  $D_\varepsilon$  вторую формулу Грина для оператора  $L$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_{D_\varepsilon} [\mathcal{E}(x, x_0)L[U(x)] - U(x)L[\mathcal{E}(x, x_0)]] dx &= \int_{\Gamma} [\mathcal{E}(x, x_0)A[U(x)] - U(x)A[\mathcal{E}(x, x_0)]] d\Gamma + \\ + \int_{\Gamma_0} [\mathcal{E}(x, x_0)A[U(x)] - U(x)A[\mathcal{E}(x, x_0)]] dx' &+ \int_{S_{x_0\varepsilon}} [-\mathcal{E}(x, x_0)A[U(x)] + U(x)A[\mathcal{E}(x, x_0)]] dS_{x_0\varepsilon}. \end{aligned}$$

Переходя в последней формуле к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , имеем

$$\int_{\Gamma} [\mathcal{E}(x, x_0)A[U(x)] - U(x)A[\mathcal{E}(x, x_0)]] d\Gamma = a(p-2) \frac{(m+2)^{2\beta}}{2^{4\beta}} \frac{\Gamma(2\beta)\Gamma(\frac{p-2}{2})}{\Gamma(\beta)\Gamma(\frac{p-2}{2} + \beta)} U(x_0) \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2})}.$$

Полагая в этой формуле

$$a = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\frac{p-2}{2} + \beta)}{4\pi^{\frac{p}{2}} \Gamma(2\beta)} \left( \frac{4}{2+m} \right)^{2\beta}.$$

получаем интегральное представление решения уравнения (1).

Для всякой функции  $U(x)$ , удовлетворяющей условиям:

- a).  $U(x) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ ,
- b).  $L[U(x)] = 0, \quad x \in D$ ,
- c).  $\frac{\partial U(x)}{\partial x_p} = O(x_p^{\frac{m}{2}})$  при  $x_p \rightarrow 0$

и для любой точки  $x_0 \in D$  справедливо следующее интегральное представление

$$U(x_0) = \int_{\Gamma} [\mathcal{E}(x, x_0)A[U(x)] - U(x)A[\mathcal{E}(x, x_0)]] d\Gamma. \quad (12)$$

Из интегрального представления (12) вытекают следующие свойства решения уравнения (1):

1<sup>0</sup>. Любое ограниченное решение при  $x_p \rightarrow 0$  решение уравнения (1) удовлетворяет условию

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x_p} = O(x_p^{\frac{m}{2}}) \quad \text{при } x_p \rightarrow 0.$$

2<sup>0</sup>. Существует решение  $U(x)$  уравнения (1) в области  $D_e = E_p^+ \setminus \bar{D}$ , удовлетворяющее условию

$$U(x) = O\left((\rho_0^2)^{-\left(\frac{p-2}{2} + \beta\right)}\right) \quad \text{при } r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2} \rightarrow \infty,$$

где  $\rho_0^2 = \sum_{j=1}^{p-1} x_j^2 + \frac{4}{(m+2)^2} x_p^{m+2}$ .

3<sup>0</sup>. Принцип максимума, вытекающий из интегрального представления (12), сформулируем в виде теоремы:

**Теорема 1.** (принцип максимума). Если  $U(x) \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$  — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (11), то функция  $U(x)$  достигает своего положительного наибольшего и отрицательного наименьшего значений на границе  $\Gamma$ , если она тождественно не равна нулю.

**Следствие.** Если функция  $U(x) \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$  — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (11), то  $|U(x)| \leq \max_{x_0 \in \Gamma} |U(x_0)|$ ,  $x \in D$ . В частности, если  $U(x)|_{\Gamma} = 0$ , то  $U(x) \equiv 0$  в  $\bar{D}$ .

#### 4. Постановка краевых задач N. Теоремы единственности

**Внутренняя задача N (Задача N<sub>i</sub>).** Требуется найти функцию  $U(x)$ , удовлетворяющую следующим условиям:

$$U(x) \in C^2(D) \cap C(\bar{D}), \tag{13}$$

$$L[U(x)] = 0, \quad x \in D, \tag{14}$$

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x_p} = O(x_p^{\frac{m}{2}}) \text{ при } x_p \rightarrow 0, \tag{15}$$

$$U|_{\Gamma} = f(x), \quad f(x) \in C(\Gamma). \tag{16}$$

**Теорема 2.** *Внутренняя краевая задача N (13) – (16) не может иметь более одного решения. Доказательство.* Пусть  $U_1(x)$  и  $U_2(x)$  – два предполагаемых решения внутренней задачи N. Тогда их разность  $\omega(x) = U_2(x) - U_1(x)$  удовлетворяет условиям (13) – (15) и граничному условию

$$\omega|_{\Gamma} = 0.$$

В силу следствия к теореме 1  $\omega \equiv 0$  в  $\bar{D}$ , или  $U_1 \equiv U_2$ .

**Внешняя задача N (Задача N<sub>e</sub>).** Требуется найти функцию  $U(x)$ , удовлетворяющую следующим условиям:

$$U(x) \in C^2(D_e) \cap C(\bar{D}_e), \tag{17}$$

$$L[U(x)] = 0, \quad x \in D_e, \tag{18}$$

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x_p} = O(x_p^{\frac{m}{2}}) \text{ при } x_p \rightarrow 0, \tag{19}$$

$$U(x) = O\left((\rho_0^2)^{-(\frac{p-2}{2}+\beta)}\right) \text{ при } r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2} \rightarrow \infty, \tag{20}$$

$$U|_{\Gamma} = f(x), \quad f(x) \in C(\Gamma). \tag{21}$$

**Теорема 3.** *Внешняя краевая задача N (17) – (21) не может иметь более одного решения. Доказательство.* Пусть  $U_1(x)$  и  $U_2(x)$  – два предполагаемых решения внешней задачи N. Тогда их разность  $\omega(x) = U_2(x) - U_1(x)$  будет удовлетворять условиям (17) – (20) и граничному условию

$$\omega|_{\Gamma} = 0.$$

$D$  – конечная область, поэтому существует число  $R$  такое, что  $D \subset Q_R^+$  – полушар радиуса  $R$ . Так как  $U \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ , то для  $\forall \varepsilon > 0$  существует  $R_0$ , что  $|U| < \varepsilon$  на  $S_R^+$  при  $R \geq R_0$ . Обозначим через  $D_{\varepsilon R_0} = Q_{R_0}^+ \setminus \bar{D}$ . Функция  $\omega(x)$  будет удовлетворять условиям (17) – (19) в  $D_{\varepsilon R_0}$  и на границе этой области  $|\omega| < \varepsilon$ . В силу принципа максимума  $|\omega| < \varepsilon$  в  $D_{\varepsilon R_0}$ . Так как  $\varepsilon$  произвольное число, то мы можем устремить его к нулю, тогда  $|\omega| \leq 0$  в  $D_e$ , или  $U_1 \equiv U_2$ .

#### 5. Потенциал двойного слоя и его свойства

С помощью фундаментального решения  $\mathcal{E}(\xi, x)$  уравнения (1) образуем поверхностный потенциал двойного слоя:

$$W(x) = \int_{\Gamma} \nu(\xi) A[\mathcal{E}(\xi, x)] d\Gamma,$$

где  $A[\ ] = \xi_p^m \sum_{j=1}^{p-1} \cos(n, \xi_j) \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \cos(n, \xi_p) \frac{\partial}{\partial \xi_p}$ , а  $\nu(\xi)$  – непрерывная функция на  $\Gamma$ .

Очевидно, что потенциал  $W(x)$  есть регулярное решение уравнения (1) в любой области, лежащей в полупространстве  $E_p^+$ , не имеющей общих точек ни с гиперповерхностью  $\Gamma$ , ни с гиперплоскостью  $x_p = 0$ . В силу (8)

$$W(x) = O(1) \text{ при } x_p \rightarrow 0.$$

**Лемма 1.** *Если  $\Gamma$  – поверхность Ляпунова, то*

$$\int_{\Gamma} |A[\mathcal{E}(\xi, x)]| d\Gamma \leq B,$$

где  $B$  – постоянная.

**Лемма 2** ( Геллерстедт ). Если  $\Gamma$  — поверхность Ляпунова, то

$$\int_{\Gamma} A[\mathcal{E}(\xi, x)] d\Gamma = \begin{cases} -1, & \text{если } x \in D; \\ -\frac{1}{2}, & \text{если } x \in \Gamma; \\ 0, & \text{если } x \in E_p^+ \setminus \bar{D} = D_e. \end{cases}$$

**Теорема 4.** Пусть  $\Gamma$  — поверхность Ляпунова. Тогда при  $\nu \in C(\Gamma)$  имеют место следующие предельные соотношения:

$$W_i(x_0) = -\frac{\nu_0}{2} + \widetilde{W}(x_0),$$

$$W_e(x_0) = \frac{\nu_0}{2} + \widetilde{W}(x_0),$$

где  $W_i(x_0)$  и  $W_e(x_0)$  означают предельные значения потенциала двойного слоя  $W(x)$  в точке  $x_0 \in \Gamma$  при  $x \rightarrow x_0$  соответственно изнутри и извне границы  $\Gamma$ , а  $\widetilde{W}(x_0)$  — прямое значение потенциала двойного слоя  $W(x)$  в точке  $x_0 \in \Gamma$ .

Здесь  $x_0 \in \Gamma$  — фиксированная точка границы  $\Gamma$ ,  $\nu_0 = \nu(x_0)$ .

**Доказательство** теоремы 4 следует из лемм 1 и 2.

## 6. Сведение задач $N$ к интегральным уравнениям теории потенциала

**Задача  $N_i$ .**

Решение задачи  $N_i$  будем искать в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью  $\nu(\xi)$

$$U(x) = W(x) = \int_{\Gamma} \nu(\xi) A[\mathcal{E}(\xi, x)] d\Gamma. \quad (22)$$

Очевидно, что функция  $U(x)$  удовлетворяет условиям (13) – (15) внутренней задачи  $N$ . Плотность  $\nu(\xi)$  — пока неопределенная функция. Ее найдем из требования, чтобы функция (22) удовлетворяла граничному условию (16) задачи  $N_i$ .

С этой целью подставим  $U(x)$  в граничное условие (16) и, учитывая формулу предельного значения потенциала двойного слоя (теорема 4), получим

$$-\frac{\nu(x)}{2} + \int_{\Gamma} \nu(\xi) A[\mathcal{E}(\xi, x)] d\Gamma = f(x).$$

Таким образом, задача  $N_i$  свелась к следующему интегральному уравнению

$$\nu(x) - 2 \int_{\Gamma} \nu(\xi) A[\mathcal{E}(\xi, x)] d\Gamma = -2 f(x). \quad (23)$$

Интегральное уравнение (23) соответствует внутренней задаче  $N$ .

**Задача  $N_e$ .**

Решение задачи  $N_e$  будем искать в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью  $\nu(\xi)$

$$U(x) = W(x) = \int_{\Gamma} \nu(\xi) A[\mathcal{E}(\xi, x)] d\Gamma. \quad (24)$$

Функция  $U(x)$  удовлетворяет условиям (17) – (20) внешней задачи  $N$ . Плотность  $\nu(\xi)$  — пока неопределенная функция. Ее найдем из требования, чтобы (24) удовлетворяла граничному условию (21) задачи  $N_e$ .

С этой целью подставим  $U(x)$  в граничное условие (21) и, учитывая формулу предельного значения потенциала двойного слоя извне (теорема 4), получим

$$\frac{\nu(x)}{2} + \int_{\Gamma} \nu(\xi) A[\mathcal{E}(\xi, x)] d\Gamma = f(x).$$

Таким образом, задача  $N_e$  свелась к следующему интегральному уравнению

$$\nu(x) + 2 \int_{\Gamma} \nu(\xi) A[\mathcal{E}(\xi, x)] d\Gamma = 2 f(x). \quad (25)$$

Интегральное уравнение (25) соответствует внешней задаче  $N$ .

Отметим следующее свойство интегральных уравнений (23), (25): из формулы (7) следует, что эти уравнения являются интегральными уравнениями со слабой особенностью.

Из единственности решений поставленных краевых задач следует однозначная разрешимость соответствующих уравнений Фредгольма (23) и (25).

**Теорема 5.** Пусть  $\Gamma$  — поверхность Ляпунова. Тогда задача  $N$  для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала двойного слоя.

## Литература

- [1] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. / Г. Корн, Т. Корн. // Изд. 6-ое. — Санкт-Петербург, Москва, Краснодар: "Лань". — 2003. — 832 с.
- [2] Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. / М. М. Смирнов. — М.: Наука, 1966. — 292 с.
- [3] Смирнов М. М. Курс высшей математики. Т.3, ч.2. / М. М. Смирнов. — М., 1957.

### СУММАТОРНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВОЙКОПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ УПРУГИХ ВОЛН В ПРОСТРАНСТВЕ

Е.А. Осипов<sup>1</sup>

Казанский государственный университет, г. Казань

<sup>1</sup>E-mail: -

Применение метода граничных интегральных уравнений для решения пространственных статических и динамических задач теории упругости сложилось в самостоятельное направление на рубеже 1970-80 годов став естественным продолжением работ по применению методов потенциала к плоским задачам теории упругости. Исследования опирались на работу В.Д. Купрадзе [4] — основоположника современной теории потенциала в пространственной теории упругости. Основные результаты новых фундаментальных разработок получены Н.М. Хуторянским в работах [9], [10].

Большой вклад в изучение комплексных пространственных потенциалов внесли работы Ф.А. Богашова [1-3].

Метод переопределенной задачи Коши в изучении задач дифракции двумерных упругих волн рассмотрен в работе Н.Б. Плещинского [7].

Периодические задачи дифракции упругих волн на дефектах в двумерных слоистых средах рассмотрены в работе [6]. Показано, что в двумерном случае задачу дифракции упругой волны на периодической системе дефектов можно свести к парному сумматорному функциональному уравнению. Методом интегральных тождеств парное уравнение приводится бесконечной системе линейных уравнений.

В этой статье рассмотрены трехмерные задачи дифракции упругой волны на двойкопериодической системе дефектов. Опираясь на результаты, полученные в работе [5-7], показано, как свести задачу к двум парам парных сумматорных уравнений и к паре интегральных уравнений с логарифмическими особенностями в ядрах.

#### 1. Квазипериодические решения системы уравнений теории упругости в пространстве

В трехмерной динамической теории упругости состояние упругой среды описывают вектор перемещений  $u$  и тензор напряжений  $\sigma$ . Будем считать, что зависимость по времени гармоническая и имеет вид  $e^{i\omega t}$ , где  $\omega$  — круговая частота колебаний.

Исследуем распространение упругой волны в пространстве. В декартовой системе координат уравнения равновесия и закон Гука для однородной среды имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_x &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_z &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), & \sigma_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \\
\sigma_{yy} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), & \sigma_{yz} &= \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \\
\sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right), & \sigma_{xz} &= \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right),
\end{aligned} \tag{2}$$

где  $\rho$  - плотность упругой среды,  $\lambda$ ,  $\mu$  - вещественные постоянные Ламе. Подставим правые части (2) в (1). Получим систему дифференциальных уравнений, которая является аналогом двумерных уравнений Ламе для пространственной теории упругости. Стоит отметить, что все уравнения зависят только от перемещений, а напряжения можно получить по формулам (2).

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho \omega^2 u_x &= 0, \\
(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \rho \omega^2 u_y &= 0, \\
(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho \omega^2 u_z &= 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

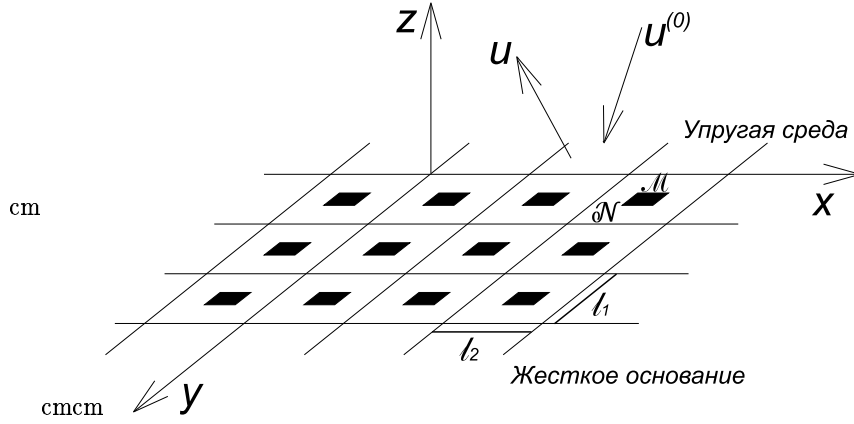


Рис.1. Двоякопериодическая система дефектов

Рассмотрим трехмерную задачу дифракции упругой волны в полупространстве, находящимся в контакте с жестким основанием. Пусть на плоскости  $Oxy$  расположена двоякопериодическая система дефектов,  $l_1$  и  $l_2$  – периоды системы дефектов по осям  $x$  и  $y$  соответственно. Из верхнего полупространства на границу раздела сред падает упругая волна  $u^{(0)}$ . Нужно найти волну  $u$ , отраженную вверх (см. рис. 1).

Будем искать комплексные амплитуды напряжений и перемещений в виде

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &= e^{i\alpha_x x} e^{i\alpha_y y} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_{nm}(z) e^{i\frac{2\pi}{l_1} n x} e^{i\frac{2\pi}{l_2} m y} = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_{nm}(z) e^{iL_{1n} x} e^{iL_{2m} y}, \\
L_{1n} &= \alpha_x + \frac{2\pi n}{l_1}, & L_{2m} &= \alpha_y + \frac{2\pi m}{l_2}, \\
\alpha_x &= \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu} \sin \theta_1 \cos \theta_2, & \alpha_y &= \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu} \sin \theta_1 \sin \theta_2.
\end{aligned} \tag{4}$$

Параметры  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  связаны со значениями параметров волны:  $\theta_1$  - угол падения волны в вертикальной плоскости (угол от нормали к границе области),  $\theta_2$  - угол по горизонтали (от положительного направления оси  $x$  против часовой стрелки, см. [7]).

Подставим представление искомых функций в виде (4) в систему уравнений (3). Сделаем замену переменных вида

$$\begin{aligned}
v_{1nm}(z) &= u_{xnm}(z), & v_{3nm}(z) &= u_{ynm}(z), & v_{5nm}(z) &= u_{znm}(z), \\
v_{2nm}(z) &= u_{xnm}(z), & v_{4nm}(z) &= u_{ynm}(z), & v_{6nm}(z) &= u_{znm}(z).
\end{aligned}$$



Тогда коэффициенты разложений должны удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений с матрицей коэффициентов

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\lambda+2\mu)L_{1n}^2 + \mu L_{2m}^2 - \rho\omega^2}{\mu} & 0 & \frac{(\lambda+\mu)L_{1n}L_{2m}}{\mu} & 0 & 0 & -\frac{i(\lambda+\mu)L_{1n}}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(\lambda+\mu)L_{1n}L_{2m}}{\mu} & 0 & \frac{(\lambda+2\mu)L_{2m}^2 + \mu L_{1n}^2 - \rho\omega^2}{\mu} & 0 & 0 & -\frac{i(\lambda+\mu)L_{2m}}{\mu} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{i(\lambda+\mu)L_{1n}}{\lambda+2\mu} & 0 & -\frac{i(\lambda+\mu)L_{2m}}{\lambda+2\mu} & \frac{\mu(L_{1n}^2 + L_{2m}^2) - \rho\omega^2}{\lambda+2\mu} & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Собственные значения матрицы (5) имеют вид

$$\tau_{1nm,2nm} = \pm i\beta_{1nm}, \quad \tau_{3nm,4nm} = \pm i\beta_{2nm}, \quad \tau_{5nm,6nm} = \pm i\beta_{2nm}, \quad \text{где}$$

$$\beta_{jnm} = \sqrt{k_j^2 - (L_n^2 + L_m^2)} = \begin{cases} i\sqrt{(L_n^2 + L_m^2) - k_j^2}, & |\sqrt{L_n^2 + L_m^2}| \geq k_j, \\ -\sqrt{k_j^2 - (L_n^2 + L_m^2)}, & |\sqrt{L_n^2 + L_m^2}| \leq k_j, \end{cases} \quad j = 1, 2 \quad (6)$$

$$k_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad k_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}.$$

Им соответствуют собственные вектора

$$\begin{aligned} h_{1,2} &= (L_{1n}, \pm iL_{1n}\beta_{1nm}, L_{2m}, \pm iL_{2m}\beta_{1nm}, \pm\beta_{1n}, i\beta_{1nm}^2), \\ h_{3,4} &= (\beta_{2nm}, \pm i\beta_{2nm}^2, 0, 0, \mp L_{1n}, -iL_{1n}\beta_{2nm}), \\ h_{4,6} &= (0, 0, \beta_{2nm}, \pm i\beta_{2nm}^2, \mp L_{2m}, -iL_{2m}\beta_{2nm}). \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда общее решение для амплитуд имеет вид

$$\begin{aligned} v_{nm}(z) &= A_{nm}h_{1nm}e^{i\beta_{1nm}z} + B_{nm}h_{2nm}e^{-i\beta_{1nm}z} + C_{nm}h_{3nm}e^{i\beta_{2nm}z} + \\ &+ D_{nm}h_{4nm}e^{-i\beta_{2nm}z} + E_{nm}h_{5nm}e^{i\beta_{2nm}z} + H_{nm}h_{6nm}e^{-i\beta_{2nm}z}. \end{aligned} \quad (8)$$

Следовательно, амплитуды перемещений

$$\begin{aligned} u_{xnm}(z) &= A_{nm}L_{1n}e^{i\beta_{1nm}z} + B_{nm}L_{1n}e^{-i\beta_{1nm}z} + C_{nm}\beta_{2nm}e^{i\beta_{2nm}z} + D_{nm}\beta_{2nm}e^{-i\beta_{2nm}z}, \\ u_{ynm}(z) &= A_{nm}L_{2m}e^{i\beta_{1nm}z} + B_{nm}L_{2m}e^{-i\beta_{1nm}z} + E_{nm}\beta_{2nm}e^{i\beta_{2nm}z} + H_{nm}\beta_{2nm}e^{-i\beta_{2nm}z}, \\ u_{znm}(z) &= A_{nm}\beta_{1nm}e^{i\beta_{1nm}z} - B_{nm}\beta_{1nm}e^{-i\beta_{1nm}z} - C_{nm}L_{1n}e^{i\beta_{2nm}z} + D_{nm}L_{1n}e^{-i\beta_{2nm}z} - \\ &- E_{nm}L_{2m}e^{i\beta_{2nm}z} + H_{nm}L_{2m}e^{-i\beta_{2nm}z}. \end{aligned} \quad (9)$$

По формулам (2) можно найти напряжения. Приведем амплитуды некоторых из них

$$\begin{aligned} \sigma_{xxnm}(z) &= i \left( A_{nm}e^{i\beta_{1nm}z} + B_{nm}e^{-i\beta_{1nm}z} \right) (\lambda k_1^2 + 2\mu L_{1n}^2) + \\ &+ \left( C_{nm}e^{i\beta_{2nm}z} + D_{nm}e^{-i\beta_{2nm}z} \right) 2i\mu L_{1n}\beta_{2nm}, \\ \sigma_{yyym}(z) &= i \left( A_{nm}e^{i\beta_{1nm}z} + B_{nm}e^{-i\beta_{1nm}z} \right) (\lambda k_1^2 + 2\mu L_{2m}^2) + \\ &+ \left( E_{nm}e^{i\beta_{2nm}z} + H_{nm}e^{-i\beta_{2nm}z} \right) 2i\mu L_{2m}\beta_{2nm}, \\ \sigma_{zznm}(z) &= i \left( A_{nm}e^{i\beta_{1nm}z} + B_{nm}e^{-i\beta_{1nm}z} \right) (\rho\omega^2 - 2\mu(L_{1n}^2 + L_{2m}^2)) - \\ &- \left( C_{nm}e^{i\beta_{2nm}z} + D_{nm}e^{-i\beta_{2nm}z} \right) 2i\mu L_{1n}\beta_{2nm} - \\ &- \left( E_{nm}e^{i\beta_{2nm}z} + H_{nm}e^{-i\beta_{2nm}z} \right) 2i\mu L_{2m}\beta_{2nm}. \end{aligned} \quad (10)$$

## 2. Условия на бесконечности

В работе [5] рассмотрены энергетические характеристики для периодических задач теории упругости как двумерного, так и трехмерного случаев, и доказана

**Теорема 1.** При вещественных значениях постоянных  $\beta_{jnm}$  первая, третья и пятая элементарные гармоники Флоке переносят энергию снизу вверх, а вторая, четвертая и шестая – сверху вниз. При мнимых значениях постоянных  $\beta_{jnm}$  все элементарные гармоники переносят энергию только в горизонтальном направлении.

Следствием теоремы 1 служит

**Теорема 2.** Для упругих волн, движущихся в направлении оси  $Oz$  в верхнее полупространство, постоянные  $B_{nm} = 0$ ,  $D_{nm} = 0$  и  $H_{nm} = 0$ , а для волн, уходящих в нижнее полупространство,  $A_{nm} = 0$ ,  $C_{nm} = 0$  и  $E_{nm} = 0$ .

Следовательно, для задачи дифракции упругой волны в полупространстве, амплитуды искомых функций перемещений (9) для отраженной волны  $u$  примут вид

$$\begin{aligned} u_{xnm}(z) &= A_{nm}L_{1n}e^{i\beta_{1nm}z} + C_{nm}\beta_{2nm}e^{i\beta_{2nm}z}, \\ u_{ynm}(z) &= A_{nm}L_{2m}e^{i\beta_{1nm}z} + E_{nm}\beta_{2nm}e^{i\beta_{2nm}z}, \\ u_{znm}(z) &= A_{nm}\beta_{1nm}e^{i\beta_{1nm}z} - C_{nm}L_{1n}e^{i\beta_{2nm}z} - E_{nm}L_{2m}e^{i\beta_{2nm}z}. \end{aligned} \quad (11)$$

из (10) можно найти значения амплитуд напряжений.

Падающую волну  $u^{(0)}$ , как и в случае для задачи дифракции в полуплоскости [6], будем рассматривать в виде одной гармоники с номером  $n_0, m_0$ . Тогда

$$\begin{aligned} u_{x n_0 m_0}^{(0)}(x, y, z) &= \left[ B_{n_0 m_0} L_{1 n_0} e^{-i\beta_{1 n_0 m_0} z} + D_{n_0 m_0} \beta_{2 n_0 m_0} e^{-i\beta_{2 n_0 m_0} z} \right] e^{iL_{1 n_0} x} e^{iL_{2 m_0} y}, \\ u_{y n_0 m_0}^{(0)}(x, y, z) &= \left[ B_{n_0 m_0} L_{2 m_0} e^{-i\beta_{1 n_0 m_0} z} + H_{n_0 m_0} \beta_{2 n_0 m_0} e^{-i\beta_{2 n_0 m_0} z} \right] e^{iL_{1 n_0} x} e^{iL_{2 m_0} y}, \\ u_{z n_0 m_0}^{(0)}(x, y, z) &= \left[ -B_{n_0 m_0} \beta_{1 n_0 m_0} e^{-i\beta_{1 n_0 m_0} z} + D_{n_0 m_0} L_{1 n_0} e^{-i\beta_{2 n_0 m_0} z} + \right. \\ &\quad \left. + H_{n_0 m_0} L_{2 m_0} e^{-i\beta_{2 n_0 m_0} z} \right] e^{iL_{1 n_0} x} e^{iL_{2 m_0} y}. \end{aligned} \quad (12)$$

При этом значения коэффициентов падающей волны  $B_{n_0 m_0}, C_{n_0 m_0}, D_{n_0 m_0}$  известны.

Заметим, что как и в двумерной задаче дифракции упругой волны, падающую и отраженную волны можно рассматривать с точки зрения их на составляющие: продольную и поперечную волны. За продольную волну отвечают слагаемые с множителями  $e^{\pm i\beta_{1nm}z}$ , за поперечную –  $e^{\pm i\beta_{2nm}z}$ .

### 3. Задача дифракции упругой волны на периодической системе дефектов в полупространстве

Рассмотрим условия на границе сопряжения упругой среды с жестким основанием. Пусть на границе расположена периодическая система дефектов. В качестве границы раздела сред будем рассматривать плоскость  $z = 0$ .

В отличие от граничных условий двумерной задачи дифракции (см., например, [6]), при решении задачи распространения упругих колебаний в пространстве, граничных условий становится больше. Исследуем два вида граничных условий.

Пусть упругое полупространство (или дефект) жестко прикреплено к твердому основанию, тогда на границе раздела сред должны выполняться условия

$$\begin{aligned} u_x^{(0)}(x, y, 0) + u_x(x, y, 0) = 0, \quad u_y^{(0)}(x, y, 0) + u_y(x, y, 0) = 0, \\ u_z^{(0)}(x, y, 0) + u_z(x, y, 0) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В случае, когда в области дефекта упругая среда скользит без трения вдоль границы (при этом отсутствует смещение вдоль оси  $z$ ), условия примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(0)}(x, y, 0) + \sigma_{xz}(x, y, 0) = 0, \quad \sigma_{yz}^{(0)}(x, y, 0) + \sigma_{yz}(x, y, 0) = 0, \\ u_z^{(0)}(x, y, 0) + u_z(x, y, 0) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Разные комбинации граничных условий в областях  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$  дают возможность сформулировать ряд задач дифракции упругой волны на периодической системе дефектов. Рассмотрим следующие задачи.

**Задача 1.** Найти решение дифференциальных уравнений (1-2), или (3) с граничными условиями (13) на  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$ .

Задача 2. Найти решение дифференциальных уравнений (1-2), или (3) с граничными условиями (14) на  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$ .

Задача 3. Найти решение дифференциальных уравнений (1-2), или (3) с граничными условиями (14) на  $\mathcal{M}$  и (13) на  $\mathcal{N}$ .

Первые две задачи схожи и могут быть рассмотрены как задачи дифракции упругой волны на стыке упругого полупространства и жесткого основания. Для них справедлива

**Теорема 3.** Если в области  $(0, l_1) \times (0, l_2)$  выполнены условия (13), или (14), то решение задач 1 и 2 может быть найдено явно.

Доказательство. Пусть в области  $(0, l_1) \times (0, l_2)$  на границе раздела сред выполнены условия (13). Тогда, эти условия образуют систему уравнений

$$\begin{aligned}
 & (B_{n_0 m_0} L_{1n_0} + D_{n_0 m_0} \beta_{2n_0 m_0}) e^{iL_{1n_0} x} e^{iL_{2m_0} y} + \\
 & \quad + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (A_{nm} L_{1n} + C_{nm} \beta_{2nm}) e^{iL_{1n} x} e^{iL_{2m} y} = 0, \\
 & (B_{n_0 m_0} L_{2m_0} + H_{n_0 m_0} \beta_{2n_0 m_0}) e^{iL_{1n_0} x} e^{iL_{2m_0} y} + \\
 & \quad + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (A_{nm} L_{2m} + E_{nm} \beta_{2nm}) e^{iL_{1n} x} e^{iL_{2m} y} = 0, \\
 & (-B_{n_0 m_0} \beta_{1n_0 m_0} + D_{n_0 m_0} L_{1n_0} + H_{n_0 m_0} L_{2m_0}) e^{iL_{1n_0} x} e^{iL_{2m_0} y} + \\
 & \quad + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (A_{nm} \beta_{1nm} - C_{nm} L_{1n} - E_{nm} L_{2m}) e^{iL_{1n} x} e^{iL_{2m} y} = 0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

При  $(n, m) \neq (n_0, m_0)$

$$\begin{pmatrix} L_{1n} & \beta_{2nm} & 0 \\ L_{2m} & 0 & \beta_{2nm} \\ \beta_{1nm} & -L_{1n} & -L_{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{nm} \\ C_{nm} \\ E_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При  $(n, m) = (n_0, m_0)$

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} L_{1n_0} & \beta_{2n_0 m_0} & 0 \\ L_{2m_0} & 0 & \beta_{2n_0 m_0} \\ \beta_{1n_0 m_0} & -L_{1n_0} & -L_{2m_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n_0 m_0} \\ C_{n_0 m_0} \\ E_{n_0 m_0} \end{pmatrix} = \\
 & \quad = \begin{pmatrix} -B_{n_0 m_0} L_{1n_0} - D_{n_0 m_0} \beta_{2n_0 m_0} \\ -B_{n_0 m_0} L_{2m_0} - H_{n_0 m_0} \beta_{2n_0 m_0} \\ B_{n_0 m_0} \beta_{1n_0 m_0} - D_{n_0 m_0} L_{1n_0} - H_{n_0 m_0} L_{2m_0} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Очевидно, что если  $\beta_{2nm} (\beta_{1nm} \beta_{2nm} + L_{1n}^2 + L_{2m}^2) \neq 0$ , то система имеет единственное решение. При этом для  $(n, m) = (n_0, m_0)$  ранги усеченной и расширенной матриц должны совпадать. Рассмотрим задачу 3, когда

упругое полупространство находится в полном контакте с жестким основанием  $\mathcal{N}$ , а система дефектов скользит без трения на границе раздела сред  $\mathcal{M}$ .

**Теорема 4.** Если на  $\mathcal{N}$  выполняются условия (13) и на  $\mathcal{M}$  условия (14), то задача дифракции упругой волны на двоякопериодической системе дефектов в полупространстве эквивалентна системе из двух парных

сумматорных функциональных уравнений

$$\begin{aligned}
& \left[ 2B_{n_0 m_0} L_{1n_0} + D_{n_0 m_0} \left( \beta_{2n_0 m_0} - \frac{L_{1n_0}^2}{\beta_{1n_0 m_0}} \right) - H_{n_0 m_0} \frac{L_{1n_0} L_{2m_0}}{\beta_{1n_0 m_0}} \right] e^{i\tilde{L}_{1n_0} x} e^{i\tilde{L}_{2m_0} y} + \\
& + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ C_{nm} \left( \beta_{2nm} + \frac{L_{1n}^2}{\beta_{1nm}} \right) + E_{nm} \frac{L_{1n} L_{2m}}{\beta_{1nm}} \right] e^{i\tilde{L}_{1n} x} e^{i\tilde{L}_{2m} y} = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{N}, \\
& \left[ 2B_{n_0 m_0} L_{2n_0} + H_{n_0 m_0} \left( \beta_{2n_0 m_0} - \frac{L_{2m_0}^2}{\beta_{1n_0 m_0}} \right) - D_{n_0 m_0} \frac{L_{1n_0} L_{2m_0}}{\beta_{1n_0 m_0}} \right] e^{i\tilde{L}_{1n_0} x} e^{i\tilde{L}_{2m_0} y} + \\
& + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ E_{nm} \left( \beta_{2nm} + \frac{L_{2m}^2}{\beta_{1nm}} \right) + C_{nm} \frac{L_{1n} L_{2m}}{\beta_{1nm}} \right] e^{i\tilde{L}_{1n} x} e^{i\tilde{L}_{2m} y} = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{N}, \\
& \left[ -D_{n_0 m_0} (L_{1n_0}^2 + \beta_{2n_0 m_0}^2) - H_{n_0 m_0} L_{1n_0} L_{2m_0} \right] e^{i\tilde{L}_{1n_0} x} e^{i\tilde{L}_{2m_0} y} + \\
& + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ C_{nm} (L_{1n}^2 + \beta_{2nm}^2) + E_{nm} L_{1n} L_{2m} \right] e^{i\tilde{L}_{1n} x} e^{i\tilde{L}_{2m} y} = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{M}, \\
& \left[ -H_{n_0 m_0} (L_{1n_0}^2 + \beta_{2n_0 m_0}^2) - D_{n_0 m_0} L_{1n_0} L_{2m_0} \right] e^{i\tilde{L}_{1n_0} x} e^{i\tilde{L}_{2m_0} y} + \\
& + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ E_{nm} (L_{1n}^2 + \beta_{2nm}^2) + C_{nm} L_{1n} L_{2m} \right] e^{i\tilde{L}_{1n} x} e^{i\tilde{L}_{2m} y} = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{M},
\end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\tilde{L}_{1n} = \frac{2\pi n}{l_1}, \quad \tilde{L}_{2m} = \frac{2\pi m}{l_2}.$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что  $u_z^{(0)}(x, y, 0) + u_z(x, y, 0) = 0$  выполняется во всей области  $(0, l_1) \times (0, l_2)$ . Выразим коэффициенты  $A_{nm}$  через  $C_{nm}$  и  $E_{nm}$  и подставим значения в оставшиеся четыре граничных условия. Получим систему (16).

#### 4. Переход к интегральным уравнениям

Сделаем в равенствах (16) замену переменных следующим образом:

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{nm} &= C_{nm}, \quad \tilde{E}_{nm} = E_{nm}, \quad \text{при } (n, m) \neq (n_0, m_0), \\
\tilde{C}_{n_0 m_0} &= C_{n_0 m_0} - D_{n_0 m_0}, \quad \tilde{E}_{n_0 m_0} = E_{n_0 m_0} - H_{n_0 m_0}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Получим уравнения вида

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ \tilde{C}_{nm} \left( \beta_{2nm} + \frac{L_{1n}^2}{\beta_{1nm}} \right) + \tilde{E}_{nm} \frac{L_{1n} L_{2m}}{\beta_{1nm}} \right] e^{i\tilde{L}_{1n} x} e^{i\tilde{L}_{2m} y} &= \Phi_{n_0 m_0}^{(1)}, \quad (x, y) \in \mathcal{N}, \\
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ \tilde{E}_{nm} \left( \beta_{2nm} + \frac{L_{2m}^2}{\beta_{1nm}} \right) + \tilde{C}_{nm} \frac{L_{1n} L_{2m}}{\beta_{1nm}} \right] e^{i\tilde{L}_{1n} x} e^{i\tilde{L}_{2m} y} &= \Phi_{n_0 m_0}^{(2)}, \quad (x, y) \in \mathcal{N},
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ \tilde{C}_{nm} (L_{1n}^2 + \beta_{2nm}^2) + \tilde{E}_{nm} L_{1n} L_{2m} \right] e^{i\tilde{L}_{1n} x} e^{i\tilde{L}_{2m} y} &= 0, \quad (x, y) \in \mathcal{M}, \\
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ \tilde{E}_{nm} (L_{1n}^2 + \beta_{2nm}^2) + \tilde{C}_{nm} L_{1n} L_{2m} \right] e^{i\tilde{L}_{1n} x} e^{i\tilde{L}_{2m} y} &= 0, \quad (x, y) \in \mathcal{M},
\end{aligned} \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_{n_0 m_0}^{(1)} &= \left[ -2B_{n_0 m_0} L_{1n_0} + 2D_{n_0 m_0} \frac{L_{1n_0}^2}{\beta_{1n_0 m_0}} \right] e^{i\tilde{L}_{1n_0} x} e^{i\tilde{L}_{2m_0} y}, \\
\Phi_{n_0 m_0}^{(2)} &= \left[ -2B_{n_0 m_0} L_{2n_0} + 2H_{n_0 m_0} \frac{L_{2m_0}^2}{\beta_{1n_0 m_0}} \right] e^{i\tilde{L}_{1n_0} x} e^{i\tilde{L}_{2m_0} y}.
\end{aligned}$$

Введем новые искомые функции

$$\begin{aligned}
P_1(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ \tilde{C}_{nm} (L_{1n}^2 + \beta_{2nm}^2) + \tilde{E}_{nm} L_{1n} L_{2m} \right] e^{i\tilde{L}_{1n} x} e^{i\tilde{L}_{2m} y}, \\
P_2(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ \tilde{E}_{nm} (L_{1n}^2 + \beta_{2nm}^2) + \tilde{C}_{nm} L_{1n} L_{2m} \right] e^{i\tilde{L}_{1n} x} e^{i\tilde{L}_{2m} y}.
\end{aligned}$$

По построению их коэффициенты Фурье

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{nm} (L_{1n}^2 + \beta_{2nm}^2) + \tilde{E}_{nm} L_{1n} L_{2m} &= \frac{1}{l_1 l_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(x, y) e^{-i\tilde{L}_{1n}\psi} e^{-i\tilde{L}_{2m}\xi} d\psi d\xi = \\ &= \frac{1}{l_1 l_2} \iint_{\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}} P_1(x, y) e^{-i\tilde{L}_{1n}\psi} e^{-i\tilde{L}_{2m}\xi} d\psi d\xi = \frac{1}{l_1 l_2} \iint_{\mathcal{N}} P_1(x, y) e^{-i\tilde{L}_{1n}\psi} e^{-i\tilde{L}_{2m}\xi} d\psi d\xi, \\ \tilde{E}_{nm} (L_{1n}^2 + \beta_{2nm}^2) + \tilde{C}_{nm} L_{1n} L_{2m} &= \frac{1}{l_1 l_2} \iint_{\mathcal{N}} P_2(x, y) e^{-i\tilde{L}_{1n}\psi} e^{-i\tilde{L}_{2m}\xi} d\psi d\xi. \end{aligned}$$

Получили систему линейных уравнений относительно  $\tilde{C}_{nm}$  и  $\tilde{E}_{nm}$ . Если ранги усеченной и расширенной матриц совпадают, то зависимость  $\tilde{C}_{nm}$  и  $\tilde{E}_{nm}$  от новых функций имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{nm} &= \frac{L_{1n} L_{2m}}{l_1 l_2 (L_{1n}^2 L_{2m}^2 - (L_{1n}^2 + \beta_{2nm}^2)^2)} \times \\ &\quad \times \iint_{\mathcal{N}} \left[ P_2(x, y) - P_1(x, y) \frac{L_{1n}^2 + \beta_{2nm}^2}{L_{1n}^2 L_{2m}^2} \right] e^{-i\tilde{L}_{1n}\psi} e^{-i\tilde{L}_{2m}\xi} d\psi d\xi, \\ \tilde{E}_{nm} &= \frac{L_{1n} L_{2m}}{l_1 l_2 (L_{1n}^2 L_{2m}^2 - (L_{1n}^2 + \beta_{2nm}^2)^2)} \times \\ &\quad \times \iint_{\mathcal{N}} \left[ P_1(x, y) - P_2(x, y) \frac{L_{1n}^2 + \beta_{2nm}^2}{L_{1n}^2 L_{2m}^2} \right] e^{-i\tilde{L}_{1n}\psi} e^{-i\tilde{L}_{2m}\xi} d\psi d\xi. \end{aligned}$$

Заменим в уравнениях (19) искомые коэффициенты  $\tilde{C}_{nm}$ ,  $\tilde{E}_{nm}$  на двойные интегралы от линейных комбинаций функций  $P_1(x, y)$  и  $P_2(x, y)$

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathcal{N}} P_1(x, y) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Upsilon_{nm}^{(1)} e^{i\tilde{L}_{1n}(x-\psi)} e^{i\tilde{L}_{2m}(y-\xi)} d\psi d\xi + \\ &+ \iint_{\mathcal{N}} P_2(x, y) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Upsilon_{nm}^{(2)} e^{i\tilde{L}_{1n}(x-\psi)} e^{i\tilde{L}_{2m}(y-\xi)} d\psi d\xi = l_1 l_2 \Phi_{n_0 m_0}^{(1)}, (x, y) \in \mathcal{N}, \\ &\iint_{\mathcal{N}} P_1(x, y) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Upsilon_{nm}^{(2)} e^{i\tilde{L}_{1n}(x-\psi)} e^{i\tilde{L}_{2m}(y-\xi)} d\psi d\xi + \\ &+ \iint_{\mathcal{N}} P_2(x, y) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Upsilon_{nm}^{(1)} e^{i\tilde{L}_{1n}(x-\psi)} e^{i\tilde{L}_{2m}(y-\xi)} d\psi d\xi = l_1 l_2 \Phi_{n_0 m_0}^{(2)}, (x, y) \in \mathcal{N}, \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned} \Upsilon_{nm}^{(1)} &= \frac{L_{1n}^2 L_{2m}^2 - (\beta_{1nm} \beta_{2nm} + L_{1n}^2) (\beta_{2nm}^2 + L_{1n}^2)}{\beta_{1nm} (L_{1n}^2 L_{2m}^2 - (\beta_{2nm}^2 + L_{1n}^2)^2)}, \\ \Upsilon_{nm}^{(2)} &= \frac{L_{1n} L_{2m} (\beta_{1nm} \beta_{2nm} - \beta_{2nm}^2)}{\beta_{1nm} (L_{1n}^2 L_{2m}^2 - (\beta_{2nm}^2 + L_{1n}^2)^2)}. \end{aligned}$$

**Теорема 5.** Если на  $\mathcal{N}$  выполняются условия (13) и на  $\mathcal{M}$  условия (14), то задача дифракции упругой волны на двоякопериодической системе дефектов в полупространстве сводится к интегральным уравнениям (20).

Решения системы интегральных уравнений (20) должны быть доопределены до всей области  $(0, l_1) \times (0, l_2)$  значениями  $P_1(x, y) = 0$  и  $P_2(x, y) = 0$  на  $\mathcal{M}$ . Тогда можно говорить, что задача дифракции эквивалентна паре интегральных уравнений.

Заметим, что если ввести другие искомые функции

$$\begin{aligned} P_3(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ \tilde{C}_{nm} \left( \beta_{2nm} + \frac{L_{1n}^2}{\beta_{1nm}} \right) + \tilde{E}_{nm} \frac{L_{1n} L_{2m}}{\beta_{1nm}} \right] e^{i\tilde{L}_{1n}x} e^{i\tilde{L}_{2m}y}, \\ P_4(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ \tilde{E}_{nm} \left( \beta_{2nm} + \frac{L_{2m}^2}{\beta_{1nm}} \right) + \tilde{C}_{nm} \frac{L_{1n} L_{2m}}{\beta_{1nm}} \right] e^{i\tilde{L}_{1n}x} e^{i\tilde{L}_{2m}y}, \end{aligned}$$

то можно свести задачу к двум интегральным уравнениям на  $M$  и доопределить решения на  $N$  значениями  $P_3(x, y) = \Phi_{n_0 m_0}^{(1)}$ ,  $P_4(x, y) = \Phi_{n_0 m_0}^{(2)}$ . Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 09-01-97009-р \_ поволжье

\_ а.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Богашов Ф.А. *О представлении пространственных задач теории упругости в функциях комплексных переменных*. Сообщение 1 // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб./Горьк. ун-т. 1989. Вып. 41. С. 110-118.
2. Богашов Ф.А. *Проблемы соответствия пространственной теории упругости и  $C_2$  - потенциалов* // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / М.: Товарищ. науч. изд. КМК, 1995. Вып. 53. С. 31-45.
3. Богашов Ф.А., Угодчиков А.Г. *Пространственные комплексные потенциалы и их приложение в теории упругости*. Н.Новгород: изд-во ННГУ, 1995. 184 с.
4. Купрадзе В.Д. *Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости* М.: Наука, 1976. 664 с.
5. Осипов Е.А. *Энергетические характеристики упругой волны для периодических задач теории упругости*.// Сборник материалов Четвертой Всероссийской научно-инновационной школы. Саров: Альфа, 2010. С. 93-95.
6. Осипов Е.А., Плещинский Н.Б. *Сумматорные и интегральные уравнения периодических задач дифракции упругих волн на дефектах в слоистых средах*. / Е.А. Осипов, Н.Б. Плещинский // Известия вузов. Математика. 2008, No 9, с. 76-82.
7. Плещинский Н.Б. *Отражение, преломление и дифракция двумерных упругих волн. Метод переопределенной задачи Коши*. / Н.Б. Плещинский // Препринт ПМФ-04-01. Казань: Казанск. матем. об-во. 2004. 34 с.
8. Хуторянский Н.М., Турилов В.В., Игумнов Л.А. *Разработка метода гранично-временных элементов для решения трехмерных динамических задач теории упругости и вязкоупругости* // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб./ М.: Товарищ. науч. изд. КМК. 1995. Вып.53. С. 186-201.
9. Хуторянский Н.М., Николаев О.П., Турилов В.В. *Пакет программ для решения трехмерных статических и динамических задач теории упругости на основе метода граничных интегральных уравнений* // Комплексы программ математической физики/ ИТПМ СО АН СССР, Новосибирск, 1982. С. 272-277.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИХ АНИМАЦИЯ В СКМ MAPLE

Л.И. Розакова<sup>1</sup>Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатьев<sup>2</sup><sup>1</sup>Татарский государственный гуманитарно - педагогический университет,  
Россия, Казань<sup>2</sup>Татарский государственный гуманитарно - педагогический университет,  
Россия, Казань

---

<sup>1</sup>E-mail: GumLei@mail.ru, <sup>2</sup>E-mail: ignatev\_yu@crambler.ru

**Аннотация.** Рассмотрены основные математические структуры элементарной математики, их математические модели и принципы построения их компьютерных моделей в СКМ Maple 5.5. Приведены примеры геометрической интерпретации и анимации основных объектов элементарной математики и их свойств.

## Введение: основные математические объекты элементарной математики

Возрастающие информационные потоки и темпы развития общества диктуют необходимость коренного пересмотра целей, задач и структуры образования. В настоящее время само существование образования, особенно естественно-научного, невозможно представить без интенсивного применения методов информационных технологий (ИТ), которые одновременно решают и когнитивные, компетентностные задачи, а также задачи организации учебного процесса. Однако, следует заметить, что до сих пор в подавляющем числе случаев использование ИТ в учебном процессе происходит на дилетантском уровне и чаще сводится к механическому копированию, набору текстов и линейным презентациям. Таким образом, уникальные возможности ИТ фактически остаются нереализованными, а процесс внедрения ИТ заменяется его профанацией. Необходимо подчеркнуть, что увеличение степени наглядности и интерактивности учебных материалов, созданных средствами ИТ, требует вложения больших интеллектуальных затрат и высокой степени профессионализма преподавателей. В первую очередь, сказанное касается предметов физико-математического цикла. Здесь центральной идеей создания высококачественных электронных учебных материалов является математическое моделирование изучаемых объектов и явлений. Создание математической модели изучаемого объекта во многом определяет наглядность и степень усваивания изучаемого материала. Поэтому основными образовательными требованиями к математической модели должны быть: ее многопараметричность, возможность графической трехмерной реализации, интерактивность, возможность построения анимационных (графических динамических) представлений. Системы компьютерной математики (СКМ), в первую очередь Maple, предоставляют уникальные программные и графические возможности для реализации этой идеи. Однако, попытка прямого применения стандартных процедур СКМ далеко не всегда дает желаемый результат. Для получения качественных графических и анимационных моделей основных математических структур анализа функций приходится создавать пользовательские многопараметрические программные процедуры, простые для неискушенного в программировании пользователя, которые удобно объединять в специализированные библиотеки пользовательских процедур. Ниже мы рассмотрим основные методы создания интерактивных учебных материалов с помощью СКМ на конкретных примерах из школьных математических курсов. Соответствующие пользовательские процедуры объединены в авторской библиотеке *SchoolMathematics*.

## 1. Компьютерное моделирование математической модели тригонометрического круга

Тригонометрические функции представляют собой наиболее удобное и наглядное средство для изучения всех свойств функций, включая их производные, а, в особенности, важного для понимания многих природных процессов свойства периодичности. Поэтому изучению этих функций следует уделить пристальное внимание. При изучении данной темы в школьном курсе возникают большие трудности из-за несоответствия между достаточно большим объемом содержания и относительно небольшим количеством часов, выделенным на изучение данной темы. Как показывают результаты ЕГЭ и вступительных экзаменов последних лет, выпускники средних школ весьма слабо знают именно этот раздел алгебры, в частности, не могут определить значения тригонометрических функций для ряда простейших значений аргумента, плохо владеют формулами приведения и т.п. Нам представляется, что это является результатом разрыва связи между математическим понятием и наглядными математическими моделями тригонометрических функций, в частности, моделью тригонометрического

круга. Математическая модель тригонометрических функций, реализованная в СКМ с помощью авторских программных процедур, помогает преодолеть указанный разрыв. Математическая модель тригонометрического круга построена на известном геометрическом факте равенства катетов вписанного в единичную окружность треугольника синусу и косинусу центрального угла  $\varphi$  (см. Рис. 1).

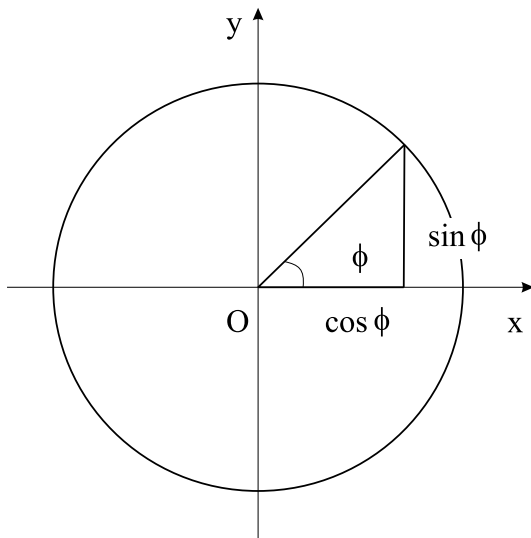


Рис.1. Тригонометрический круг

Компьютерная модель реализуется с помощью анимационной процедуры. Завершающим этапом создания процедуры анимации является составление последовательности, каждый член которой представляет графический кадр рисунка с заданным значением угла. Анимация осуществляется с помощью процедуры: `plots[display](seq(GC(i), i = 1..n + 1), insequence = true)`. Созданная многопараметрическая программная процедура позволяет эффективно управлять процессом анимации: выбирать градусную или радианную меру углов, изменять цвет элементов изображения, обозначение угла и т.д. Полученную в результате применения процедуры графический Maple-объект можно сохранять в формате gif (при этом мы получим анимационный фильм) или экспортировать в HTML (при этом получим качественную WEB-страницу). Анимационная модель тригонометрического круга вызывается процедурой:

```
SchoolMathematics[AnimCircSin](a, black, blue, red, 2, grad);
```

Исполнение процедуры показано на Рис. 2. Отметим, что созданные процедуры позволяют демонстрировать функции  $\sin(\varphi)$  и  $\cos(\varphi)$  для любого угла  $\varphi$ , заданного как в радианной, так и градусной мере. На Рис. 2 угол задается в градусной мере, которой соответствует параметр *grad* в вышеприведенной команде.

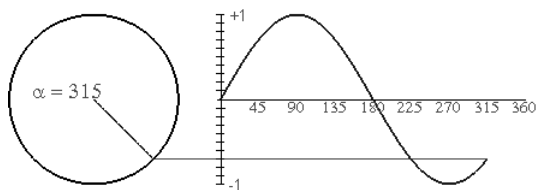


Рис.2. Кадр из анимации математической модели тригонометрического круга

## 2. Компьютерное моделирование математической модели производной функции

Касательной прямой к кривой  $L$  в точке  $A$  называют предельное положение секущей  $AM$ , когда точка  $M$  неограниченно приближается по кривой  $L$  к точке  $A$ . Построим компьютерную модель вычисления производной произвольной функции  $f(x)$  и ее геометрического представления в виде касательной к графику функции для



заданных своими абсциссами  $x_1, x_2$  произвольных точек  $A$  и  $M$  кривой  $L$ , используя алгоритм деления отрезка  $[x_1, x_2]$  на  $n$  частей. Сначала создадим процедуру построения  $n$ -го кадра графика секущей  $(A, x_n)$ , где  $x_n = x_1 + (x_2 - x_1)/n$ ,  $graph\_n(x, f, x_1, x_2, n, c_1, c_2)$ , где  $c_1, c_2$  - цвета графика функции  $f(x)$  и секущей, соответственно:

```
> graph_n:=proc(x,f,x1,x2,n,c1,c2) local DF,x0,d,dxn,
xn,y1,y2,yn,Q,dyn,dify,difyn,fdifyn,
x_min,x_max,i,yu_min,y_min,yu_max,y_max,xd,
X_min,X_max,yd,Y_min,Y_max,EQ,t:
y1:=subs(x=x1,f):y2:=subs(x=x2,f): DF:=subs(x=x1,diff(f,x)):if
DF=0 then x0:=x1: else x0:=x1-y1/DF: end if:
x_min:=min(x0,x1,x2):x_max:=max(x0,x1,x2):
xd:=(x_max-x_min):d:=(x_max-x_min)/n:
Q:=seq(evalf(subs(x=x_min+i*d,f)),i=0..n):
yu_min:=min(0,Q):yu_max:=max(0,Q):
y_min:=min(y1,y2,yu_min):y_max:=max(y1,y2,yu_max):
yd:=(y_max-y_min):
X_min:=evalf(x_min-.1*xd):X_max:=evalf(x_max+.1*xd):
Y_min:=evalf(y_min-.1*yd):Y_max:=evalf(y_max+.1*yd):
dxn:=evalf((x2-x1)/n,4):xn:=x1+dxn: yn:=subs(x=xn,f):
dyn:=yn-y1:difyn:=dyn/dxn:fdifyn:=evalf(difyn,4):
EQ:=y1+fdifyn*(x-x1): plot([x1,t,t=0..y1],[xn,t,t=0..yn],f,EQ,0),
x=X_min..X_max,y=Y_min..Y_max,color=[blue,blue,c1,c2,black],
axes=FRAME,title=convert([N=n,dx=dxn,
dy/dx=fdifyn,Dy/dx=evalf(DF,4)],string),numpoints=200): end proc:
```

Процедура анимации получается с помощью команды *display* с опцией *insequence = true* от последовательности  $n$  предыдущих графиков  $graph(x, f, x_1, x_2, n, c_1, c_2)$ . Заметим, что аналогичная процедура, реализованная для конкретной функции

$$y = (e^{\cos(x)} + 3)^2,$$

с использованием библиотеки *student* описана в книге Матросова. При этом в процедуре Матросова необходимо устанавливать границы изображения и другие параметры. Наша же многопараметрическая процедура, *Anim(x, f, x1, x2, N, c1, c2)*, автоматически оптимизирует область изображения графика, отображая на нем все существенно важные элементы, при этом предоставляя пользователю возможность вводить произвольную функцию  $f$ , устанавливать начальный интервал  $[x_1, x_2]$ , задавать число кадров анимации и цвета кривой и касательной:

```
> Anim:= proc(x,f,x1,x2,N,c1,c2) local SS,i:
SS:=seq(graph_n(x,f,x1,x2,i,c1,c2),i=1..N):
plots[display](SS,insequence=true):end proc:
```

Исполнение созданной процедуры имеет формат:

```
> Anim(x,x^3,1,Pi,200,red,blue);
```

- в данном случае создается анимационный фильм длиной в 200 кадров, демонстрирующий процесс стремления секущей к графику кубической параболы, заданной абсциссами первоначальных точек  $x_1 = 1$  и  $x_2 = \pi$ , в титрах которого откладываются моментальные значения номера кадра,  $N$ , дифференциала  $\Delta x$ , приближенного значения производной на  $n$ -ом шаге и точного значения производной. На рисунках 3, 4 показаны первый и сотый кадры анимационного фильма, состоящего из 200 кадров. Начальные значения  $x_1$  и  $x_2$  равны 1 и 3, соответственно. Аналогичным образом создаются программные процедуры изображения касательной при движении точки касания вдоль кривой, процедуры интегрирования функции и т.п.

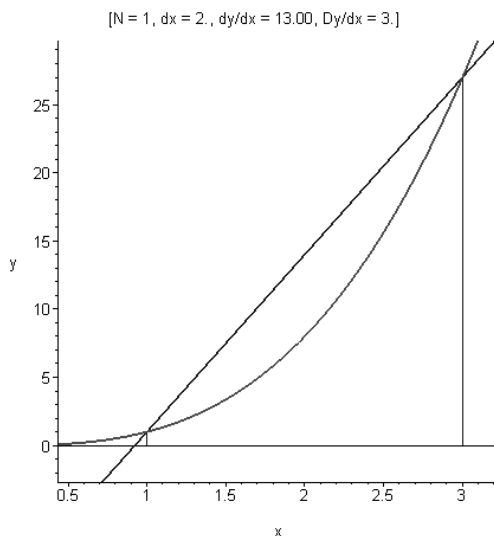


Рис.3. Первый кадр анимационного фильма

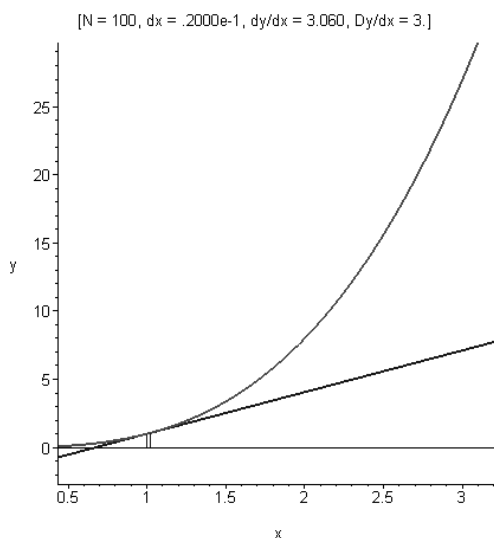


Рис.4. Сотый кадр анимационного фильма

### 3. Компьютерное моделирование математической модели свойств касательных к окружности

Создадим компьютерную модель известной школьной теоремы планиметрии о свойствах касательной к окружности.

**Теорема:** Отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны, а прямая, соединяющая эту точку с центром окружности, делит угол между касательными пополам (Рис. 5).

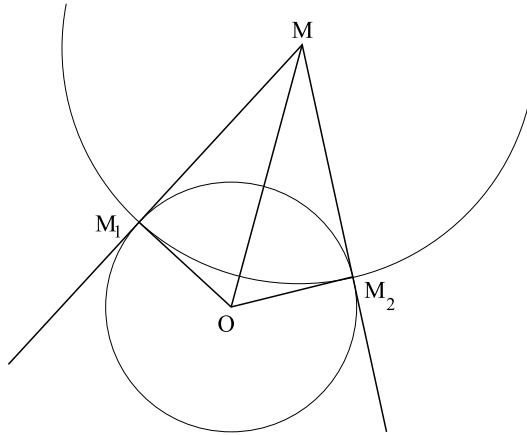


Рис.5. Отрезки касательных к окружности

**Алгоритм построения модели**

Пусть  $OM_1 = OM_2 = R$  - радиус окружности  $C$ .

1. Найдем длину отрезка  $OM$ :  $OM = \sqrt{(M_x - O_x)^2 + (M_y - O_y)^2}$ ;

2. Найдем  $\rho = MM_1$  - радиус окружности с центром в т.  $M$ :  $\rho = \sqrt{(OM)^2 - R^2}$

3. Построим эту окружность:

$$(x - M_x)^2 + (y - M_y)^2 - \rho^2 = 0; \quad (1)$$

4. Построим окружность  $C$ :

$$(x - O_x)^2 + (y - O_y)^2 - R^2 = 0; \quad (2)$$

5. Найдем  $M_1, M_2$  - точки пересечения этих окружностей, решая совместно квадратные уравнения (1), (2) относительно переменных  $x, y$ ;

6. Построим прямые  $MM_1, MM_2, MO, M_1O, M_2O$ .

**Программная процедура:**

```
> restart:
> Tan_Cir:=proc(Q,M0,R) local OM,Rho,CM,CO,x,y,A12,A1,A2,XY,XYMod,
X,Y,C,T,t,MOA1,MOA2,OA1,OA2,OMO,OO,M0,A11,TA1, A22,TA2,AMO,TMO,A0, TA0:
OM:=evalf(sqrt((M0[1]-Q[1])^2+(M0[2]-Q[2])^2)):
Rho:=evalf(sqrt(OM^2-R^2)): if evalf(OM)<R or evalf(OM)=R then
print('Задача не имеет решения, точка M находится внутри
окружности'): else CM:=(x-M0[1])^2+(y-M0[2])^2-Rho^2=0:
CO:=(x-Q[1])^2+(y-Q[2])^2-R^2=0:
A12:=allvalues([solve({CO,CM},{x,y}))):
A1:=evalf(subs(A12[1],[x,y])):
A11:=evalf([Q[1]+(A1[1]-Q[1])*1.2,Q[2]+(A1[2]-Q[2])*1.2]):
A2:=evalf(subs(A12[2],[x,y])):
A22:=evalf([Q[1]+(A2[1]-Q[1])*1.2,Q[2]+(A2[2]-Q[2])*1.2]):
AMO:=evalf([Q[1]+(M0[1]-Q[1])*1.1,Q[2]+(M0[2]-Q[2])*1.1]):
A0:=evalf([Q[1]+(Q[1]-M0[1])*0.05,Q[2]+(Q[2]-M0[2])*0.05]):
XY:=(X,Y,C,T)->plot([X[1]+(Y[1]-X[1])*t,
X[2]+(Y[2]-X[2])*t,t=0..1],thickness=T,color=C):
XYMod:=(X,Y,C,T)->plot([X[1]+(Y[1]-X[1])*t,X[2]+(Y[2]-X[2])*t,
t=0..2],thickness=T,color=C): MOA1:=XYMod(M0,A1,red,2):
MOA2:=XYMod(M0,A2,red,2): OA1:=XY(Q,A1,blue,1):
OA2:=XY(Q,A2,blue,1):
TA1:=plots[textplot]([op(A11),'M1'],font=[TIMES,ROMAN,12],
color=navy): OMO:=XY(Q,M0,blue,1):
TA2:=plots[textplot]([op(A22),'M2'],font=[TIMES,ROMAN,12],color=
navy):
TMO:=plots[textplot]([op(AMO),'M'],font=[TIMES,ROMAN,12],color=
navy):
TA0:=plots[textplot]([op(A0),'O'],font=[TIMES,ROMAN,12],color=
navy):
OO:=plot([Q[1]+R*cos(t),Q[2]+R*sin(t),t=0..2*Pi],color=black,
```

```

thickness=1):
M0:=plot([M[1]+Rho*cos(t),M[2]+Rho*sin(t),t=0..2*Pi],color=black,
thickness=1):
plots[display](MOA1,MOA2,OA1,OA2,OM0,OO,M0,TA1,TA2,TM0,TA0,scaling=CONSTRAINED):fi:
end:

```

Элементы, содержащиеся в приведенной программе, имеют следующий смысл:  $OM$  - имя длины отрезка  $AM$ ;  $Rho$  - имя радиуса окружности с центром в точке  $M$ ;  $CM$  - имя процедуры построения окружности с центром в точке  $M$ ;  $CO$  - имя процедуры построения окружности с центром в точке  $O$ ;  $A12$  - имя точек пересечения окружностей  $CM$  и  $CO$ ;  $A1$  - имя первой точки пересечения окружностей  $CM$  и  $CO$ ;  $A2$  - имя второй точки пересечения окружностей  $CM$  и  $CO$ ;  $XU$ ,  $XUMod$  - имена процедур построения прямой через две точки;  $X$ ,  $Y$  - внутренние имена точек, через которые проходит прямая;  $C$ ,  $T$  - внутренние процедуры, цвет и толщина соответственно;  $A11$ ,  $A22$ ,  $AM0$ ,  $AO$  - имена процедур вычисления координат точек;  $TA1$ ,  $TA2$ ,  $TM0$ ,  $TA0$  - имена процедур текстового обозначения точек на графике. Пример исполнения процедуры  $Tan\_Cir([1, 2], [4, 7], 3)$  показан на Рис.6.

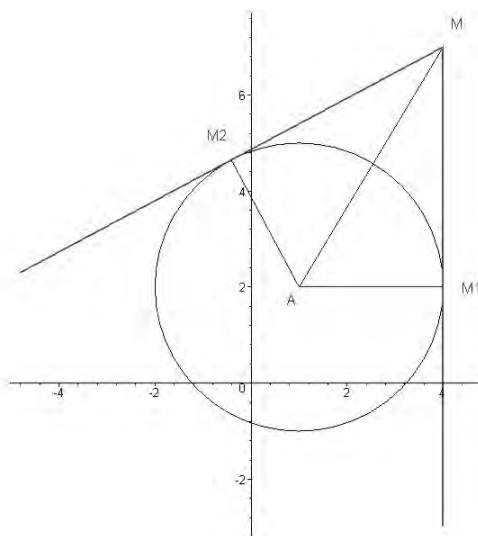


Рис.6. Исполнение процедуры  $Tan\_Cir([1, 2], [4, 7], 3)$  в Maple)

## 4. Компьютерное моделирование математической модели определенного интеграла

Определенным интегралом функции  $y = f(x)$  по промежутку  $[a, b]$  называется конечный предел интегральных сумм<sup>1</sup>

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

при  $n \rightarrow \infty$ , где предел берется по всем разбиениям промежутка  $[a, b]$  на  $n$  отрезков длиной  $\Delta x_i$ , причем максимальный отрезок разбиения стремится к нулю, а точка принадлежит  $i$ -му отрезку разбиения и обозначается

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

Геометрически определенный интеграл представляет площадь криволинейной трапеции под графиком положительной функции. Если на некотором отрезке функция отрицательна, то определенный интеграл по этому промежутку отрицателен. Увеличивая число отрезков разбиения заданного промежутка, мы увеличиваем точность вычисления определенного интеграла. Компьютерная модель заключается в том, что, увеличивая число  $n$ , мы осуществляем предельный процесс вычисления площади криволинейной трапеции. Создадим процедуру итераций функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , разбивая его на  $n$  частей методом прямоугольников, причем высоты прямоугольников определим как левое значение функции на каждом из интервалов:

```
> AA:=(f,x,a,b,n,d)-middlebox(f,x=a..b,n,title=d,titlefont=[TIMES,BOLD,14]):
```

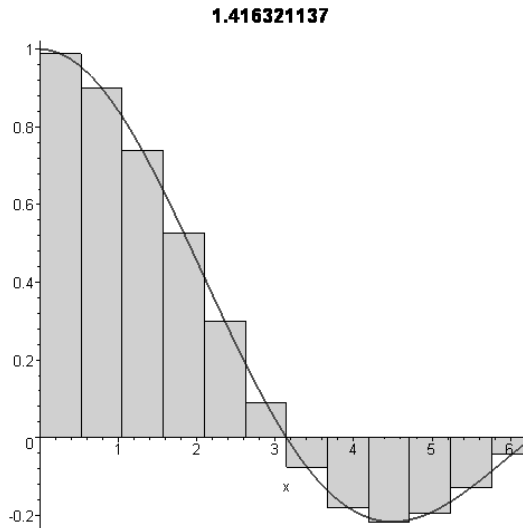
<sup>1</sup>Здесь, конечно, предполагается, что пределы нижней и верхней сумм Дарбу совпадают.

Команда *middlesum* вычисляет среднюю сумму для заданного разбиения, которая аппроксимирует определенный интеграл от заданной функции на заданном промежутке:

```
> LS:=(f,x,a,b,n)->middlesum(f,x=a..b,n):
```

Конвертируем полученную величину в строковую переменную:

```
> LSN:=(f,x,a,b,n)->convert(evalf(LS(f,x,a,b,n)),string):
> Cadr:=(f,x,a,b,n)->AA(f,x,a,b,n,LSN(f,x,a,b,n)):
Cadr(sin(x)/x,x,0,2*Pi,12);
```



**Рис.7.** Двенадцатый кадр анимации процесса вычисления интеграла  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$  методом прямоугольников

С помощью команды *seq* создадим последовательность этих интегральных сумм, задав в качестве заголовка значение суммы при заданном числе разбиений:

```
> S:=(f,x,a,b,N)->seq(Cadr(f,x,a,b,n),n=1..N);
```

Наконец, создадим анимацию процесса вычисления определенного интеграла:

$$J = \int_b^a f(x)$$

при делении промежутка интегрирования на  $N$  частей:

```
> GS:=(f,x,a,b,N)->plots[display](S(f,x,a,b,N),insequence=true):
```

Заметим, что аналогичная процедура, реализованная для конкретной функции

$$f(x) = (x-2)(x-3)(x-4) + x^2(x-3),$$

описана в книге Матросова [1]. Наша процедура  $GS(f, x, a, b, N)$  позволяет анимировать процедуру вычисления определенного интеграла от любой функции. При этом процедура  $GS$  позволяет контролировать границы промежутка интегрирования и число интервалов разбиения.

## Заключение

Таким образом, с помощью СКМ на основе математического и компьютерного моделирования можно создавать качественные интерактивные учебные материалы, применение которых на уроках математики позволяют существенно повысить эффективность учебного процесса и активизировать познавательную деятельность учащихся. Заметим, что рассмотренный аспект применения СКМ является одной из возможностей СКМ в физико-математическом образовании - сочетание методов математического и компьютерного моделирования в среде СКМ самими учащимися позволяет повысить креативность предметов физико-математического цикла, сделать эти предметы наглядными и интересными и развить интерес к научному творчеству учащихся.

## Литература

- [1] А. Матросов. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. "БХВ-Петербург", 2001.
- [2] В.П.Дьяконов. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. "Солон-Пресс", М, 2006.
- [3] Игнатьев Ю.Г. Проблемы информационных технологий в математическом образовании. Учебное пособие под ред. Ю.Г. Игнатьева. - г.Казань: ТГГПУ, 2005.
- [4] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2. М.: "Наука", 2002г. - 799с.

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУР ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ИХ ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ В СКМ MAPLE

А.Р. Самигуллина<sup>1</sup>

Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатьев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Татарский Государственный Гуманитарно-Педагогический Университет,  
Казань

<sup>2</sup>Татарский Государственный Гуманитарно-Педагогический Университет,  
Казань

---

<sup>1</sup>E-mail: alsu\_sam@mail.ru, <sup>2</sup>E-mail: ignatev\_yu@rambler.ru

## Введение

Как известно, линейная алгебра и аналитическая геометрия традиционно тесно связаны между собой, что вызвано, как историческими корнями этих разделов математики, так и определяющей зависимостью структур аналитической геометрии структурами и методами линейной алгебры. Особенно тесной эта связь проявляется в области векторной алгебры. В свою очередь, все наглядные интерпретации алгебраической структуры векторных пространств, фактически, являются геометрическими. Проблема обеспечения наглядности этих структур играет важную роль в высшем образовании, так как усвоение фундаментальных геометрических понятий подготавливает фундамент для понимания процесса математического моделирования и овладения методами компьютерного моделирования, что в свою очередь, создает предпосылки для инновационного развития современного образования.

Решение проблемы компьютерной реализации объектов линейной алгебры и аналитической геометрии и создания наглядных геометрических образов (интерпретаций) объектов, структур и свойств предполагает решение трех основных задач:

1. построение математических моделей основных алгебраических структур, объектов и свойств;
2. построение их геометрических интерпретаций, т.е., сопоставление им геометрических моделей;
3. построение многопараметрических компьютерных моделей графических образов объектов.

Заметим, что многопараметричность создаваемых компьютерных моделей является важнейшим фактором компьютерных моделей, позволяющим управлять математической моделью, т.е., проводить компьютерное моделирование. Наиболее эффективное решение этих задач возможно в системах компьютерной математики (СКМ), среди которых для целей образования наиболее удобна система Maple. Основными достоинствами этой системы применительно к задачам образования являются: относительно невысокая стоимость (по сравнению с MatLab и Mathematica), дружественный и интерактивный интерфейс, великолепные графические возможности, в частности, интерактивная трехмерная графика и динамическая (анимация). В этой статье мы рассмотрим основные принципы математического и компьютерного моделирования объектов линейной алгебры и аналитической геометрии в СКМ Maple. Заметим, что для рассмотренных здесь программных процедур конкретная версия Maple, начиная с версии 6, не имеет значения.

## 1. Математическое моделирование решения системы линейных алгебраических уравнений

Системы линейных алгебраических уравнений являются одним из основных объектов линейной алгебры, а теория систем линейных алгебраических уравнений широко применяется во всех разделах аналитической геометрии, так как эти системы описывают весьма важные для геометрии линейные образы (плоскости и прямые).

Рассмотрим решение системы линейных алгебраических уравнений. Пусть дана система из  $m$  линейных уравнений относительно  $n$  неизвестных:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_{ki}x_i = b_k; \quad (k = \overline{1, m}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{A}$  - основная матрица системы,  $\mathbf{B}$  - матрица-столбец свободных членов,  $\mathbf{X}$  - матрица-столбец неизвестных:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

В пакете LinearAlgebra существует программная процедура решения системы (15), однако, она неудобна тем, что представляет решение в форме, малопонятной Российскому студенту. Поэтому создадим собственную программную процедуру. Создадим программную процедуру SolLin в библиотеке Algebra, позволяющую находить решение системы (15) в удобном виде:

```
>Algebra[SolLin]:=proc(Eqs) local n,m,A,B1,B,F,k1,k2:
n:=LinearAlgebra[ColumnDimension](convert(Eqs,Matrix)):
A:=convert([seq([coeffs(lhs(Eqs[i]))],i=1..n)],Matrix):
m:=LinearAlgebra[RowDimension](A): B1:=seq(rhs(Eqs[i]),i=1..n):
B:=Vector([B1]):
F:=convert([seq([coeffs(lhs(Eqs[i])),rhs(Eqs[i])],i=1..n)],Matrix):
k1:=linalg[rank](A):k2:=linalg[rank](F):
if k1=k2 then
LinearAlgebra[LinearSolve](A,B,free='C'):
else ("Система несовместна"): end if:
end proc:
```

и сохраним созданную процедуру в библиотеке Algebra, файле Alg.m :

```
>save(Algebra,'Alg.m'):
```

Для исполнения этой процедуры необходимо вызвать созданную библиотеку из любой рабочей тетради Maple, имеющей собственное имя:

```
>read "\backslash $Path$\backslash Alg.m":
with(Algebra):
```

Покажем пример решения системы уравнений с помощью созданной процедуры:

```
>SolLin([x-y+z-u=3,x+y=2,2*x-2*y+2*z-2*u=6,x-y-z-u=1]);
```

Исполнение процедуры имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 2 - C_2 \\ C_2 \\ 1 \\ -2C_2 \end{bmatrix},$$

где  $C_2$  - постоянная. Заметим, что созданная процедура представляет решение системы уравнений в стандартной для российских вузов форме, при этом индекс произвольных постоянных соответствует их положениям в матрице общего решения.

## 2. Математическое моделирование трехмерных линейных объектов

### 2.1. Алгебраический этап моделирования

Системы линейных алгебраических уравнений имеет адекватную геометрическую интерпретацию (см., например, [1]): каждое линейное алгебраическое уравнение в  $n$ -мерном пространстве определяет гиперплоскость, а система линейных алгебраических уравнений определяет взаимное расположение этих гиперплоскостей. Если система уравнений не имеет решения, то гиперплоскости не пересекаются, т.е., параллельны; в случае существования решения гиперплоскости пересекаются по  $k$ -мерным плоскостям, включая 1-мерные (прямые) и 0-мерные (точки). В случае трехмерных пространств, которые, фактически, и важны для общего среднего

и нематематического высшего образования, число различных типов взаимного расположения плоскостей или прямых значительно сокращается. Как известно (см., например, [1]), прямая в евклидовом пространстве  $E_3$  определяется опорной точкой  $M_0$  и ненулевым направляющим вектором  $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ , как геометрическое место точек  $E_3$ :

$$d(M_0, \mathbf{q}) = \left\{ M \in E_3 \mid \overrightarrow{M_0M} = \lambda \mathbf{q} \right\},$$

где параметр  $\lambda$  принимает значения на всем множестве действительных чисел  $\mathbb{R}$ . Плоскость в евклидовом пространстве также определяется опорной точкой  $M_0$  и ненулевым нормальным вектором  $\mathbf{N} \neq \mathbf{0}$ , как геометрическое место точек  $E_3$ :

$$\Pi(M_0, \mathbf{N}) = \left\{ M \in E_3 \mid (\mathbf{N}, \overrightarrow{M_0M}) = 0 \right\}.$$

Соответственно этим определениям, при заданном декартовом репере  $R\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , где  $\mathbf{e}_i$  векторы ортонормированного базиса:

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \delta_{ik}; \quad (i, k = \overline{1, 3}),$$

прямая  $d(M_0, \mathbf{q})$  описывается параметрическими (или каноническими) уравнениями:

$$d(M_0, \mathbf{q}) : x^i = x_0^i + \lambda q^i; \quad (i = \overline{1, 3}), \quad (2)$$

где  $x_0^i, q^i, x^i$  - координаты опорной точки  $M_0$ , направляющего вектора  $\mathbf{q}$ , и текущей точки прямой  $M$ , соответственно. Плоскость же в евклидовом пространстве  $E_3$  описывается общим уравнением:

$$\Pi(M_0, \mathbf{N}) : (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{N}) = 0 \Rightarrow A_i(x^i - x_0^i) = 0 \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (3)$$

где  $A_i$  - координаты нормального вектора  $\mathbf{N} = (A, B, C)$ .

При построении математических моделей линейных объектов в трехмерном евклидовом пространстве принципиально важными являются три теоремы (см. [1] и более подробно [2]):

**Теорема 1.** Две прямые,  $d(M_1, \mathbf{q}_1)d(M_2, \mathbf{q}_2)$ , в евклидовом пространстве  $E_3$  :

1. пересекаются в единственной точке при условии:

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \overrightarrow{M_1M_2}) \neq 0; \quad (4)$$

2. параллельны при условиях:

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \overrightarrow{M_1M_2}) = 0, \quad (5)$$

$$[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2] \equiv \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 \neq \mathbf{0}; \quad (6)$$

3. совпадают при условиях (5) и:

$$[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2] \equiv \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 = \mathbf{0} \quad (7)$$

4. или скрещиваются при условии:

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \overrightarrow{M_1M_2}) = 0. \quad (8)$$

**Теорема 2.** Две плоскости,  $\Pi_1(1, \mathbf{N}_1)\Pi_2(2, \mathbf{N}_2)$ , в евклидовом пространстве  $E_3$  :

1. пересекаются по единственной прямой при условии:

$$[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2] \neq \mathbf{0}; \quad (9)$$

2. параллельны при условиях:

$$[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2] = \mathbf{0}, \quad (10)$$

$$M_2 \notin \Pi_1(M_1, \mathbf{N}_1); \quad (11)$$

3. или совпадают при условиях (10) и:

$$M_2 \in \Pi_1(M_1, \mathbf{N}_1). \quad (12)$$

**Теорема 3.** Прямая  $d(M_0, \mathbf{q})$  и плоскость  $\Pi(M_1, \mathbf{N})$  в евклидовом пространстве  $E_3$  :

1. пересекаются в единственной точке при условии:

$$(\mathbf{q}, \mathbf{N}) \neq 0; \quad (13)$$



2. параллельны при условиях:

$$(\mathbf{q}, \mathbf{N}) = 0, \quad (14)$$

$$M_0 \notin \Pi(M_1, \mathbf{N}); \quad (15)$$

3. и совпадают при условиях (14) и:

$$M_0 \in \Pi(M_1, \mathbf{N}). \quad (16)$$

Фактически уравнения (16), (3) и перечисленные три теоремы с алгебраической точки зрения полностью описывают задачу о взаимном расположении линейных объектов<sup>1</sup>. Однако, с геометрической точки зрения задача о взаимном расположении линейных объектов еще далеко не завершена.

## 2.2. Геометрический этап моделирования

При получении ответа о реализации одного из перечисленных типов взаимного расположения линейных объектов в теоремах 1-3 (4 типа для прямых, 3 - для плоскостей и 3 - для плоскостей и прямых) необходимо далее решить конкретную геометрическую задачу. Такими задачами являются:

1. нахождение координат точки пересечения прямых;
2. вычисление угла между прямыми;
3. вычисление расстояния между параллельными прямыми;
4. нахождение угла между скрещивающимися прямыми;
5. нахождение прямой пересечения плоскостей;
6. вычисление угла между плоскостями;
7. вычисление расстояния между параллельными плоскостями;
8. нахождение координат точки пересечения прямой и плоскости;
9. вычисление угла между прямой и плоскостью;
10. вычисление расстояния между параллельными прямой и плоскостью.

Решение каждой из перечисленных выше стандартных геометрических задач обеспечивается рядом определенных и алгоритмов, которые дополняют математическую модель и позволяют дать ей четкую геометрическую интерпретацию. Приведем пример моделирования взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве в случае их взаимного пересечения (Рис. 1). На этом рисунке показано определение угла  $\alpha$  между прямой  $d$  и плоскостью  $\Pi$  как угла между прямой  $d$  и ее ортогональной проекцией  $d_1$  на плоскость  $\Pi$ . при этом численное значение угла определяется выражением:  $\sin \alpha = \frac{(\mathbf{q}, \mathbf{N})}{|\mathbf{q}| |\mathbf{N}|}$ .

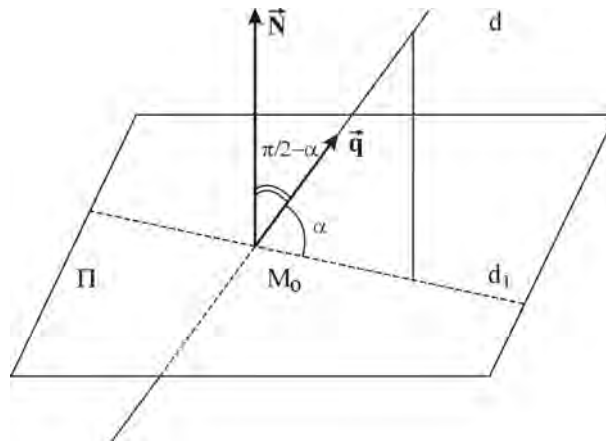


Рис.1. Определение угла  $\alpha$  между прямой  $d$  и плоскостью  $\Pi$ .

## 3. Компьютерное моделирование трехмерных линейных объектов

После завершения этапа математического моделирования переходим к компьютерному моделированию в пакете Maple.

<sup>1</sup>Под линейными объектами понимаются фигуры, описываемые системами линейных уравнений.

### 3.1. Компьютерное моделирование взаимного расположения плоскостей

Заметим, что несмотря на внешнюю простоту рассмотренных выше математических моделей, их компьютерное моделирование достаточно сложно, поскольку основным требованием к программным продуктам, используемым в учебном процессе, является высокая степень наглядности и простоты их применения. Поэтому ниже мы продемонстрируем лишь некоторые фрагменты программных процедур. Создадим программную процедуру EqLine3(Eqs,t) полного исследования и геометрического моделирования взаимного расположения двух плоскостей, заданных общими уравнениями Eqs в библиотеке Anal\_Geom, позволяющую определить взаимно расположение плоскостей в пространстве:<sup>2</sup>

```
>Anal_Geom[EqLine3]:=proc(Eqs,t) local
n,m,A,B1,B,F,k1,k2,SS,SST,EQS,M0,M1,q,N1,N2,Q1,Q2,
M2,M3,M4,M5,GP1,GP2,GL,z1,z2,P1,P2,W1,W2:
n:=LinearAlgebra[ColumnDimension](convert(Eqs,Matrix)):
A:=convert([seq([coeffs(lhs(Eqs[i]))],i=1..n)],Matrix):
m:=LinearAlgebra[RowDimension](A):
B1:=seq(rhs(Eqs[i]),i=1..n):
B:=Vector([B1]):
F:=convert([seq([coeffs(lhs(Eqs[i])),rhs(Eqs[i])],i=1..n)],Matrix):
k1:=linalg[rank](A): k2:=linalg[rank](F): if k1=2 and k2=2 then
SS:=LinearAlgebra[LinearSolve](A,B,free='C'): if SS[1]=C[1] then
SST:=subs(C[1]=t,SS): elif SS[2]=C[2] then SST:=subs(C[2]=t,SS):
elif SS[3]=C[3] then SST:=subs(C[3]=t,SS): end if:
EQS:=[SST[1],SST[2],SST[3]]: M0:=convert(subs(t=0,SST),list):
M1:=convert(subs(t=2,SST),list):
N1:=convert(linalg[row](A,1),Vector):
N2:=convert(linalg[row](A,2),Vector):
q:=convert(coeff(SST,t),Vector):
Q1:=convert(linalg[crossprod](q,N1),list):
Q2:=convert(linalg[crossprod](q,N2),list):
M2:=convert(linalg[matadd](M0,Q1,1,1),list):
M3:=convert(linalg[matadd](M1,Q1,1,1),list):
M4:=convert(linalg[matadd](M0,Q2,1,1),list):
M5:=convert(linalg[matadd](M1,Q2,1,1),list):
GL:=plots[spacecurve](EQS,t=0..2,color=red,thickness=2):
GP1:=plots[polygonplot3d]([M0,M2,M3,M1]):
GP2:=plots[polygonplot3d]([M0,M4,M5,M1]):
plots[display](GL,GP1,GP2,axes=BOXED,title="Плоскости пересекаются
по прямой"):
elif k1=1 and k2=1 then ("Плоскости совпадают") else
z1:=LinearAlgebra[LinearSolve](Matrix([[linalg[row](A,1)],[linalg[row](A,1)]]),
Vector([B[1],B[1]]),free='Z'):
z2:=LinearAlgebra[LinearSolve](Matrix([[linalg[row](A,2)],[linalg[row](A,2)]]),
Vector([B[2],B[2]]),free='U'):
P1:=subs({Z[1]=0,Z[2]=0,Z[3]=0},z1):
P2:=subs({U[1]=0,U[2]=0,U[3]=0},z2): if z1[1]=Z[1] and
z1[2]=Z[2] then W1:=subs({Z[1]=u,Z[2]=v},z1[3]):
GP1:=plot3d([u,v,W1],u=0..2,v=0..2,color=green):
W2:=subs({U[1]=u,U[2]=v},z2[3]):
GP2:=plot3d([u,v,W2],u=0..2,v=0..2,color=red):
elif z1[1]=Z[1] and
z1[3]=Z[3] then W1:=subs({Z[1]=u,Z[3]=v},z1[3]):
GP1:=plot3d([u,W1,v],u=0..2,v=0..2,color=green):
W2:=subs({U[1]=u,U[3]=v},z2[3]):
GP2:=plot3d([u,W2,v],u=0..2,v=0..2,color=red):
else
W1:=subs({Z[2]=u,Z[3]=v},z1[1]):
GP1:=plot3d([W1,u,v],u=0..2,v=0..2,color=green):
W2:=subs({U[2]=u,U[3]=v},z2[1]):
GP2:=plot3d([W2,u,v],u=0..2,v=0..2,color=red): end if:
plots[display](GP1,GP2,axes=BOXED,title="Плоскости параллельны"):
```

<sup>2</sup>Здесь  $t$  – параметр прямой пересечения.

```
end if: end proc:
```

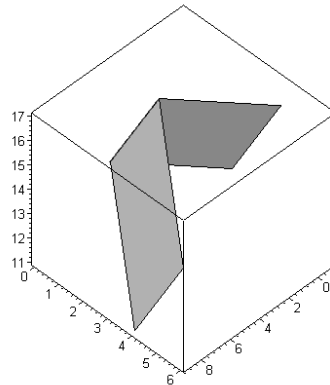
Покажем пример ввода этой программной процедуры для исследования взаимного расположения двух плоскостей, заданных парой общих уравнений:

$$\{2x-2y+z=21; x+2y-z=-9\} : -$$

```
>EqLine3([2*x-2*y+z=21,x+2*y-z=-9],t);
```

и ее исполнения (Рис. 2). Как видно из этого рисунка исполнение команды дает изображение двух плоскостей, линию их пересечения и название рисунка, содержащее информацию о взаимном расположении плоскостей.

Плоскости пересекаются по красной прямой



**Рис.2.** Исполнение команды  $\text{EqLine3}([2x-2y+z=21, x+2y-z=-9], t)$

---

Рассмотрим другой пример параллельного расположения плоскостей:

$$\{7x-4y+z=0; 21x-12y+3z=29\} : -$$

```
>EqLine3([7*x-4*y+z=0,21*x-12*y+3*z=29],t);
```

### 3.2. Компьютерное моделирование взаимного расположения прямых

Создадим теперь в библиотеке Anal\_Geom программную процедуру

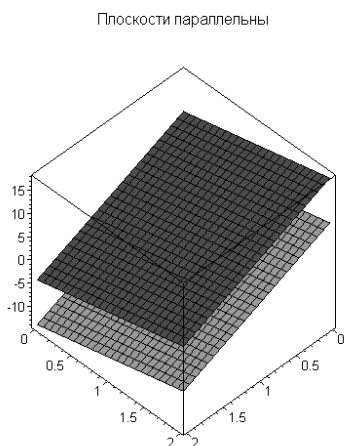
```
graph3D(M1,q1,M2,q2,a,b,A,B,c1,c2,c3)
```

полного исследования и геометрического моделирования взаимного расположения двух прямых, заданных парой опорных точек  $M1, M2$  и парой направляющих векторов  $q1, q2$  ( $a, b$  – коэффициенты,  $A, B$  – обозначение прямых,  $c1, c2, c3$  – цветовые опции прямых и их общего перпендикуляра, если таковой существует):

```
>Anal_Geom [ graph3D]:=proc(M1,q1,M2,q2,a,b,A,B,c1,c2,c3)
local gd1,gd2,M3,MM3,m3,GM3,q3,gdcr,M4,MM4,m4,GM4,GM5,GM6:
gd1:=graph_d(M1,q1,a,b,c1): gd2:=graph_d(M2,q2,a,b,c2):
M3:=cross_par(M1,q1,M2,q2)[1]: M4:=cross_par(M1,q1,M2,q2)[2]:
MM3:=convert(M3,list): MM4:=convert(M4,list): m3:=convert(M(op(MM3)),name):
m4:=convert(N(op(MM4)),name): q3:=cross_par(M1,q1,M2,q2)[3]:
gdcr:=graph_d(M3,q3,0,1,c3): GM3:=plots[textplot3d]([op(MM3),m3],align =
{ABOVE,RIGHT},color=NAVY,font=[TIMES,ROMAN,8]);
GM4:=plots[textplot3d]([op(MM4),m4],align =
{ABOVE,RIGHT},color=NAVY,font=[TIMES,ROMAN,8]);
GM5:=plots[textplot3d]([M1[1]+0.2,M1[2]+0.2,M1[3]+0.2,'A'],align =
{ABOVE,LEFT},color=c1,font=[TIMES,ROMAN,10]);
GM6:=plots[textplot3d]([M2[1]+0.2,M2[2]+0.2,M2[3]+0.2,'B'],align =
{BELOW,RIGHT},color=c2,font=[TIMES,ROMAN,10]);
plots[display](gd1,gd2,gdcr,GM3,GM4,GM5,GM6,axes=BOXED,labels=[X,Y,Z],
title='Скрещивающиеся прямые a и b; прямая MN - кратчайший перпендикуляр'): end
proc:
```

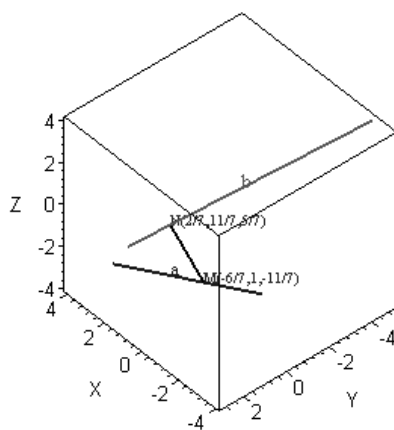
Приведем пример ввода и исполнения программы исследования взаимного расположения двух прямых (Рис. 4):

```
> graph3D([0,1,-2],[-2,0,1],[-1,-1,2],[1,2,-1],-2,2,a,b, blue,COLOR(RGB,0,0.5,0.5),black);
```



**Рис.3.** Исполнение команды `EqLine3([7*x-4*y+z=0,21*x-12*y+3*z=29],t)`

Скрещивающиеся прямые a и b;  
прямая MN - кратчайший перпендикуляр



**Рис.4.** Исполнение команды `graph3D([0,1,-2],[-2,0,1],[-1,-1,2],[1,2,-1],-2,2,a,b,blue,COLOR(RGB,0,0.5,0.5),black)`

## Заключение

Таким образом, создана библиотека программных процедур по курсу линейной алгебры и аналитической геометрии, позволяющая простыми командами проводить исследование линейных алгебраических уравнений и линейных геометрических объектов с графическим отображением результатов исследования. Созданная библиотека программных процедур сопровождается подробной инструкцией с конкретными примерами, созданной в пакете Maple.

## Литература

- [1] Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Часть I. – М.: Просвещение, 1987. – 352 с.
- [2] Игнатъев Ю.Г. Курс лекций по аналитической геометрии. Часть I, II. – Казань: Изд-во НИЛИТМО, ТГГПУ, 2005. – 124 с.
- [3] Дьяконов В.. Maple7. Учебный курс. - СПб.: Питер, 2002. - 672 с. Проблемы информационных технологий в математическом образовании: Учебное пособие под редакцией Ю.Г. Игнатъева. - Казань: ТГППУ, 2005. - 118 с.
- [4] Матросов А.В.. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. – СПб: БХВ-Петербург, 2001. – 528 с.

- [5] *Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р.* Библиотеки пользовательских программных процедур для методического сопровождения курса высшей математики. Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского: Материалы Восьмой молодежной научной школы-конференции “Лобачевские чтения - 2009”. – Казань: Казан. матем. об-во, 2009. – Т.39. – 417 с.
- [6] *Самигуллина А.Р.* Создание компьютерных средств сопровождения курса линейной алгебры и аналитической геометрии для нематематических факультетов с помощью СКМ Maple. Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск: СмолГУ, 2009. – Вып. 10. – 303с.
- [7] *Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р.* Библиотека программных графических процедур по курсу алгебры и аналитической геометрии в пакете Maple. Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XI международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора В.П. Дьяконова. – Смоленск: СмолГУ, 2010. – Вып. 11. – 342 с.

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И СТЕРЕОМЕТРИИ В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE

О.А. Сачкова<sup>1</sup>

Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатъев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Татарский государственный гуманитарно - педагогический университет,  
Россия, Казань

<sup>2</sup>Татарский государственный гуманитарно - педагогический университет,  
Россия, Казань

---

<sup>1</sup>E-mail: sachkova.olga@mail.ru, <sup>2</sup>E-mail: ignatev\_yu@rambler.ru

**Аннотация.** *Описаны основные принципы математического моделирования и программные процедуры в системе компьютерной математики Maple операций векторной алгебры и стереометрии, а также программные процедуры графического отображения этих операций и фигур.*

## Введение

Математические модели, как планиметрии, так и стереометрии, изучаемые в системе высшего образования, основаны на векторной алгебре, хотя и не используют явно понятие векторного пространства. Однако, при этом в системе высшего нематематического образования применяется идея аналитической геометрии, проще говоря, метод координат (см., например, [1]). С математической точки зрения методы аналитической геометрии, применяемые в курсах высшей математики для нематематических специальностей, не обоснованы строго, более интуитивны и априорны, чем логически выдержаны. Тем не менее, даже такие полуаприорные методы могут дать достаточно сильные результаты при условии ясного понимания студентами основных понятий векторной алгебры. Но как раз здесь зачастую и возникают непреодолимые сложности, связанные, во-первых, с неразвитостью пространственного мышления, а, во-вторых, с трудностью психологического перехода от школьной, по-существу, гильбертовской математической структуры геометрии, построенной на базовых множествах точек, прямых и плоскостей, к вузовской, фактической, вейлевской математической структуре геометрии, построенной на базовых множествах чисел, точек и векторов и являющейся основой аналитического метода [2]. В связи с этим наглядность изложения векторной алгебры и ее приложений к стереометрии играет первоочередную роль. Традиционные методы изложения, связанные с мелом и доской здесь малоэффективны. Системы компьютерной математики (СКМ), особенно Maple, обладающие уникальными графическими возможностями, способны помочь разрешению указанной проблемы.

## 1. Математические модели векторной алгебры и стереометрии

Векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$  рассматриваются в курсах высшей математики, как направленные отрезки, т.е., являются, по существу, геометрическими векторами:

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}. \quad (1)$$

Основные векторные операции, изучаемые в курсе высшей математики, следующие тетрадные операции:

1. сложение векторов:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad (2)$$

2. умножение вектора на число:

$$\mathbf{c} = \mu \cdot \mathbf{a}, \quad (3)$$

Обе эти указанные операции объединяются в одну - линейную комбинацию векторов, являющейся одним из базовых понятий, как линейной алгебры, так и аналитической геометрии:

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^n \mu_i \mathbf{a}_i;$$

3. скалярное произведение векторов:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \theta \in \mathbb{R} \quad (4)$$

4. и векторное произведение:

$$\mathbf{c} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \in \mathbb{V}_3, \quad (5)$$

так что:

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \theta \quad (6)$$

и две тернарные операции:

1. смешанное произведение векторов:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \lambda \in \mathbb{R} \quad (7)$$

2. и двойное векторное произведение:

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{d} \in \mathbb{V}_3. \quad (8)$$

Последние две тернарные операции являются композицией тетрарных, поэтому не нуждаются в аксиоматике. Для математического моделирования важны также формулы для вычисления всех указанных операций в ортонормированном базисе  $\{\mathbf{e}_i\}_3$  ( $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \delta_{ik}$ ):

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 (a_i + b_i) \mathbf{e}_i; \quad (9)$$

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^3 a_i b_i; \quad [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}; \quad (10)$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (11)$$

С помощью указанных операций определяется ряд важных для геометрических приложений величин:

- проекция вектора  $\mathbf{a}$  на ось  $\mathbf{e}$ :

$$\text{Pr}_{\mathbf{e}} \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \theta = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{|\mathbf{e}|}, \quad (12)$$

- продольная и перпендикулярная составляющие вектора  $\mathbf{a}$  на ось  $\mathbf{e}$ :

$$\mathbf{a}_{\parallel} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e}) \cdot \mathbf{e}}{e^2};$$

$$\mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e}) \cdot \mathbf{e}}{e^2}; \quad (13)$$

- площадь треугольника со сторонами  $|\mathbf{a}|$  и  $|\mathbf{b}|$ :

$$S = \frac{1}{2} |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|; \quad (14)$$

- объем тетраэдра с ребрами  $|\mathbf{a}|$ ,  $|\mathbf{b}|$  и  $|\mathbf{c}|$ :

$$V_{\text{tetr}} = \frac{1}{6} |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})| \quad (15)$$

и другие величины. Указанные соотношения и составляют математическую модель векторной алгебры. Связь этих объектов с объектами стереометрии устанавливается биективным отношением между вектором и направленным отрезком.

## 2. Компьютерное моделирование объектов векторной алгебры и стереометрии

Процесс компьютерного моделирования фигур и объектов аналитической геометрии состоит из трех этапов: на первом этапе в координатном представлении вычисляются результаты векторных операций; на втором этапе конструируются графические объекты, соответствующие этим операциям, наконец, на заключительном, третьем этапе, производится сборка сложных графических структур на основе простых. Сборка осуществляется с помощью команды *display* библиотеки Maple *plots*. Таким образом, можно сконструировать достаточно сложные многопараметрические программные процедуры, позволяющие контролировать свойства конструируемых графических объектов. Такие процедуры удобно объединить в пользовательскую библиотеку программных процедур.

### Компьютерное моделирование векторных операций

Пользовательская библиотека представляет собой набор новых процедур, команд, которые в дальнейшем используются, наряду со стандартными командами. Рассмотрим пользовательскую библиотеку, реализующую основные векторные операции и их основные приложения. Заметим, что при создании новой библиотеки ряд встроенных в библиотеку Maple команд неоднозначно взаимодействует со средой *proc* в пользовательских процедурах. Примером такого конфликта является использование процедуры *linalg[matadd]*. Поэтому при создании авторских программных процедур рекомендуется проверять их взаимодействие с встроенными в Maple процедурами и при необходимости заменять их собственными. Так, например, программная процедура, реализующая формулу (8) сложения векторов, имеет вид:

```
>VectorAlgebra[Sum_vec]:=proc(x1,x2)
local nn,F:nn:=nops(x1): F:=seq(x1[i]+x2[i],i=1..nn):F: end
proc:
```

Аналогично строится процедура вычитания векторов:

```
>VectorAlgebra[V_vec]:=proc(x1,x2)
local nn,F:nn:=nops(x1): F:=seq(x1[i]-x2[i],i=1..nn):F: end
proc:
```

и процедура произведения вектора на число (по формуле (3)):

```
>VectorAlgebra[Vec_num]:=proc(mu,a)local nn,k:
nn:=nops(a): seq(a[k]*mu,k=1..nn): end proc:
```

Процедуры вычисления скалярного, векторного и смешанного произведений составляются в соответствии с алгоритмами (9)-(10). Так, например, процедура вычисления скалярного произведения имеет вид:

```
>VectorAlgebra[Scal_Vec]:=proc(a,b) local nn,k:
nn:=nops(a): sum(a[k]*b[k],k=1..nn):end proc:
```

Приведем также пример вычисления параллельной составляющей вектора на направление (по формуле (11)):

```
>VectorAlgebra[Pr1_Vec]:=proc(x,e) local xe,e2:
xe:=VectorAlgebra[Scal_Vec](x,e):
e2:=VectorAlgebra[Scal_Vec](e,e):
simplify(VectorAlgebra[Vec_num](xe/e2,e)): end proc:
```

### Геометрическая интерпретация векторных операций

Перейдем к описанию программных процедур графической интерпретации векторных операций. Рассмотрим принципы построения таких процедур на примере создания процедуры графической иллюстрации сложения векторов. Эта процедура основана на более простой программной процедуре *VectorAlgebra[strelka](A,a,c)*, которая, в свою очередь, построена на основе программной процедуры *Arrow* библиотеки *plots*:

```
>VectorAlgebra[S_vec]:=proc(A,a,b) local f,a1,b1,c1,ab:
f:=VectorAlgebra[Sum_vec](a,b): ab:=VectorAlgebra[Sum_vec](A,a):
a1:=VectorAlgebra[strelka](A,a,blue):
c1:=VectorAlgebra[strelka](A,f,red):
b1:=VectorAlgebra[strelka](ab,b,green):
plots[display](a1,b1,c1,axes=BOXED):end proc:
```

Процедура  $VectorAlgebra(A, a, b)$  осуществляет построение суммы векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , приложенных к точке  $A$ , причем окрашивает первый вектор в голубой цвет, второй - в зеленый, а сумму векторов - в красный. Аналогично строится и программная процедура визуализации векторного произведения  $Prod\_vec(A, a, b)$ , которая осуществляет графическое отображение векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  приложенных к точке  $A$ , их векторного , а также параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ . При этом первый вектор окрашивается в красный цвет, второй - в зеленый, третий - в голубой, а плоскость параллелограмма - в желтый цвет. Процедура графической иллюстрации продольной и параллельной составляющих вектора,  $Vec\_Pr(M, x, e)$ , осуществляет графическую визуализацию векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{e}$  приложенных к точке , продольной и перпендикулярной составляющих вектора  $\mathbf{x}$  относительно вектора  $\mathbf{e}$ .

## Компьютерное моделирование объектов стереометрии

На третьем этапе компьютерного моделирования конструируются программные процедуры изображения геометрических фигур. Продемонстрируем пример создания процедуры  $Nagle(R, a, n, c)$  графического отображения призмы с ребром  $\mathbf{a}$  (список), окрашенной в цвет  $c$ , в основании которой лежит правильный  $n$ -угольник, вписанный в окружность радиуса  $R$ .

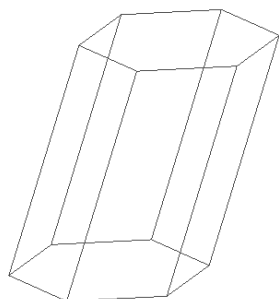
```
>VectorAlgebra[Nagle]:=proc(R,a,n,c) local M,i,MN,Ma,MNa,ab,t,k,gab:
M:=(i)->[R*cos(2*Pi*i/n),R*sin(2*Pi*i/n),0]:
Ma:=(i)->[R*cos(2*Pi*i/n)+a[1], R*sin(2*Pi*i/n)+a[2],a[3]]:
MN:=plots[polygonplot3d]([seq(Ma(i),i=1..n)],style=WIREFRAME,color=c):
MNa:=plots[polygonplot3d]([seq(M(i),i=1..n)],style=WIREFRAME,color=c):
ab:=(i,t)->[seq(M(i)[k]+a[k]*t,k=1..3)]:
gab:=(i)->plots[spacecurve](ab(i,t),t=0..1,color=c):
plots[display](MN,MNa,seq(gab(i),i=1..n)):end proc:
```

Результат исполнения процедуры  $VectorAlgebra[Nagle](R, a, n, c)$  показан на 2. Пользовательская библиотека программных процедур " $VectorAlgebra$ " содержит следующие процедуры:

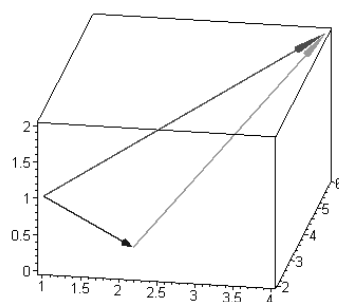
1.  $Reper(A, a, b, c, g, c1, c2, c3)$  - процедура графической иллюстрации координатного репера с опорной точкой  $A$ , и базисными векторами  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  где  $g = n \times m$  - количество отображаемых линий координатной сети,  $c1, c2, c3$  - цвета соответствующих плоскостей.
2.  $Reper\_name(A, a, b, c, g, c1, c2, c3, p, t, r, d)$  - процедура графического изображения подписей к координатным осям репера, где  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  - базисные векторы,  $g = n \times m$  - количество отображаемых линий координатной сети,  $c1, c2, c3$  - цвета соответствующих плоскостей,  $p, t, r$  - подписи к осям,  $d$  - цвет надписей на осях координат.
3.  $Reper\_pr(A, a, b, c, g, x1, y1, z1, x2, y2, z2, c1, c2, c3, c4, c5, p, t, r, d)$  - процедура графического изображения вектора с его проекциями в трехмерной системе координат. Эта процедура является комплексной, содержащей все выше перечисленные процедуры, вложенные друг в друга; здесь  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  - координаты заданных векторов,  $x1, y1, z1$  - координаты начала вектора,  $x2, y2, z2$  - координаты конца вектора,  $c1, c2, c3$  - цвета соответствующих плоскостей,  $c4$  - цвет изображения вектора,  $c5$  - цвет его проекции на координатные плоскости,  $d$  - цвет надписей на осях координат.
4.  $parallelogram(A, a, b)$  - процедура графической иллюстрации параллелограмма где  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  заданные векторы, приложенные к точке  $A$ .
5.  $parallelepiped\_ABCD(A, a, b, c)$  и  $pyramid\_ABCDE(A, a, b, c)$  - аналогичные процедуры визуализации параллелепипеда и тетраэдра.

На 2, 3, 4 показано исполнение процедур  $S\_vec(A, a, b)$ ,  $Prod\_vec(A, a, b)$  и  $Vec\_Pr(M, x, e)$ .

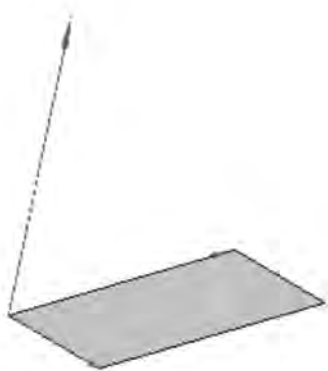




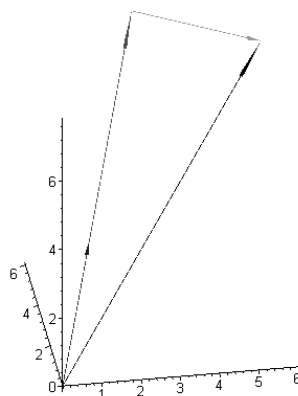
**Рис.1.** Графическая иллюстрация призмы с помощью процедуры: `VectorAlgebra[Nagle](2, [1, 2, 3], 5, red)`.



**Рис.2.** Исполнение графической иллюстрации сложения векторов: `S_vec([1, 2, 1], [1, 1, 1], [2, 3, 2])`.



**Рис.3.** Исполнение процедуры векторного произведения: `Prod_vec([1, 2, 1], [1, 1, -1], [2, 3, 2])`



**Рис.4.** Исполнение графической иллюстрации параллельной и перпендикулярной составляющих вектора: `Vec_Pr([0, 0, 0], [10, 10, 10], [2, 4, 3])`.

## Заключение

Таким образом, создана библиотека программных процедур, позволяющих создавать качественное демонстрационное сопровождение учебных модулей алгебры и аналитической геометрии.

## Литература

- [1] Атанасян Л.С., Базылев В.Т., Геометрия. Часть I. – М.: Просвещение, 1987. – 352 с.
- [2] Клейн Ф., Элементарная математика с точки зрения высшей. Том 2. Геометрия. – М.: Наука.1987. – 416 с.
- [3] Баврин И.И., Высшая математика. 2-е изд.– М.: Академия. 2001. – 616 с.
- [4] Луканкин Г.Л., Мартынов Н. Н., Шадрин Г.А., Яковлев Г.Н., Высшая математика. – М.: Просвещение. 1988. – 431 с.
- [5] Дьяконов В.П., Maple7. Учебный курс. - СПб.: Питер, 2002. - 672 с.
- [6] Проблемы информационных технологий в математическом образовании: Учебное пособие под редакцией Ю.Г. Игнатьева. - Казань: ТГПУ, 2005. - 118 с.

- [7] Матросов А.В., Марле 6. Решение задач высшей математики и механики. – СПб: БХВ-Петербург, 2001. – 528 с.
- [8] Игнатъев Ю.Г., Сачкова О.А., Программные и графические процедуры по теме “Векторная алгебра” в среде Maple. // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции – Смоленск: СмолГУ, 2010.- 28-30 с.

## ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ЩЕЛИ МЕЖДУ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ ПЛАСТИНАМИ

Д.Н. Тумаков<sup>1</sup>, А.Р. Тухватова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, <sup>2</sup>Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань

<sup>1</sup>E-mail: -, <sup>2</sup>E-mail: -

**Аннотация.** В работе исследована задача дифракции плоской  $TE$ -поляризованной электромагнитной волны на щели между полубесконечными металлическими пластинами. Эта задача, а также задача дифракции на отверстиях в конечных экранах представляют большой теоретический и практический интерес, и им посвящено немало работ (см., например, [1]–[3] и имеющуюся там библиографию). Теория разрешимости этой задачи построена в [4], и в данной статье этот вопрос не рассматривается.

<sup>1</sup>Задача дифракции сформулирована в виде краевой задачи для уравнения Гельмгольца с граничными условиями "на металле" и заданным асимптотическим поведением на ребрах экранов. Решения задачи ищутся в классе уходящих на бесконечность волн [5].

Уравнение Гельмгольца рассмотрено отдельно в верхней и нижней полуплоскостях [6], разделенных осью  $x$ . Образы Фурье следов на границах каждой из областей нормальных производных и самой искомой функции связаны соотношениями, полученными в [7]. Эти соотношения использованы при анализе исходной задачи.

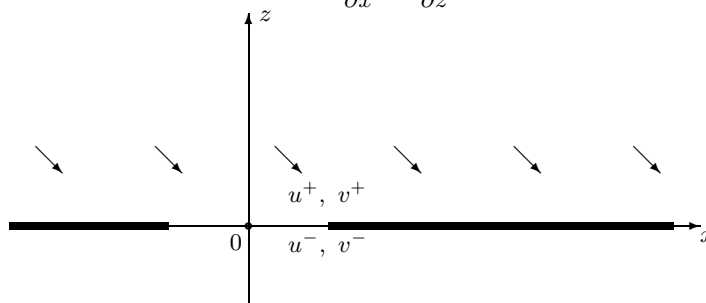
Исследуемая задача сведена к интегральному уравнению с сильной особенностью в ядре относительно следа вектора электрической напряженности на щели. Из полученного интегрального уравнения получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений. Приведены графики расчетов.

### 1. Постановка задачи

Пусть в плоскости  $z = 0$  декартовой системы координат размещены две идеально проводящие полубесконечные вдоль оси  $x$  и бесконечные вдоль оси  $y$  тонкие пластины. Сверху (из области  $z > 0$ ) набегают плоская электромагнитная волна вида  $u_0(x, z) = A_0 e^{ik \sin \theta x + ik \cos \theta z}$ , где  $\theta$  – угол отсчитываемый от оси  $z$ . Нужно найти электромагнитное поле, возникающее при ее дифракции. Ограничимся случаем, когда вектор  $\mathbf{E}$  падающей волны также параллелен оси  $y$  ( $TE$ -поляризация поля). Поэтому можно искать решение задачи дифракции, не зависящее от координаты  $y$ .

Ненулевые компоненты электромагнитного поля в случае  $TE$ -поляризации выражаются [6] через потенциальную функцию  $u(x, z) = E_y(x, z)$ , которая является решением двумерного уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0. \quad (1)$$



**Рис.1.** Геометрия задачи

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №09-01-97009

Рассматриваемая задача может быть сформулирована как задача сопряжения для этого уравнения. Плоскость  $xOz$  разобьем на две области (см. рис. 1): верхнюю  $\{(x, z) : z > 0\}$  и нижнюю  $\{(x, z) : z < 0\}$  полуплоскости. Границу сопряжения полуплоскостей разобьем на части: обозначим через  $M$  проекцию на ось  $x$  части, соответствующей металлическим пластинам, и  $N$  – проекцию части без металлических пластин. Обозначим через  $u^+(x)$  предельные значения искомой функции  $E_y(x, z)$  при стремлении  $z$  к 0 сверху, а через  $v^+(x)$  – предельные значения  $H_x(x, z)$  (или, как следует из системы Максвелла, с точностью до постоянного множителя нормальной производной  $\partial E_y(x, z)/\partial z$ ). Для предельных значений функции и нормальной производной при подходе к оси  $x$  из нижней полуплоскости введем обозначения  $u^-(x)$  и  $v^-(x)$ .

В каждой из полуплоскостей нужно найти решения уравнения (1) из класса распределений медленного роста на бесконечности, удовлетворяющие следующим условиям при  $z = 0$ . Вне металлических пластин должны быть непрерывны касательные составляющие векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . В нашем случае эти условия имеют вид

$$u^+(x) + u_0(x, 0) = u^-(x), \quad v^+(x) + v_0(x, 0) = v^-(x) \quad \text{при} \quad x \in N. \quad (2)$$

Касательные составляющие напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  на идеально проводящих металлических пластинах равны нулю, что эквивалентно следующим условиям:

$$u^+(x) = -u_0(x, 0), \quad u^-(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in M. \quad (3)$$

Асимптотическое поведение на ребрах экранов ([4], 1.25 и 1.26) считаем следующим:

$$E_y = O(\rho^{1/2}), \quad H_x = O(\rho^{-1/2}), \quad \rho \rightarrow 0,$$

где  $\rho$  – расстояние до концевой точки экрана. Условия на бесконечности определим следующим образом [5]: функция  $u(x, z)$  должна быть ограничена на бесконечности или распространяться как волна (порождать волну, переносящую энергию) при  $x^2 + z^2 \rightarrow \infty$ . Задача (1)–(3) вместе с условиями на бесконечности и ребре представляет собой математическую модель процесса дифракции на щели между металлическими экранами  $TE$ -поляризованной электромагнитной волны, описываемой функцией  $u_0(x, z)$ .

## 2. Сведение задачи дифракции к интегральному уравнению

Образы Фурье нормальных производных и самой искомой функции на границах полуплоскостей связаны соотношениями (см. [7]):

$$\begin{aligned} V^+(\zeta) - i\gamma(\zeta)U^+(\zeta) &= 0, \\ V^-(\zeta) + i\gamma(\zeta)U^-(\zeta) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\gamma(\zeta) = \left\{ -\sqrt{k^2 - \zeta^2}, \quad |\zeta| < k, \quad i\sqrt{\zeta^2 - k^2}, \quad |\zeta| > k \right\}.$$

Соотношения (4) для вещественных  $\zeta$  фактически заменяют собой уравнение (1). Таким образом, переходим от системы (1)–(3) к системе (2)–(4), которую и будем в дальнейшем решать. При решении задач дифракции достаточно отыскать либо граничные значения самой функции, либо граничные значения нормальной производной [6]. Рассмотрим в качестве неизвестной граничное значение функции  $u^-(x)$ . Сведем исходную задачу (2)–(4) к системе интегральных уравнений относительно  $u^-(x)$ . Применим к соотношениям (4) обратное преобразование Фурье и воспользуемся условием (3), получим

$$v^+(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u^+(\tau) K_0(\tau - x) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_N u^+(\tau) K_0(\tau - x) d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_M u_0(\tau) K_0(\tau - x) d\tau \quad (5)$$

и

$$v^-(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u^-(\tau) K_0(\tau - x) d\tau = -\frac{1}{2\pi} \int_N u^-(\tau) K_0(\tau - x) d\tau, \quad (6)$$

где

$$K_0(x) = -\frac{ik}{2|x|} H_1^{(2)}(k|x|). \quad (7)$$

Рассмотрим уравнения (5) и (6) на  $x \in N$ . Вычтем одно из другого и используем условия (2):

$$v_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_N u^-(\tau) K_0(\tau - x) d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tau) K_0(\tau - x) d\tau.$$

Для падающей волны, как для волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси  $z$ , справедливо второе соотношение (4), которое можно записать в виде

$$v_0(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tau) K_0(\tau - x) d\tau.$$

Тогда получим

$$\int_N u^-(\tau) K_0(\tau - x) d\tau = v_0(x), \quad x \in N. \quad (8)$$

Заметим, что в работе [8] при несколько отличных условиях от (2) получено интегральное уравнение относительно  $u^+(\tau)$  при той же правой части.

### 3. Решение интегрального уравнения задачи дифракции на отверстии

Пусть интервал, на котором расположена щель, совпадает с отрезком  $(-1, 1)$ . Обозначим  $u(\tau) = u^-(\tau)$  и  $f(x) = v_0(x)$ . Тогда уравнение (8) примет вид

$$\int_{-1}^1 u(\tau) K_0(\tau - x) d\tau = f(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (9)$$

с граничными условиями  $u(-1) = u(1) = 0$ , в соответствии с поведением поля на ребрах. Оценим поведение функции Ханкеля, содержащуюся в ядре интегрального уравнения, в окрестности нуля. Для этого выразим данную функцию через функции Бесселя и Неймана  $H_1^{(2)}(x) = J_1(x) - iY_1(x)$ . Разложим в ряд Тейлора при  $x \rightarrow 0$  справа функцию Бесселя

$$J_1(x) = \frac{x}{2} + O(x^3)$$

и функцию Неймана

$$Y_1(x) = -\frac{2}{\pi x} + \frac{(-1 + 2\gamma - 2 \ln 2 + 2 \ln x)x}{2\pi} + O(x^3),$$

где  $\gamma = 0.57722$  – постоянная Эйлера.

С учетом этих представлений получим

$$\begin{aligned} K_0(x) &= -\frac{ik}{2|x|} (J_1(k|x|) - iY_1(k|x|)) = \\ &= \frac{1}{\pi x^2} - \frac{k^2}{2\pi} \ln|x| - \frac{(-1 + 2\gamma - 2 \ln 2 + 2 \ln k)k^2}{4\pi} - i\frac{k^2}{4} + O(|x|^2). \end{aligned}$$

Таким образом в ядре интегрального уравнения (9) можно выделить слагаемые, содержащие особенность в нуле:

$$K_0(x) = \frac{1}{\pi x^2} + \frac{k^2}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} + R(x), \quad (10)$$

где

$$R(x) = -\frac{ik}{2|x|} (J_1(k|x|) - iY_1(k|x|)) - \frac{1}{\pi x^2} - \frac{k^2}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \quad (11)$$

представляет собой регулярную часть интегрального ядра  $K_0(x)$ . Функция  $R(x)$  непрерывна на интервале  $(-1, 1)$  и принимает в нуле следующее значение:

$$R(0) = -\frac{(-1 + 2\gamma - 2 \ln 2 + 2 \ln k)k^2}{4\pi} - i\frac{k^2}{4}.$$

С учетом (10) интегральное уравнение (9) можно записать в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(\tau)}{(\tau - x)^2} d\tau + \frac{k^2}{2\pi} \int_{-1}^1 u(\tau) \ln \frac{1}{|\tau - x|} d\tau + \int_{-1}^1 u(\tau) R(\tau - x) d\tau = f(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (12)$$

в котором в первые два интеграла вошли особенности ядра уравнения (9), а третий содержит непрерывное ядро  $R(\tau - x)$ . Заметим, что первый интеграл имеет особенность второго порядка, и понимать его следует в смысле интеграла Адамара [9].

**Лемма 2.** Пусть функция  $u(\tau) \in C^1(-1, 1)$  при  $\tau \in (-1, 1)$  представима в виде ряда Фурье по полиномам Чебышева второго рода

$$u(\tau) = \sqrt{1 - \tau^2} \sum_{n=0}^{\infty} D_n U_n(\tau), \quad (13)$$

а ее производная  $u'(\tau)$  на том же интервале – в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода

$$u'(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tau^2}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n T_n(\tau). \quad (14)$$

Тогда  $C_0 = 0$  и  $C_{n+1} = -(n+1)D_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$

**Доказательство.** Продифференцируем функцию  $u(\tau)$ , представленную рядом (13)

$$u'(\tau) = -\frac{\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} \sum_{n=0}^{\infty} D_n U_n(\tau) + \sqrt{1 - \tau^2} \sum_{n=1}^{\infty} D_n U_n'(\tau).$$

Равенство здесь и далее понимаем в обобщенном смысле. Продолжим преобразования:

$$\begin{aligned} u'(\tau) &= -\frac{\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} \sum_{n=0}^{\infty} D_n U_n(\tau) + \frac{1}{\sqrt{1 - \tau^2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-n)\tau D_n U_n(\tau) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{1 - \tau^2}} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)D_n U_{n-1}(\tau) = -\frac{\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} D_0 U_0(\tau) - \\ &- \frac{\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)D_n U_n(\tau) + \frac{1}{\sqrt{1 - \tau^2}} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)D_n U_{n-1}(\tau). \end{aligned}$$

Здесь была использована формула ([11], 22.8.4):  $(1 - x^2)U_n'(x) = -nxU_n(x) + (n+1)U_{n-1}(x)$ . Для дальнейших преобразований воспользуемся формулами, связывающими полиномы Чебышева первого и второго рода между собой ([11], 22.5.6) и ([11], 22.5.7)

$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x), \quad T_n(x) = xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x).$$

Получим

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \tau^2}u'(\tau) &= -\tau D_0 U_0(\tau) - \tau \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)D_n U_n(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)D_n U_{n-1}(\tau) = \\ &= D_0 T_1(\tau) - D_0 U_1(\tau) - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)D_n [\tau U_n(\tau) - U_{n-1}(\tau)] = \\ &= D_0 [T_1(\tau) - 2T_1(\tau)] - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)D_n T_{n+1}(\tau). \end{aligned}$$

Приравняем полученное выражение с одной стороны и разложение производной (14) с другой стороны

$$-\frac{1}{\sqrt{1 - \tau^2}} \sum_{n=1}^{\infty} nD_{n-1}T_n(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tau^2}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n T_n(\tau).$$

Так как полиномы Чебышева являются базисом на интервале  $(-1, 1)$ , то из последнего равенства следует утверждение леммы.

Заметим, что для тригонометрических рядов Фурье тоже справедливо соотношение подобное Лемме 1 ([10], 704).

**Лемма 1.** Для интеграла

$$L_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \tau^2} U_n(\tau) \ln \frac{1}{|\tau - x|} d\tau$$

в случае  $n = 0$  и  $n = 1$  справедливы формулы

$$L_0(x) = \frac{1 + 4 \ln 2}{8} U_0(x) - \frac{1}{8} U_2(x), \quad L_1(x) = \frac{1}{3} U_1(x) - \frac{1}{12} U_3(x).$$

Для остальных положительных  $n$  интеграл равен

$$L_n(x) = -\frac{1}{4n} U_{n-2}(x) + \frac{n+1}{2n(n+2)} U_n(x) - \frac{1}{4(n+2)} U_{n+2}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

**Доказательство.** Последовательность рассуждений будет следующая. Сперва переходим к полиномам Чебышева первого рода

$$U_{n-1}(x) = \frac{1}{1-x^2} \frac{T_n(x) - T_{n+2}(x)}{2}.$$

Эту формулу можно получить из ([11], 22.5.10)

$$U_{n-1}(x) = \frac{1}{1-x^2} [xT_n(x) - T_{n+1}(x)]$$

и рекуррентного соотношения  $T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$ .

Далее пользуемся тем, что полиномы  $T_n(x)$  являются собственными функциями интегрального оператора с логарифмическим ядром

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} T_n(\tau) \ln \frac{1}{|\tau-x|} d\tau = \begin{cases} \ln 2 & , \quad n=0 \\ 1/n T_n(x) & , \quad n=1, 2, \dots \end{cases}$$

и, наконец, возвращаемся к полиномам Чебышева второго рода ([11], 22.5.8)

$$T_n(x) = \frac{U_n(x) - U_{n-2}(x)}{2}.$$

Отступление от последнего шага нужно сделать для случаев  $n=0, 1$ . Для случая  $n=0$  получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} U_0(\tau) \ln \frac{1}{|\tau-x|} d\tau &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} T_0(\tau) \ln \frac{1}{|\tau-x|} d\tau - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} T_2(\tau) \ln \frac{1}{|\tau-x|} d\tau = \frac{\ln 2}{2} T_0(x) - \frac{1}{4} T_2(x) = \\ &= \frac{\ln 2}{2} U_0(x) - \frac{1}{4} \frac{U_2(x) - U_0(x)}{2} = \frac{1+4\ln 2}{8} U_0(x) - \frac{1}{8} U_2(x). \end{aligned}$$

Здесь воспользовались формулой  $T_0(x) = U_0(x)$ . Для случая  $n=1$ , учитывая, что  $2T_1(x) = U_1(x)$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} U_1(\tau) \ln \frac{1}{|\tau-x|} d\tau &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} T_1(\tau) \ln \frac{1}{|\tau-x|} d\tau - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} T_3(\tau) \ln \frac{1}{|\tau-x|} d\tau = \frac{1}{2} T_1(x) - \frac{1}{6} T_3(x) = \\ &= \frac{1}{4} U_1(x) - \frac{1}{6} \frac{U_3(x) - U_1(x)}{2} = \frac{1}{3} U_1(x) - \frac{1}{12} U_3(x). \end{aligned}$$

Для остальных случаев  $n > 1$  проведем рассуждения по схеме, указанной в начале доказательства

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} U_n(\tau) \ln \frac{1}{|\tau-x|} d\tau &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} T_n(\tau) \ln \frac{1}{|\tau-x|} d\tau - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} T_{n+2}(\tau) \ln \frac{1}{|\tau-x|} d\tau = \frac{1}{2n} T_n(x) - \frac{1}{2(n+2)} T_{n+2}(x) = \\ &= \frac{1}{2n} \frac{U_n(x) - U_{n-2}(x)}{2} - \frac{1}{2(n+2)} \frac{U_{n+2}(x) - U_n(x)}{2} = \\ &= -\frac{1}{4n} U_{n-2}(x) + \frac{n+1}{2n(n+2)} U_n(x) - \frac{1}{4(n+2)} U_{n+2}(x). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Перед тем как перейти непосредственно к решению уравнения (12), рассмотрим интегральное уравнение более общего вида. Результат о возможности сведения этого интегрального уравнения бесконечной системе линейных алгебраических уравнений сформулируем в виде теоремы

**Теорема 1.** Сингулярное интегральное уравнение относительно функции  $u \in C^1(-1, 1)$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(\tau)}{(\tau-x)^2} d\tau + \frac{B}{\pi} \int_{-1}^1 u(\tau) \ln \frac{1}{|\tau-x|} d\tau + \int_{-1}^1 u(\tau) R(\tau-x) d\tau = f(x), \quad x \in (-1, 1) \quad (15)$$

с заданным поведением искомой функции на границе

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} u(x) = O(\sqrt{1-x^2}) \quad (16)$$

сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $C_n$  разложения функции  $u'(\tau)$  в ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода

$$\frac{1}{2} C_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} C_n = b_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (17)$$

где

$$a_{kn} = \frac{B}{4} \left[ \frac{\delta(k-2-n)}{2(k-2)(k-1)} - \frac{\delta(k-n)}{(k-1)(k+1)} + \frac{\delta(k+2-n)}{2(k+1)(k+2)} \right] - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_{k-1}(\tau) \int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} U_{n-1}(\tau) R(\tau-x) d\tau dx, \quad k = 2, 3, \dots \quad (18)$$

Для случая  $k = 1$

$$a_{1n} = -B \left[ -\frac{1+4\ln 2}{16} \delta(k) + \frac{1}{48} \delta(k-2) \right] - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} U_{n-1}(\tau) R(\tau-x) d\tau dx.$$

Правая часть системы имеет вид:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) U_{k-1}(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (19)$$

**Доказательство.** Нетрудно заметить, что поведение производной искомой функции на границе имеет вид

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} u'(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Тогда  $u'(x)$  удобно искать в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода (14).

Рассмотрим первое слагаемое уравнения (15). Проинтегрируем его по частям, получим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(\tau)}{(\tau-x)^2} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u'(\tau)}{\tau-x} d\tau.$$

Подставим представление для  $u'(\tau)$  в виде ряда (13) в полученный интеграл

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n T_n(\tau) \frac{1}{\tau-x} d\tau &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(\tau)}{(\tau-x)\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = \\ &= C_0 \frac{i \operatorname{sign} x}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n U_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Здесь было использовано значение интеграла

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(\tau-x)\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = \frac{i\pi \operatorname{sign} x}{\sqrt{1-x^2}}$$

и формула ([11], 22.13.3)

$$Vp \int_{-1}^1 \frac{T_n(\tau)}{(\tau-x)\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = \pi U_{n-1}(x),$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Таким образом, используя лемму 1, получим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(\tau)}{(\tau-x)^2} d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} C_n U_{n-1}(x).$$

Искомую функцию  $u(x)$  будем искать в виде ряда по полиномам Чебышева второго рода (13). Тогда второе слагаемое интегрального уравнения (15) примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{B}{\pi} \int_{-1}^1 u(\tau) \ln \frac{1}{|\tau-x|} d\tau = B \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} U_n(\tau) \ln \frac{1}{|\tau-x|} d\tau = \\ & = -BC_1 \left[ \frac{1+4\ln 2}{8} U_0(x) - \frac{1}{8} U_2(x) \right] - BC_2 \left[ \frac{1}{6} U_1(x) - \frac{1}{24} U_3(x) \right] + \\ & + B \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_{n+1}}{n+1} \left[ \frac{1}{4n} U_{n-2}(x) - \frac{n+1}{2n(n+2)} U_n(x) + \frac{1}{4(n+2)} U_{n+2}(x) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, интегральное уравнение (15) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} U_n(x) - BC_1 \left[ \frac{1+4\ln 2}{8} U_0(x) - \frac{1}{8} U_2(x) \right] - BC_2 \left[ \frac{1}{6} U_1(x) - \frac{1}{24} U_3(x) \right] + \\ & + B \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_{n+1}}{n+1} \left[ \frac{1}{4n} U_{n-2}(x) - \frac{n+1}{2n(n+2)} U_n(x) + \frac{1}{4(n+2)} U_{n+2}(x) \right] - \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{n+1}}{n+1} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} U_n(\tau) R(\tau-x) d\tau = f(x). \end{aligned} \quad (20)$$

Введем скалярное произведение для произвольных функций  $\varphi(x), \psi(x) \in L_1(-1, 1)$  по следующему правилу:

$$\langle \varphi(x), \psi(x) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \varphi(x) \psi(x) dx.$$

Будем последовательно скалярно умножать уравнение (20) на  $U_{k-1}(x)$  для  $k = 1, 2, \dots$ . Тогда первый ряд в уравнении (20) всегда будет давать  $1/2 \cdot C_k$ . Последнее слагаемое левой части уравнения после скалярного умножения будет равно

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{n+1}}{n+1} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_{k-1}(x) \int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} U_n(\tau) R(\tau-x) d\tau dx.$$

Распишем подробнее случаи при малых  $k$  выражений, к которым приводятся оставшиеся слагаемые левой части (20). Так при  $k = 1$  получим

$$B \left[ -\frac{1+4\ln 2}{16} C_1 + \frac{1}{48} C_3 \right],$$

при  $k = 2$ ,  $k = 3$  и  $k = 4$  получим  $B \cdot (-C_2/12 + C_4/96)$ ,  $B \cdot (C_1/16 - C_3/32 + C_5/160)$  и  $B \cdot (C_2/48 - C_4/60 + C_6/240)$ , соответственно. Для остальных  $k = 5, 6$  и т.д. будем иметь

$$\frac{B}{4} \left[ \frac{1}{2(k-2)(k-1)} C_{k-2} - \frac{1}{(k-1)(k+1)} C_k + \frac{1}{2(k+1)(k+2)} C_{k+2} \right].$$

Правая часть уравнения (15) после скалярного умножения даст коэффициенты  $b_k$ , определяемые по формуле (19). Объединив все результаты вместе, получим утверждение теоремы. В условиях теоремы для задачи дифракции на щели в уравнении (12) коэффициент  $B = k^2/2$ . Бесконечную систему (17) будем решать методом усечения с параметром  $N$ .



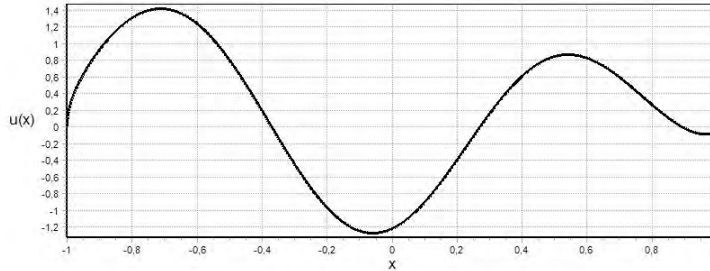
### 4. Численные результаты

Интегралы типа (19) с весом  $\sqrt{1-x^2}$  будем вычислять по формуле Гаусса

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^M w_k f(x_k)$$

с узлами и весовыми коэффициентами, определяемые по формулам ([11], 25.4.40)

$$x_k = \cos \frac{k}{M+1} \pi, \quad w_k = \frac{\pi}{M+1} \sin^2 \frac{k}{M+1} \pi.$$



**Рис.2.** Распределение функции  $u^-(x)$  на щели. Параметры  $A_0 = 1, \theta = \pi/4, \lambda = 1, N = 20, M = 70$ .

Соответственно, двойной интеграл, содержащийся в (18), будем вычислять через двойную сумму:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_k(x) \int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} U_n(\tau) R(\tau-x) d\tau dx \approx \\ \approx \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w(x_i) w(x_j) U_k(x_i) U_n(x_j) R(x_j-x_i). \end{aligned}$$

Полученную систему будем решать методом Гаусса. Затем восстановим искомую функцию по ряду (13), предварительно воспользовавшись леммой 1. Пример распределения решения интегрального уравнения  $u^-(x)$  на щели приведен на рис. 2. После решения усеченной системы вида (17) сделаем проверку точности решения интегрального уравнения (12). Для этого выразим коэффициенты  $D_n$  через  $C_n$  и подставим полученные усеченные ряды непосредственно в само уравнение (12), получив таким образом приближение правой части. Интеграл с особенностью второго порядка будем вычислять по формуле [9]

$$\int_{-1}^1 \frac{u(\tau)}{(\tau-x)^2} d\tau \approx \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{Q-1} u(x'_k) \left[ \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{(\tau-(x-ih))^2} + \frac{1}{(\tau-(x+ih))^2} \right) d\tau \right],$$

где

$$x'_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, \quad x_k = -1 + \frac{2k}{Q}, \quad k = 0, 1, \dots, Q-1.$$

Заметим ([9], Теорема 2.5.1), что погрешность этой квадратурной формулы  $h = O(Q^{-1/2})$ .

Интеграл с логарифмической особенностью вычислим интегрированием по частям

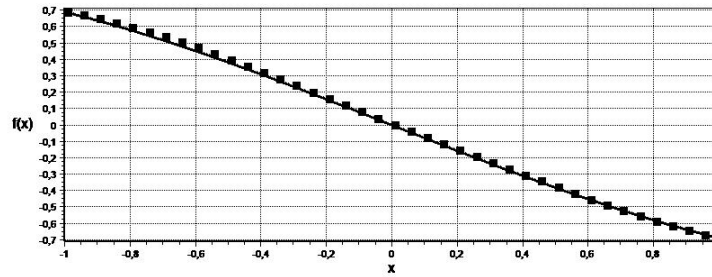
$$\int_{-1}^1 u(\tau) \ln \frac{1}{|\tau-x|} d\tau = \int_{-1}^1 u'(\tau) [(\tau-x) \ln |\tau-x| - (\tau-x)] d\tau.$$

После устранения особенности производная  $u'(x)$  в окрестностях точек  $x = \pm 1$  ведет себя как  $(1-x^2)^{-1/2}$ . Поэтому для вычисления полученного интеграла воспользуемся формулой Гаусса

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{k=1}^M w_k f(x_k)$$

с ортогональными многочленами – полиномами Чебышева первого рода. В этом случае узлы и весовые коэффициенты определяются по формулам ([11], 25.4.38)

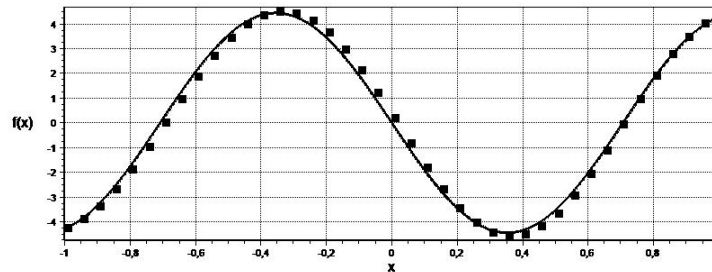
$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2M} \pi, \quad w_k = \frac{\pi}{M}.$$



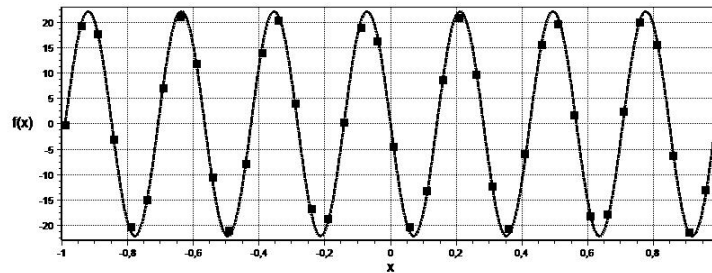
**Рис.3.** Заданная и восстановленная правая часть  $v_0(x)$  уравнения (8). Параметры  $A_0 = 1$ ,  $\theta = \pi/4$ ,  $\lambda = 5$ ,  $N = 10$ ,  $M = 70$ .

Проверка приближения правой части уравнения (2) при различных длинах волн приведены на рис. 3–5. Непрерывная линия – правая часть интегрального уравнения. Восстановленная правая часть изображена на графиках квадратами.

Заметим, что уменьшение длины волны  $\lambda$  приводит к увеличению вклада интеграла с логарифмической особенностью в матрицу системы (17), так как коэффициент  $k = 2\pi/\lambda$  возрастает. Это влечет за собой необходимость увеличения размерности системы  $N$  и соответственно  $M$  (потому что необходимо повышать точность вычисления внутренних интегралов из-за накопления ошибки).



**Рис.4.** Заданная и восстановленная правая часть  $v_0(x)$  уравнения (8). Параметры  $A_0 = 1$ ,  $\theta = \pi/4$ ,  $\lambda = 1$ ,  $N = 20$ ,  $M = 70$ .



**Рис.5.** заданная и восстановленная правая часть  $v_0(x)$  уравнения (8). Параметры  $A_0 = 1$ ,  $\theta = \pi/4$ ,  $\lambda = 0.2$ ,  $N = 120$ ,  $M = 120$ .

## Литература

- [1] Репин В.М. Дифракция электромагнитных волн на прямоугольном отверстии в экране. // В кн.: Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1975, вып. XXIV.
- [2] Butler M.C., Umanshankar K.R. *Electromagnetic Excitation of a Wire through an Aperture-Perforated Conducting Screen.* // IEEE Trans. Antennas Propagation, vol. AP-24, №4, 1976, P.456-462.
- [3] Butler M.C., Rahmat-Samii Y., Mittra R. *Electromagnetic Penetration through Apertures in Conducting Surfaces.* // IEEE Trans. Antennas Propagation, vol. AP-26, №1, 1978, P.82-93.
- [4] Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. *Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции).* – М.: ИПРЖР, 1996. – 176 с.

- [5] Плещинский И.Н., Плещинский Н.Б. *Интегральные уравнения задачи сопряжения полукрытых диэлектрических волноводов* // Изв. вузов. Матем. – 2007. – №5. – С.63-80.
- [6] Плещинский Н.Б., Тумаков Д.Н. *Метод частичных областей для скалярных координатных задач дифракции электромагнитных волн в классах обобщенных функций* // Препринт ПМФ-2000-01. Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 2000. – 50 с.
- [7] Плещинский Н.Б. *Уравнение Гельмгольца в полуплоскости и скалярные задачи дифракции электромагнитных волн на плоских металлических экранах* // Препринт ПМФ-03-02. Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 2003. – 34 с.
- [8] Плещинский Н. Б. *Модели и методы волновой электродинамики*. Казань, Изд-во КГУ: 2008. – 105 с.
- [9] Бойков И.В., Добрынина Н.Ф. *Приближенные методы вычисления интегралов Адамара: Учебное пособие*. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2007. – 108 с.
- [10] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления. (В 3-х томах). Т.3.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 662 с.
- [11] Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям*. – М: Наука, 1979. – 832 с.

## СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕАЛЬНЫХ ОСЦИЛЛОГРАММ В СИСТЕМЕ МАТЛАВ

Ф.А. Хотова<sup>1</sup>

Научный руководитель проф. В.П. Дьяконов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Смоленский государственный университет, г. Смоленск

<sup>2</sup>Смоленский государственный университет, г. Смоленск

---

<sup>1</sup>E-mail: -, <sup>2</sup>E-mail: -

### Введение

Основными задачами современной измерительной техники является исследование явлений и процессов окружающего нас мира и создаваемых на их основе различных устройств и систем, а также измерение их параметров с приемлемой погрешностью. Ныне такое исследование трудно представить без компьютерной обработки результатов исследования. Порою без нее получение достоверных измерений просто невозможно. Компьютеры позволяют управлять измерительными приборами и нередко задавать алгоритмы их работы.

Современные генераторы сигналов произвольной формы, цифровые осциллографы и анализаторы любого типа являются сложными измерительными приборами, которые могут работать с самым различным внешним оборудованием. Но, пожалуй, самым важным из внешних устройств является компьютер – как правило, персональный (ПК), а нередко и мобильный (ноутбук).

Особо важное значение имеет подключение к ПК сравнительно дешевых (бюджетных) приборов. Благодаря использованию мощного программного обеспечения, например, систем компьютерной математики, это резко расширяет их возможности: даже с помощью бюджетных осциллографов становится возможным анализ сложных сигналов и получение их спектров и даже спектрограмм.

### 1. Работа измерительных приборов с системой МАТЛАВ

Особенно большие возможности в обработке сигналов дают современные версии систем компьютерной математики (СКМ), математические и графические средства которых чрезвычайно разнообразны и обширны. К таким СКМ относятся Mathcad, MATLAB и др. Но, к сожалению, поддержка формата файлов .CSV, используемого в осциллографах TDS 1000B/2000B, этими системами прямо не обеспечивается. Кроме того, желательна непосредственная работа с осциллографами СКМ, без идентификации и активизации осциллографов указанными выше программами и без промежуточного преобразования данных в файлы. Все это обеспечивает пакет расширения Instrument Control Toolbox системы MATLAB, введенный в ее последние версии. При этом обеспечивается поддержка виртуальных инструментов стандартной архитектуры VISA (Virtual Instrument Standard Architecture).

Ниже предполагается, что осциллограф серии TDS1000B/2000B подключен кабелем к порту USB и на ПК установлена СКМ MATLAB с пакетом расширения Instrument Control Toolbox. Практически использовалась версия СКМ MATLAB R2009b. Должна быть установлена и программа VISATek. Пакет расширения Instrument Control Toolbox предоставляет для разработки программ стыковки осциллографа с системой MATLAB следующие основные функции:

- instrhwinfo – возвращает информацию о подключенном к ПК устройстве;

- `visa` – конструирование VISA-объекта;
- `foren` – подключение VISA-объекта к прибору;
- `query` – запись или чтение форматированных данных с прибора;
- `fprintf` – запись текста в прибор;
- `fclose` – отключает связь с прибором;
- `binblockread` – чтение поблочно данных с прибора.

Для детального знакомства с каждой из этих функций достаточно в командном окне MATLAB исполнить команду `» insthelp name` Здесь `name` – имя функции. Перед проектированием программ надо убедиться в том, что на ПК установлена программа TekVISA. Для этого надо воспользоваться следующей командой:

```
» tekvisainfo=instrhwinfo('visa','tek')
tekvisainfo =
AdaptorDllName: [1x67 char]
AdaptorDllVersion: 'Version 2.4.1'
AdaptorName: 'TEK'
AvailableChassis: []
AvailableSerialPorts: 'ASRL1'
InstalledBoardIds: []
ObjectConstructorName: 'visa('tek', 'ASRL1::INSTR');'
SerialPorts: 'ASRL1'
VendorDllName: 'visa32.dll'
VendorDriverDescription: 'Tektronix VISA Driver'
VendorDriverVersion: 3
```

Эта информация показывает на то, что изначально предполагается работа прибора с COM-портом ASRL1. Чтобы работать с портом USB, надо создать программу на языке системы MATLAB, определив при этом описание осциллографа. Для этого можно воспользоваться поставляемой с прибором программой OpenChoice.

Далее следует выяснить имя VISA-устройства, которым является применяемый осциллограф. Для этого надо открыть окно Preferences программы OpenChoice Desktop и активизировать (мышью) кнопку VISA. Появится окно OpenChoice Instrument Manager со списком доступных для регистрации приборов. Выделить осциллограф надо нажать кнопку Свойства. Это приведет к появлению окна TDS2024B с данными о приборе – рис.1. В нем указано имя VISA-устройства и обычное имя прибора.



Рис.1. Определение имени VISA-устройства для осциллографа TDS2024B

На этом потребность в программе OpenChoice завершается и ее можно закрыть и в дальнейшем использовать только тогда, когда нужны именно ее возможности – например, для получения на экране дисплея ПК точной копии экрана осциллографа. Все нужное для активизации осциллографа берет на себя программа, созданная в среде MATLAB. Она должна начинаться с создания объекта типа USB-VISA, исполнив команду:

```
» vu = visa('tek', 'USB0::1689::874::C010511::INSTR');
```

В ней первый параметр в прямых апострофах указывает на тип объекта – осциллограф фирмы Tektronix, а второй параметр – имя VISA-устройства, определение которого было описано выше. Это имя содержит указание на порт USB, идентификационные номера устройства и его серийный номер. Важно обеспечить полную точность указания этих данных. Выполнение команды должно пройти гладко и закончиться приглашением MATLAB к дальнейшей работе в виде знака «»». При этом происходит активизация VISA-объекта осциллографа. Исполнив команду `vu` можно получить данные о созданном объекте.

Для детального знакомства с объектом `vu` можно использовать команды вызова окон инспектора объекта и обзора методов, используемых в этом программном объекте:

```
» inspect(vu);
» methodsview(vu);
```

Теперь создадим программу (М-файл) на языке системы MATLAB, которая обеспечивает активизацию осциллографа и передачу данных с памяти канала CH1 осциллографа в рабочую область (память) системы MATLAB с построением осциллограммы (см. рис.2) в графическом окне системы MATLAB.

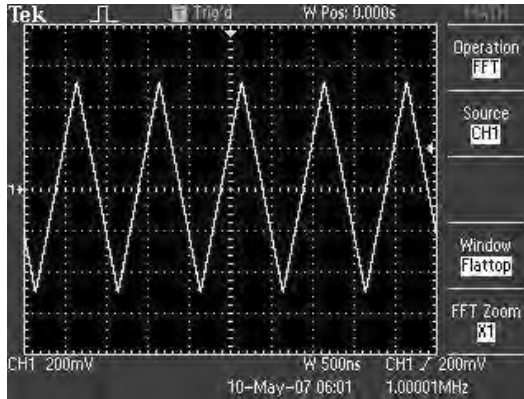


Рис.2. Реальная осциллограмма треугольного сигнала

Для создания программы используется редактор М-файлов системы MATLAB. По завершении ввода программы надо записать файл с заданным именем, например `osc.m`. Эта программа представлена ниже и использует команды и функции пакета расширения `Instrument Control Toolbox`:

```
%Программа обеспечивает передачу данных с осциллографов
%в рабочее пространство (память)системы MATLAB, создание
%массивов xdata и ydata данных осциллограммы канала CH1
%i определение параметров, нужных для построения графика
%осциллограммы в графическом окне системы MATLAB.
%Создание VISA-объекта
vu = visa('tek','USB0::1689::874::C010511::INSTR');
foren(vu); %Открытие объекта vu
%Считывание данных с канала CH1 и определение длины записи
id=query(vu,'*IDN?'); fprintf(vu,'DATA:SOURCE CH1');

L=query(vu,'HORIZONTAL:RECORDLENGTH?', '%s_n', '%d');
fclose(vu); %Закрытие объекта
vu.InputBufferSize = L; %Задание длины входного буфера
foren(vu) %Открытие объекта vu
%Считывание данных построения осциллограмм
fprintf(vu, 'CURVE?') data=binblockread(vu,'schar');
ymult = str2num(query(vu,'WFMP:YMULT?')); %Масштаб CH1
yoff = str2num(query(vu,'WFMP:YOFF?')); %Сдвиг CH1
xmult = str2num(query(vu,'WFMP:XINCR?')); %Масштаб по оси X
xoff = str2num(query(vu,'WFMP:PT_OFF?')); %Сдвиг по оси X
xzero = str2num(query(vu,'WFMP:XZERO?')); %Нуль на оси X
%Реконструкция данных для построения графики осциллограммы
ydata = ymult*(data - yoff); %Координаты точек по оси Y
xdata = xmult*((0:length(data)-1)-xoff)+xzero; %то же по оси X
%Построение осциллограммы в графическом окне MATLAB
plot(xdata,ydata) title('Scaled Waveform Data');ylabel('Amplitude
(V)'); xlabel('Time (s)')
fclose(vu) %Закрытие объекта vu
Fs = 1/xmult; %Вычисление частоты отсчетов
NFFT = 1024; %Задание числа гармоник FFT
```

При исполнении данной программы (командой `osc` в окне командного режима MATLAB) осциллограф активизируется и создается ряд массивов, которые видны в окне рабочего пространства системы MATLAB, которое показано на рис. 3 слева. Справа виден график, построенный по полученным от осциллографа данным. Сравнение его с реальной осциллограммой (рис. 2) показывает на их полную идентичность. Из массивов наиболее

важными являются *ydata* (значения координат точек осциллограмм по вертикали) и *xdata* (координаты точек по горизонтали). Важны также значения переменных масштаба и смещения по вертикальной и горизонтальной осям, положения нуля на горизонтальной оси, частота отсчетов  $F_s$  и число гармоник  $NFFT$ . Они обеспечивают реконструкция полученных от осциллографа данных, что и позволяет строить рисунок осциллограммы в графическом окне MATLAB.

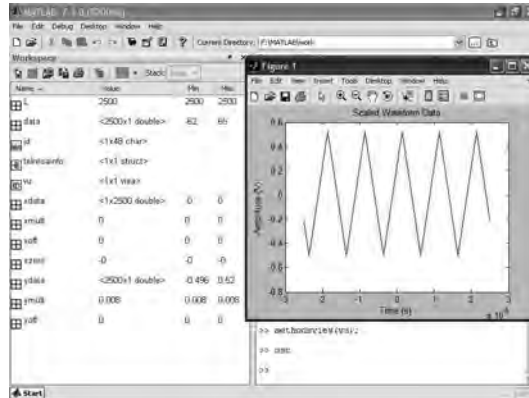


Рис.3. Данные и график осциллограммы в системе MATLAB

Вполне возможно считывание данных автоматических измерений осциллографа. Например, для считывания двойной амплитуды сигнала, представленного осциллограммой, перед последней строкой приведенной выше программы достаточно вставить фрагмент:

```
%Считывание данных измерения - двойной амплитуды
fprintf(vu, 'MEASU:IMM:SOU CH1'); fprintf(vu, 'MEASU:IMM:TYP PK2');
pk2pk = query(vu, 'MEASU:IMM:VAL?') %Тогда исполнение команды osc
%даст вывод значения двойной амплитуды:
» osc
pk2pk = 1.0320000648E0
```

В данном случае на вход осциллографа был подан синусоидальный сигнал от генератора AFG3101 с двойной амплитудой 1 В.

## 2. Спектральный анализ осциллограмм в MATLAB

С полученными от осциллографа данными можно выполнять любые операции, которые предусмотрены в системе MATLAB и в десятках пакетов расширения этой мощной системы компьютерной математики. Покажем это на весьма важных примерах проведения спектрального анализа полученной осциллограммы различными методами, которые не реализованы в самом приборе, и позволяют расширить его возможности.

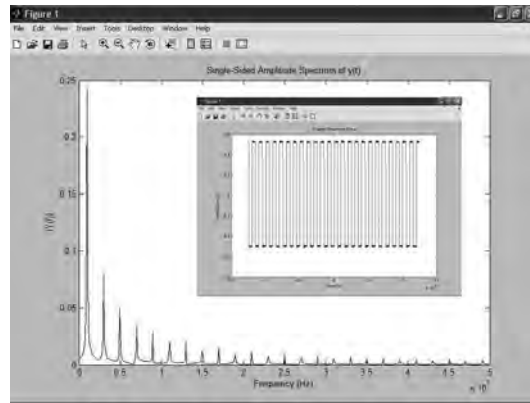
К примеру, осциллографы TDS1000B/2000B не предусматривают возможность проведения спектрального анализа в линейном масштабе (задан только логарифмический). Ниже представлена программа (М-файл) *spec\_1* выполняющая вычисление и построение графика спектра с линейным масштабом для сигнала, отсчеты которого хранятся в векторе *ydata*:

```
%Вычисление и построение спектра в линейном масштабе
Y = fft(ydata,NFFT)/L; %Задание БПФ
f = Fs/2.*linspace(0,1,NFFT/2); %Созд. вектора частот
plot(f,2*abs(Y(1:NFFT/2))) %Построение графика спектра
title('Single-Sided Amplitude Spectrum of y(t)') xlabel('Frequency
(Hz)') ylabel('Y(f)|')

```

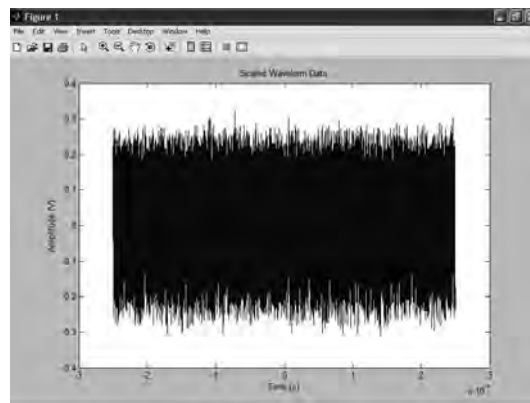
Для проведения спектрального анализа сигнала, осциллограмма которого имеется на экране осциллографа, надо вначале исполнить команду *osc* (данные от осциллографа вводятся в MATLAB) и после просмотра графика сигнала исполнить команду *sec\_1*. График будет заменен спектрограммой.

На рис. 4 показан спектр прямоугольных импульсов. Он четко представляет гармоники спектра. В частности, отчетливо видно, что спектр имеет только нечетные гармоники, амплитуда которых убывает как  $1/k$ , где  $k$  – номер гармоники. Это полностью соответствует теоретическим представлениям о спектре меандра. Спектр характеризуется очень малым уровнем шума.



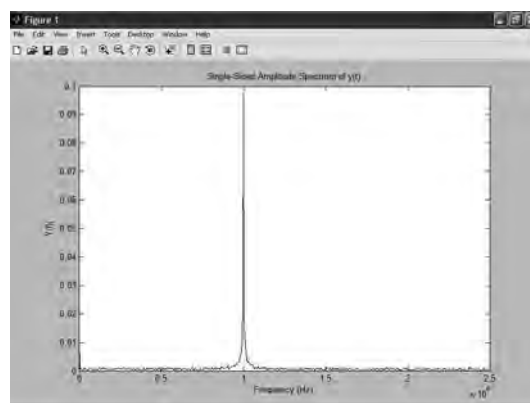
**Рис.4.** Спектр прямоугольного импульса (окно внутри)

На рис. 5. показана осциллограмма синусоидального сигнала с частотой 1 МГц, засоренная шумом (сигнал получен также от генератора AFG3101). Масштаб по горизонтали выбран так, что осциллограмма выглядит просто как шумовая дорожка – никаких признаков наличия синусоидального сигнала не наблюдается.



**Рис.5.** Осциллограмма зашумленной синусоиды при большой длительности развертки)

На рис. 6 показан спектр сигнала, который показан на рис. 5. Весьма отчетливо видна единственная спектральная линия с пиком на частоте 1 МГц. Таким образом, в данном случае отчетливо выделен сигнал синусоидальной формы. О его синусоидальности говорит практически полное отсутствие других гармоник.



**Рис.6.** Осциллограмма сигнала, показанного на рис. 5.

После того, как данные сигнала осциллографа помещены в рабочее пространство (память) системы МАТЛАВ командой `osc`, над ними можно проводить операции как с помощью программных модулей (см. примеры выше), так и командами, вводимыми в командном окне. Например, следующие команды обеспечивают получение спектрограммы (периодограммы) с окном Блэкмана-Харриса:

```
» w = blackmanharris(2500);
```

```
» periodogram(ydata,w,2500, Fs);
```

Для прямоугольного импульса с частотой 1 МГц и коэффициентом заполнения 5% периодограмма показана на рис. 7. В данном случае вычисляется спектр мощности сигнала в логарифмическом масштабе, что дает очень широкий динамический диапазон периодограммы, в который входят и шумовые компоненты. Окно Блэкмана-Харриса эффективно выделяет гармоники спектра и подавляет шумовые компоненты. Уровень собственных боковых лепестков у этого окна ослаблен более чем на 100 дБ.

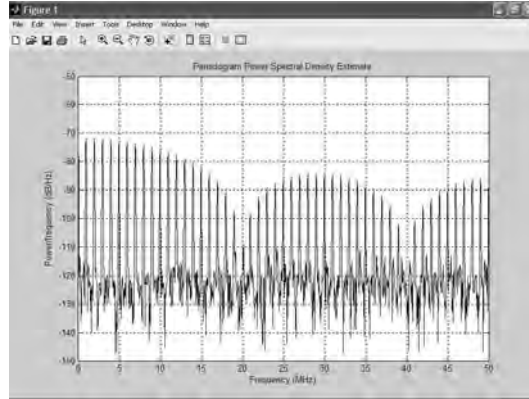


Рис.7. MATLAB-периодограмма прямоугольного импульса

### 3. Оценка в MATLAB спектра реальных сигналов в виде пачек

Фурье-анализ сыграл выдающуюся роль в начале применения электросвязи и радиосвязи, в устройствах которых широко использовались синусоидальные сигналы с медленным изменением их параметров. Но уже радиолокация, использующая импульсные сигналы в виде пачек, одной из первых выявила несовершенство спектрального анализа на основе Фурье-преобразований. Пачка сигналов даже простой формы до неузнаваемости меняет спектр исходного сигнала, из которого она вырезана.

Для оценки таких сигналов был предложен метод короткого оконного Фурье-анализа (иногда его называют коротким или кратковременным FFT). Его суть в том, что используется окно не во всю длину осциллограммы, а намного более короткое. Вычисляются спектры кусков сигнала - при перемещении окна по осциллограмме от ее начала к ее концу. Таким образом, появляется возможность построения общего спектра в системе трех координат: время-частота-амплитуда. Амплитуда обычно задается цветом прямоугольника на плоскости время – частота (номер окна). Полученная графическая зависимость называется спектрограммой. Редко используются трехмерные графики таких спектров.

В MATLAB с пакетом расширения Signal Processing Toolbox есть две почти равноценные функции построения спектрограмм – `specgram` и `spectrogram`. Вторая функция была введена позже, но современные версии MATLAB поддерживают обе функции.

На рис. 8. приведен пример применения функции `specgram(ydata, 20,Fs)` для построения спектрограммы сигнала в виде пачки импульсов. На ней внизу отчетливо видны все четыре основания пиков сигнала, начало и конец сигнала (правда, с разрешением до размера окон). Число окон тут задано явно – 20. Время дано реальное, а частота выведена в нормированном виде. Опытный взгляд улавливает даже намек на линейно нарастающий и спадающий характер исходного сигнала.

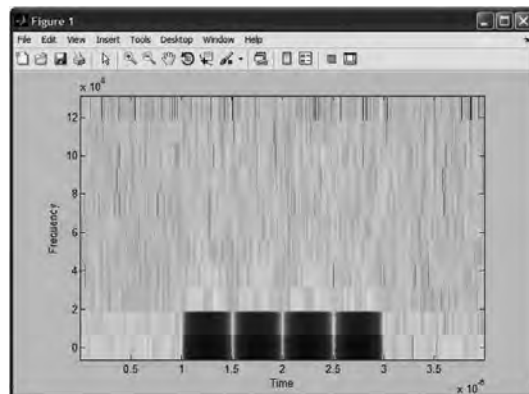


Рис.8. Спектрограмма сигнала в виде пачки импульсов



Ахиллесовой пятой цифровых осциллографов стало наблюдение модулированных высокочастотных сигналов. Они имеют очень длинную линию, для представления которой необходимо очень большое число точек. Кроме того, при просмотре такого сигнала затруднена точная синхронизация, наблюдается наложение точек и стробоскопический эффект. Из осциллограммы (рис. 9), к примеру, нельзя сделать даже грубый вывод о виде модулирующего сигнала, его форме и частоте. Хотя осциллограмма задана 10000 точек.

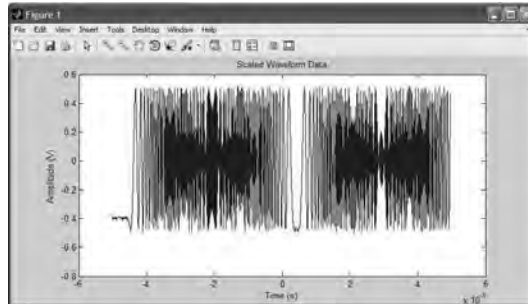


Рис.9. Частотно-модулированный сигнал

Спектрограмма такого сигнала (рис. 10), полученная при выполнении команды `specgram(ydata,50,Fs)`, позволяет получить эти данные с конечным разрешением, зависящим от числа окон и их размера. Если не указан параметр  $F_s$ , то частотная и временная шкалы задаются безразмерными (нормированными). Отчетливо виден модулирующий сигнал с частотной модуляцией удается разглядеть только при большой девиации частоты (в нашем примере из 50).

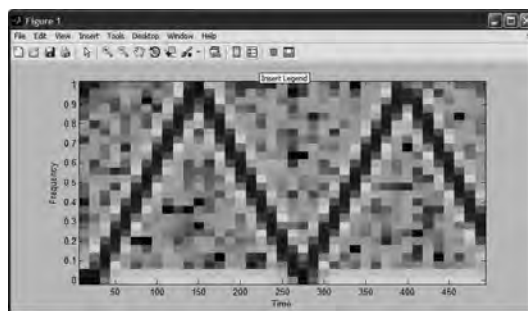


Рис.10. Спектрограмма частотно-модулированного сигнала

Спектрограмма (рис. 10) позволяет отчетливо наблюдать пилообразный характер модулирующего закона частотной модуляции. Специальное средство `specgramdemo` служит для демонстрации возможностей спектрограмм на готовых примерах. Однако при его запуске командой `specgramdemo(ydata,Fs)` можно строить спектрограммы реальных сигналов, вектор `ydata` которых и частота дискретизации  $F_s$  которых создаются программой `osc` – см. рис. 11. Перемещаемое перекрестие позволяет оценить частоту и время в любой точке спектрограммы, а также уровень спектральной плотности.

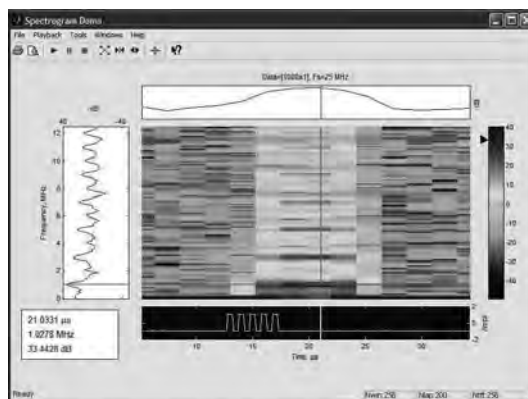


Рис.11. Просмотр спектрограммы пачки из пяти прямоугольных импульсов с помощью инструмента

Спектрограмма на рис. 11 в общем выделяет пачку, но назвать такое выделение четким нельзя: она выглядит достаточно смазанной из-за явно малого числа окон, используемых при быстром оконном Фурье-анализе. Описанные примеры – лишь небольшая часть того полезного, интересного и порой необычного, что дает технология совместного применения современных осциллографов с СКМ. При использовании осциллографов с открытой архитектурой (на базе системной платы стандартного ПК) СКМ можно устанавливать на встроенный жесткий диск таких осциллографов. В ближайшее время можно ожидать дальнейшего встраивания средств СКМ в аппаратные решения цифровых осциллографов, что означает уже полную их интеграцию с СКМ.

## Литература

- [1] В.П. Дьяконов, Ф.А. Хотова. Компьютерная математика в измерениях. Монография. Смоленск, ВА ПВО ВС РФ, 2010. – 238 с.
- [2] В. П. Дьяконов. MATLAB – новые возможности в технологии осциллографии. Компоненты и технологии, 2009, № 10.
- [3] В. П. Дьяконов. Математический и спектральный анализ в MATLAB реальных осциллограмм. Контрольно-измерительные приборы и системы, 2010, № 1.
- [4] В. П. Дьяконов. Компьютерная математика в измерительной технике. Контрольно-измерительные приборы и системы, 2009, № 5, 6.

### РАЗРАБОТКА КОМПЬЮТЕРНОЙ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ О КАЧЕНИИ ШАРА СРЕДСТВАМИ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE

В.В. Черкасова<sup>1</sup>

Научный руководитель проф. О.В. Мантуров<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Орловский государственный университет, г. Орел, Россия

<sup>2</sup>Московский государственный (областной) педагогический университет

<sup>1</sup>E-mail: cher\_vl@mail.ru, <sup>2</sup>E-mail: ovmanturov@yandex.ru

#### Введение

Задача о качении шара по поверхности относится к задачам механики неголономных систем. Однако при рассмотрении совместно с качением шара движения жестко закрепленного с ним репера задача приобретает определенный геометрический смысл и может использоваться на практике для предварительной оценки основных геометрических параметров поверхности качения.

Пусть  $S$  – поверхность, заданная параметрически уравнениями  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , где  $u, v$  – координаты на поверхности. По  $S$  катится шар радиуса  $R$  с жестко прикрепленным к нему репером ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ). Шар катится без проскальзывания вдоль кривой  $\gamma: u = u(t), v = v(t)$ , причем  $t \in [a, b]$ . В конце пути репер примет свое новое положение относительно некоторой неподвижной системы координат  $Oxyz$ . Вычислите матрицу перехода от начального положения репера к конечному.

Решение задачи будет строиться на базе мультипликативных интегралов, а разработанная компьютерная модель позволит визуализировать качение по поверхности, заданной параметрически.

#### Построение математической модели на основе положений инфинитезимального исчисления Вольтерра

По условию задачи шар катится по поверхности без проскальзывания, то есть в точке касания шара и поверхности  $S$  в любой момент качения скорость равна нулю. Матрицу перехода от начального положения репера к конечному обозначим через  $Y$ . В работе [4] найдена матрица перехода для случая, когда поверхность задана уравнением  $z = f(x, y)$ . Искомая матрица  $Y$  представляет собой криволинейный мультипликативный интеграл (иначе, связность):

$$Y = \int_{\gamma} E + \Gamma_1^* dx + \Gamma_2^* dy = \int_{\gamma} E + \begin{pmatrix} 0 & -A_2 & B_1 & 0 \\ A_2 & 0 & C & 0 \\ -B_1 & -C & 0 & 0 \\ 1 & 0 & f'_x & 0 \end{pmatrix} dx + \begin{pmatrix} 0 & A_1 & C & 0 \\ -A_1 & 0 & B_2 & 0 \\ -C & -B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & f'_y & 0 \end{pmatrix} dy, \quad (1)$$

где

$$C = \frac{f'_x f'_y}{H(x, y)}, H(x, y) = R \sqrt{(f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2 + 1},$$

$$A_1 = \frac{f'_x}{H(x, y)}, A_2 = \frac{f'_y}{H(x, y)}, B_1 = \frac{(f'_x)^2 + 1}{H(x, y)}, B_2 = \frac{(f'_y)^2 + 1}{H(x, y)}.$$

### Компьютерная модель задачи

Применение современных систем компьютерной математики позволяет не только визуализировать математические модели физических процессов, но и с заданной степенью точности давать оценку основных характеристик.

С помощью системы компьютерной математики Maple построена компьютерная модель, позволяющая визуализировать качение шара с закрепленным в его центре репером по поверхности  $S$ .

Модель реализуется в форме пользовательской библиотеки процедур (AdaptSphere). Условно их можно разбить на три группы:

1. Процедуры-функции, обеспечивающие аналитическое и графическое представление поверхности качения.
2. Процедуры, задающие шар и адаптированный репер, связанные с кривой качения.
3. Процедуры, компанующие основной кадр анимации и визуализирующие задачу.

В первую группу входят функции *Surface*, *GSurface*, *Curve*, *GCurve*, *GCoordPar*.

Процедура *Surface* позволяет представить всю информацию о поверхности в виде списка.

*Основные параметры*:  $r$ -переменная-список, содержащая параметрические уравнения поверхности,  $u, v$  - параметры, от которых зависит поверхность.

*Локальные переменные*:  $R, U, V$  - временные переменные.

```
> AdaptSphere[Surface] := proc(r, u, v) local R, U, V;
> R := (U, V) -> subs(u=U, v=V, r);
> R(u, v): end proc;
```

Этот метод подробно рассмотрен в работе [2]. Процедура *GSurface* позволяет построить график поверхности с заданными параметрами:  $r$  - переменная-список, содержащая параметрические уравнения поверхности,  $u, v$  - параметры, от которых зависит  $r, x, y$  - пределы изменения параметров  $u$  и  $v$  соответственно,  $c$ -цвет поверхности.

*Локальные переменные*:  $R, U, V$ -временные переменные.

```
> AdaptSphere[GSurface] := proc(r, u, v, x, y, c) local R, U, V;
> R := (U, V) -> subs(u=U, v=V, r);
> plot3d(R(u, v), u=x[1]..x[2], v=y[1]..y[2], style=WIREFRAME, color=c,
scaling=CONSTRAINED): end proc;
```

Например, в результате вызова процедуры

```
> GSurface([2*u*cosh(v), 6*sinh(v), 1/2*u*u], u, v, [-2*Pi, 2*Pi], [-Pi/2, Pi/2], black);
```

получим изображение гиперболического параболоида. По условию задачи качение шара по поверхности осуществляется вдоль некоторой кривой, принадлежащей этой поверхности. Следовательно необходимо разработать Maple-процедуру, позволяющую построить кривую на заданной поверхности. Процедура *Curve* извлекает информацию о кривой и представляет ее в виде списка, а *GCurve* программирует ее графический образ.

```
> AdaptSphere[Curve] := proc(r, u, v, rho, t) local R, U, V, RHO, T;
> R := (U, V) -> simplify(subs(u=U, v=V, r));
> RHO := (T) -> simplify(subs(t=T, rho));
> subs({u=RHO(t)[1], v=RHO(t)[2]}, R(u, v)): end proc;
```

В частном случае, когда шар катится вдоль бесконечно малого параллелограмма, значение криволинейного мультипликативного интеграла (1) может быть вычислено по формуле:

$$\int_{\gamma} E + P(x, y)dx + Q(x, y)dy = E + K\sigma + o(\sigma),$$

где  $K = Q_x - P_y + [Q, P]$ ,  $[Q, P] = QP - PQ$  - коммутатор,  $\sigma$  - площадь поверхности, ограниченной контуром  $\gamma$ ,  $o(\sigma)$  - бесконечно малые величины более высокого порядка малости, чем  $\sigma$ .

Например, если поверхность  $S$  задана уравнением  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ , а кривая  $\gamma$  - бесконечно малый прямоугольник, то матрица перехода находится по формуле:

$$Y = E + (K_{\Gamma} \cdot (k_g)^2 \cdot M(x, y) + k_g \cdot \frac{1}{H(x, y)^2} N(x, y))\sigma + o(\sigma),$$

где

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -2x^2 - 2y^2 & y(H - H^3 + 4Hx + ax^2) \\ 2x^2 - 2y^2 & 0 & Hx(-1 + H^2 - 8y^2) \\ H(x(1 - 2y)^2 - y) & (H^3 - 4xy)(x - y) & 0 \end{pmatrix},$$

$$N(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 + 4x^2 + 4y^2 & 8x^2y - 2y(1 + 4y^2) \\ -1 - 4x^2 - 4y^2 & 0 & -2x(1 + 4x^2) + 8xy^2 \\ -8x^2y + 2y(1 + 4y^2) & 2x(1 + 4x^2) - 8xy^2 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $k_g = R$ ,  $R$  – радиус шара,  $K_\Gamma$  – гауссова кривизна поверхности  $S$ ,  $\sigma$  – площадь поверхности, ограниченной контуром  $\gamma$ ,  $o(\sigma)$  – бесконечно малые величины более высокого порядка малости, чем  $\sigma$ .

Задать параллелограмм на поверхности можно с помощью процедуры:

```
>AdaptSphere[Cell_Surface]:=proc(r,u,v,M,s,t) local R,U,V,R1,T:
```

```
>R:=(U,V)->subs(u=U,v=V,r):
```

```
>R1:=(T)->subs({U=Cell(M,s,T)[1],V=Cell(M,s,T)[2]},R(U,V)):
```

```
>R1(t):end proc:
```

Графически координатный параллелограмм задается функцией:

```
>AdaptSphere[GCell_Surface]:= (r,u,v,M,s,t,c)->
```

```
plots[spacecurve](Cell_Surface(r,u,v,M,s,t), t=0..4, thickness=2, color=c)
```

Например, результатом команды

```
>GCell_Surface([u*cos(v),u*sin(v),u^2],u,v,[1,2],[2,1],t,red);
```

станет изображение координатного параллелограмма на поверхности эллиптического параболоида. Компьютерная модель «оснащенной сферы», в центре которой закреплен натуральный репер ( $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ ) и полюс сферы находится в одной из точек кривой качения, реализуется посредством maple-функции

```
>AdaptSphere[Sphere_Arm]:= (r,t,t0,a,c) ->
```

```
plots[display](GNatRepAdUp(r,t,t0,a,black,black,black),VB_Circle(r,t,t0,a,red),
```

```
VN_Circle(r,t,t0,a,red),Sphere_Ad(r,t,t0,a,c))
```

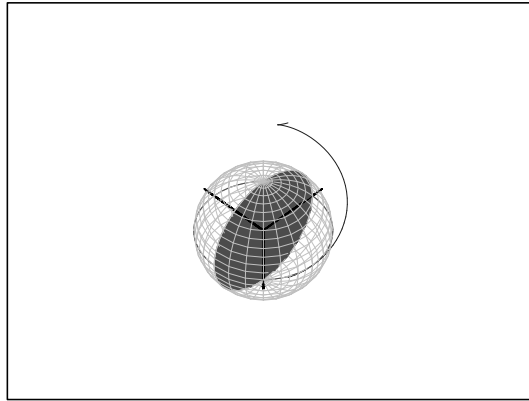


Рис.1. «Оснащенная» сфера, полюс которой находится на кривой качения

Однако, для ее создания необходимо прописать ряд дополнительных процедур. Сначала запишем процедуры и функции, описывающие основные операции над векторами. Пусть  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  – векторы, тогда процедура  $comb\_vec(a, b, \mu, \nu)$  – находит линейную комбинацию двух векторов со множителями  $\mu$  и  $\nu$ , ее листинг

```
>AdaptSphere[comb_vec]:=proc(a,b,mu,nu) local N,i:
```

```
>N:=nops(a):[seq(mu*a[i]+nu*b[i],i=1..N)]: end proc:
```

Процедура

```
>AdaptSphere[scal_prod]:=proc(a,b) local N,i:
```

```
>N:=nops(a):simplify(sum(a[i]*b[i],i=1..N)): end proc:
```

вычисляет скалярное произведение векторов.

Функции  $vec\_prod$  и  $comb\_prod$  позволяют найти векторное и комбинированное произведения.

```
>AdaptSphere[vec_prod]:= (a,b)->
```

```
simplify([a[2]*b[3]-a[3]*b[2],a[3]*b[1]-a[1]*b[3],a[1]*b[2]-a[2]*b[1]])
```

```
>AdaptSphere[comb_prod]:= (a,b,c)->simplify(scal_prod(a,vec_prod(b,c)))
```

Maple-функция  $vec\_mod$  вычисляет длину вектора

```
>AdaptSphere[vec_mod]:= (a)->sqrt(scal_prod(a,a)):
```

Процедура  $vec\_ort$  нормирует заданный вектор  $\mathbf{a}$ .

```
>AdaptSphere[vec_ort]:=proc(a) local aa:
```

```
>aa:=vec_mod(a): comb_vec(a,a,1/aa,0): end proc:
```

Пропишем процедуры нахождения первой, второй и третьей производных функции в точке. Процедура

```
>AdaptSphere[dif]:=proc(f,x,x0) local F,X,dF:
```

```
>F:=(X)->subs(x=X,f):
```

```
>dF:=(X)->diff(F(X),X):
```

```
>simplify(subs(X=x0,dF(X))):end proc:
```

вычисляет значение первой производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ . Процедура  $dif2$  находит вторую производную функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

```
>AdaptSphere[dif2]:=proc(f,x,x0) local F,X,dF:
>F:=(X)->subs(x=X,f):
>dF:=(X)->diff(F(X),X$2):
>simplify(subs(X=x0,dF(X))):end proc:
```

Соответственно, процедура  $dif3$  позволяет вычислить значение третьей производной  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

```
>AdaptSphere[dif3]:=proc(f,x,x0) local F,X,dF:
>F:=(X)->subs(x=X,f):
>dF:=(X)->diff(F(X),X$3):
>simplify(subs(X=x0,dF(X))):end proc:
```

Переменные  $F$ ,  $X$ ,  $dF$  – локальные переменные процедур  $dif$ ,  $dif2$ ,  $dif3$ . Отличие данных процедур от стандартных, имеющихся в СКМ Maple, заключается в том, что пользовательские процедуры находят значения производных функции  $f(x)$  в заданной точке. Это является более удобным при построении компьютерной модели "оснащенной" сферы.

Из курса дифференциальной геометрии известно, что с каждой точкой гладкой кривой  $r(t)$  в  $n$ - мерном евклидовом пространстве можно однозначно связать некоторый репер, который будет гладко меняться вдоль кривой при изменении натурального параметра  $s$ . Этот репер называется репером Френе. Если  $n = 3$ , то репер образуется векторами  $(v, n, b)$ , где  $v$  – вектор скорости,  $n$  – нормали,  $b$  – бинормали.

Процедура построения натурального репера кривой (трехгранника Френе) имеет вид:

```
>AdaptSphere[NatRep]:=proc(r,t,t0) local R,T,T1,dR,d2R,B,v,n,b:
>R:=(T)->subs(t=T,r):dR:=(T1)->diff(R(T),T,T1):d2R:=(T1)->diff2(R(T),T,T1):
>v:=(T)->vec_ort(dR(T)): B:=(T)->vec_prod(v(T),d2R(T)):
>b:=(T)->vec_ort(B(T)): n:=(T)->vec_prod(v(T),b(T)):
>[v(t0),n(t0),b(t0)]: end proc:
```

Процедура  $GNatRepAdUp$  задает графический образ натурального репера, перенесенного на заданный вектор.

```
>AdaptSphere[GNatRepAdUp]:=proc(r,t,t0,a,c1,c2,c3)
local M1,v,b,n,va, na,ba,M,gv,gb,gn,R,T,NR:
>R:=(T)->subs(t=T,r):
>M:=subs(t=t0,r):
>NR:=(t0)->NatRep(r,t,t0):
>v:=NR(t0)[1]:n:=NR(t0)[2]:b:=NR(t0)[3]:
>va:=linalg[matadd](v,v,1.2*a,0):
>na:=linalg[matadd](n,n,1.2*a,0):
>ba:=linalg[matadd](b,b,1.2*a,0):
>M1:=linalg[matadd](M,ba,1,1/1.2):
>gv:=strelka(M1,va,c1):
>gn:=strelka(M1,na,c2):
>gb:=strelka(M1,ba,c3):
>plots[display](gv,gn,gb): end proc:
```

При этом процедура  $strelka$  имеет вид:

```
>AdaptSphere[strelka]:=proc(M,q,c) local lq,hl,ll,bb,Mc,Qc:
>lq:=evalf(vec_mod(q)): hl:=evalf(lq*0.03): ll:=evalf(lq*0.1):
>Mc:=convert(M,Vector):Qc:=convert(q,Vector):
>bb := plots[arrow](Mc,Qc, width = hl, head_length=ll, color=c):
>plots[display](bb,scaling=CONSTRAINED): end proc:
```

Третья группа процедур позволяет скомпоновать нулевой кадр анимации. Процедура  $Cadr\_Arm\_Sphere$  задает нулевой кадр анимации качения шара по поверхности. Элементы анимации: поверхность, «оснащенная» сфера, кривая.

*Основные параметры:*  $r$  – параметрические уравнения поверхности,  $u, v$  – параметры, от которых зависит поверхность,  $uu, vv$  – списки начальных и конечных значений переменных  $u, v$ ,  $\rho$  – параметрические уравнения кривой,  $t$  – параметр кривой,  $t_0$  – начальное значение параметра  $t$ ,  $tt$  – пределы изменения параметра  $t$ ,  $a$  – радиус шара,  $c_1, c_2, c_3$  – цвета поверхности, сферы и кривой.

*Локальные переменные:*  $R, RHO$  – временные переменные,  $R1$  – функция, содержащая уравнение кривой на поверхности  $r(u, v)$ ,  $T, U, V$  – временные параметры,  $S, L, Sp$  – графические переменные, содержащие графики поверхности, кривой и "оснащенной" сферы соответственно.

```
AdaptSphere[Cadr_Arm_Sphere] := proc(r,u,v,uu,vv,rho,t,t0,tt,a,c1,c2,c3)
local R,R1,RHO,T,U,V,S,L,Sp:
>R:=(U,V)->subs(u=U,v=V,r): RHO:=(T)->subs(t=T,rho):
>R1:=(T)->subs({U=RHO(T)[1],V=RHO(T)[2]},R(U,V)):
```

```

>S:=plot3d(R(U,V),U=uu[1]..uu[2],V=vv[1]..vv[2],color=c1,style=WIREFRAME,
scaling=CONSTRAINED):
>L:=plots[spacecurve](R1(T),T=tt[1]..tt[2],thickness=2,
color=c2,numpoints=1000):
>Sp:=(t0)->Sphere_Arm(R1(T),T,t0,a,c3):
>plots[display](S,L,Sp(t0)): end proc:

```

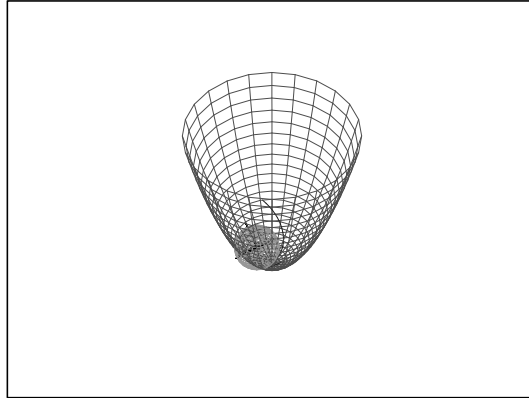


Рис.2. Нулевой кадр анимации

В итоге процедура, задающая анимацию качения шара по поверхности, имеет вид:

```

AdaptSphere[Cadr_Arm_Sphere_Anim]:=proc(r,u,v,uu,vv,rho,t,tt,a,c1,c2,c3,N)
local d,i,TT,CC:
>d:=evalf((tt[2]-tt[1])/N): TT:=(i)->tt[1]+i*d:
>CC:=(i)->Cadr_Arm_Sphere(r,u,v,uu,vv,rho,t,TT(i),tt,a,c1,c2,c3):
>plots[display](seq(CC(i),i=0..N),insequence=true): end proc:

```

где *основные параметры*:  $r$  – параметрические уравнения поверхности,  $u, v$  – параметры, от которых зависит поверхность,  $uu, vv$  – списки начальных и конечных значений переменных  $u, v$ ,  $\rho$  – параметрические уравнения кривой,  $t$  – параметр кривой,  $tt$  – пределы изменения параметра  $t$ ,  $a$  – радиус шара,  $c1, c2, c3$  – цвета поверхности, сферы и кривой,  $N$  – определяет количество кадров в анимации. *Локальные переменные*:  $d$  – длина  $n$ -ого частичного отрезка,  $i$  – переменная-счетчик,  $TT$  – переменная, определяющая нахождение сферы на кривой,  $CC$  –  $i$ -ый кадр анимации.

## Литература

- [1] Дьяконов, В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. /В.П. Дьяконов – М.: СОЛОН-Пресс, 2006. – 720 с.
- [2] Игнатьев, Ю.Г. Проблемы информационных технологий в математическом образовании: Учебное пособие.– Казань:ТГТУ, 2005. – 118 с.
- [3] Мищенко, А.С., Фоменко, А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. /А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко–М.: Издательство "Факториал Пресс", 2000. –448 с.
- [4] Черкасова, В.В. О связностях, индуцированных качением шара по поверхности. // Известия вузов. Математика, Казань, №11, 2009.–с.79-84.

## НОВЫЕ ПАКЕТЫ РАСШИРЕНИЯ ПО МОДЕЛИРОВАНИЮ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ В СИСТЕМЕ МАТЛАБ 2009В

О.А. Шапошникова<sup>1</sup>

Научный руководитель проф. В.П. Дьяконов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Смоленский государственный университет, г. Смоленск

<sup>2</sup>Смоленский государственный университет, г. Смоленск

<sup>1</sup>E-mail: alsu\_sam@mail.ru, <sup>2</sup>E-mail: -

Система MATLAB является одной из самых крупных и мощных систем компьютерной математики. Она, вместе с пакетом ситуационного блочного моделирования Simulink, и другими пакетами расширения заняла свое место среди множества систем компьютерной математики.

Одной из перспективных и массовых областей применения системы MATLAB является современная радиоэлектроника. MATLAB, благодаря ориентации на матричные вычисления, позволяет быстро и удобно осуществлять расчеты радиоэлектронных устройств, их проектирование и математическое моделирование. При этом речь идет не об элементарных вычислениях по готовым формулам, а о расчетах системного характера, требующих применения специальных алгоритмов и математических методов, нередко довольно сложных, трудоемких и мало известных.

В данной статье мы попытаемся описать средства моделирования электронных схем и устройств новых пакетов расширения Simscape и SimElectronics. Последний появился в новейших реализациях систем MATLAB R2008a+, MATLAB R2008b, MATLAB R2009a, b и имеет наиболее наглядные для специалистов в области радиоэлектроники обозначения блоков. Модели большинства полупроводниковых приборов у этого пакета основаны на моделях классической системы схемотехнического моделирования PSPICE. Но при этом добавляется присущая MATLAB мощная вычислительная среда и самые современные методы матричных операций, на которых основано блочное математическое имитационное моделирование.

Пакет расширения Simscape предназначен для моделирования механических, гидравлических, электрических и электронных устройств на основе применения моделей (блоков) по характеристикам и свойствам максимально приближенным к физическим моделям. Этот пакет впервые появился в реализации MATLAB R2007a и модернизировался по мере модернизации базовой системы MATLAB и основного пакета расширения Simulink.

Состав библиотеки пакета Simscape представлен на рис. 1.



Рис.1. Состав библиотеки блоков пакета расширения Simscape

Библиотека содержит следующие разделы:

- Foundation Library – подраздел основных блоков.
- SimDriveline – подраздел линейных приводов.
- SimElectronics – подраздел электроники (включен в MATLAB R2006b).
- SimHydraulics – подраздел гидравлики.
- SimMechanics – подраздел по мезанике.
- Utilities – подраздел утилит.

Подраздел основных блоков **Foundation Library** в свою очередь содержит следующие подразделы:

- Electrical – блоки электрических цепей и устройств.
- Hydraulic – блоки гидравлических устройств.
- Mechanical – блоки механических устройств.
- Physical Signals – блоки физических сигналов
- Thermal – блоки термических устройств.

Структура подраздела **Foundation Library** библиотеки пакета расширения Simscape показана на рис. 2.



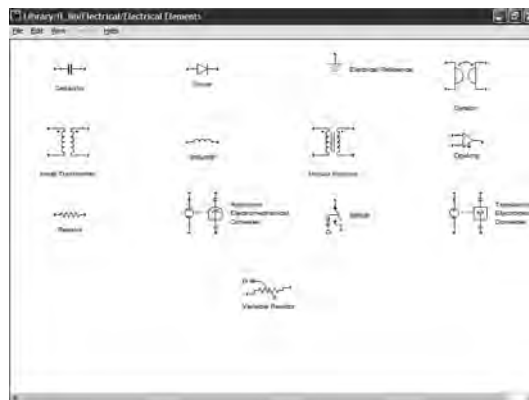
**Рис.2.** Структура подраздела *Foundation Library* библиотеки пакета расширения *Simscape*

В дальнейшем мы ограничимся описанием только тех разделов библиотеки и блоков, которые имеют отношение к тематике данной статьи.

Подраздел **Electrical** имеет подразделы:

- **Electrical Elements** – электрические элементы.
- **Electrical Sensors** – электрические чувствительные элемента.
- **Electrical Sources** – источники электрической энергии.

Состав подраздела **Electrical Elements** представлен на рис. 3 Назначение блоков этого подраздела очевидно. Отметим лишь, что в их состав входят такие массовые компоненты, как резистор, конденсатор, индуктивность, линейный и насыщающийся трансформаторы, диод, переменный резистор (точнее потенциометр) и др.



**Рис.3.** Состав блоков подраздела *Electrical Elements*

Следует заметить, что обозначение портов блоков в виде маленьких черных прямоугольников отличается от такового для блоков основного пакета расширения Simulink. Это указывает на особый статус блоков пакета расширения Simscape – его блоки могут соединяться друг с другом напрямую, но не могут подключаться к обычным блокам Simulink. Попытка последнего приводит к построению красного пунктирного соединения, которое диагностируется при пуске диаграммы как ошибочное. Для подключения блоков пакета Simscape к блокам Simulink надо использовать специальные блоки конверторов, которые входят в состав подраздела утилит – *Utilities*.

Блоки подраздела **Electrical Sensors** вырабатывают сигнал, пропорциональный току и напряжению. Блоки подраздела **Electrical Sources** содержат источники переменного (AC) и постоянного (DC) напряжений и токов – как неуправляемые, так и управляемые.

Подраздел **Physical Signals** содержит следующие подразделы:

- **Functions** – блоки функций.
- **Linear Operators** – блоки линейных операций.
- **Lookup Table** – блоки одномерных и двумерных таблиц.
- **Nonlinear Operators** – блоки нелинейных операций.
- **Sources** – источники сигналов.



Еще один общий подраздел библиотеки пакета Simscape – **Utilites**. Этот подраздел содержит конвертеры для подключения блоков Simulink к блокам Simscape (и наоборот), блок конфигурации решателя Solver Configurations, двунаправленного коннектора и порта субблоков пакета Simscape. Блок конфигурации решателя обязателен в любой диаграмме Simscape,

Доступ к библиотеке блоков пакета расширения **SimElectronics** возможен из окна вьюера библиотек пакета Simulink (рис. 1) или с помощью команды `elec_lib`, вводимой в окне командного режима работы MATLAB. Это выводит основное окно библиотеки блоков пакета SimElectronics.

Из основного окна библиотеки блоков пакета **SimElectronics** открывается доступ к следующим разделам библиотеки:

- **Actuators & Drivers** – блоки двигателей и электромоторов.
- **Integrated Circuits** – блоки интегральных операционных усилителей и логических схем.
- **Passive Devices** – блоки пассивных компонент.
- **Semiconductor Devices** – блоки полупроводниковых приборов.
- **Sensors** – блоки сенсорных устройств.
- **Sources** – блоки источников сигналов и электрической энергии.
- **Utilities** – блоки утилит.

Раздел библиотеки **Actuators & Drivers** содержит модели электродвигателей ряда типов и драйверов для них. Тут имеется также контроллер широтно-импульсной модуляции.

Окно раздела интегральных микросхем **Integrated Circuits** содержит всего два модуля операционных усилителей с конечной полосой частот и с конечным коэффициентом усиления. Они более близки к реальным операционным усилителям, чем модели в разделе **Electrical** пакета Simscape. Блок **Logic** открывает окно с 7 блоками основных логических схем класса CMOS (на комплементарных полевых транзисторах).

Раздел библиотеки пассивных компонентов содержит блоки предохранителя **Fuse**, реле **Relay**, терморезистора **Thermal Resistors**, трехобмоточный трансформатор **Three-Winding Mutual Inductor**, конденсатор переменной емкости **Variable Capacitor** и индуктор с переменной индуктивностью **Variable Inductor**.

Один из самых больших разделов – полупроводниковых устройств (**Semiconductor Devices**) содержит 9 блоков. Это диод, биполярные транзисторы р-п-р и п-р-п типа, полевые транзисторы с управляющим переходом и каналом р- и п-типа, полевые транзисторы со структурой МДП (MOS) и каналом р- и п-типа и оптрон. Все блоки имеют стандартное обозначение этих приборов, что делает диаграммы моделей похожими на принципиальные схемы электронных устройств. Это заметно повышает их наглядность.

Окно раздела **Semiconductor Devices** имеет блок **SPICE-Compatible Semiconductor**, активизация которого открывает окно с 7 моделями полупроводниковых приборов, модели которых подобны моделям их в классической системе схемотехнического моделирования PSPICE.

Раздел источников **Sources** содержит модели батарей химических элементов, солнечно батареи и источников **Supply Rail** положительной и отрицательной полярности. Раздел сенсорных устройств **Sensors** содержит блоки ряда устройств такого рода: светоизлучающего диода, фотодиода, термистора, термопары, кнопок и др. Они также имеют наглядные и очевидные обозначения.

Блок утилит содержит единственный блок **SPICE Environment Parameter**, определяющий параметры окружающей среды. Этот блок подключается обычно к земле или общему проводу моделируемой схемы.

Блок **SPICE-Compatible Sources** добавляет в библиотеку обширный набор блоков источников, совместимых с моделями системы PSPICE. Назначение источников вполне очевидно из их названий и обозначений.

Хочется отметить, что хотя моделирование электронных устройств вполне возможно описанными выше средствами, было бы полезным дополнение состава библиотек блоков новыми приборами, например S – диодами, туннельными диодами, лавинными транзисторами и др., а также новыми блоками интегральных микросхем, например блоком таймера, ждущего мультивибратора и т.д.

### Литература

1. Дьяконов В.П. Пакет моделирования электронных схем **SimElectronics** // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2009. Вып. 10. С.30-37.
2. Шапошникова О.Н. Библиотека **Sources** пакета моделирования **SimElectronics** // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2010. Вып. 11. С.94-100.

## МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

О.А. Широкова<sup>1</sup>Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, г.  
Казань<sup>1</sup>E-mail: Olga.Shirokova@ksu.ru

Неточность исходной информации в задачах теории фильтрации приводит к необходимости исследовать изменение решения при вариации исходных данных.

Применение методов возмущений дает возможность перейти от сложных краевых задач со свободными границами для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных к решению линейных задач в областях с известными границами.

Целью данной работы является численное исследование изменения решения плоских задач нелинейной фильтрации при изменении исходных данных. В данной работе методы возмущения используются в исследовании фильтрационных течений с проявлением начального градиента для задачи течения к скважине, расположенной внутри кругового контура питания. Сформулированы постановки трех задач такого течения для трех типов вариаций:

1. при задании малых возмущений параметров  $K$  и  $G$  (возмущение слабой неоднородностью)
2. при задании возмущения контура питания
3. при задании возмущения “контура скважины”

$\varphi$  В каждом из трех случаев сформулированы задачи для возмущения функции давления .

В первом случае получена задача Дирихле для уравнения Пуассона в кольце. Во втором и третьем случаях получены задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кольце.

В работе рассматриваются решения, как задачи Дирихле для уравнения Пуассона в кольце, так и задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кольце. Отметим, что решение первой задачи представлено в нескольких вариантах: в виде общего решения в рядах Фурье, в виде частного решения при задании малых возмущений параметров  $K$  и  $G$  в кольце в аналитическом виде.

ТЕНЗОРНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ПАКЕТЕ MAPLE ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА  
ЭЛЕКТРОВАКУУМНОЙ ПЛОСКОЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛНЫА.Г.Ширяев<sup>1</sup>Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатьев<sup>2</sup><sup>1</sup>Татарский Государственный Гуманитарно-Педагогический Университет,  
Казань<sup>2</sup>Татарский Государственный Гуманитарно-Педагогический Университет,  
Казань<sup>1</sup>E-mail: alexandr999@list.ru, <sup>2</sup>E-mail: ignatev\_yu@rambler.ru

**Аннотация.** Вычисляются тензорные соотношения и упрощаются уравнения Эйнштейна для электровакуумной плоской гравитационной волны в пакете Maple.

## 1. Электровакуумная плоская гравитационная волна

Электровакуумная плоская гравитационная волна задается метрикой [1]:

$$ds^2 = 2dudv - L(u)^2 e^{2\beta(u)} \operatorname{ch}(2\gamma(u)) dx_2^2 - L(u)^2 e^{-2\beta(u)} \operatorname{ch}(2\gamma(u)) dx_3^2 + 2L(u)^2 \operatorname{sh}(2\gamma(u)) dx_2 dx_3, \quad (1)$$

где  $\beta(u)$  и  $\gamma(u)$  - произвольные функции запаздывающего времени, амплитуды гравитационной волны;  $L(u)$  - фоновый фактор гравитационной волны. Зададим ковариантный метрический тензор в пакете Maple 13 для пространства-времени с координатами  $[v, u, x_2, x_3]$ , используя встроенную команду *create* в библиотеку *tensor*:

```
> g:= create([-1, -1], array(1 .. 4, 1 .. 4, symmetric, sparse, [(1, 1) = g[11](u),
(1, 2) = g[12](u), (3, 3) = g[33](u), (3, 4) = g[34](u), (4, 4) = g[44](u)]));
```

Исполнение команды задает тензор. Вычисляя контравариантный метрический тензор, а также частные производные первого и второго порядков, символы Кристоффеля I-го и II-го рода [1], тензор Риччи, Римана, Эйнштейна и скаляр Риччи [2].

## 2. Тензор элетромагнитного поля

Для вычисления тензора электромагнитного поля [2] зададим 4-векторный потенциал и создадим процедуру.

```
> A[i] = [0, phi(x_2,x_3), 0, psi(v,u)];
> F := proc (coords, A) local n, j, i, xx, l, Fik, X, S, M, T;
> n := nops(coords);
> X := [seq(l, l = 1 .. n)];
> xx := proc (j) options operator, arrow; op(j, coords) end proc;
> Fik := proc (k) options operator, arrow;
> [seq(diff(A[k], xx(i))-(diff(A[i], xx(k))), i = 1 .. n)]
> end proc;
> S := [seq(Fik(k), k = X)];
> M := convert(S, array);
> T := create([-1, -1], op(M))
> end proc:
```

Выполнение процедуры дает антисимметричный тензор электромагнитного поля. Относительно него вычислим контравариантный и смешанный тензоры электромагнитного поля.

## 3. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

Вычислим тензор энергии-импульса электромагнитного поля [2], используя процедуру:

```
> Tew := proc (coords, Te1, Te2, Re)
> local n, X, i, k, S0, S, M, Ew, r;
> n := nops(coords);
> X := [seq(r, r = 1 .. n)];
> S0 := proc (k) options operator, arrow;
> [seq((1/4)*(-get_compts(Te1)[i, k]+
+(1/4)*get_compts(Re)[i, k]*get_compts(Te2))/Pi, i = 1 .. n)]
> end proc;
> S := [seq(S0(k), k = X)];
> M := array(1 .. 4, 1 .. 4, [op(S)]);
> Ew := create([1, 1], op(M))
> end proc:
```

где  $Te1$  - произведение контравариантного и смешанного тензоров электромагнитного поля;  $Te2$  - произведение ковариантного и контравариантного тензоров электромагнитного поля,  $Re$  - контравариантный метрический тензор.

## 4. Уравнения Эйнштейна

Теперь можем перейти к выводу уравнений гравитационного поля. Уравнение Эйнштейна имеет вид:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik} \quad (2)$$

где  $R_{ik}$  - тензор Риччи,  $g_{ik}$  -метрический тензор,  $R$  - скаляр Риччи,  $T_{ik}$  - тензор энергии-импульса материи (включая электромагнитное поле) [2]. Создадим процедуру для задания уравнений Эйнштейна (2), с помощью построения линейной комбинации тензоров, используя команду *lin\_com* библиотеки *tensor*:

```
> Eqw_Ein_Method2:=proc(coords,Te1,Te2,Te3) local S0;
S0:=lin_com(1,Te1,-1/2,Te2,-8*Pi,Te3) end proc:
```

Упростим полученные уравнения. Из первого уравнения Эйнштейна следует:

$$\frac{-2e^{2\beta(u)} \cosh(2\gamma(u)) \frac{d\partial}{\partial v} \psi(v, u)^2}{L^2(u)} = 0,$$

Последнее соотношение выполняется лишь в случае, когда функция  $\psi(v, u)$  зависит только от  $u$ :

$$\psi(v, u) = \psi(u). \quad (3)$$

Подставляя (3) в оставшиеся уравнения и упрощая их, получим:

$$\begin{aligned}
 & 2(L^2(u)(\frac{d}{dv}\beta(u))^2 \cosh(2\gamma(u))^2 + L^2(u)\frac{d}{du}L(u) + L^2(u)(\frac{d}{du}\gamma(u))^2 - e^{-2\beta(u)} \cosh(2\gamma(u))(\frac{\partial}{\partial x_2}\phi(x_2, x_3))^2 - \\
 & -2(\frac{\partial}{\partial x_2}\phi(x_2, x_3)) \sinh(2\gamma(u))\frac{\partial}{\partial x_3}\phi(x_2, x_3) + 2(\frac{\partial}{\partial x_2}\phi(x_2, x_3)) \sinh(2\gamma(u))(\frac{d}{du}\psi(u)) - \\
 & -e^{2\beta(u)} \cosh(2\gamma(u))(\frac{\partial}{\partial x_2}\phi(x_2, x_3))^2 + 2e^{2\beta(u)} \cosh(2\gamma(u))\frac{\partial}{\partial x_2}\phi(x_2, x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}\phi(x_2, x_3)\frac{d}{du}\psi(u) - \\
 & -e^{2\beta(u)} \cosh(2\gamma(u))(\frac{d}{du}\psi(u))^2)L^2(u) = 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

## 5. Первая пара уравнений Максвелла

Уравнения поля в нашем случае решаются относительно пяти неизвестных функций. Для полного определения поля зададим систему уравнений Максвелла [2], используя следующее:

> Eqw\_Maxsvell\_Sys1:=cov\_diff(K\_contr,Coord,Cf2):

где  $K\_contr$  - контравариантный тензор электромагнитного поля,  $Cf2$  - символы Кристоффеля второго порядка. Ковариантное дифференцирование дуального тензора тензору электромагнитного поля:

> Eqw\_Maxsvell\_Sys2:=cov\_diff(Kdual,Coord,Cf2):

задает вторую систему Максвелла [2]. Свертывая по двум последним индексам вторую систему, получим тождественно равный нулю вектор. Свертывая первую систему, делая замену (3), получим:

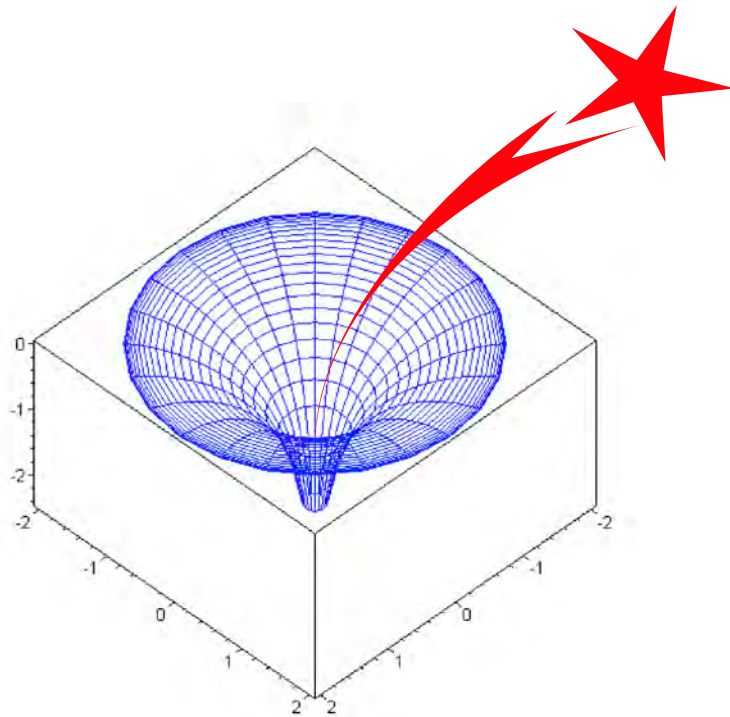
$$\frac{e^{-2\beta(u)} \cosh(2\gamma(u))\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\phi(x_2, x_3) + 2 \sinh(2\gamma(u))\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial x_2}\phi(x_2, x_3) + e^{2\beta(u)} \cosh(2\gamma(u))\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\phi(x_2, x_3)}{L^2(u)} = 0 \tag{5}$$

Таким образом, найдены основные тензорные величины для пространства плоской гравитационной волны электровакуума, на основе которых получены уравнения гравитационного поля (4) и системы Максвелла (5).

## Литература

- [1] Л.П.Эйзенхарт Риманова геометрия. М.: ГИИЛ, 1948.
- [2] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц Теоретическая физика Т. II. "Теория поля". - 8-е изд., стереот. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
- [3] А.Дж.Мак-Коннел *Введение в тензорный анализ*. Москва: ГИФМЛ, 1963.
- [4] П. К. Рашевский . *Риманова геометрия и тензорный анализ*, 5 изд., "УРСС", Москва, 2006.
- [5] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер. Гравитация 1 том, пер. с англ. Мир, Москва, 1977.
- [6] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. *Современная геометрия методы и приложения*. "Наука", Москва, 1979.

**ЧАСТЬ 2. ТРУДЫ СЕМИНАРА**  
**«Нелинейные поля и релятивистская  
статистика в теории гравитации и  
космологии»**



**ПЕРЕМЕННЫЙ КОСМОЛОГИЧЕСКИЙ ЧЛЕН В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ СО  
СКАЛЯРНЫМ ПОЛЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕЙЛЯ–КАРТАНА В ФОРМАЛИЗМЕ  
ВНЕШНИХ ФОРМ**

О.В. Бабурова<sup>1</sup>, К.Н. Липкин<sup>2</sup>, Б.Н. Фролов<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Московский педагогический государственный университет, Россия, Москва,

<sup>2</sup>Московский педагогический государственный университет, Россия, Москва,

<sup>3</sup>Московский педагогический государственный университет, Россия, Москва

<sup>1</sup>E-mail: babourova@orc.ru, <sup>2</sup>E-mail: lipan86@mail.ru, <sup>3</sup>E-mail:  
frolovbn@orc.ru

В [1] была развита Пуанкаре–Вейль калибровочная теория гравитации, которая индуцирует конформные преобразования геометрических величин в конформной теории гравитации со скалярным полем в формализме внешних форм: скалярного поля Дирака  $\beta(x)$ , кобазисных 1-форм  $\theta^a$ , локальной метрики  $g_{ab}$ , 1-формы связности  $\Gamma^a_b$ , 2-формы кручения  $T_a$ , 2-формы кривизны  $\mathcal{R}^a_b$ , 1-формы неметричности  $\mathcal{Q}_{ab}$  и 1-формы вектора Вейля  $\mathcal{Q} = g^{ab}\mathcal{Q}_{ab}$ .

Построен лагранжиан, инвариантный относительно конформных преобразований этих величин. Соответствующая лагранжева плотности имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & 2f_0 \left( (1/2)\beta^2 \mathcal{R}^{\alpha\beta} \wedge \eta_{\alpha\beta} - \beta^4 \Lambda_0 \eta + (1/4)\lambda \mathcal{R}^{\alpha}{}_{\alpha} \wedge * \mathcal{R}^{\beta}{}_{\beta} \right. \\ & + \beta^2 \left( \rho_1 T^{\alpha} \wedge * T_{\alpha} + \rho_2 (T^{\alpha} \wedge \theta_{\beta}) \wedge *(T^{\beta} \wedge \theta_{\alpha}) + \rho_3 (T^{\alpha} \wedge \theta_{\alpha}) \wedge *(T^{\beta} \wedge \theta_{\beta}) \right. \\ & \left. \left. + \xi \mathcal{Q} \wedge * \mathcal{Q} + q_1 \mathcal{Q}^{\alpha} \wedge * T_{\alpha} \right) + l_1 d\beta \wedge * d\beta + \beta d\beta \wedge (l_2 \theta^{\alpha} \wedge * T_{\alpha} + l_3 * \mathcal{Q}) \right) \\ & + \beta^4 \Lambda^{\alpha\beta} \wedge (\mathcal{Q}_{ab} - (1/4)g_{\alpha\beta} \mathcal{Q}). \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\eta$  – 4-форма объема, а  $\Lambda^{\alpha\beta}$  – 3-форма множителей Лагранжа.

В отсутствие материи получены уравнения гравитационного поля при помощи вариационного формализма первого порядка, варьируя лагранжеву плотность (1) по кобазисной 1-форме ( $\theta$  – уравнение), по 1-форме связности ( $\Gamma$  – уравнение), по скалярному полю ( $\beta$  – уравнение) и по множителям Лагранжа. Из этих уравнений выведено уравнение для скалярного поля  $\beta(t)$  на ранней стадии эволюции Вселенной и получено решение этого уравнения с быстро уменьшающимся со временем скалярным полем.

Слагаемое  $\beta^4 \Lambda_0$  в лагранжевой плотности (1) может быть интерпретировано как эффективная темная энергия (энергия вакуума). Тем самым получено быстрое уменьшение величины этой энергии на ранней стадии эволюции Вселенной.

Данная поисковая научно-исследовательская работа проведена в рамках реализации ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг.

## Литература

- [1] O. V. Babourova, B. N. Frolov, V. Ch. Zhukovsky, *Phys. Rev. D* **74**, 064012 (2006), gr-qc/0508088; *Theor. Math. Phys.* **157**(1), 1423 (2008); *Gravitation and Cosmology* **15**(1), 13 (2009)

## О ДВИЖЕНИИ ЧАСТИЦ С ИЗОСПИНОМ В ПОЛЕ НЕМИНИМАЛЬНОГО МОНОПОЛЯ ВУ-ЯНГА<sup>1</sup>

А.Б. Балакин<sup>1</sup>, Э.С. Пранцузова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Казанский (Приволжский) Федеральный Университет, Россия, Казань, <sup>2</sup>-

<sup>1</sup>E-mail: Alexander.Balakin@ksu.ru, <sup>2</sup>E-mail: -

<sup>1</sup>РАБОТА ВЫПОЛНЕНА ПРИ ПОДДЕРЖКЕ РФФИ (ГРАНТЫ N 08-02-00325-А, N 09-05-99015).

## Введение

В работе [1] представлено точное решение неминимальной модели Эйнштейна-Янга-Миллса, описывающее самогравитирующий монополю Ву-Янга с регулярной метрикой, а в работе [2] исследован неминимальный монополю Дирака - аналог этого решения в рамках модели Эйнштейна-Максвелла. Аналитическое и численное моделирование динамики фотонов в окрестности неминимального монополя Дирака выявило удивительные свойства траекторий этих частиц: наличие точек самопересечения, возврата и зон недоступности [2]. Для массивных частиц с изоспином движение характеризуется ещё более неожиданными нюансами, поскольку такие частицы взаимодействуют не только с гравитационным полем неминимального монополя, но и с его калибровочным полем магнитного типа. Мы предприняли попытку решения данной динамической задачи и в данном сообщении приводим результаты аналитических исследований; результаты компьютерного моделирования будут обсуждаться в отдельной работе.

## Эволюционные уравнения

Эволюционные уравнения в рассматриваемой модели представлены двумя связанными подсистемами. Первая подсистема - это уравнения Вонга: [3]

$$\frac{\hat{D}}{d\tau} I^{(a)} \equiv \frac{d}{d\tau} I^{(a)} + \mathcal{G} f_{(b)(c)}^{(a)} A_k^{(b)} I^{(c)} \frac{dx^k}{d\tau} = 0, \quad (1)$$

описывающие эволюцию изоспиновых переменных  $I^{(a)}$  с групповым (изоспиновым) индексом  $(a)$ , пробегающим три значения (1), (2), (3) в случае  $SU(2)$  симметрии, выбранной в данной модели [4]. Символом  $D$  обозначен ковариантный дифференциал;  $\tau$  - это параметр вдоль траектории;  $A_k^{(b)}$  - триплет четыре-векторов потенциала калибровочного поля (поля Янга-Миллса);  $f_{(b)(c)}^{(a)}$  - это структурные константы, которые для калибровочной группы  $SU(2)$  сводятся к символам Леви-Чивита  $f_{(a)(b)(c)} \equiv \varepsilon_{(a)(b)(c)}$ ;  $\mathcal{G}$  - это константа взаимодействия [4]. Вторая подсистема эволюционных уравнений

$$\frac{D}{d\tau} \left( \frac{dx^k}{d\tau} \right) \equiv \frac{d^2 x^k}{d\tau^2} + \Gamma_{jl}^k \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} = \frac{1}{m} \mathcal{F}^k \quad (2)$$

представляет собой уравнения движения частицы с массой  $m$  под действием силы Лоренцевского типа

$$\mathcal{F}^k \equiv \mathcal{G} I_{(a)} F_l^{k(a)} \frac{dx^l}{d\tau}, \quad (3)$$

в которой изоспиновые переменные играют роль зарядов, эволюционирующих со временем. Мы используем геометрические единицы, в которых  $c = 1$ .

## Ключевые уравнения модели

Пусть изоспиновая частица движется во внешнем поле, созданном неминимальным монополем Ву-Янга (см. [1]). В качестве потенциалов калибровочного поля мы используем точное решение уравнений Янга-Миллса

$$A_k^{(b)} = \delta_{(3)}^{(b)} \delta_k^\varphi A_\varphi^{(3)} = -\delta_{(3)}^{(b)} \delta_k^\varphi \frac{\nu}{\mathcal{G}} (1 - \cos \theta), \quad (4)$$

полученное в работе [1]. Тензор напряжённости поля Янга-Миллса имеет в этом случае только одну ненулевую компоненту:

$$F_{\theta\varphi}^{(3)} = -\frac{\nu}{\mathcal{G}} \sin \theta. \quad (5)$$

Калибровочные поля такого типа относятся к разряду полей с потенциалами параллельными в групповом пространстве; для плоско-волновых гравитационных полей такие полевые конфигурации исследовались, например, в работах [5, 6].

Точное решение неминимально расширенных уравнений гравитационного поля представлено метрикой [1]:

$$ds^2 = B(r) dt^2 - A(r) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (6)$$

где

$$B(r) = \frac{1}{A(r)} = N(r) = 1 + \frac{r^2 (\kappa - 4Mr)}{2(r^4 + \kappa q)}. \quad (7)$$

Параметр неминимальности  $q$ -величина положительная;  $M$ - асимптотическая масса монополя;  $\kappa$ - модифицированная гравитационная постоянная [1].

## Интегрирование ключевых уравнений

### Интегралы уравнений Вонга

Уравнения (1) допускают очевидный квадратичный интеграл

$$\frac{d}{d\tau}[I_{(a)}I^{(a)}] = 0 \Rightarrow \left(I^{(1)}\right)^2 + \left(I^{(2)}\right)^2 + \left(I^{(3)}\right)^2 = I^2 = const. \quad (8)$$

При  $(a) = (3)$  уравнение (1) с потенциалом (4) дает соотношение

$$\frac{d}{d\tau}I^{(3)} = 0 \Rightarrow I^{(3)}(\tau) = I^{(3)}(0) = I_{||} = const, \quad (9)$$

следовательно,  $I^{(3)}$  есть продольный интеграл движения изоспина. Уравнения для  $(a) = (1)$  и  $(a) = (2)$  могут быть переписаны в виде

$$\frac{d}{d\tau}I^{(1)} = \Omega(\tau) I^{(2)}, \quad \frac{d}{d\tau}I^{(2)} = -\Omega(\tau) I^{(1)}, \quad (10)$$

где

$$\Omega(\tau) \equiv \left[ \nu(\cos\theta - 1) \frac{d\varphi}{d\tau} \right]. \quad (11)$$

Формальное решение этих уравнений имеет вид

$$I^{(1)}(\tau) = I^{(1)}(0) \cos \Psi(\tau) + I^{(2)}(0) \sin \Psi(\tau), \quad (12)$$

$$I^{(2)}(\tau) = I^{(2)}(0) \cos \Psi(\tau) - I^{(1)}(0) \sin \Psi(\tau), \quad (13)$$

где

$$\Psi(\tau) \equiv \int_0^\tau \Omega(\tau') d\tau', \quad (14)$$

а начальные значения связаны соотношением

$$\left(I^{(1)}(0)\right)^2 + \left(I^{(2)}(0)\right)^2 = I^2 - I_{||}^2 \equiv I_{\perp}^2. \quad (15)$$

## Первые интегралы уравнений динамики

### Квадратичный интеграл движения

Поскольку четыре-вектор силы (3), действующей на массивную частицу, ортогонален четыре-вектору её скорости, имеет место соотношение:

$$\frac{d}{d\tau} \left[ g_{ik} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} \right] = 0 \Rightarrow g_{ik} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = 1. \quad (16)$$

Константа интегрирования выбрана единицей в силу условия нормировки четыре-вектора скорости. Далее мы используем классическую методику нахождения интегралов движения, изложенную в [7], применительно к новой задаче.

### Динамический масштаб времени

Уравнение (2) при  $k = t$  дает первый интеграл движения

$$\frac{d}{d\tau} \left[ B(r) \frac{dt}{d\tau} \right] = 0 \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{K}{B(r)}, \quad (17)$$

связывающий координатное время и собственное время частицы. В этом интеграле нет информации об изоспине частицы, а константа  $K$  обычно определяется из асимптотических условий.

### Азимутальный интеграл движения

Если положить  $k = \varphi$  в (2), то полученное уравнение приводится к виду:

$$\frac{d}{d\tau} \left[ r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} - \alpha \cos \theta \right] = 0, \quad \alpha \equiv \frac{\nu}{m} I^{(3)} = const, \quad (18)$$

и легко интегрируется:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{J + \alpha \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (19)$$

В отсутствие изоспина постоянная  $J$  пропорциональна угловому моменту частицы.



### Меридиональный интеграл движения

При  $k = \theta$  уравнение (2) имеет вид:

$$r^2 \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + 2r \frac{d\theta}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} - r^2 \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = \alpha \sin \theta \frac{d\varphi}{d\tau}. \quad (20)$$

Используя азимутальный интеграл движения (19), получим следствие:

$$\frac{d}{d\tau} \left[ r^4 \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 - 2 \int d\theta \frac{(J + \alpha \cos \theta)(J \cos \theta + \alpha)}{\sin^3 \theta} \right] = 0, \quad (21)$$

после чего легко восстановить меридиональный интеграл движения:

$$r^4 \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 = \chi^2 - \frac{(J + \alpha \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}. \quad (22)$$

Здесь  $\chi^2$  - константа интегрирования.

### Радиальный интеграл движения

При  $k = r$  уравнение (2) с помощью трех найденных выше интегралов незамедлительно приводит к следующему результату:

$$\frac{d}{d\tau} \left[ A(r) \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{K^2}{B(r)} + \frac{\chi^2}{r^2} \right] = 0 \Rightarrow A(r) \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{K^2}{B(r)} + \frac{\chi^2}{r^2} = -E^2, \quad (23)$$

предоставляя в наше распоряжение пятую константу  $E^2$ .

### Соотношение между константами интегрирования

Интервал  $ds$  связан с параметром вдоль траектории  $\tau$  соотношением

$$ds^2 = E^2 d\tau^2, \quad (24)$$

в чём легко убедиться с помощью найденных интегралов движения. Для массивной частицы  $E^2 = 1$ , для безмассовой  $E^2 = 0$ . Если траектория частицы инфинитна, из асимптотических условий на бесконечности получим

$$A(\infty) = B(\infty) = 1 \Rightarrow \left( \frac{dr}{d\tau} \right)_{|\infty}^2 = K^2 - E^2. \quad (25)$$

Другими словами, параметр  $K$  выражается через радиальную скорость частицы на бесконечности. Если траектория частицы финитна, необходимо использовать другие соотношения.

## К вопросу о моделировании траекторий движения изоспиновой частицы в поле неминимального монополя Ву-Янга

### Годограф и траектория

При составлении годографа частицы, то есть зависимости  $r(\tau)$ ,  $\theta(\tau)$ ,  $\varphi(\tau)$ , ключевую роль играет радиальная квадратура

$$\pm(\tau - \tau_0) = \int_{r_0}^{\tau} \frac{dr' \sqrt{A(r')}}{\sqrt{\frac{K^2}{B(r')} - E^2 - \frac{\chi^2}{(r')^2}}}. \quad (26)$$

Если из этого соотношения удастся выразить  $r(\tau)$ , то  $\theta(\tau)$  моментально находится из (22), а  $\varphi(\tau)$  - из (19).

Если нас интересует траектория частицы, то параметр  $\tau$  следует исключить из (22) и (19) с помощью (26). Интегрирование полученных соотношений даёт, соответственно:

$$\begin{aligned} \cos \theta(r) &= -\frac{J\alpha}{(\chi^2 + \alpha^2)} + Q \sin \left\{ \arcsin \psi(r_0) - \sqrt{\chi^2 + \alpha^2} \int_{r_0}^{\tau} \frac{dr \sqrt{A(r)}}{r^2 \sqrt{\frac{K^2}{B(r)} - E^2 - \frac{\chi^2}{r^2}}} \right\}, \\ &\pm [\varphi(\theta) - \varphi(\theta(r_0))] = \\ &= \arctan \left\{ \frac{(J + \alpha) \sqrt{\chi^2 + \alpha^2}}{[(1 - Q)(\chi^2 + \alpha^2) + J\alpha]} S[\theta] \right\} - \arctan \left\{ \frac{(J + \alpha) \sqrt{\chi^2 + \alpha^2}}{[(1 - Q)(\chi^2 + \alpha^2) + J\alpha]} S[\theta(r_0)] \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

$$+ \arctan \left\{ \frac{(J-\alpha)\sqrt{\chi^2+\alpha^2}}{[(1+Q)(\chi^2+\alpha^2)-J\alpha]} S[\theta] \right\} - \arctan \left\{ \frac{(J-\alpha)\sqrt{\chi^2+\alpha^2}}{[(1+Q)(\chi^2+\alpha^2)-J\alpha]} S[\theta(r_0)] \right\}, \quad (28)$$

где введены следующие вспомогательные обозначения:

$$Q \equiv \frac{|\chi|}{\chi^2 + \alpha^2} \sqrt{\chi^2 + \alpha^2 - J^2}, \quad (29)$$

$$\psi(r_0) \equiv \frac{(\chi^2 + \alpha^2) \cos \theta(r_0) + J\alpha}{(\chi^2 + \alpha^2)Q}, \quad (30)$$

$$S[\theta] \equiv \sqrt{\frac{(\chi^2 + \alpha^2)(Q - \cos \theta) - J\alpha}{(\chi^2 + \alpha^2)(Q + \cos \theta) + J\alpha}}. \quad (31)$$

Компьютерное моделирование траекторий в зависимости от управляющих параметров модели предстоит выполнить в следующих работах.

## Частота и фаза вращения изоспина

Воспользовавшись определением (11), вычислим частоту вращения изоспина

$$\Omega(\tau) = -\frac{\nu(J + \alpha \cos \theta)}{r^2(1 + \cos \theta)}, \quad (32)$$

а затем и фазу (14)

$$\Psi(\tau) = \nu \int_{\cos \theta(0)}^{\cos \theta(\tau)} \frac{d\xi(J + \alpha\xi)}{(1 + \xi)\sqrt{(\chi^2 - J^2) - 2J\alpha\xi - (\chi^2 + \alpha^2)\xi^2}}. \quad (33)$$

Интегрирование даёт следующий результат:

$$\begin{aligned} \Psi(\tau) = & \frac{\nu\alpha}{\sqrt{\chi^2 + \alpha^2}} \left\{ \arccos \left[ \frac{(\chi^2 + \alpha^2) \cos \theta_0 + J\alpha}{Q(\chi^2 + \alpha^2)} \right] - \arccos \left[ \frac{(\chi^2 + \alpha^2) \cos \theta + J\alpha}{Q(\chi^2 + \alpha^2)} \right] \right\} \\ & + 2\nu \left\{ \arctan \left[ \frac{(1-Q)(\chi^2 + \alpha^2) - J\alpha}{(J-\alpha)\sqrt{\chi^2 + \alpha^2}} S[\theta(r_0)] \right] - \arctan \left[ \frac{(1-Q)(\chi^2 + \alpha^2) - J\alpha}{(J-\alpha)\sqrt{\chi^2 + \alpha^2}} S[\theta] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Зависимость от параметра  $\tau$  проявляется в этой формуле опосредованным образом:  $\Psi$  зависит от  $\cos \theta$ , а эта величина выражается через  $r$  в силу (27), а зависимость  $r(\tau)$  задана интегралом (26).

## Пример: изоспиновая частица, покоящаяся в поле неминимального монополя Ву-Янга

Для того, чтобы ответить на вопрос: может ли массивная изоспиновая частица покоиться в поле неминимального монополя на конечном (ненулевом) расстоянии от центра, рассмотрим найденные первые интегралы движения при следующих условиях

$$r = R_0 = \text{const}, \quad \theta = \theta_0 = \text{const}, \quad \varphi = \varphi_0 = \text{const}. \quad (35)$$

Азимутальный интеграл (19) в этом случае требует, чтобы выполнилось соотношение  $J + \alpha \cos \theta = 0$ , причём это возможно, только если  $|J| < |\alpha|$ . Меридиональный интеграл (22) требует, чтобы  $\chi = 0$ , а сам угол должен быть равен  $\theta_0 = \arccos[-\frac{J}{\alpha}]$ . Из радиального интеграла (23) с учетом того факта, что  $E = 1$  для массивной частицы, следует, что расстояние от точки "зависания" до центра находится из условия  $N(R_0) = K^2$ . Положение точки покоя будет устойчивым, если  $N'(R_0) = 0$  [7]. Вращение изоспина при этом заморожено, поскольку  $\Omega = 0$ . Для метрики (7) первое из этих условий дает уравнение четвёртого порядка

$$2(K^2 - 1)(R_0^4 + \kappa q) + R_0^2(4MR_0 - \kappa) = 0. \quad (36)$$

Условие устойчивости выполняется, если

$$(\kappa - 6MR_0)(R_0^4 + \kappa q) + 2R_0^4(4MR_0 - \kappa) = 0. \quad (37)$$

В частности, при  $M = 0$  получим  $R_0 = (\kappa q)^{\frac{1}{4}}$ , причём положение устойчиво, если  $K^2 = 1 + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\kappa}{q}}$ .

## Краткие итоги

1. Получены аналитические выражения для годографа и уравнений траекторий массивных изоспиновых частиц, которые зависят от четырех управляющих параметров  $I^{(3)}$ ,  $K$ ,  $J$ ,  $\chi$ , и тем самым заложена основа для детального компьютерного моделирования динамики изоспиновых частиц в поле неминимального монополя Ву-Янга.
2. Простейший пример показывает, что модель допускает точное решение, указывающее на наличие устойчивого положения равновесия частицы в поле неминимального монополя Ву-Янга.

## Литература

- [1] A.B. Balakin and A.E. Zayats. *Physics Letters B* (2007).
- [2] A.B. Balakin and A.E. Zayats. *Gravitation and Cosmology*, 14, 1(53), 86 (2008).
- [3] S.K. Wong. *Nuovo Cimento*, 65, 689 (1970).
- [4] V. Rubakov *Classical Theory of Gauge Fields* (Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2002).
- [5] A.B. Balakin, F.G. Suslikov. *Comptes Rendus de l' Academie des Sciences, Paris*, 324, Serie II b, 619 (1997).
- [6] A.B. Balakin, V.R. Kurbanova, W. Zimdahl. *Journal of Mathematical Physics*, 44, 5120 (2003).
- [7] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology* (John Wiley and Sons, NY, 1972).

### О ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ В ЖИДКОМ ШАРЕ

А.М. Баранов<sup>1</sup>

Сибирский федеральный университет, Россия, Красноярск  
Сибирский государственный технологический университет, Россия, Красноярск

<sup>1</sup>E-mail: alex\_m\_bar@mail.ru

Вопрос о решениях и исследованиях сферически симметричных статических моделей в общей теории относительности (ОТО) по-прежнему актуален. Как известно, алгебраическая классификация Петрова гравитационных полей [1] является одним из мощных инструментов исследования гравитационных полей. Поэтому рассмотрение с более общих позиций позволяет проанализировать поведение жидкого гравитирующего шара с точки зрения алгебраической классификации Петрова.

В данной работе рассматривается сферически симметричная модель жидкого гравитирующего шара с более общих позиций, чем в работах [2]-[3]. Предполагается, что модель обладает сферической симметрией и является статической, т.е. метрические функции не зависят от временной переменной.

Для записи метрического интервала выбраны координаты, позволяющие записать

$$ds^2 = F(r)dt^2 + 2L(r)dtdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1)$$

где величины  $F = F(r)$  и  $L = L(r)$  суть метрические функции радиальной переменной  $r$ ;  $t$  — временная координата;  $\theta$  и  $\varphi$  — угловые переменные; скорость света и ньютоновская гравитационная постоянная  $G_N$  здесь выбраны равными единице. Определитель ковариантного метрического тензора  $g_{\alpha\beta}$ , отвечающий выражению (1), равен  $\det(g_{\alpha\beta}) \equiv g = -L^2 r^4 \sin^2\theta$ .

Исходя из заданной метрики (1), введем следующие тетрады (ортонормированный 4-базис в касательном пространстве времени):

$$g_{\mu}^{(0)} = \sqrt{F}\delta_{\mu}^0; \quad g_{(1)\mu} = L\delta_{\mu}^1 + \frac{1}{2}F\delta_{\mu}^0; \quad (2)$$

$$g_{(2)\mu} = -\frac{r}{\sqrt{2}}(\delta_{\mu}^2 + i\sin\theta\delta_{\mu}^3); \quad g_{(3)\mu} = -\frac{r}{\sqrt{2}}(\delta_{\mu}^2 - i\sin\theta\delta_{\mu}^3); \quad (3)$$

$$g_{(0)}^{\mu} = L^{-1}\delta_1^{\mu}; \quad g_{(1)}^{\mu} = \delta_0^{\mu} + \frac{1}{2}FL^{-1}\delta_1^{\mu}; \quad (4)$$

$$g_{(2)}^{\mu} = \frac{1}{r\sqrt{2}}(\delta_2^{\mu} + \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^{\mu}); \quad g_{(3)}^{\mu} = \frac{1}{r\sqrt{2}}(\delta_2^{\mu} - \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^{\mu}), \quad (5)$$

где  $i$  — мнимая единица, а греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3.

Уравнения Эйнштейна в тетрадных обозначениях с источником в форме тензора энергии-импульса (ТЭИ) записывают в виде

$$G_{(\alpha)(\beta)} = R_{(\alpha)(\beta)} - \frac{1}{2}g_{(\alpha)(\beta)}R = -\varkappa T_{(\alpha)(\beta)}, \quad (6)$$

где  $G_{(\alpha)(\beta)}$  — тензор Эйнштейна;  $R_{(\alpha)(\beta)}$  — тензор Риччи;  $R = R^{(\alpha)}_{(\alpha)}$  — скалярная кривизна;  $\varkappa = 8\pi$  — постоянная Эйнштейна в выбранной нами системе единиц. ТЭИ идеальной паскалевой жидкости записывается в данном случае как

$$T_{(\alpha)(\beta)} \equiv T_{(\alpha)(\beta)}^{fluid} = (\mu + p)u_{(\alpha)}u_{(\beta)} - pg_{(\alpha)(\beta)} \equiv \mu u_{(\alpha)}u_{(\beta)} + pb_{(\alpha)(\beta)}, \quad (7)$$

где  $\mu(r)$  — плотность массы-энергии;  $p(r)$  — давление идеальной паскалевой жидкости;  $u_{(\alpha)} = g_{(\alpha)\mu} \frac{dx^\mu}{ds}$  — 4-скорость в тетрадных обозначениях;  $b_{(\alpha)(\beta)} = u_{(\alpha)}u_{(\beta)} - g_{(\alpha)(\beta)}$  — 3-проектор на пространственноподобную гиперповерхность (или 3-метрика), ортогональный 4-скорости,  $b_{(\alpha)(\beta)}u^{(\alpha)} = 0$ ; все функции зависят только от радиальной переменной.

Воспользовавшись связью между скалярной кривизной и следом тензора энергии-импульса  $R = \varkappa T$ , перепишем уравнения Эйнштейна (6) в виде, позволяющем использовать свойства тензора энергии-импульса:

$$R_{(\alpha)(\beta)} = -\varkappa \left( T_{(\alpha)(\beta)} - \frac{1}{2}g_{(\alpha)(\beta)}T \right). \quad (8)$$

Данная система переписывается после подстановки в нее метрических функций в виде системы из трех уравнений

$$\frac{\varepsilon}{x}(\ln L)' = \frac{\chi}{2}(\mu + p); \quad (9)$$

$$\frac{\varepsilon}{x}(\ln L)' - \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{F''}{F} + \frac{2}{x}(\ln F)' - (\ln F)'(\ln L)' \right) = -\chi p; \quad (10)$$

$$-\frac{1}{x^2}(1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{x} \left( \ln \frac{F}{L} \right)' = -\chi \frac{1}{2}(\mu - p), \quad (11)$$

где все производные берутся относительно переменной  $x = r/R$ ,  $R$  — внешний радиус шара,  $\chi = \varkappa R^2$ , введена также следующая связь между функциями:  $\varepsilon(x) = F(x)/L(x)^2$ .

Исключая теперь плотность массы-энергии и давление из этой системы, получаем линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами на функцию  $G(x)$ :

$$G'' + f(x)G' + g(x)G = 0, \quad (12)$$

где  $G = \sqrt{F}$ ,  $f(x) = (\ln \varphi)'$ ,  $\varphi(x) = \sqrt{\varepsilon}/x$ , а коэффициент  $g(x)$  равен

$$g(x) = \frac{2(1 - \varepsilon) + x\varepsilon'}{2x^2\varepsilon}. \quad (13)$$

Пусть определим новую переменную  $\zeta = \zeta(x)$ , согласно соотношению

$$d\zeta = \frac{x dx}{\sqrt{\varepsilon(x)}}, \quad (14)$$

уравнение (12) в уравнение для нелинейного пространственного осциллятора относительно переменной  $\zeta$  с переменной "частотой"

$$G''_{\zeta\zeta} + \Omega^2(\zeta(x))G = 0. \quad (15)$$

Так как выражение (15), вообще говоря, не может быть проинтегрировано в элементарных функциях, то квадрат "частоты"  $\Omega^2$  проще использовать при вычислениях в следующей записи:

$$\Omega^2 = -\frac{d}{dy} \left( \frac{\Phi}{y} \right), \quad (16)$$

где  $y = x^2$ , а функция  $\Phi$  является аналогом ньютоновского гравитационного потенциала внутри жидкого шара и выражается из гравитационных уравнений через функцию  $\varepsilon$  как

$$\Phi = 1 - \varepsilon = \frac{\chi}{x} \int \mu(x)x^2 dx = \frac{\chi}{2\sqrt{y}} \int \mu(y)\sqrt{y} dy. \quad (17)$$

Кроме того, из системы гравитационных уравнений (9)-(11) нетрудно найти соотношение для давления:

$$\chi p = -\frac{\Phi}{x^2} + \frac{1}{x}(1 - \Phi)(\ln F)'. \quad (18)$$

Представим теперь функцию  $\Omega^2$  в виде ряда по переменным  $y$

$$\Omega^2(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n. \quad (19)$$

Далее выберем все  $a_n$  равными нулю, т.е.  $\Omega^2 = 0$ . Тогда (15) превращается в уравнение

$$G''_{\zeta\zeta} = 0 \quad (20)$$

и функция  $G(\zeta) = C_1 \cdot y + C_2$ , где  $C_1, C_2$  – постоянные интегрирования.

Из соотношений (16) и (17) сразу получаем, что выбору  $\Omega^2 = 0$  отвечает однородная модель гравитирующего шара с плотностью массы  $\mu_0 = const$ . Использование связи между функциями  $\varepsilon$ ,  $F$  и  $L$ , а также условий шивки со внешним решением Шварцшильда, приводит к известному внутреннему решению Шварцшильда.

При этом необходимо заметить, что согласно теореме [4] гравитационное поле, создаваемое сферически симметричным статическим распределением вещества, по алгебраической классификации Петрова относится либо к типу  $D$ , либо к типу  $0$ .

В нашем случае, гравитационное поле однородного распределения жидкости относится к алгебраическому типу  $0$ , т.е. описывается конформно плоским решением уравнений Эйнштейна.

Возьмем теперь  $n = 0$  в разложении (19). Это приводит к постоянной “частоте”  $\Omega^2 = a_0 \equiv \Omega_0^2 = const$ . При условии положительности  $\Omega_0^2$  общее решение уравнения (15) выписывается в виде гармонической осциллирующей функции

$$G(\zeta(x)) = G_0 \cos(\Omega_0 \zeta(x) + \varphi_0), \quad (21)$$

где  $\varphi_0$  – сдвиг фазы.

С другой стороны, из (16) и (17) находим, что соответствующая плотность массы-энергии представляет собой параболическое распределение

$$\mu(x) = \mu_0(1 - bx^2), \quad (22)$$

а функция  $G$  принимает вид

$$G(x) = G_0 \cos(\Omega_0 (\ln(\frac{d\varepsilon(x)}{dx}) / (2\sqrt{C_4} + \sqrt{\varepsilon(x)})) + \alpha_0), \quad (23)$$

где  $\varepsilon(x) = 1 - C_3 x^2 + C_4 x^4$ ;  $C_3 = \chi R^2/3$ ;  $C_4 = \chi R^2 b/5$ .

Использование уравнений тяготения с ТЭИ идеальной жидкости для заданной метрики (1) упрощает вычисление компонент тензора Вейля, который может быть записан в тетрадных компонентах в общем случае как

$$W_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)} = R_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)} + R_{(\gamma)[(\alpha)g(\beta)](\delta)} - R_{(\delta)[(\alpha)g(\beta)](\gamma)} - \frac{1}{3} Rg_{(\gamma)[(\alpha)g(\beta)](\delta)}. \quad (24)$$

Производя отображение тензора Вейля на 3-мерное евклидово пространство с метрикой  $e_{ij} = diag(1, 1, 1)$  с помощью ( $\varepsilon_{kmn}$  – полностью антисимметричный символ Леви-Чивиты)

$$\Omega_k^{\alpha\beta} = \delta_k^\alpha \delta_0^\beta - \frac{i}{2} \varepsilon_{kmn} \delta_m^\alpha \delta_n^\beta, \quad (25)$$

получим бесследовую  $3 \times 3$  матрицу Вейля

$$W = \left( \frac{\eta}{2R^2} \right) x^2 \times diag(2, -1, -1), \quad (26)$$

представляющую собой канонический вид матрицы Вейля типа  $D$  для рассматриваемого случая по алгебраической классификации пространств для любого  $x \neq 0$  ( $\eta = 2m/R$  – компактность,  $m$  – шварцшильдовская масса шара).

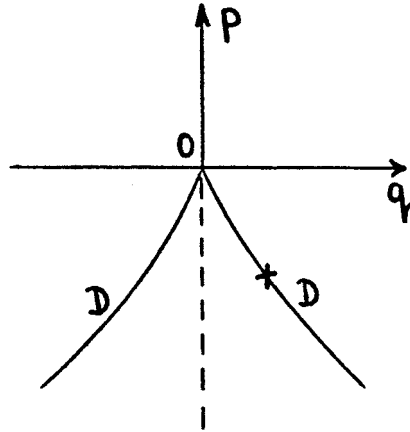


Рис.1. Поверхность катастрофы сборки и ее проекция на плоскость управляющих параметров  $p$  and  $q$ .

В точке  $x = 0$  (центр шара) происходит вырождение матрицы Вейля типа  $D$  в тип  $0$ , т.е. непрерывный переход  $x \rightarrow 0$  сопровождается скачкообразным изменением типа пространства ( $D \rightarrow 0$ ), что соответствует изменению ранга матрицы Вейля  $W$  с  $r = 3$  на  $r = 0$ . При этом в окрестности точки  $x = 0$  плотность жидкости постоянна и равна  $\mu_0$ . Другими словами, вблизи центра вещество почти несжимаемо, а алгебраический тип гравитационного поля есть  $0$ .

Таким образом, полученный результат находится в полном соответствии с утверждением теоремы [4]. Более того, алгебраическая классификация гравитационных полей связана с решением кубического характеристического уравнения

$$\lambda^3 + p\lambda + q = 0, \quad (27)$$

где параметры  $p$  и  $q$  могут быть найдены по заданной бесследовой матрице  $W$  как

$$p = -\frac{1}{2}SpW^2; \quad q = -\frac{1}{3}SpW^3. \quad (28)$$

Уравнение (27) можно рассматривать как условие экстремума для некоторой "потенциальной" функции

$$V(\lambda, p, q) = V_0 + \frac{1}{4}\lambda^4 + \frac{1}{2}p\lambda^2 + q\lambda, \quad (29)$$

где  $V_0 = const$ .

Согласно теории катастроф деформация (29) описывает катастрофу сборки Уитни. В плоскости управляющих параметров  $p$  и  $q$  решения уравнения (27), вообще говоря, располагаются в трех областях, на трех линиях и в одной точке, когда мы ограничиваемся статикой (см. рис.1).

Известно, что при бесконечно малых возмущениях алгебраический тип пространства может измениться (при этом ранг матрицы Вейля меняется скачком) [5]. С точки зрения теории Ландау фазовых переходов 2-го рода точка сборки ( $p = q = 0$ ) соответствует фазовому переходу в тип  $0$  как наиболее симметричную "фазу". Более того, параметр  $p$  аналогичен температуре; производная  $\partial V/\partial p$  – энтропии;  $\partial^2 V/\partial p^2$  – теплоемкости, меняясь как и она скачком при  $p = 0$ .

В нашем случае уравнение (27) имеет два совпадающих вещественных корня, сумма которых с обратным знаком равна третьему корню:  $\lambda_2 = \lambda_3 = \alpha_0 = (\eta/(2R^2))x^2$ ;  $\lambda_1 = -2\alpha_0$ . Параметры  $p$  и  $q$  выражаются через  $\alpha_0$  как  $p = 3\alpha_0^2$ ;  $q = 2\alpha_0^3$ . Дискриминант  $Q = (p/3)^3 + (q/2)^2 = 0$  задает полукубическую параболу  $p = -3(q/2)^{2/3}$  (проекция линии складок), отвечающую пространству типа  $D$ . Так как  $q > 0$ , то рассматриваемый случай соответствует кривой, помеченной на рис.1 крестом. Кроме того, состояние, для которого  $\lambda = \alpha_0$  (точка перегиба функции  $V(\lambda, p, q)$ ), неустойчиво.

Для найденных корней уравнения (27) экстремальные значения функции  $V(\lambda, p, q)$  могут быть записаны как

$$V(\lambda_2, p) = V(\lambda_3, p) = \frac{1}{12}p^2 + C; \quad V(\lambda_1, p) = -\frac{2}{3}p^2 + C, \quad (30)$$

где  $q$  и  $\alpha_0$  выражены через параметр  $p$ . В точке  $p = q = 0$  наблюдаются скачки вторых производных по  $p$  от функции  $V$ :  $\Delta(V_{,pp}) = 1/6$  и  $\Delta(V_{,pp}) = -4/3$ , что соответствует скачку ранга матрицы Вейля в точке сборки.

Следовательно, непрерывные изменения переменной  $x$  ( $x \rightarrow 0$ ) и параметров  $p, q$  ( $p \rightarrow 0, q \rightarrow 0$ ) приводит к катастрофе: алгебраический тип пространства скачком меняется в центре нашей шаровой модели ( $D \rightarrow 0$ ).

Если выразить компоненты матрицы Вейля через плотность массы, то матрицу Вейля (26) можно переписать в виде

$$W = \left( \frac{\eta}{2R^2} \right) \left( 1 - \frac{\mu(x)}{\mu_0} \right) \times \text{diag}(2, -1, -1). \quad (31)$$

Отсюда сразу виден переход матрицы  $W$  типа  $D$  в матрицу типа 0 при стремлении плотности массы  $\mu(x)$  к постоянной величине  $\mu_0$ .

Рассмотрение случая с  $n = 1$  приводит согласно (16) и (19) к выражению  $\Omega^2 = a_0 + a_1 y$ . Тогда соответствующее распределение плотности массы запишется как ( $c$  – некоторая постоянная)

$$\mu(x) = \mu_0(1 - bx^2 - cx^4). \quad (32)$$

Проведенный аналогичным образом анализ в окрестности центра гравитирующего шара приводит опять к предыдущей ситуации: в центре (и в малой его окрестности) шара имеем алгебраический тип гравитационного поля 0, а в остальной части шара гравитационное поле принадлежит типу  $D$ . Учет последующих членов в разложении (19) ( $n > 1$ ) ничего нового не добавляет.

Другими словами, в окрестности центра шара фазовый переход 2-го рода в сферически симметричном гравитационном поле жидкого шара реализуется вне зависимости от выбора  $n$  ( $n \geq 0$ ) в выражении (19) как изменение алгебраического типа пространства-времени.

## Литература

- [1] Петров А.З. *Новые методы в общей теории относительности*. – М.: Наука, 1966. – 495 с.
- [2] Баранов А.М. *Осцилляторный подход к описанию статической звезды с нейтральной и заряженной идеальной жидкостью* // Вестник Красноярского государственного университета. Физические и математические науки. – 2002. – №1. – С. 5-12.
- [3] Баранов А.М., Власов Я.В. *Модель заряженного гравитирующего шара* // Вестник Красноярского государственного университета. Физические и математические науки. – 2005. – №1. – С. 4 – 11.
- [4] Баранов А.М. *Об алгебраическом типе сферически симметричного гравитационного поля* // Вестник Красноярского государственного университета. Физические и математические науки. – 2006. – №1. – С. 5-9.
- [5] Баранов А.М. *Возмущения пространств и классификация Петрова* / Ун-т Дружбы народов им.П.Лумумбы. М. - 1976. – 8 с. – Деп. в ВИНТИ 13.07.76 № 2632-76.

## О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕРАХ ПРИМЕНЕНИЯ ЭРМИТОВЫХ И КЭЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ В ОТО

А.М. Баранов<sup>1</sup>, В.А. Иванов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Сибирский федеральный университет, Россия, Красноярск, <sup>2</sup>Сибирский федеральный университет, Россия, Красноярск

---

<sup>1</sup>E-mail: alex\_m\_bar@mail.ru, <sup>2</sup>E-mail: swivanov@mail.ru

## Введение

Исследование комплексных многообразий может быть прослежено еще по монументальным работам Гаусса и Римана по теории искривленных пространств; классические Римановы поверхности являлись первыми примерами комплексных многообразий. Риманова геометрия и теория функций многих комплексных переменных развивались независимо друг от друга до 1930-х годов, пока не были объединены с помощью эрмитовой и кэлеровой геометрии. В 1947 г. Вейль и Эресманн разработали теорию почти комплексных многообразий, которая была развита в дальнейшем в работах Экмана, Фрелихера, Ньюландера и Ниренберга.

Одна из первых попыток объединить теорию относительности и комплексный анализ - введение мнимой временной координаты для четырехмерного пространства-времени была предпринята еще Пуанкаре и Минковским. Эта идея ушла в тень с появлением общей теории относительности. Комплексные переменные вновь начинают появляться в исследованиях по теории относительности с 1960-х годов. Примером может служить метод светоподобных тетрад Дебеве, Керра и Шилда, методы спинорного исчисления Пенроуза [1].

Примерно в это же время появился ряд работ, связанных с получением новых решений уравнений Эйнштейна с помощью комплексных преобразований. В частности, так называемое решение Керра в вакууме для вращающегося тела получается при применении некоторого комплексного неголоморфного преобразования к внешнему решению Шварцшильда.

Подход, связанный с введением комплексных величин, вероятно, должен в какой-то мере расширить класс преобразований и, тем самым, облегчить нахождение решений уравнений Эйнштейна, так как физической величиной является квадрат интервала между двумя точками многообразия. Он будет оставаться вещественным и в случае введения комплексной метрики и комплексной системы координат. Вследствие того, что вещественный интервал можно построить двумя способами:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dz^\alpha dz^\beta + g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} dz^{\bar{\alpha}} dz^{\bar{\beta}}, \quad (1)$$

$$ds^2 = 2g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha dz^{\bar{\beta}}, \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n; \bar{\alpha}, \bar{\beta} = n+1, \dots, 2n), \quad (2)$$

где (1) отвечает так называемому пространству со структурой произведения, а (2) - эрмитовым и кэлеровым пространствам, то возможно два подхода, соответствующих данным структурам. В данной работе рассматривается возможность перехода от вещественной метрики к комплексной вида (16). Для общности подхода вводится многомерное комплексное пространство.

## Основные определения и обозначения

Рассмотрим вещественное  $2n$ -мерное многообразие  $M_{2n}$  класса  $C^r$  с заданным покрытием окрестностями, в каждой из которых имеется система координат  $\{x^i\}$ . В дальнейшем будем предполагать, что латинские индексы принимают значения  $1, \dots, n, \bar{1}, \dots, \bar{n} = 2n = \dim(M_{2n})$ . Если мы положим

$$\left. \begin{aligned} z^\alpha &= x^\alpha + ix^{(\bar{\alpha})}, \\ z^{\bar{\alpha}} &= x^\alpha - ix^{(\bar{\alpha})}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где греческие индексы принимают значения  $1, \dots, n$  то получим взаимно-однозначное соответствие между вещественными и комплексными координатами  $(z^\alpha, z^{\bar{\alpha}}) \leftrightarrow (x^i)$ .

Пусть  $D$  - область в комплексном пространстве  $C^n(z^1, \dots, z^n)$ . Зададим на  $D$  эрмитову метрику по формуле (16) (чертой обозначаем комплексное сопряжение):

$$ds^2 = 2g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha dz^{\bar{\beta}}, \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n; \bar{\alpha}, \bar{\beta} = n+1, \dots, 2n).$$

Многообразие назовем эрмитовым, если на нем введена эрмитова метрическая форма (16). Для компонент метрики справедливы следующие соотношения [2]:

$$\left. \begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0, \\ g_{\alpha\bar{\beta}} &= g_{\bar{\beta}\alpha} = \bar{g}_{\alpha\beta} = \bar{g}_{\bar{\beta}\bar{\alpha}}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В силу условий эрмитовости матрица компонент метрики  $G = (g_{ij})$  имеет следующий блочный вид ( $H$  - эрмитова матрица) :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \bar{H} \\ H & 0 \end{pmatrix}, \quad H = (h_{\alpha\bar{\beta}}). \quad (5)$$

Будем предполагать, что в рассматриваемом пространстве кручение равно нулю, метрика является симметричной и ковариантно постоянной. Тогда возможно введение метрической связности обычным образом. При наложении условий эрмитовости на метрику запись символов Кристоффеля упрощается:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\bar{\delta}} \left( \frac{\partial g_{\bar{\delta}\beta}}{\partial z^\gamma} + \frac{\partial g_{\bar{\delta}\gamma}}{\partial z^\beta} \right), \quad \Gamma_{\beta\bar{\gamma}}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\bar{\delta}} \left( \frac{\partial g_{\beta\bar{\delta}}}{\partial \bar{z}^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\bar{\gamma}}}{\partial \bar{z}^\delta} \right), \quad \Gamma_{\bar{\beta}\bar{\gamma}}^\alpha = 0. \quad (6)$$

Кэлеровы многообразия являются подклассом эрмитовых многообразий. Эти многообразия были открыты П.А.Широковым (Казанский университет) [3], как  $A$ -пространства в 1925 г. И только в 1933 г. эти пространства были переоткрыты Э.Кэлером [4].

Условия кэлеровости накладывают еще более строгие ограничения на метрику, чем условия эрмитовости, но тем не менее стоит уделить внимание этим многообразиям по следующим причинам. Формулы для метрической связности и тензора кривизны существенно упрощаются, когда метрика кэлерова (как будет показано ниже, часть символов Кристоффеля должна автоматически зачлениваться). Кроме того, тензор кривизны Римана и тензор Риччи кэлерова многообразия выражаются всего через одну скалярную вещественнозначную функцию  $\Phi$ .



**Определение.** Эрмитова метрика  $g_{ij}$  называется кэлеровой, если выполняются следующие эквивалентные условия

$$\frac{\partial g_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial \bar{z}^\gamma} - \frac{\partial g_{\alpha\bar{\gamma}}}{\partial \bar{z}^\beta} = 0, \quad \frac{\partial g_{\bar{\alpha}\beta}}{\partial z^\gamma} - \frac{\partial g_{\bar{\alpha}\gamma}}{\partial z^\beta} = 0; \quad g_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}. \quad (7)$$

Причем для выполнения (14) необходимо и достаточно, чтобы скалярная функция  $\Phi$  была вещественнозначной.

Для кэлеровой метрики связности записываются в следующем виде [5]:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = g^{\alpha\bar{\delta}} \frac{\partial g_{\delta\bar{\beta}}}{\partial z^\gamma}, \quad \Gamma_{\bar{\beta}\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}} = g^{\bar{\alpha}\delta} \frac{\partial g_{\delta\bar{\beta}}}{\partial \bar{z}^\gamma} = \overline{\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}. \quad (8)$$

Остальные компоненты связности равны нулю в силу свойств кэлеровости метрики и самоприсоединенности. Аналогично отличны от нуля только следующие компоненты тензора кривизны Римана:  $R_{j\bar{k}l}^i, R_{j\bar{k}l}^{\bar{i}}, R_{\bar{j}kl}^i, R_{\bar{j}kl}^{\bar{i}}$ .

Значения компонент тензора кривизны Римана и тензора Риччи кэлерова многообразия определяются по формулам [2]:

$$R_{\beta\gamma\bar{\delta}}^\alpha = \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial \bar{z}^\delta}; \quad R_{\beta\bar{\gamma}} = -\frac{\partial^2 \ln(\sqrt{g})}{\partial z^\beta \partial \bar{z}^\gamma}, \quad g = \det(g_{\alpha\bar{\beta}})^2, \quad (9)$$

что позволяет сформулировать следующее утверждение.

**Предложение.** Если компоненты метрического тензора комплексного кэлерова многообразия являются голоморфными функциями, то тензор кривизны данного многообразия тождественно равен нулю, то есть многообразие является плоским.

Это означает, что при обобщении теории гравитации Эйнштейна (ОТО) на случай комплексных кэлеровых многообразий с физической точки зрения нецелесообразно использовать голоморфные функции в качестве компонент метрического тензора.

## Комплексификация физической метрики

Для описания физического пространства-времени требуется четыре координаты: время  $t$  и три пространственные координаты  $x, y, z$ . Положим  $t = x^0$ ;  $x = x^1$ ;  $y = x^2$ ;  $z = x^3$ , тогда четыре координаты можно записать в виде  $x^\mu$ , где индекс  $\mu$  принимает значения 0, 1, 2, 3.

В силу особенностей сигнатуры используемых в ОТО многообразий, при комплексификации метрики существуют следующие подходы: модифицировать методы многомерного комплексного анализа для пространства размерности 4 с данной сигнатурой или увеличить размерность пространства, например до 6 или 8, и затем выполнить сужение в область наблюдаемых переменных (размерность 4) путем построения сечений или использования поворотов. Первый подход рассматривается, например, в монографии [1]. Некоторые примеры применения второго подхода рассмотрены в [6] и далее в настоящей работе.

Пусть  $M$  – ориентируемое псевдориманово вещественное многообразие, задаваемое метрикой  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ , ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) с сигнатурой (+ - - -). Перейдем от классического четырехмерного пространства-времени, определяемого  $M$ , к шестимерному  $M$  (с сигнатурой (+ + - - -)), введя дополнительную временную координату  $\tau = x^{(-0)}$  (играющую роль мнимой временной переменной) и пространственную координату  $w = x^5$ . Основная часть расчетов в рамках данной работы была проведена в системе аналитических вычислений Maple. Для того, чтобы получить "наглядный" результат в данной программе, необходимо было зафиксировать размерность исследуемого многообразия и задать систему координат. Выбор размерности 6 обоснован следующими соображениями: пространство-время должно быть четномерным, чтобы можно было осуществить комплексификацию естественным образом. Кроме того, должна сохраниться сигнатура: *положительная* при временных координатах и *отрицательная* при пространственных переменных.

Заменим вещественные координаты на комплексные по правилу (черта над индексом обозначает комплексное сопряжение, например,  $z^{\bar{0}} = \overline{z^0}$ ):

$$\begin{aligned} z^0 &= x^0 + ix^{(-0)} & z^1 &= x^1 + ix^2, & z^2 &= x^3 + ix^5, \\ z^{\bar{0}} &= x^0 - ix^{(-0)}, & z^{\bar{1}} &= x^1 - ix^2, & z^{\bar{2}} &= x^3 - ix^5. \end{aligned} \quad (10)$$

Введем на многообразии  $\hat{M}$  эрмитову метрику (16).

## Пример постоянства кэлерова многообразия постоянной кривизны, являющегося многообразием Эйнштейна

В качестве частного случая уравнений гравитационного поля Эйнштейна можно рассматривать уравнения поля вида  $R_{ij} = \kappa \cdot g_{ij}$ ,  $\kappa = const$ . Эти уравнения можно рассматривать как уравнения Эйнштейна для случая, когда тензор энергии-импульса  $T_{ij}$  лишь постоянным множителем отличается от метрического тензора  $g_{ij}$ . Физической моделью такого поля может служить пространство, которое на всем своем протяжении однородно, причем плотность материи постоянна во всем пространстве [7].

Выберем в качестве скалярной функции  $\Phi$ , задающую многообразие, следующую функцию:

$$\Phi = -\frac{4}{\lambda} \ln(1 - A \cdot S^2), \quad (11)$$

где  $S^2 = z^0 z^{\bar{0}} - z^1 z^{\bar{1}} - z^2 z^{\bar{2}}$  – квадрат расстояния в плоском пространстве.

Вычислим компоненты кэлера метрического тензора  $g_{\alpha\bar{\beta}}$  по формуле (14).

$$\begin{aligned} g_{1\bar{1}} &= \frac{4A}{\lambda(1 - AS^2)} \left( 1 + \frac{Az^1 z^{\bar{1}}}{1 - AS^2} \right), \\ g_{2\bar{2}} &= \frac{4A}{\lambda(1 - AS^2)} \left( -1 + \frac{Az^2 z^{\bar{2}}}{1 - AS^2} \right), \\ g_{3\bar{3}} &= \frac{4A}{\lambda(1 - AS^2)} \left( -1 + \frac{Az^3 z^{\bar{3}}}{1 - AS^2} \right), \\ g_{\alpha\bar{\beta}} (\alpha \neq \beta) &= -\frac{4A^2 z^{\bar{\alpha}} z^{\beta}}{\lambda(1 - AS^2)^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Найдем тензор Риччи и скалярную кривизну и в результате придем к соотношению:

$$R_{\alpha\bar{\beta}} = \lambda \cdot g_{\alpha\bar{\beta}}. \quad (13)$$

Скалярная кривизна  $R$  для данного случая является постоянной величиной и равна  $6\lambda$ . Таким образом, кэлерово многообразие с метрикой, построенной на основе функции (11), является многообразием Эйнштейна постоянной кривизны.

Полученная связь кэлеровой метрики для скалярной функции  $\Phi$  с многообразиями Эйнштейна фактически является записью уравнений Эйнштейна (для данного конкретного случая) при отсутствии материальных источников кривизны пространства негравитационного происхождения.

## Пример построения решения уравнений Эйнштейна для эрмитова многообразия

Найдем эрмитову метрику, удовлетворяющую уравнениям Эйнштейна:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\kappa T_{ik}, \quad (14)$$

где  $R_{ik}$  – тензор Риччи,  $R$  – скалярная кривизна,  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$  – эйнштейновская гравитационная постоянная,  $T_{ik}$  – тензор энергии-импульса.

Покажем, как выглядят некоторые решения уравнений (14) на многообразии комплексной размерности  $3D$  при наложении определенных условий на метрику. Не ограничивая общности, положим скорость света равной единице ( $c = 1$ ).

Рассмотрим случай, когда метрика является конформно-плоской, т.е. записывается в виде:

$$ds^2 = U(z^0, z^{\bar{0}}, z^1, z^{\bar{1}}, z^2, z^{\bar{2}}) (dz^0 dz^{\bar{0}} - dz^1 dz^{\bar{1}} - dz^2 dz^{\bar{2}}). \quad (15)$$

Предположим, что

$$U_0 = \frac{A}{(z^0 z^{\bar{0}} - z^1 z^{\bar{1}} - z^2 z^{\bar{2}})^2}. \quad (16)$$

Покажем, что при таком выборе функции  $U_0$  получим решение уравнений Эйнштейна, являющееся аналогом решения Фридмана – одного из важнейших космологических решений.

Вычисления в системе Maple показывают, что тождественно равны нулю тензор кривизны Римана-Кристоффеля, а также тензор Риччи и скалярная кривизна:  $R_{jkl}^i = 0$ ,  $R_{ik} = 0$ ,  $R = 0$ . Метрика описывает плоское пространство-время, но при этом компоненты метрического тензора не являются константами.

Очевидно, при таком выборе функции  $U_0$  (16) удовлетворяет уравнениям Эйнштейна (9). Но такое решение является нефизичным, так как вдали от источника поля должен выполняться галилеевский закон гравитации.

При  $z^\mu \rightarrow \infty, z^{\bar{\mu}} \rightarrow \infty$  должно выполняться  $U_0 \rightarrow 1$ , а в нашем случае  $U_0 \rightarrow 0$ . Поэтому необходимо ввести асимптотику поведения  $U_0$  на бесконечности.

Произведем над функцией  $U_0$  линейное преобразование

$$U = 1 - U_0 = 1 - \frac{A}{(z^0 z^{\bar{0}} - z^1 z^{\bar{1}} - z^2 z^{\bar{2}})^2}. \quad (17)$$

Вычисления показывают, что  $R = 0$ , но все компоненты тензора Риччи отличны от нуля.

Вернемся к уравнениям (14). Так как  $R = 0$ , то  $R_{ik} = -\kappa T_{ik}$ .

Для макроскопических тел тензор энергии-импульса  $T_{ik}$  равен:

$$T_{ik} = (p + \rho)u_i u_k - p g_{ik}, \quad (18)$$

где  $p$  - давление,  $\rho$  - плотность энергии,  $u_i$  - компоненты 6-скорости, определяемой соотношениями

$$u_\alpha = \sqrt{2U} \frac{\partial S}{\partial z^\alpha}, \quad u_{\bar{\alpha}} = \sqrt{2U} \frac{\partial S}{\partial z^{\bar{\alpha}}}, \quad S^2 = z^0 z^{\bar{0}} - z^1 z^{\bar{1}} - z^2 z^{\bar{2}}. \quad (19)$$

Найдем плотность энергии  $\rho$ . Для этого свернем (18) с  $u^i u^k$  и после упрощения получим

$$-\frac{1}{\kappa} R_{ik} u^i u^k = \rho. \quad (20)$$

Ниже приведена запись выражений для компонент 6-скорости в ковариантной и контравариантной форме.

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{z^{\bar{0}}}{2S}, & u_{\bar{0}} &= \frac{z^0}{2S}, & u^0 &= \frac{u_{\bar{0}}}{U}, & u^{\bar{0}} &= \frac{u_0}{U}, \\ u_1 &= \frac{z^{\bar{1}}}{2S}, & u_{\bar{1}} &= \frac{z^1}{2S}, & u^1 &= \frac{-u_{\bar{1}}}{U}, & u^{\bar{1}} &= \frac{-u_1}{U}, \\ u_2 &= \frac{z^{\bar{2}}}{2S}, & u_{\bar{2}} &= \frac{z^2}{2S}, & u^2 &= \frac{-u_{\bar{2}}}{U}, & u^{\bar{2}} &= \frac{-u_2}{U}. \end{aligned} \quad (21)$$

Вычисления показывают, что  $u_i u^i = 1$ , значит  $u^i$  действительно является вектором 6-скорости.

Найденные для такой метрики выражения для плотности энергии и давления, а также уравнение состояния, связывающее эти величины, записываются в виде

$$\kappa \rho = \frac{20AS^6}{(S^4 - A)^3}, \quad \kappa p = \frac{4AS^6}{(S^4 - A)^3}, \quad p = \frac{1}{5} \rho, \quad S^2 = z^0 z^{\bar{0}} - z^1 z^{\bar{1}} - z^2 z^{\bar{2}}. \quad (22)$$

## Заключение

В настоящей работе приведены некоторые понятия из теории эрмитовых и кэлеровых структур, записаны основные дифференциально-геометрические соотношения для кэлеровых многообразий и сформулировано утверждение о невозможности применения кэлеровых метрик с голоморфными компонентами метрического тензора в ОТО. Это означает, что использование кэлеровой структуры для конструирования физических моделей в ОТО невозможно воспользоваться тем многообразием методов и подходов, разработанных для голоморфных функций.

Также продемонстрировано, как с помощью скалярной функции ввести кэлерово многообразие, являющееся многообразием Эйнштейна.

В работе построено точное решение уравнений Эйнштейна для многообразия комплексной размерности  $3D$ , являющееся обобщением решения Фридмана для открытой Вселенной. Данное решение можно интерпретировать как модель шестимерной Вселенной, заполненной равновесной светоподобной жидкостью с уравнением состояния  $p = \frac{1}{5} \rho$ , в отличие от модели, предложенной А.Фридманом, для которой уравнение состояния есть  $p = 0$  (некогерентная пыль). Для сравнения уравнение состояния для равновесного электромагнитного излучения в обычном вещественном пространстве равно  $p = \frac{1}{3} \rho$ . Полученное здесь решение можно обобщить на подобные многомерные Вселенные с четными размерностями  $m = 2n \geq 6$  и уравнениями состояния  $p = \frac{1}{2n-1} \rho$ .

## Литература

- [1] Flaherty E.J. *Hermitian and Kalerian Geometry in Relativity*/ E.J. Flaherty.-Berlin: Springer-Verlag, 1976.
- [2] К.Яно, С. Бохнер. *Кривизна и числа Бетти*. Перевод с англ. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1957.

- [3] Широков П.А. *Постоянное поле векторов и тензоров второго порядка в Римановых пространствах* // Изв. физ.-мат. об-ва при Казанском ун-те. Сер.2. – 1925. – Т.25. С.86-114.
- [4] Kähler E. *Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metric* // Abh. Math. Semin. Hamburg. - 1933. - Bd. 9. - S. 173-176.
- [5] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. *Современная геометрия. Методы и приложения* / - М. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.
- [6] А.М. Баранов, В.А. Иванов. *О применении комплексных переменных в общей теории относительности* // НКСФ-2009: материалы научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых-физиков НКСФ-XXXVIII (2009). - Красноярск, Сибирский федеральный университет, 2009.
- [7] Петров А.З. *Пространства Эйнштейна* / - М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ АСТРОФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ СО СЛОИСТОЙ СТРУКТУРОЙ В ОТО

А.М. Баранов<sup>1</sup>, А.Ю. Осипов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Сибирский федеральный университет, Россия, Красноярск, <sup>2</sup>Сибирский федеральный университет, Россия, Красноярск

<sup>1</sup>E-mail: alex\_m\_bar@mail.ru, <sup>2</sup>E-mail: ya.oayu@mail.ru

Слоистая внутренняя структура вещества образуется под воздействием сильного гравитационного поля в процессе коллапса на конечных стадиях эволюции массивных астрофизических объектов. При этом каждый возникающий слой вещества описывается различными уравнениями состояния. Характерным примером подобного объекта является нейтронная звезда – объект с очень высокой плотностью и малым радиусом.

В настоящей работе метрический интервал записывается в координатах Бонди:

$$ds^2 = G^2(r) dt^2 + 2L(r) dt dr - r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2), \quad (1)$$

где  $G^2(r) = F(r)$  и  $L(r)$  – метрические функции радиальной переменной  $r$ ,  $t$  – временная координата,  $\theta$  и  $\varphi$  – угловые переменные. Для удобства выберем систему единиц, в которой скорость света  $c = 1$  и гравитационная постоянная Ньютона  $G_N = 1$  являются безразмерными величинами. Распределение материи в астрофизическом объекте – сферически симметричное. Тензор энергии-импульса выбран в приближении идеальной паскалевой жидкости и записывается как

$$T_{ik} = (p(r) + \mu(r)) \cdot u_i u_k - p(r) g_{ik}, \quad (2)$$

где  $p(r)$  – давление,  $\mu(r)$  – плотность вещества,  $u_i$  – 4-скорость,  $g_{ik}$  – метрический тензор.

Уравнения Эйнштейна имеют вид:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = -\kappa \cdot T_{ik}, \quad (3)$$

где  $R_{ik}$  – тензор Риччи,  $R$  – скалярная кривизна пространства,  $\kappa$  – эйнштейновская гравитационная постоянная.

В данном случае система уравнений Эйнштейна сводится к следующим трем уравнениям:

$$\varepsilon(x) = 1 - \frac{\chi}{x} \cdot \int \mu(x) \cdot x^2 dx; \quad (4)$$

$$G'' + \left( \frac{\varepsilon'}{2 \cdot \varepsilon} - \frac{1}{x} \right) \cdot G' + \left( \frac{\varepsilon'}{2 \cdot x \cdot \varepsilon} + \frac{1 - \varepsilon}{x^2 \cdot \varepsilon} \right) \cdot G = 0; \quad (5)$$

$$p' = -\frac{1}{2 \cdot \varepsilon} \cdot \left( \chi \cdot x \cdot p + \frac{1 - \varepsilon}{x} \right) \cdot (\mu + p), \quad (6)$$

где штрих означает дифференцирование по переменной  $r$ ,  $\varepsilon(x) = \frac{F(x)}{L^2(x)}$ ,  $x = \frac{r}{R}$ ,  $R$  – радиус астрофизического объекта,  $\chi = \kappa \cdot R^2$ .

Система уравнений (4)-(6) – нелинейная дифференциальная система уравнений второго порядка. Данная система дополняется до замкнутой введением многоступенчатой функции распределения плотности массы. Эта функция должна вести себя как убывающая и не иметь особенности в центре. Введем функцию плотности массы в виде сглаженной и непрерывной функции, содержащей параметры  $a$  и  $b$ , которые контролируют количество слоев внутренней структуры астрофизического объекта:

$$\mu(x) = \mu_0 \cdot \left( 1 - b \cdot x + \frac{\sin(a \cdot (x + 1))^2}{a} \right), \quad (7)$$

где  $\mu_0$  - центральная плотность. Ниже изображен график (7), построенный для значений параметров  $a = 10$  и  $b = 1$  (см. Рис.1). Внутренняя структура при этом имеет трехслойное распределение вещества.

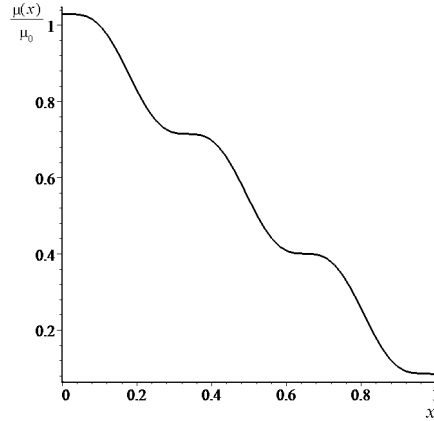


Рис.1. Плотность массы.

С примером функции плотности массы отличной от рассматриваемой можно ознакомиться, например, в [1].

На систему уравнений (4)-(6) можно наложить условия сшивки с внешним решением. Для каждого из уравнения они имеют, соответственно, следующий вид:

$$\varepsilon(x = 1) = 1 - \eta; \quad G(x = 1) = \sqrt{1 - \eta}; \quad (8)$$

$$G'(x = 1) = \frac{\eta}{2 \cdot \sqrt{1 - \eta}}; \quad p(x = 1) = 0, \quad (9)$$

где  $\eta = \frac{2m}{R}$  - компактность астрофизического объекта.

Рассмотрим нейтронную звезду и вычислим ее компактность. Воспользовавшись условием (8), получим уравнение на параметры  $a, b$ , решение которого будет зависеть от массы звезды  $m$ , радиуса  $R$ , центральной плотности  $\rho_0$ , связанной с плотностью  $\mu_0$  соотношением  $\mu_0 = \rho_0 \cdot c^2$ , после перехода в систему единиц, где скорость света  $c \neq 1$ :

$$\int_0^1 \mu(x) x^2 dx = \frac{2m}{\chi R}, \quad (10)$$

Все величины переведены в систему СГС. Возьмем характерные физические параметры нейтронной звезды:

$$R = 1.5 \cdot 10^6 \text{ cm}, \quad m = 1.9891 \cdot 10^{33} \text{ g}, \quad \rho_0 = 4.8064 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3. \quad (11)$$

Тогда решение уравнения (9) дает  $a = 10$ , параметр  $b = 1$ . Для определения плотности массы  $\mu_0$  и давления  $p_0$  в центре используем параметрическое уравнение состояния вырожденного ферми-газа:

$$\rho_0 = (\sinh(\xi) - \xi) K/c^2; \quad p_0 = (\sinh(\xi) - 8 \sinh(\xi/2) + 3\xi) K/3, \quad (12)$$

где  $K = m^4 c^5 / (32\pi^2 \hbar^3)$ ,  $m$  - масса покоя фермиона,  $c$  - скорость света,  $\hbar$  - постоянная Планка, параметр  $0 < \xi < \infty$ . В результате получим при  $\xi = 1$ :

$$\rho_0 = 1.0038 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3, \quad p_0 = 1.07 \cdot 10^{33} \text{ dyne/cm}^2. \quad (13)$$

Вычислим с помощью (9) компактность  $\eta$ , соответствующую значению параметра  $a = 10$  и  $\mu_0 = 1.0038 \cdot 10^{14} \cdot c^2$ . В итоге получаем  $\eta \approx 0.16$ . Для сравнения, характерное значение компактности, вычисленное с помощью наблюдательных данных  $\eta \approx 0.1$ .

Таким образом, взяв многоступенчатую функцию плотности массы в виде (7) мы, на примере нейтронной звезды, вычислили значение компактности, соответствующее нашей модели.

Кроме того, необходимо добавить, что такая модель со слоистой структурой обладает алгебраическим типом по Петрову, меняющимся в каждом слое. Другими словами, в каждом слое существует точка, где первая и вторая производные плотности массы обращаются в ноль. В частности, такой точкой оказывается центр исследуемого шара. В окрестностях таких точек выражение для метрической функции  $G(\zeta)$  с большой точностью будет внутренним решением Шварцшильда, для каждого слоя имея, естественно, свой набор постоянных интегрирования. Это означает принадлежность гравитационного поля в этих окрестностях к алгебраическому

типу 0 (конформно-плоскому). В остальных точках модели гравитационное поле принадлежит типу  $D$ . Таким образом, внутри нашей слоистой модели алгебраический тип гравитационного поля меняется: в центре (и в его окрестности) есть тип 0 (конформно-плоский), переходя затем в тип  $D$ . С точки зрения теории фазовых переходов здесь реализуется фазовый переход 2-го рода, где фазами “вещества” выступают алгебраические типы гравитационного поля [2], а с точки зрения теории катастроф — катастрофа сборки. Далее, во втором слое происходит опять фазовый переход 2-го рода в гравитационном поле из типа  $D$  в тип 0, возвращаясь затем к типу  $D$  и т.д. до поверхности шара. Внешнее решение Шварцшильда, как известно, принадлежит к типу  $D$ . Другими словами, при перемещении от центра шара к периферии наблюдается чередование алгебраических типов гравитационного поля через фазовые переходы 2-го типа.

В рассматриваемой модели находим также подтверждение теоремы [3], утверждающей, что сферически симметричное гравитационное поле может принадлежать только к двум алгебраическим типам: 0 и  $D$ .

## Литература

- [1] Осипов А.Ю. *Модель звезды со слоистой структурой* // Материалы Четырнадцатой Всероссийской научной конференции студентов-физиков и молодых ученых ВНКСФ-14. - Уфа: Изд-во АСФ России. 2008. С. 62.
- [2] Баранов А.М. *Теория катастроф и алгебраическая классификация Петрова* // Сб. тезисов юбилейной научн. конфер. физ. фак-та КГУ (200 лет Казанскому университету, Казань, ноябрь 2004). - Казань, 2004. - С.107.
- [3] Баранов А.М. *Об алгебраическом типе сферически симметричного гравитационного поля* // Вестник Красноярского государственного университета. Физические и математические науки. – 2006. – №1. – С. 5-9.

## ОБ ОДНОЙ ДВУСЛОЙНОЙ МОДЕЛИ ГРАВИТИРУЮЩЕГО СТАТИЧЕСКОГО ШАРА

А.М. Баранов<sup>1</sup>, А.А. Шейкин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Сибирский федеральный университет, Россия, Красноярск, <sup>2</sup>Сибирский федеральный университет, Россия, Красноярск

<sup>1</sup>E-mail: alex\_m\_bar@mail.ru, <sup>2</sup>E-mail: anton.shejkin@gmail.com

В работе рассматривается внутренняя двуслойная модель гравитирующего статического шара, метрика для которой записывается как

$$ds^2 = \varepsilon L^2 dt^2 + 2 L dt dr - r^2 d\Omega^2.$$

Гравитационные уравнения Эйнштейна имеют вид:

$$G_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu},$$

где  $G_{\mu\nu}$  - тензор Эйнштейна, а  $T_{\mu\nu}$  - тензор энергии-импульса для идеальной паскалевой жидкости,

$$T_{\mu\nu} = (\mu + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu},$$

где  $\mu(r)$  - плотность массы,  $p(r)$  - давление,  $u_\mu$  - 4-вектор скорости (в сопутствующей системе отсчета),  $g_{\mu\nu}$  - метрический тензор.

Система уравнений Эйнштейна для данной метрики сводится к трем уравнениям:

$$\varepsilon = 1 - \frac{2}{r} \int 4\pi r^2 \mu(r) dr; \quad (1)$$

$$L'' + \left( \frac{3\varepsilon'}{2\varepsilon} - \frac{1}{r} \right) L' + \left( \frac{\varepsilon''}{2\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon r^2} - \frac{1}{r^2} \right) L = 0; \quad (2)$$

$$\frac{2L'}{rL} = 8\pi \left( \frac{\mu + p}{\varepsilon} \right). \quad (3)$$

Эта система дополняется до замкнутой заданием закона распределения плотности массы:

$$\mu(r) = \begin{cases} \mu_0, & r < R_0; \\ \mu_0 R_0^2 / r^2, & R_0 < r < R, \\ 0, & R < r. \end{cases}$$

Такое распределение массы задает шар с однородным ядром радиуса  $R_0$  и оболочкой толщины  $R - R_0$ , плотность которой спадает с расстоянием по закону обратных квадратов.

Функция  $\varepsilon(r)$  тогда может быть найдена в явном виде:

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} 1 - 2M_0r^2/R_0^3, & r < R_0; \\ 1 - 6M_0/R_0 + 4M_0/r, & R_0 < r < R; \\ 1 - 2M/r, & r > R. \end{cases}$$

где  $R_0$  - радиус, а  $M_0$  - масса однородного ядра шара,  $R, M$  - радиус и интегральная масса всего шара.

Исходя из вида функции  $\varepsilon(r)$ , можно заключить, что решением для однородного ядра будет внутреннее решение Шварцшильда, функция  $L$  для которого имеет вид:

$$L(r) = C_1 + \frac{C_2}{\sqrt{1 - 2M_0r^2/R_0^3}}$$

Уравнение же поля оболочки шара нужно исследовать подробнее. Гравитационное поле внутри оболочки шара есть суперпозиция поля, создаваемого самой оболочкой, и поля, создаваемого ядром шара. Мы предположим, что ядро вносит малый вклад в гравитационное поле, т.е. отношение  $M_0/r$  мало. Подставим функцию  $\varepsilon(r)$  для оболочки в уравнение (2) и, раскладывая ее в ряд по  $M_0/r$ , ограничимся только линейными членами:

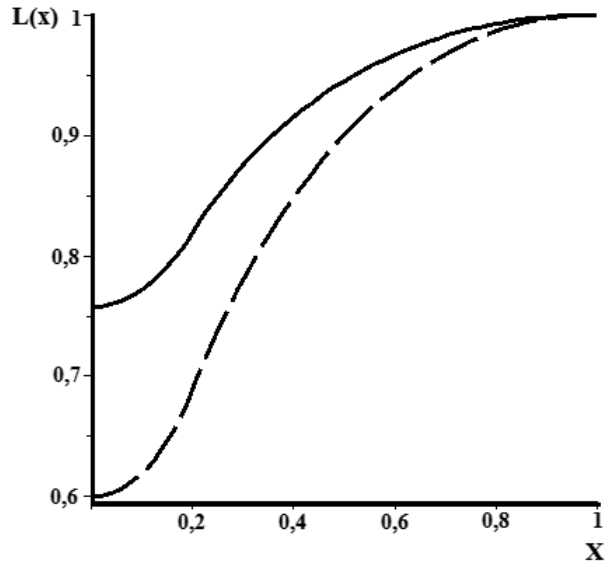


Рис.1. График зависимости метрической функции  $L$  от  $x = r/R$ .  $R_0 = 0.2R$ , пунктир -  $b = 0.6$ , сплошная линия -  $b = 0.8$ .

$$L'' - \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{6M_0}{R_0} \right) L' + \frac{6M_0}{rR_0^2} L = 0. \tag{4}$$

Приведем это уравнение к каноническому виду, сделав замену функции:

$$L = f(r) \exp\left(-\frac{3M_0}{r}\right).$$

Уравнение (4) тогда запишется как:

$$f'' - \frac{3}{4r^2} \left( \left( 1 - \frac{6M_0}{R_0} \right)^2 - \frac{8M_0}{R_0} \right) f = 0. \tag{5}$$

Это уравнение может быть сведено к уравнению Уиттекера, и его решением являются соответствующие специальные функции (функции Уиттекера). Разлагая их в ряд по  $M_0/r$  в окрестности нуля (согласно сделанному ранее предположению, что это отношение мало), получим итоговое выражение для  $L$  :

$$L(r) = C_3 \left( 1 - \frac{(1 - b^2)(b - 1)R_0}{(2b + 1)r} \right) r^{1-b} + C_4 \left( 1 - \frac{(1 - b^2)(b + 1)R_0}{(2b - 1)r} \right) r^{1+b}, \tag{6}$$

где  $b = \sqrt{1 - 6M_0/R_0}$ .

Константы  $C$  можно найти, производя гладкую сшивку решения для ядра с оболочечным при  $r = R_0$  и оболочечного - с внешним решением Шварцшильда при  $r = R$ . Уравнения сшивки имеют вид:

$$C_3 \left( 1 - \frac{(1-b^2)(b-1)}{(2b+1)} \right) + C_4 \left( 1 - \frac{(1-b^2)(b+1)}{(2b-1)} \right) = C_1 + \frac{3C_2}{\sqrt{6+3b^2}}, \tag{7}$$

$$-C_3 \left( \frac{(1+b+b^3)(b-1)}{(2b+1)} \right) + C_4 \left( \frac{(1+b+b^3)(b+1)}{(2b-1)} \right) = \frac{9C_2}{2} \frac{1-b^2}{(6+3b^2)^{3/2}}, \tag{8}$$

$$C_3 \left( 1 - \frac{(1-b^2)(b-1)R_0}{(2b+1)R} \right) R^{1-b} + C_4 \left( 1 - \frac{(1-b^2)(b+1)R_0}{(2b-1)R} \right) R^{1+b} = 1, \tag{9}$$

$$-C_3 \left( \frac{R(2b^2-b-1) + R_0(b-b^3+b^4-b^2)}{2b+1} \right) R^{-1-b} + C_4 \left( \frac{(R(2b-1) + R_0(b^3-b))(b+1)}{2b+1} \right) R^{-1+b} = 0. \tag{10}$$

График зависимости метрической функции  $L$  от безразмерной переменной  $x = r/R$  для различных значений  $b$  приведен на рис. 1.

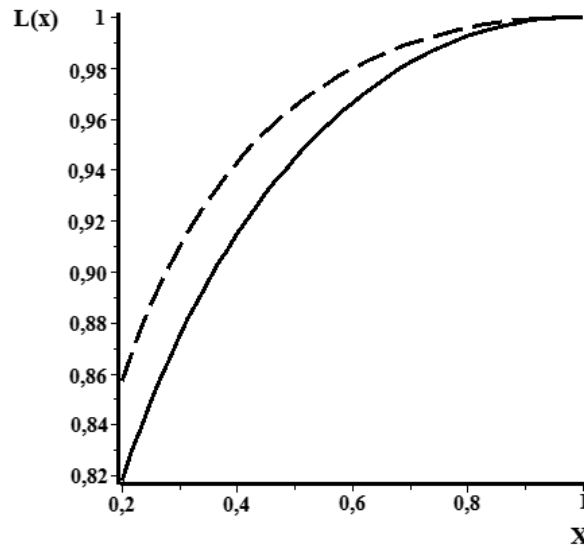


Рис.2. Сравнение метрической функции  $L$ , вычисленной аналитически (сплошная линия) и численно (пунктир);  $b = 0.8$ ,  $R_0 = 0.2R$ ,  $x = r/R$ .

Для того, чтобы оценить точность сделанного приближения, построим численное решение уравнения (4) на промежутке  $[R_0, R]$  и сравним его с найденным аналитическим решением (рис. 2):

Как видно, найденное аналитическое выражение для метрической функции  $L$  дает завышенные значения по сравнению с истинным, поскольку гравитационное поле, создаваемое однородным ядром, в оболочке предполагается слабым. Однако в случае, когда масса однородного ядра не слишком велика по сравнению с общей массой шара, найденное решение удовлетворительно описывает гравитационное поле внутри шара.

Согласно теореме [1] сферически симметричное гравитационное поле может принадлежать к алгебраическим типам либо  $D$ , либо  $0$ . Рассматривая послойно данную модель, приходим к чередованию типов гравитационных полей (согласно алгебраической классификации Петрова): поле ядра принадлежит к типу  $0$  (внутреннее решение Шварцшильда); поле, отвечающее оболочечному решению – к типу  $D$ , а внешнее поле Шварцшильда – типу  $D$ , согласно теореме [1]. При этом переход между типами  $0$  и  $D$  на границе ядра и оболочкой есть фазовый переход второго рода в гравитационном поле, сопровождающийся, в частности, скачкообразным изменением ранга матрицы Вейля [2].



## Литература

- [1] Баранов А. М. *Об алгебраическом типе сферически симметричного гравитационного поля* // Вестник Красноярского государственного университета. Физико-математические науки. – 2006. – №1. – С. 5-9.
- [2] Баранов А. М. *Теория катастроф и алгебраическая классификация Петрова* // Сб. тезисов юбилейной научн. конфер. физ. фак-та КГУ (200 лет Казанскому университету, Казань, ноябрь 2004). - Казань, 2004. - С.107.

## О ВОЗМОЖНОСТИ ОБНАРУЖЕНИЯ КЛАСТЕРОВ ПЕРВИЧНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР

К.М. Белоцкий<sup>1</sup>, А.А. Кириллов<sup>2</sup>, С.Г. Рубин<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Россия,  
Москва

<sup>1</sup>E-mail: K-Belotsky@yandex.ru, <sup>2</sup>E-mail: Kirillov-AA@yandex.ru, <sup>3</sup>E-mail: SergeiRubin@list.ru

Среди множества нерешенных проблем астрофизики существуют две, казалось бы, не связанные проблемы — механизм образования сверхмассивных черных дыр (СМЧД) в ядрах галактик [1, 2, 3, 4] и существование неидентифицированных источников гамма-излучения, обнаруженных гамма-обсерваториями CGRO<sup>1</sup> [5] и Fermi<sup>2</sup> [6]. Отметим в связи с этим, что в большинстве моделей формирования СМЧД трудно избежать множественного рождения менее массивных черных дыр. Обнаружение последних крайне затруднительно и наблюдательные данные противоречивы.

Отличительной особенностью выбранного нами сценария образования первичных черных дыр [1, 2, 3] является формирование черных дыр с характерной кластерной структурой. В данном сценарии ПЧД образуются в результате коллапса замкнутых полевых стенок задолго до начала процесса звездообразования. Массы ПЧД варьируются в широких пределах в зависимости от выбранных начальных условий. Так, в нашем случае, рассчитанный численно интервал масс ПЧД есть  $10^{-23}M_{\odot} \lesssim M \lesssim 10M_{\odot}$ . Наиболее массивные ПЧД образуют в дальнейшем СМЧД в центрах галактик, а ПЧД промежуточных масс образуют кластеры внутри галактик. Предполагается, что именно кластеры черных дыр промежуточных масс могут наблюдаться как гамма-источники, зарегистрированные Fermi. Нами показано, что кластеры черных дыр промежуточных масс, интенсивно излучающих свет за счет механизма испарения Хоукинга [7], могут детектироваться как точечные гамма-источники. Основной вклад в интенсивность дают ПЧД малых масс, численность которых поддерживается за счет уменьшения массы более массивных ПЧД в результате испарения.

В результате, удастся не только объяснить происхождение неидентифицированных источников гамма-излучения, но и указать способ обнаружения черных дыр промежуточных масс.

## Литература

- [1] В.И. Докучаев, Ю.Н. Ерошенко, С.Г. Рубин. *Астрон. журн.*, **85** (10), 867–878 (2008).
- [2] M.Y. Khlopov, S.G. Rubin, A.S. Sakharov. *Gravitation and Cosmology*, **S6**, 51–58 (2000).
- [3] С.Г. Рубин, А.С. Сахаров, М.Ю. Хлопов. *ЖЭТФ*, **119** (6), 1067–1076 (2001).
- [4] B.J. Carr et al. *Phys. Rev. D*, **81**, 104019 (2010).
- [5] J.-M. Casandjian, I.A. Grenier. *Astronomy & Astrophysics*, **489** (2), 849–883 (2008).
- [6] The Fermi LAT Collaboration. arXiv: astro-ph/1002.2280v1 (2010).
- [7] S.W. Hawking. *Commun. math. Phys.*, **43**, 199–220 (1975).

<sup>1</sup>Compton Gamma-Ray Observatory

<sup>2</sup>Fermi Gamma-ray Space Telescope

## ELECTROMAGNETIC FIELD WITH INDUCED MASSIVE TERM: CASE WITH SPINOR FIELD

B. Saha<sup>1</sup>, Yu.P. Rybakov<sup>2</sup>, G.N. Shikin<sup>3</sup>, Yu.A. Popov<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Joint Institute for Nuclear Research, Russia, Dubna,  
<sup>2,3,4</sup>Peoples' Friendship University of Russia, Russia, Moscow

<sup>1</sup>E-mail: bijan@jinr.ru, <sup>4</sup>E-mail: soliton4@mail.ru

**Annotation.** We consider an interacting system of spinor and electromagnetic field, explicitly depending on the electromagnetic potentials, i.e., interaction with broken gauge invariance. The Lagrangian for interaction is chosen in such a way that the electromagnetic field equation acquires an additional term, which in some cases is proportional to the vector potential of the electromagnetic field. This equation can be interpreted as the equation of motion of photon with induced non-trivial rest-mass. This system of interacting spinor and scalar fields is considered within the scope of Bianchi type-I (BI) cosmological model. It is shown that, as a result of interaction the electromagnetic field vanishes at  $t \rightarrow \infty$  and the isotropization process of the expansion takes place.

### Introduction

Though the triumphs of Maxwellian electromagnetism and quantum electrodynamics set the rest mass of photon to be trivial, the hypothesis of possible nontrivial photon mass has long been discussed in the literature [1, 2, 3, 4]. The modern experimental data do not contradict this hypothesis [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. So it is interesting to consider some additional arguments for or against this hypothesis. As one of such arguments can serve experimental data of modern observational cosmology, which witnesses the isotropy of the Universe. It is interesting to combine this fact with the description of matter by means of system of interacting fields including the electromagnetic one. In a recent paper [14] we considered one of the simplest systems comprising with mass-less scalar and electromagnetic fields and study the influence of such interaction on the expansion of the Universe in the asymptotic region. In that paper it was shown that if one consider only electromagnetic field, the two of the three spatial components vector potential are either constant or zero and the space-time in this case does not allow isotropization.

In the recent years system with nonlinear spinor field was extensively studied in different cosmological models and it was shown that the nonlinear spinor field plays very important role in (i) isotropization of initially anisotropic space-time, (ii) formation of singularity free cosmological solutions, and (iii) explaining late-time acceleration [15, 16, 17, 18, 19]. In connection with this in this paper we consider an system of spinor and electromagnetic fields within the scope of a Bianchi type-I cosmological model and examine the influence of such interaction on the expansion of the Universe in the asymptotic region.

### Basic equations and their general solutions

We choose the Lagrangian of the interaction electromagnetic and spinor fields within the framework of a BI cosmological gravitational field in the form

$$\mathcal{L} = \frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right] - m\bar{\psi}\psi + \frac{1}{2}K(I)\mathcal{D}(S), \quad (1)$$

with  $I = A_\lambda A^\lambda$  and  $S = \bar{\psi}\psi$ . We consider the BI metric in the form

$$ds^2 = e^{2\alpha}dt^2 - e^{2\beta_1}dx^2 - e^{2\beta_2}dy^2 - e^{2\beta_3}dz^2. \quad (2)$$

The metric functions  $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  depend on  $t$  only and obey the coordinate condition

$$\alpha = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3. \quad (3)$$

Written in the form

$$R_\mu^\nu = -\kappa\left(T_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu T\right), \quad (4)$$

the Einstein equations corresponding to the metric (2) in account of (3) read

$$e^{-2\alpha}\left(\ddot{\alpha} - \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2\right) = -\kappa\left(T_0^0 - \frac{1}{2}T\right), \quad (5a)$$

$$e^{-2\alpha}\ddot{\beta}_1 = -\kappa\left(T_1^1 - \frac{1}{2}T\right), \quad (5b)$$

$$e^{-2\alpha}\ddot{\beta}_2 = -\kappa\left(T_2^2 - \frac{1}{2}T\right), \quad (5c)$$

$$e^{-2\alpha}\ddot{\beta}_3 = -\kappa\left(T_3^3 - \frac{1}{2}T\right), \quad (5d)$$

where over dot means differentiation with respect to  $t$  and  $T_\nu^\mu$  is the energy-momentum tensor of the material field.

Variation of (1) with respect to electromagnetic field gives

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) - \mathcal{D}(S) \frac{dK}{dI} A^\mu = 0. \quad (6)$$

The spinor field equation corresponding to the metric (1) has the form

$$i\gamma^\mu \nabla_\mu \psi - m\psi + \frac{1}{2} K(I) \frac{d\mathcal{D}}{dS} \psi = 0, \quad (7a)$$

$$i\nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} - \frac{1}{2} K(I) \frac{d\mathcal{D}}{dS} \bar{\psi} = 0. \quad (7b)$$

The energy-momentum tensor of the interacting matters fields has the form

$$\begin{aligned} T_\mu^\nu &= -F_{\mu\eta} F^{\nu\eta} + \frac{i}{4} g^{\nu\rho} (\bar{\psi} \gamma_\rho \nabla_\mu \psi + \bar{\psi} \gamma_\mu \nabla_\rho \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma_\rho \psi - \nabla_\rho \bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \\ &+ \mathcal{D}(S) \frac{dK}{dI} A_\mu A^\nu - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (8)$$

We consider the case when the electromagnetic and scalar fields are the functions of  $t$  only. Taking this in mind we choose the vector potential in the following way:

$$A_\mu = (0, A_1(t), A_2(t), A_3(t)). \quad (9)$$

In this case the electromagnetic field tensor  $F^{\mu\nu}$  has only three non-vanishing components, namely

$$F_{01} = \dot{A}_1, \quad F_{02} = \dot{A}_2, \quad F_{03} = \dot{A}_3. \quad (10)$$

On account of (9) and (10) we now have

$$I = A_\lambda A^\lambda = -A_1^2 e^{-2\beta_1} - A_2^2 e^{-2\beta_2} - A_3^2 e^{-2\beta_3}, \quad (11)$$

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -2e^{-2\alpha} (\dot{A}_1^2 e^{-2\beta_1} + \dot{A}_2^2 e^{-2\beta_2} + \dot{A}_3^2 e^{-2\beta_3}). \quad (12)$$

For electromagnetic field from (6) we find

$$\frac{d}{dt} (\dot{A}_1 e^{-2\beta_1}) + \mathcal{D}(S) \frac{dK}{dI} e^{2\alpha-2\beta_1} A_1 = 0, \quad (13a)$$

$$\frac{d}{dt} (\dot{A}_2 e^{-2\beta_2}) + \mathcal{D}(S) \frac{dK}{dI} e^{2\alpha-2\beta_2} A_2 = 0, \quad (13b)$$

$$\frac{d}{dt} (\dot{A}_3 e^{-2\beta_3}) + \mathcal{D}(S) \frac{dK}{dI} e^{2\alpha-2\beta_3} A_3 = 0. \quad (13c)$$

Let us now go back to the spinor field equation. The spinor field equation for the metric (2) takes the form

$$ie^{-\alpha} \bar{\gamma}_0 \left( \partial_t + \frac{\dot{\alpha}}{2} \right) \psi - m\psi + \frac{1}{2} K(I) \frac{d\mathcal{D}}{dS} \psi = 0, \quad (14)$$

where  $\bar{\gamma}_\mu$  is the Dirac matrices for flat space-time. Equation (14) can be rewritten as

$$\dot{\psi}_a + \frac{\dot{\alpha}}{2} \psi_a + ie^\alpha \left( m - \frac{1}{2} K(I) \frac{d\mathcal{D}}{dS} \right) \psi_a = 0, \quad a = 1, 2, \quad (15a)$$

$$\dot{\psi}_b + \frac{\dot{\alpha}}{2} \psi_b - ie^\alpha \left( m - \frac{1}{2} K(I) \frac{d\mathcal{D}}{dS} \right) \psi_a = 0, \quad b = 3, 4. \quad (15b)$$

Solving (15) we find the following components of the spinor fields

$$\psi_a = C_a \exp \left[ -\frac{\alpha}{2} - i \int \left( m - \frac{1}{2} K(I) \frac{d\mathcal{D}}{dS} \right) e^\alpha dt \right], \quad C_a = \text{const.} \quad (16a)$$

$$\psi_b = C_b \exp \left[ -\frac{\alpha}{2} + i \int \left( m - \frac{1}{2} K(I) \frac{d\mathcal{D}}{dS} \right) e^\alpha dt \right], \quad C_b = \text{const.} \quad (16b)$$

From (16) we also find

$$S = S_0 e^{-\alpha}. \quad (17)$$

Finally, let us solve the Einstein equations. In doing so, let us first write the non trivial components of the energy momentum tensor of material fields. In view of (15) from (8) we find

$$T_0^0 = mS - \frac{1}{2}K(I)\mathcal{D}(S) + \frac{1}{2}\left(\dot{A}_1^2 e^{-2\beta_1} + \dot{A}_2^2 e^{-2\beta_2} + \dot{A}_3^2 e^{-2\beta_3}\right)e^{-2\alpha}, \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} T_1^1 &= \frac{1}{2}K(I)\left(\frac{d\mathcal{D}}{dS}S - \mathcal{D}(S)\right) + \frac{1}{2}\left(\dot{A}_1^2 e^{-2\beta_1} - \dot{A}_2^2 e^{-2\beta_2} - \dot{A}_3^2 e^{-2\beta_3}\right)e^{-2\alpha} \\ &- \mathcal{D}\frac{dK}{dI}A_1^2 e^{-2\beta_1}, \end{aligned} \quad (18b)$$

$$\begin{aligned} T_2^2 &= \frac{1}{2}K(I)\left(\frac{d\mathcal{D}}{dS}S - \mathcal{D}(S)\right) + \frac{1}{2}\left(\dot{A}_2^2 e^{-2\beta_2} - \dot{A}_3^2 e^{-2\beta_3} - \dot{A}_1^2 e^{-2\beta_1}\right)e^{-2\alpha} \\ &- \mathcal{D}\frac{dK}{dI}A_2^2 e^{-2\beta_2}, \end{aligned} \quad (18c)$$

$$\begin{aligned} T_3^3 &= \frac{1}{2}K(I)\left(\frac{d\mathcal{D}}{dS}S - \mathcal{D}(S)\right) + \frac{1}{2}\left(\dot{A}_3^2 e^{-2\beta_3} - \dot{A}_1^2 e^{-2\beta_1} - \dot{A}_2^2 e^{-2\beta_2}\right)e^{-2\alpha} \\ &- \mathcal{D}\frac{dK}{dI}A_3^2 e^{-2\beta_3}, \end{aligned} \quad (18d)$$

$$T_1^2 = \left(\dot{A}_1\dot{A}_2 e^{-2\alpha} - \mathcal{D}\frac{dK}{dI}A_1A_2\right)e^{-2\beta_1}. \quad (18e)$$

$$T_2^3 = \left(\dot{A}_2\dot{A}_3 e^{-2\alpha} - \mathcal{D}\frac{dK}{dI}A_2A_3\right)e^{-2\beta_2}. \quad (18f)$$

$$T_3^1 = \left(\dot{A}_3\dot{A}_1 e^{-2\alpha} - \mathcal{D}\frac{dK}{dI}A_3A_1\right)e^{-2\beta_3}. \quad (18g)$$

From (18) one also finds

$$T = mS + \frac{3}{2}K(I)\frac{d\mathcal{D}}{dS}S - 2K(I)\mathcal{D}(S) - \mathcal{D}\frac{dK}{dI}\left(A_1^2 e^{-2\beta_1} + A_2^2 e^{-2\beta_2} + A_3^2 e^{-2\beta_3}\right). \quad (19)$$

In view of (18) and (19) system of Einstein equations now takes the form

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2 &= -\frac{\kappa e^{2\alpha}}{2}\left[\left(mS + K\mathcal{D} - \frac{3}{2}K\frac{d\mathcal{D}}{dS}S\right) + \left(\dot{A}_1^2 e^{-2\alpha} + \mathcal{D}\frac{dK}{dI}A_1^2\right)e^{-2\beta_1}\right. \\ &\left. + \left(\dot{A}_2^2 e^{-2\alpha} + \mathcal{D}\frac{dK}{dI}A_2^2\right)e^{-2\beta_2} + \left(\dot{A}_3^2 e^{-2\alpha} + \mathcal{D}\frac{dK}{dI}A_3^2\right)e^{-2\beta_3}\right], \end{aligned} \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_1 &= -\frac{\kappa e^{2\alpha}}{2}\left[-\left(mS + \frac{1}{2}K\frac{d\mathcal{D}}{dS}S - K\mathcal{D}\right) + \left(\dot{A}_1^2 e^{-2\alpha} - \mathcal{D}\frac{dK}{dI}A_1^2\right)e^{-2\beta_1}\right. \\ &\left. - \left(\dot{A}_2^2 e^{-2\alpha} - \mathcal{D}\frac{dK}{dI}A_2^2\right)e^{-2\beta_2} - \left(\dot{A}_3^2 e^{-2\alpha} - \mathcal{D}\frac{dK}{dI}A_3^2\right)e^{-2\beta_3}\right], \end{aligned} \quad (20b)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_2 &= -\frac{\kappa e^{2\alpha}}{2}\left[-\left(mS + \frac{1}{2}K\frac{d\mathcal{D}}{dS}S - K\mathcal{D}\right) + \left(\dot{A}_2^2 e^{-2\alpha} - \mathcal{D}\frac{dK}{dI}A_2^2\right)e^{-2\beta_2}\right. \\ &\left. - \left(\dot{A}_3^2 e^{-2\alpha} - \mathcal{D}\frac{dK}{dI}A_3^2\right)e^{-2\beta_3} - \left(\dot{A}_1^2 e^{-2\alpha} - \mathcal{D}\frac{dK}{dI}A_1^2\right)e^{-2\beta_1}\right], \end{aligned} \quad (20c)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_3 &= -\frac{\kappa e^{2\alpha}}{2}\left[-\left(mS + \frac{1}{2}K\frac{d\mathcal{D}}{dS}S - K\mathcal{D}\right) + \left(\dot{A}_3^2 e^{-2\alpha} - \mathcal{D}\frac{dK}{dI}A_3^2\right)e^{-2\beta_3}\right. \\ &\left. - \left(\dot{A}_1^2 e^{-2\alpha} - \mathcal{D}\frac{dK}{dI}A_1^2\right)e^{-2\beta_1} - \left(\dot{A}_2^2 e^{-2\alpha} - \mathcal{D}\frac{dK}{dI}A_2^2\right)e^{-2\beta_2}\right]. \end{aligned} \quad (20d)$$

The triviality of off-diagonal components of the Einstein tensor for BI metric leads to

$$T_2^1 = T_3^2 = T_1^3 = 0, \quad (21)$$

from which one finds

$$\frac{\dot{A}_1}{A_1}\frac{\dot{A}_2}{A_2} = \frac{\dot{A}_2}{A_2}\frac{\dot{A}_3}{A_3} = \frac{\dot{A}_3}{A_3}\frac{\dot{A}_1}{A_1} = \mathcal{D}\frac{dK}{dI}e^{2\alpha}. \quad (22)$$

From (22) one easily finds

$$\frac{\dot{A}_1}{A_1} = \frac{\dot{A}_2}{A_2} = \frac{\dot{A}_3}{A_3}, \quad (23)$$

leading to the following relations between the three components of vector potential:

$$A_1 = A, \quad A_2 = C_{21}A, \quad A_3 = C_{31}A, \quad (24)$$

with  $C_{21}$  and  $C_{31}$  being constants of integration.

In view of (21) and (23) one easily finds that

$$\ddot{\alpha} - \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2 = -\frac{\kappa e^{2\alpha}}{2} \left[ \left( mS + K\mathcal{D} - \frac{3}{2}K \frac{d\mathcal{D}}{dS} S \right) - 2\mathcal{D}I \frac{dK}{dI} \right], \quad (25a)$$

$$\ddot{\beta}_1 = \ddot{\beta}_2 = \ddot{\beta}_3 = \frac{\kappa e^{2\alpha}}{2} \left[ mS + \frac{1}{2}K \frac{d\mathcal{D}}{dS} S - K\mathcal{D} \right]. \quad (25b)$$

In view of (23) from (13) it can be shown that

$$\dot{\beta}_1 = \dot{\beta}_2 = \dot{\beta}_3. \quad (26)$$

In view of (25b) and (26) one concludes that the  $\beta$ s differ by some constant only, namely

$$\beta_1 = \beta, \quad \beta_2 = \beta + \beta_{21}, \quad \beta_3 = \beta + \beta_{31}, \quad (27)$$

with  $b$ ,  $\beta_{21}$  and  $\beta_{31}$  being some arbitrary constants. Since these constants leads to the different scaling along different axis, there is only one option left, it is to set  $\beta_{21} = \beta_{31} = 0$ . That means the current model allows isotropization. Inserting  $\mathcal{D} \frac{dK}{dI} e^{2\alpha}$  into (13) one finds the equation for  $A$ :

$$A\ddot{A} + \dot{A}^2 - 2\dot{\beta}A\dot{A} = 0, \quad (28)$$

with the solution

$$A = \sqrt{C_1 \int e^{2\beta} dt + C_2}, \quad (29)$$

where  $C_1$  and  $C_2$  are arbitrary constants.

On account of (24) and (27) one now finds

$$I = -QA^2 e^{-2\beta}, \quad Q = 1 + C_{21}^2 + C_{31}^2 = \text{const.} \quad (30)$$

In view of (3), (25b) and (26) the equation (25a) can be rearranged as

$$6\dot{\beta}^2 = \kappa \left[ 2mS - \mathcal{D} \frac{d}{dI} (IK) \right] e^{2\alpha}. \quad (31)$$

In what follows, we consider some some concrete cases.

#### Massless spinor field with Heisenberg-Ivanenko nonlinearity

Let us consider the massless spinor field with Heisenberg-Ivanenko nonlinearity. Note that, in the unified nonlinear spinor theory of Heisenberg, the massive term remains absent, and according to Heisenberg, the particle mass should be obtained as a result of quantization of spinor prematter [20]. In the nonlinear generalization of classical field equations, the massive term does not possess the significance that it possesses in the linear one, as it by no means defines total energy (or mass) of the nonlinear field system. Thus without losing the generality we can consider the massless spinor field putting  $m = 0$ . For Heisenberg-Ivanenko nonlinearity we have  $\mathcal{D}(S) = \sigma S^2$ . In this case Eq. (25b) takes the form

$$\ddot{\beta} = 0, \quad (32)$$

with the solution

$$\beta = bt + b_1, \quad (33)$$

where  $b$  and  $b_1$  are arbitrary constants. In view of (33) Eq. (34) now reads

$$A\ddot{A} + \dot{A}^2 - 2bA\dot{A} = 0. \quad (34)$$

The equation (34) allows the following solution:

$$A = \sqrt{e^{2bt} - C}, \quad (35)$$

Here  $C$  is an arbitrary constant. In what follows, we consider a specific solution to the Eq. (34):

$$A = De^{bt}, \quad (36)$$

with  $D$  being an arbitrary constant. Inserting (36) into (30) one finds

$$I = -\bar{Q}D^2, \quad \bar{Q} = e^{2b_1} Q = e^{2b_1} [1 + C_{21}^2 + C_{31}^2]. \quad (37)$$

On account of (36) and  $\mathcal{D}$  from the triviality off-diagonal components of energy-momentum tensor we find

$$K = \frac{b^2}{\sigma S_0^2} I + C_3, \quad (38)$$

with  $C_3$  being some arbitrary constant. Finally inserting  $K$  from (38) into (31) one finds

$$(6 + 2\kappa\bar{Q}D^2)b^2 = \kappa\sigma S_0^2 C_3. \quad (39)$$

Equation (39) gives the relation between different constants.

#### Case with minimal coupling

Let us consider the case with minimal coupling. In this case from the Off-diagonal components of energy-momentum tensor we find

$$\dot{A}_1\dot{A}_2 = \dot{A}_2\dot{A}_3 = \dot{A}_3\dot{A}_1 = 0. \quad (40)$$

From (40) follows that at least two of the three components  $A_i$  are constant, which means only one of the components of  $F_{\mu\nu}$  is nonzero. Let us assume that  $\dot{A}_1 = \dot{A} \neq 0$ . In view of  $\dot{A}_2 = \dot{A}_3 = 0$  from the electromagnetic field equations in this case we have

$$A = C \int e^{2\beta_1} dt + C_1, \quad A_2 = \text{const.}, \quad A_3 = \text{const.}, \quad (41)$$

with  $C$  and  $C_1$  being some arbitrary constants. Components of the energy-momentum tensor in this case read

$$T_0^0 - mS = T_1^1 = -T_2^2 = -T_3^3 = \frac{C_1^2}{2} e^{2\beta_1 - 2\alpha}. \quad (42)$$

Einstein field equations in this case takes the form

$$\ddot{\alpha} - \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2 = -\frac{\varkappa C_1^2}{2} e^{2\beta_1} - \frac{m\varkappa S_0}{2} e^\alpha, \quad (43a)$$

$$\ddot{\beta}_1 = -\frac{\varkappa C_1^2}{2} e^{2\beta_1} + \frac{m\varkappa S_0}{2} e^\alpha, \quad (43b)$$

$$\ddot{\beta}_2 = \frac{\varkappa C_1^2}{2} e^{2\beta_1} + \frac{m\varkappa S_0}{2} e^\alpha, \quad (43c)$$

$$\ddot{\beta}_3 = \frac{\varkappa C_1^2}{2} e^{2\beta_1} + \frac{m\varkappa S_0}{2} e^\alpha. \quad (43d)$$

Unlike the case with interacting electromagnetic and scalar fields, in case of minimal coupling we have  $\ddot{\beta}_1 \neq \ddot{\beta}_2 = \ddot{\beta}_3$ , which shows the space-time in this case essentially anisotropic. Addition of (43b), (43c) and (43d), on account of coordinate condition, gives

$$\ddot{\alpha} = \frac{\varkappa C_1^2}{2} e^{2\beta_1} + \frac{3m\varkappa S_0}{2} e^\alpha. \quad (44)$$

In case of massless spinor field the system (43) can be easily solved to obtain

$$e^{2\beta_1} = -\frac{2\eta^2}{\varkappa C_1^2} \text{cosech}^2(\eta t), \quad \eta^2 = \text{const.}, \quad (45)$$

and

$$e^{2\alpha} = e^{2\beta_2} = e^{2\beta_3} = \sinh^2(\eta t). \quad (46)$$

Thus we see that direct interaction is essential for isotropization process of initially anisotropic space-time.

## Conclusion

Within the framework of Bianchi type-I cosmological model evolution of the initially anisotropic space-time in presence of an interacting system of spinor and electromagnetic fields is studied. It is shown that the interacting term can be viewed as effective photon mass. The present model allows asymptotic isotropization of initially anisotropic space-time.

## Литература

- [1] A.S. Goldhaber and M.M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.*, **43**, 277 (1971)
- [2] K.D. Froome and L. Essen, *The velocity of light and radio waves* Academic, NY (1969).
- [3] B.N. Taylor, H.W. Parker, and D.N. Langenberg, *Rev. Mod. Phys.*, **41**, 375 (1969).
- [4] L. de Broglie, *Theorie generale des particules a spin* Gauthier-Villars, Paris, 2 nd Ed. (1954).
- [5] A.H. Rosenfeld *et al* *Rev. Mod. Phys.*, **40**, 77 (1968).
- [6] E.R. Williams, J.E. Faller, and H. Hill, *Phys. Rev. Lett.*, **26**, 721 (1971)
- [7] R.E. Crandall, *Am. J. Phys.*, **51**, 698 (1983).
- [8] M.A. Chernikov, C.J. Gerber, H.R. Ott, and H.J. Gerber, *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 3383 (1992).

- [9] B.E. Schaefer, *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 4964 (1999).  
 [10] E. Fishbach *et al Phys. Rev. Lett.*, **73**, 514 (1994).  
 [11] L. Davis, A.S. Goldhaber, and M.M. Nieto, *Phys. Rev. Lett.*, **35**, 1402 (1975).  
 [12] R. Lakes, *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 1826 (1998).  
 [13] J. Luo, L.-C. Tu, Z.-K. Hu, and E.-J. Luan, *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 081801 (2003).  
 [14] Yu.A. Popov, Yu.P. Rybakov, G.N. Shikin, and Bijan Saha *Electromagnetic field with induced massive term: Case with spinor field* ArXiv:  
 [15] B. Saha and G.N. Shikin, *J. Math. Phys.*, **38**, 5305 (1997).  
 [16] Bijan Saha, *Phys. Rev. D*, **64**, 123501 (2001).  
 [17] Bijan Saha, *Physics of Particles and Nuclei*, **37** Suppl. 1, S13, (2006).  
 [18] Bijan Saha, *Phys. Rev. D*, **74**, 124030 (2006)  
 [19] Bijan Saha, *Physics of Particles and Nuclei*, **40**(5),656 (2009).  
 [20] W. Heisenberg, *Introduction to the unified field theory of elementary particles* (Interscience Publ., London. 1966).

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ С ВРАЩЕНИЕМ ТИПА II ПО БЬЯНКИ

Е.И. Бобровских<sup>1</sup>, В.Ф. Панов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Пермский государственный университет, Россия, Пермь, <sup>2</sup>Пермский государственный университет, Россия, Пермь

---

<sup>1</sup>E-mail: panov@psu.ru, <sup>2</sup>E-mail: panov@psu.ru

В последнее время усилился интерес к исследованию крупномасштабной анизотропии Вселенной и ее возможному вращению. В рамках общей теории относительности нами построены две космологические модели с расширением и вращением с метрикой типа II по Бьянки вида

$$ds^2 = dt^2 - 2R(t)\sqrt{b}e^{(1)}dt - R^2(t)[a(e^{(1)})^2 + (e^{(2)})^2 + (e^{(3)})^2],$$

где  $a, b - const$ ,  $e^{(1)} = dx - zdy$ ,  $e^{(2)} = dy$ ,  $e^{(3)} = dz$ . Полученные модели отличны от космологических решений [1]. У нас уравнения Эйнштейна рассматриваются в тетрадной форме. Для первой модели источниками гравитации являются анизотропная жидкость и чистое излучение. В другой модели источником гравитации является только анизотропная жидкость. Тензор энергии - импульса (ТЭИ) анизотропной жидкости имеет вид

$$T_{AB}^{(1)} = (\varepsilon + \pi)u_A u_B + (\sigma - \pi)\chi_A \chi_B - g_{AB}\pi,$$

где  $u_A = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\chi_A = (0, 1, 0, 0)$ . ТЭИ чистого излучения

$$T_{AB}^{(2)} = wk_A k_B,$$

где  $k_A = (k_0, k_1, 0, 0)$ ,  $k_0 = k_1$ . Обе космологические модели можно использовать для описания второй инфляционной стадии развития Вселенной с вращением.

## Литература

- [1] Е.В. Кувшинова. *Известия вузов. Физика*, 2004, **№5**, с. 3-6.

## КОНФОРМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В МОДЕЛЯХ КАЛУЦЫ-КЛЕЙНА С КОМПАКТИФИКАЦИЕЙ НА ТОР

С.В. Болохов<sup>1</sup>

Российский университет дружбы народов, Россия, Москва

---

<sup>1</sup>E-mail: boloh@rambler.ru, bol-rgs@yandex.ru

В работе рассмотрен класс моделей Калуцы–Клейна с компактификацией на тор, впервые исследовавшийся в работах Ю.С.Владимирова [1-5]. Основным объектом теории является D-мерное действие общего вида

$$S_D = \int d^D x \sqrt{-\det(G_{MN})} \mathcal{L}_D$$

с лагранжианом

$$\mathcal{L}_D = -\frac{R_D}{2\kappa c} + \frac{i\hbar c}{2} (\bar{\Psi} \Gamma^M \nabla_M \Psi) + h.c.,$$

Теория формулируется на фоне D-мерного псевдориманова многообразия  $\mathcal{M}_D = V_4 \times B_d$ , где  $V_4$  – 4-мерная гиперповерхность, соотносимая с физическим пространством-временем, а внутреннее пространство  $B_d$  представляет собой d-тор с планковскими масштабами компактификации. Метрический тензор представляется в тетрадном виде:  $G_{MN} = G_{(A)M} G_N^{(A)}$ , где  $G_{(A)M}$ ,  $A = 0 \dots D-1$  – локальный ортонормированный набор из D векторов в касательном пространстве  $\mathcal{T}\mathcal{M}^D$ . Неабелевы калибровочные поля определяются как коэффициенты гармонического разложения локального репера по набору экспоненциальных гармоник на торе  $B_d$ . Случаи D=8 и D=7 отвечают 8-мерной модели гравитации-сильных взаимодействий и 7-мерной модели гравитации-электрослабых взаимодействий соответственно [1-5].

Ключевым элементом данной модели является возможность использования вейлевских конформных преобразований метрики. В бозонном секторе это приводит к добавочным слагаемым в скалярной кривизне, приводящим к перенормировке пленковых масс. Учет конформного преобразования в фермионном секторе приводит к появлению добавочного массового вклада, определяемого конформным весом спинорного поля. Соотношение между собственной и конформной массами фермионов зависит от имеющихся в теории констант. При определенном их выборе удается избежать появления планковских масс. Возможен также вариант, когда масса спинорного поля оказывается целиком конформной. Данный механизм генерации масс можно рассматривать как геометрический аналог механизма Хиггса в стандартных калибровочных моделях. Отметим, что в рассматриваемой модели имеется возможность положить поле конформного фактора зависящим лишь от дополнительных координат.

## Литература

- [1] Владимир Ю. С., "Геометрофизика", Москва: БИНОМ, 2005.
- [2] Vladimirov Yu.S., Gubanov A. N., "8-Dimensional Geometric Model of Gravi-Strong Interaction" // *Gravitation and Cosmology* **4**, 193-198 (1998).
- [3] Klimenkov V. A., Vladimirov Yu. S., "Renormalization of Planck masses of vector bosons in the eight-dimensional geometric theory" // *Gravitation and Cosmology* **10**, 77-82 (2004).
- [4] Vladimirov Yu.S., Bolokhov S.V., "The mechanism of generating fermion masses in the 8-dimensional geometric theory" // *General Relativity and Gravitation*, 2005, V.37, N.12, p.2227-2238.
- [5] Владимир Ю.С., Миньков А.Г. 7-Dimensional geometric model of gravi-electroweak interactions // *Grav. and Cosmol.* 1998, V.4, N.2, p. 103-106.

### Кротовые норы - некоторые новые результаты

К.А. Бронников<sup>1</sup>

ВНИИМС, Россия, Москва

Российский университет дружбы народов, Россия, Москва

---

<sup>1</sup>E-mail: kb20@yandex.ru

В докладе предполагается обсудить ряд вопросов физики кротовых нор:

- условия существования кротовых нор с цилиндрической симметрией [1];
- модели кротовых нор с фантомной материей лишь в области сильного поля (модели с «пойманным духом» [2]);
- вопросы устойчивости статических сферически-симметричных кротовых нор со скалярными полями.

## Литература

- [1] K.A. Bronnikov and J.P.S. Lemos, *Cylindrical wormholes*, Phys. Rev. D **79**, 104019 (2009).
- [2] K.A. Bronnikov and S.V. Sushkov, *Trapped ghosts: a new class of wormholes*, Class. Quantum Grav. **27**, 095022 (2010).



Notes on wormhole existence in scalar-tensor and  $f(R)$  gravityK.A. Bronnikov<sup>1</sup>, M.V. Skvortsova<sup>2</sup>, A.A. Starobinsky<sup>3</sup><sup>1</sup>Center of Gravitation and Fundamental Metrology, VNIIMS, Russia, Moscow,<sup>2</sup>Institute of Gravitation and Cosmology, PFUR, Russia, Moscow,<sup>3</sup>Landau Institute for Theoretical Physics of RAS, Russia, Moscow

---

<sup>1</sup>E-mail: kb20@yandex.ru, <sup>2</sup>E-mail: milenas577@mail.ru, <sup>3</sup>E-mail: alstar@landau.ac.ru

Some recent papers have claimed the existence of static, spherically symmetric solutions to gravitational field equations in the absence of ghost (or phantom) degrees of freedom. We show that in some such cases the solutions in question are actually not of wormhole nature while in cases where a wormhole is obtained, the effective gravitational constant  $G_{eff}$  is negative in some region of space, i.e., the graviton becomes a ghost. In particular, it is confirmed that there are no vacuum wormhole solutions of the Brans-Dicke theory with zero potential and the coupling constant  $\omega > -3/2$ , except for the case  $\omega = 0$ ; in the latter case,  $G_{eff} < 0$  in the region beyond the throat. The same is true for wormhole solutions of  $F(R)$  gravity: special wormhole solutions are only possible if  $F(R)$  contains an extremum at which  $G_{eff}$  changes its sign.

## On a general class of brane-world black holes and wormholes

K.A. Bronnikov<sup>1</sup>, M.S. Chernakova<sup>2</sup><sup>1</sup>People Friendship University of Russia, Russia, Moscow, <sup>2</sup>People Friendship

University of Russia, Russia, Moscow

---

<sup>1</sup>E-mail: panov@psu.ru, <sup>2</sup>E-mail: chernakovams@mail.ru

We use the general solution to the trace of the 4-dimensional Einstein equations for static, spherically symmetric configurations as a basis for finding a general class of black hole metrics, containing one arbitrary function  $g_{\theta\theta} = r^2(A)$  in the metric  $ds^2 = Adt^2 - D^{-1}(A)dA^2 - r^2(A)d\Omega^2$ . Under certain reasonable restrictions, black hole and wormhole metrics are found with or without matter and, depending on the boundary conditions, can be asymptotically flat or have any other prescribed asymptotic. It is shown that our procedure generically leads to families of globally regular black holes with a Kerr-like global structure as well as symmetric wormholes. Black hole horizons in space-times with zero scalar curvature are shown to be either simple or double. The same is generically true for horizons inside a matter distribution, but in special cases there can be horizons of any order. A few simple examples are discussed. A natural application of the above results is the brane world concept, in which the trace of the 4D gravity equations is the only unambiguous equation for the 4D metric, and its solutions can be continued into the 5D bulk according to the embedding theorems.

## СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ РЕЛЯЦИОННОГО ПОДХОДА К ФИЗИКЕ И ГЕОМЕТРИИ

Ю.С. Владимиров<sup>1</sup>

МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, Москва

---

<sup>1</sup>E-mail: yusvlad@rambler.ru

1. В настоящее время в теоретической физике представлено несколько парадигм (подходов) к описанию физической реальности: триалистическая (опирающаяся на три физические категории: пространство-время, частицы и поля переносчиков взаимодействий), три дуалистические (опирающиеся на две обобщенные категории, получающиеся из разных способов объединения трех первичных категорий): теоретико-полевая парадигма (ныне доминирующая), геометрическая и реляционная. Дуалистические парадигмы являются промежуточными на пути от ньютоновой (триалистической) к искомой монистической парадигме, которую ныне именуют по-разному: как "теорию всего", М-теорию, единую геометрию и т. д. Сейчас остро встал вопрос: от какой из названных трех дуалистических парадигм удастся перейти к искомой монистической парадигме?

2. Нам представляется, что наибольшие перспективы открываются в рамках реляционной парадигмы, оказавшейся в XX веке на обочине развития теоретической физики, однако способствовавшей получению ряда фундаментальных результатов. Среди них следует назвать хотя бы тот факт, что Эйнштейн, создавая общую теорию относительности, следовал идеям Э. Маха, мыслившего в реляционном духе. Идеи реляционного

подхода способствовали получению Р. Фейнманом результатов по квантовой электродинамике, за которые он получил Нобелевскую премию.

3. Реляционный подход не опирается на априорно заданное пространство-время, а строится на основе систем отношений между частицами (событиями с участием частиц). Классическая физика в дуалистической реляционной парадигме строится на основе двух систем отношений: пространственно-временных и токовых. Первая из них соответствует реляционному подходу к природе пространства-времени, отстаиваемому Г. Лейбницем, Э. Махом и рядом других естествоиспытателей, а вторая реализуется в концепции дальнего действия в физике, развиваемой А. Фоккером, Р. Фейнманом, Ф. Хойлом и рядом других авторов.

4. Новому этапу развития реляционного подхода способствовало создание Ю.И. Кулаковым и его учениками теории систем отношений. В ее основе лежит постулирование, во-первых, наличия одного или двух множеств элементов произвольной природы, во-вторых, парных отношений между элементами, характеризующихся числами, в-третьих, существования закона систем отношений - некоего алгебраического соотношения между парными отношениями и, в-четвертых, использование принципа фундаментальной симметрии, означающего справедливость закона системы отношений для любого набора из  $r$  (ранга) элементов заданного множества (или двух множеств). На основе этих постулатов находят все возможные виды законов и виды парных отношений.

5. Классическая физика строится на базе двух видов унарных систем (на одном множестве элементов) вещественных отношений (УСВО). Закон 4-мерных пространственно-временных отношений (пространства Минковского) записывается в виде равенства нулю определителя Кэли-Менгера, составленного из парных отношений (квадратов интервалов) между произвольными 6 элементами-событиями. Для 3-мерной геометрии Евклида аналогичный закон записывается через квадраты расстояний между 5 элементами.

6. Закон токовых отношений представляется в виде равенства нулю определителя Грама, элементами которого являются произведения 4-токов пар взаимодействующих частиц. Физическая теория в концепции дальнего действия строится на основе принципа Фоккера, в определение которого входят два типа парных отношений между частицами. Понятие поля переносчиков взаимодействий отсутствует среди первичных понятий.

7. Физика микромира строится на обобщении теории унарных систем отношений по двум каналам: во-первых, вместо одного множества элементов берутся два множества элементов (используется теория бинарных систем отношений) и, во-вторых, вместо вещественных парных отношений рассматриваются комплексные парные отношения, выступающие в виде прообраза амплитуды вероятности перехода системы из одного множества (начальных состояний) во второе множество (конечных состояний). Теория бинарных систем комплексных отношений (БСКО) строится по тому же принципу, что и теория унарных систем отношений, причем она оказывается значительно проще. В ней ранг характеризуется двумя числами, определяющими сколько элементов из двух множеств элементов входят в закон БСКО. В развиваемой на этой основе теории, названной бинарной геометрофизикой, используются симметричные ранги  $(r, r)$ .

8. В рамках бинарной геометрофизики показано, что теории свободных частиц в 4-мерном мире соответствует БСКО ранга  $(3,3)$ . Для описания взаимодействий необходимо перейти к своеобразному бинарному многомерию. Показано, что прообраз всех известных видов взаимодействий в микромире (сильных, электро-слабых и электромагнитных) строится на основе БСКО ранга  $(6,6)$ , в которой каждый элемент характеризуется 5 параметрами, а каждая частица - тремя элементами, соответствующими кваркам в хромодинамике. Итого, каждой частице в одном из состояний сопоставляется  $5 \times 5$ -матрица из параметров.

9. Пара первых двух параметров соответствует общепринятым 2-компонентным спинорам, тогда как оставшиеся 3 параметра (3-компонентный финслеров спинор) определяют зарядовые свойства частиц, т. е. на общепринятом языке соответствуют параметрам пространства внутренних симметрий. Найдены свойства  $3 \times 3$ -матриц из внутренних параметров, соответствующих сильным, электро-слабым и электромагнитным взаимодействиям. Показано, что они могут быть охарактеризованы посредством алгебраической классификации А.З. Петрова, разработанной им для случая пространств Эйнштейна.

10. Предлагается построение цельной физической картины мира, исходя из теории БСКО ранга  $(6,6)$ . Для этого полагается, что мир состоит из огромной совокупности элементарных частиц, на которой определено гигантское число БСКО ранга  $(6,6)$ , каждая из которых соответствует "испущенному" (на общепринятом языке), но еще не "поглощенному" кванту переносчика взаимодействий, главным образом фотону. В отличие от общепринятых представлений, фотоны не летят, а устанавливают парные отношения между частицами, из которых выводятся вероятности поглощения фотона той или иной частицей (системой частиц). На основе этой конструкции формулируется программа построения макроскопической теории классического пространства-времени, а также общеизвестных физических понятий и закономерностей. В такой теории пространственно-временные отношения должны возникать как некий статистический итог наложения гигантского числа (комплексных) парных отношений отдельных "фотонов".

11. В рамках сформулированной программы получен ряд предварительных результатов. В частности показано, что общепринятая квантовая теория водородоподобных атомов может быть представлена как результат своеобразного резонанса из наложения парных отношений морем существующих в мире "фотонов" (в указанном выше смысле). Для этого используется открытая В.А. Фоком и Е. Хиллераасом  $O(4)$ -симметрия атома водорода. Ее предлагается интерпретировать обусловленной совокупностью фазовых вкладов от "фотонов" на 3-мерной гиперсфере в 4-мерном римановом пространстве. Условие резонанса связанного состояния (атома) выражается в виде выполнимости угловой части уравнения Лапласа на гиперсфере. В работах Фока и Хиллера-

аса было показано, что посредством стереографической проекции это уравнение приводится к общеизвестному уравнению Шредингера.

Изложенная интерпретация атомов означает, что каждый атом фактически отражает в себе всю окружающую Вселенную через бозонные вклады от всего существующего в мире "излучения", что можно трактовать как бозонное проявление принципа Маха.

12. С другой стороны, каждый квант излучения и все кванты вместе определяют отношения между имеющимся морем элементарных частиц (систем или тел, составленных из них), образующее систему пространственно-временных отношений. Если предположить, что наша Вселенная описывается закрытой космологической моделью Фридмана, то окажется, что все частицы в ней располагаются на 3-мерной гиперсфере в 4-мерном евклидовом пространстве. Здесь можно усмотреть некую симметрию внутреннего бозонного пространства отдельных атомов и составленного из них (из тел) всего мира.

Изложенное здесь можно трактовать как проявление фермионного принципа Маха, когда каждая из частиц связывается со всеми остальными телами одними и теми же фотонами - носителями пространственно-временных отношений.

13. Поскольку данная программа опирается на теорию бинарных систем комплексных отношений, в основу которой положено наличие двух множеств элементов и элементарный переход между ними, то для описания классического аналога наиболее подходящей является теория суперпространств Уилера-ДеВитта, элементами которой являются 3-мерные (голономные) пространственные сечения, а эволюция мира представляется в виде переходов между этими сечениями, описываемых уравнениями супергеодезической в таком суперпространстве.

14. Во многих работах теория суперпространств Уилера-ДеВитта используется для построения моделей квантования космологических моделей. Простейшими из них являются квантовые модели однородных изотропных решений Фридмана (с одной степенью свободы) или анизотропных решений Казнера (с параметрами анизотропии). В этих квантовых моделях недостатком является отсутствие динамики. В описанном здесь реляционном подходе источником динамики являются процессы излучения и поглощения "фотонов" (переносчиков взаимодействий) составляющими мир атомами (системами частиц). При этом "квантование Вселенной" оказывается неразрывно связанным с обычным квантованием или, другими словами, с рождением новых элементарных систем отношений ("фотонов") или с их уничтожением.

15. Отдавая себе отчет в сложности многих проблем, возникающих на пути реализации сформулированной программы построения реляционной макроскопической (статистической) картины мира и геометрии, тем не менее уже сейчас беремся утверждать, что на этом пути открывается ряд многообещающих следствий нового взгляда на фундаментальные проблемы современной теоретической физики.

16. Особо следует выделить вопрос о соотношении гравитационных и электромагнитных взаимодействий. В трех названных дуалистических парадигмах это соотношение выглядит по-разному. В теоретико-полевым подходе гравитация и электромагнетизм выступают "на равной ноге". В геометрической парадигме (в рамках 5-мерной теории Калуцы) электромагнетизм возникает как своеобразное обобщение гравитации - в виде дополнительных смешанных компонент 5-мерного метрического тензора. В реляционном же подходе, оказывается, гравитацию можно трактовать как своеобразный "квадрат" электромагнетизма. Заметим, что этот факт уже можно усмотреть в выражении компонент 4-мерного метрического тензора, получаемого посредством редуцирования 5-мерной теории Калуцы к 4-мерной теории гравитации и электромагнетизма.

17. В рамках реляционного подхода открывается новый взгляд на природу масс тел и элементарных частиц.

## Литература

- [1] Владимиров Ю.С. *Метафизика*. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2002 (1-е издание); 2009 (2-е издание).
- [2] Владимиров Ю.С. *Геометрофизика*. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2005 (1-е издание); 2010 (2-е издание).
- [3] Владимиров Ю.С. *Основания физики*. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2008.

### ПРОБЛЕМА T - СИММЕТРИИ: Понижение порядка уравнений движения

В.В. Гутин<sup>1</sup>

Научный руководитель В.Ф. Панов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Пермская сельхозакадемия, Россия, г. Пермь

<sup>2</sup>Пермский государственный университет, Россия, Пермь

---

<sup>1</sup>E-mail: -, <sup>2</sup>E-mail: panov@psu.ru

Суть проблемы хорошо известна. Все фундаментальные уравнения движения физики квадратичны по времени. Это приводит к симметрии между запаздывающими и опережающими решениями. Различие свойств

времени теоретического описания и наблюдения составляют проблему  $T$ - симметрии. С точки зрения этой проблемы желательно иметь уравнения движения первой степени по времени.

Прецедентом понижения порядка уравнения по времени является волновое уравнение для электрона, предложенное Дираком. Как известно, это сделано с помощью введения дополнительных (спиновых) степеней свободы и переходу к матричным величинам.

В качестве попытки решения проблемы  $T$ - симметрии предложено обобщение метода, предложенного Дираком для понижения степени релятивистского волнового уравнения для описания электрона.

Роль дополнительных степеней свободы играет пространство алгебры  $T$ - инвариантных сдвигов времени, которая образована условиями независимости сдвигов времени в прошлое и будущее относительно момента  $t$ , а также требованием возврата в исходному (в общем случае, комплексному состоянию). С формальной точки зрения построение алгебры  $T$ - инвариантных сдвигов времени есть реализация точной последовательности групп  $Z_2 \rightarrow SU_2 \rightarrow SO_3$ . Это построение имеет самый общий характер и не связано ни с какими другими переменными (в том числе пространственными). Поскольку образующие алгебры  $T$ - инвариантных сдвигов времени фактически совпадают с матрицами Паули, но не связаны с пространственным вращением, то спиновые степени свободы можно ассоциировать с преобразованиями в пространстве алгебры  $T$ - инвариантных сдвигов времени. Это наделяет спиновые степени свободы более универсальным характером, связанным со структурой времени, а не с природой частиц. На основании вышесказанного выполнено понижение степени уравнений классического гармонического осциллятора, волнового уравнения для плоского и трёхмерного случая. Предложены соответствующие матричные уравнения первой степени по времени.

## Литература

- [1] В. Гутин. *Алгебра  $T$ - инвариантных сдвигов времени.*// 13- я Российская гравитационная конференция, международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике: Тезисы докладов. М.: РУДН, 2008.

### PERTURBATIVE GRAVITY THEORY ON A CURVED BACKGROUND AND ITS IMPORTANCE FOR GRAVITATIONAL LIGHT - RAY DEFLECTION EXPERIMENTS

Bogdan G. Dimitrov<sup>1</sup>

Joint Institute for Nuclear Research, Russia, Dubna

<sup>1</sup>E-mail: bogdan@theor.jinr.ru

**Annotation.** A perturbative gravity approach has been proposed, motivated by the necessity to extend the standard IAU-2000 Relativistic Theory of Reference Frames (RTRF) (proposed by V.A. Brumberg and S. M. Kopeikin) to the cosmological reference frame, which is to be used in the Solar system experiments, performed by the new generation of microarcsecond satellites (SIM, GAIA). Such a theory is essentially needed also to take account of the gravitational field in the near-zone around Jupiter in the s.c. "Jovian 2002, 8 September" light-ray deflection (VLBI) experiment.

The proposed perturbative approach takes account of the energy density and pressure perturbations in the energy-momentum tensor in the Einstein's equations. These perturbations are found from differential equations with boundary conditions, determined by the fluctuating gravity field components in the PPN approach, when the flat (Minkowski) background field is considered in the absence of any energy density and pressure perturbations.

## Introduction

In the past several years there has been a considerable interest in the s.c. "Jovian September 8, 2002" experiment, the main purpose of which was to measure the relativistic effect of the propagation of gravity [1]. The idea of this VLBI experiment is to investigate the gravitational bending of light, passing through the gravitational field of a *moving, massive* object like Jupiter when Jupiter has passed by the quasar J0842 + 1835 at the angular distance  $3.7'$  [2]. Then, if radio interferometric measurements of the quasar coordinates in the sky are done with the precision of 5  $\mu$ as (5 picoseconds), the effect of retardation of gravity can be observed as an additional gravitational (Shapiro) time delay, given by the simple formulae

$$\Delta = \Delta_{\oplus} + \Delta_{\odot} + \Delta_J + \Delta_{JPG} \quad , \quad (1)$$

where  $\Delta_{\oplus}, \Delta_{\odot}, \Delta$  are the Shapiro time delays due to the (static!) gravitational field of the Earth, Sun and Jupiter respectively and the fourth term  $\Delta_{JPG}$  is a newly discovered term, caused by the finite speed of the propagation of gravity. From a physical point of view, the VLBI-techniques measures the variations of the differential phase  $\Phi$  of the

radio wave, coming from the quasar due to the variable gravitational field of the moving Jupiter, where  $\Phi$  is given as a first integral of the light-ray geodesics (the eikonal equation) [3]

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi = 0 \quad (2)$$

and  $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$  is the metric tensor of the gravitational field, which is supposed to be a (first-order) perturbative gravity field, superimposed on a flat Minkowski background. For a useful introduction in the standard perturbative gravity theory, see also the monograph [4]. It is important to stress that the perturbative gravity field  $h^{\mu\nu}$  is a solution of the linearized Einstein equations in the first Post-Newtonian approximation [5]:

$$\square h^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} (T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} T^\lambda{}_\lambda) \quad , \quad (3)$$

where the harmonic gauge condition  $\partial_\alpha h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \partial^\beta h^\lambda{}_\lambda = 0$  has been imposed. In the last wave equation  $\square = -c^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$  is the wave operator in a *flat spacetime* and  $T^{\mu\nu}$  is the stress-energy tensor of point-like light-ray deflecting bodies. The causal structure of the gravitational field is revealed through the gravity null-cone equation

$$\eta_{\mu\nu} r^\mu r^\nu = \eta_{\mu\nu} (x^\mu - x_J^\mu(s))(x^\nu - x_J^\nu(s)) = 0 \quad , \quad (4)$$

where the *retarded time*  $s$  is to be found as a solution of the nonlinear equation

$$s = t - \frac{1}{c} |x - x_J(s)| \quad (5)$$

and  $x_J(s)$  is the Jupiter's worldline. Since  $c$  in (5) comes from the wave operator in the Einstein's equations and not from the consideration of the Maxwell's equations, it has been proposed in [2, 3, 5] and other papers to interpret  $c$  as *the speed of propagation of the characteristics of the gravitational field*. The *retardation of this field* is revealed through the Lienard-Wiechert retarded potential in the solution of the gravity wave equation (3)

$$h^{\mu\nu}(t, x) = \frac{2GM_J}{c^2} \frac{(2u^\mu u^\nu + \eta^{\mu\nu})}{r_R} \quad , \quad (6)$$

where  $r_R := -u_\alpha r^\alpha$ ,  $u^\alpha = c^{-1} \frac{dx_J^\alpha(s)}{d\tau}$ .

## Physical motivation for the perturbative gravity approach on a curved background

The following important problem now arises: what is the causal structure of the gravitational field, when the gravity perturbations are superimposed on a curved background? This would require to find the solutions of the linearized Einstein's equations for the case of an ideal fluid stress-energy tensor. The main peculiarity here is that the background and the fluctuating gravitational fields would interact in a very complicated manner and more importantly, this interaction would result also in the *appearance of perturbations of the energy density and pressure*. It will turn out, however, that these perturbations can be found as a solution of an ordinary differential equation with boundary conditions, determined by the fluctuation gravitational components for the usual PPN formalism, designed for the flat Minkowski background metric. Because of this complicated dependence, however, finding the solutions for the fluctuating gravitational field as a function of the background gravitational field will be a much more complicated problem.

A physical motivation for developing such a new approach has been pointed out by S. Kopeikin in [6] in reference to the new generation of *microarcsecond satellites* - SIM, GAIA, which will study faint stars and positions of bright stars with unprecedented accuracy of more than  $1 \mu\text{as}$  and will thus require to take into account relativistic effects, generated by *non-static gravitational fields* of the solar system or binary stars. This high accuracy of observational capabilities would enable also to observe distant sources at cosmological (Hubble) distances. This particularly would mean that the currently accepted by IAU in 2000 theory of Relativistic Reference Frames (RRF), originally proposed by V. A. Brumberg and S. M. Kopeikin [7, 8, 9], has to match with the cosmological reference frame of the Friedmann-Robertson-Walker model [10], so that the overall cosmological expansion of the Universe has to be intrinsically related to the definition of the barycentric or geocentric reference frames. But in its present formulation, the RRF theory is based on Chandrasekhar's Post-Newtonian approach [11], when the fluctuating gravitational field components

$$h_{00} = -\frac{2U}{c^2} + O(c^{-4}) \quad , \quad h_{0\alpha} = O(c^{-3}) \quad , \quad h_{\alpha\beta} = -\frac{2U}{c^2} \delta_{\alpha\beta} + O(c^{-4}) \quad , \quad (7)$$

are found as solutions of the *linearized Einstein's equations* on a flat Minkowski background  $\eta_{ij} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . While the metric of the barycentric reference frame

$$ds^2 = (-1 + c^{-2} 2U(t, x)) c^2 dt^2 + dx^2 + O(c^{-2}) \quad (8)$$

and a potentia  $U(t, x) = \sum_A \frac{GM_A}{R_A}$  ( $A$  - enumerates the gravitating bodies in the Solar system) and of the geocentric reference frame in the early publication [8] is closely related with the equalities (7), the metric tensor components for the barycentric celestial reference frame in the more recent paper [6] are assumed to be of another form due to the abandoned assumption about *asymptotic flatness* and assumed *cosmological expansion*

$$g_{00} = -1 + \frac{2w}{c^2} - \frac{2w^2}{c^4} + O(c^{-5}) \quad , \quad g_{0i} = -\frac{4w^i}{c^3} + O(c^{-5}) \quad , \quad (9)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij}(1 + \frac{2w}{c^2}) + O(c^{-4}) \quad , \quad (10)$$

where  $w$  is a generalization of the Newtonian potential  $U$  in (8) and  $w^i$  is a vector potential, related to the *gravimagnetic effects*. The paper [6] is dedicated to the matching of the barycentric and the geocentric reference frames in the near - field zone of the Earth. Since in this zone the influence of the Earth's gravitational field is substantial, these potentials are decomposed into parts, one of which depends on the distribution of mass and currents inside the Earth and the other - on the gravitational potentials of external bodies.

One can suppose that in the consideration of the Jovian 8 September 2002 experiment the geocentric reference system (related to the centre of the Earth) should be replaced by a "geocentric" system, related to the centre of the (moving) Jupiter and then again the problem about the "matching" of this RS with the barycentric system should be investigated. But further in this paper it will become evident that for the purpose an adequate formalism of perturbative gravity should be created, no longer based on the metric tensor decomposition (9) and (10) (which again comes from the PPN-formalism, but from higher than  $O(c^{-2})$  orders) due to the peculiarities in the gravitational field of Jupiter.

The light deflection in the Jovian 2002 experiment as well takes place in the near - field zone of Jupiter and because of that, as remarked by S. Kopeikin in [5], no gravitational degrees of freedom, responsible for propagation of gravitational waves appear. Since the additional time delay  $\Delta_{JPG}$  shows up yet in the  $\frac{v}{c}$  relativistic correction terms decomposition and this is not characteristic in the standard theory of gravitational light-ray deflection, researchers such as Asada [12, 13], Samuel [14, 15], Clifford Will [16], Pascual-Sanchez [17] have erroneously criticized the theory of this experiment, *not taking into account the influence of Jupiter's gravitational field on the light-ray deflection in this near-field zone, which is accounted by means of substituting the solutions (6) of the linearized Einstein's equations in the light-ray geodesic equation (1)*.

Also in [5] it was pointed out that in the moving frame of Jupiter a gravito-magnetic field is induced, which drags the light tangentially to the direction of the Jupiter's motion. *Consequently, this "tangential gravito-magnetic light dragging" would induce a corresponding additional (Shapiro) time delay, which should reflect the properties of the curved space-time in the eikonal equation (1)*. Moreover, because of the coupling of the (background) gravitational field of Jupiter to matter in the near-field zone and the interaction with the fluctuating field, perturbations in the velocity, pressure and energy density would appear, leading to more complicated dependence of the metric tensor components on the potentials  $w$  and  $w^i$  in comparison with the investigated case in [6]. For the curved spacetime case the problem about the propagation of the gravity characteristics appear, which in another words can be formulated as: how does the speed  $c$  (of gravity) in the "curved-space" eikonal equation (1)  $g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi = 0$  (in this case  $g^{\mu\nu} = g^{(0)\mu\nu} - h^{\mu\nu}$  with  $g^{(0)\mu\nu}$  - the background field) will appear, *if the curved background metric is to be determined in a more complicated way and "a priori" the dependence on  $c$  might not be known?* The answer to this question will be very natural and simple: differential equations for the energy-density and pressure perturbations would be derived, the initial condions of which at  $t = 0$  will be determined by the fluctuating components in the standard PPN-formalism.

## Theoretical model of perturbative gravity theory on a curved background

Let us consider the perturbed to second-order Einstein's equations

$$G_{\mu\nu}^{(0)} + G_{\mu\nu}^{(1)} + G_{\mu\nu}^{(2)} = T_{\mu\nu}^{(0)} + T_{\mu\nu}^{(1)} + T_{\mu\nu}^{(2)} \quad , \quad (11)$$

with  $T_{\mu\nu}^{(0)}$  - the background stress - energy tensor for an ideal fluid  $T_{ij} = (\epsilon + p)u_i u_j - pg_{ij}$  with  $\epsilon = \rho c^2(1 + \frac{p}{\epsilon})$  - the energy density and  $T_{\mu\nu}^{(1)}$  is the perturbed to first - order stress - energy tensor

$$T_{\mu\nu}^{(1)} := \delta [\ln(\epsilon + p)] \left( T_{\mu\nu}^{(0)} + pg_{\mu\nu}^{(0)} \right) + (\epsilon + p) (u_{(\nu} \delta u_{\mu)}) - \delta pg_{\mu\nu}^{(0)} \quad (12)$$

and  $T_{\mu\nu}^{(2)} := -\delta p h_{\mu\nu}$  - the perturbed to second order tensor, neglecting also second-order velocity perturbations of the kind  $\delta u_{(\nu} \delta u_{\mu)}$ . Further, we shall write down explicitly only the first-order perturbative Einstein's equations

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}^{(0)}R^{(1)} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}R^{(0)} = T_{\mu\nu}^{(1)} \quad , \quad (13)$$

where  $R^{(1)} = g^{(0)\mu\nu}R_{\mu\nu}^{(1)} - h^{\mu\nu}R_{\mu\nu}^{(0)}$ ,  $R_{\mu\nu}^{(1)} := R_{\mu\alpha\nu}^{(1)\alpha}$  and  $R_{\mu\alpha\nu}^{(1)\beta}$  is given in the well-known paper by Barneby [18] by the simple formulae

$$R_{\mu\alpha\nu}^{(1)\beta} \equiv H_{\mu\nu|\alpha}^{(1)\beta} - H_{\mu\alpha|\nu}^{(1)\beta} \quad . \quad (14)$$

In (79) the vertical line "|" means a covariant derivative with respect to the background connection and the third-rank tensor

$$H_{\mu\nu}^{(1)\alpha} := -\frac{1}{2}g^{(0)\alpha s}(h_{\nu s|\mu} + h_{\mu s|\nu} - h_{\mu\nu|s}) \quad (15)$$

is called a "first-order fluctuating connection" in the connection decomposition  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^{(0)\alpha} + H_{\mu\nu}^{(1)\alpha}$ . Further, the Chandrasekhar's methodology will be followed, in which the connection is considered to be a dynamical one. This will mean that after taking into account the perturbation of the energy-momentum tensor, i.e.  $T^{(0)\lambda\nu} + T^{(1)\lambda\nu}$ , the covariant divergency (derivative) has to be taken with respect to the total connection  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha + H_{\mu\nu}^\alpha$

$$\nabla_{\Gamma+H}(T^{(0)\lambda\nu} + T^{(1)\lambda\nu}) = (T^{(0)\lambda\nu} + T^{(1)\lambda\nu})_{;\nu} = 0 \quad . \quad (16)$$

In Chandrasekhar's approach, the background connection components vanish because of the flat Minkowski background, while in our case they will be nonvanishing. But again, in Chandrasekhar's case the full connection components are nonzero.

It shall be assumed additionally that

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(0)} \quad ; \quad \nabla_{\Gamma}T^{(0)\lambda\nu} = 0 \quad ; \quad \nabla_{\Gamma+H}T^{(0)\lambda\nu} = 0 \quad . \quad (17)$$

Further the purpose will be to solve the system of equations (67) and (16) under the assumptions (17) for the four-dimensional case. We shall denote by  $i, j, k, l = 1, 2, 3$  the space indices and by 0- the time indices. Combining the different equations in component notations, after some complicated calculations the following differential equation for the pressure perturbation  $\delta p$  can be obtained:

$$\Theta^{(1)}(\delta p)_{,k_1} + \Theta^{(2)}\delta p + \Theta^{(3)} = 0 \quad , \quad (18)$$

where  $\Theta^{(1)}$ ,  $\Theta^{(2)}$  and  $\Theta^{(3)}$  are no longer tensor expressions, since in them the indices  $i_1, j_1, k_1, i_2, j_2, k_2, \text{etc.}$  are fixed:

$$\Theta_1 := (\epsilon + p)K_{i_1j_1} - K_{i_2j_2} \quad , \quad (19)$$

$$\Theta_2 := (\epsilon + p)B_{i_1j_1k_1}^{(3)H} \quad (20)$$

and  $B_{ijk}^{(3)H}$ ,  $K_{ij}$  and  $B_{ijk}^{(2)H}$  are the expressions

$$B_{ijk}^{(3)H} := B_{ijk}^{(2)H} - D_{ijk}^{(2)H} \frac{g_{00}}{(\epsilon + p)} - G_{(jk)}^H \frac{g_{0i}}{(\epsilon + p)} \quad , \quad (21)$$

$$K_{ij} := -\frac{u_i u_j g_{00}}{(u_0)^2(\epsilon + p)} + \frac{u_{(j} g_{i)0}}{u_0(\epsilon + p)} \quad , \quad (22)$$

$$B_{ijk}^{(2)H} := K_{ij,k} + [\ln(\epsilon + p)]_{,k} K_{ij} + K_{(il} \left[ (\Gamma_{j)k}^l + H_{j)k}^l \right] - \frac{u_j}{u_0} (\Gamma_{ok}^l + H_{ok}^l) \quad . \quad (23)$$

In the above formulae  $D_{ijk}^{(2)H}$ ,  $G_{(jk)}^H$  and  $\Theta^{(3)}$  are also similar expressions, which shall not be given here. The solution of the simple differential equation (18) (for each  $k = 1, 2, 3$  or  $x_k = x, y, z$ ) is given by

$$\delta p = e^{-x_k \frac{\Theta^{(2)}}{\Theta^{(1)}}} g(t) - e^{-x_k \frac{\Theta_2}{\Theta_1}} \int_{x_k^{(0)}}^{x_k} e^{\xi \frac{\Theta^{(2)}}{\Theta^{(1)}}} \frac{\Theta^{(3)}}{\Theta^{(1)}} d\xi \quad (24)$$

with the following boundary condition: At the initial moment of time  $t = 0$  the background metric is the Minkowski metric  $\eta_{\alpha\beta} = (1, -1, -1, -1)$ , perturbed by the fluctuating gravitational field with components (7) for the case of the standard PPN-formalism. Also at  $t = 0$  there are no velocity, pressure and energy density perturbations, i.e.

$$\delta p|_{t=0} = \delta \epsilon|_{t=0} = \delta u|_{t=0} = 0 \quad . \quad (25)$$

Since the second integral in the solution (24) goes to zero at  $t = 0$ , it might seem that the boundary condition  $\delta p|_{t=0} = 0$  will be automatically satisfied if  $g(t = 0) = 0$ . Then there will be no need to determine all the

functions  $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}, \Theta^{(3)}$  at the initial moment. The important point here is that the perturbation  $\delta p$  is related to the perturbation  $\delta(\varepsilon + p)$ , for which there is another differential equation. This allows to determine the function  $g(t)$ . This means that yet all the functions have to be calculated at the initial moment. Since the background connection components  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  at  $t = 0$  are all zero, it is necessary to calculate only the fluctuation components  $H_{\mu\nu}^{(1)\alpha}$  at  $t = 0$  - i. e. to substitute  $h_{\mu\nu}$  given by (7) into the fluctuation connection formulae (5):

$$H_{00}^0 = -\frac{1}{2}\eta^{00}h_{00,0} = 0 \quad , \quad H_{0i}^0 = -\frac{1}{2}\eta^{00}h_{00,i} = \frac{\partial_i U}{c^2} = \frac{U_{,i}}{c^2} \quad , \quad (26)$$

$$H_{ij}^0 = -\frac{1}{2}(h_{jo,i} + h_{io,j} - h_{ij,0}) = \frac{1}{2}h_{ij,0} = 0 \quad (\text{since } U = U(x)), \quad (27)$$

$$H_{00}^k = -\frac{1}{2}\eta^{kk}(2h_{0k,0} - h_{00,k}) = -\frac{1}{2}h_{00,k} = -\frac{U_{,k}}{c^2} \quad , \quad (28)$$

$$H_{0i}^k = 0 \quad , \quad H_{ij}^k = -\frac{1}{2}\eta^{kk}(h_{jk,i} + h_{ik,j} - h_{ij,k}) = \\ = -\frac{1}{c^2}[U_{,i}\delta_{jk} + U_{,j}\delta_{ik} - U_{,k}\delta_{ij}] \quad . \quad (29)$$

For simplicity, we have assumed that the potential  $U$  has only a space-dependent part and does not depend on time. Of course, if necessary this assumption can be corrected.

It is important to mention that the perturbative approach in this paper and especially the complicated determination of the energy-momentum tensor (EMT) , surely does not have the advantages of the approach in [19] (see the list of cited papers there), which allows the determination of the EMT on the base of an original field-theoretical investigation of nonlinear perturbations and conservation laws on a curved background. *Yet the present approach offers an opportunity to relate any solutions of the Einstein's equations for the fluctuating gravitational components (for the case of a curved background) to the already intensively exploited PPN-formalism through the imposed boundary conditions.*

## Литература

- [1] S. M. Kopeikin, *Astroph. J.* **556**, L1 (2001)
- [2] S. M. Kopeikin and E. B. Fomalont, in *Proceedings of the 6th European VLBI Network Symp.*, eds. E. Ros, R. W. Porcas, J. A. Zensus, June 25-28th, 2002, Germany, gr-qc/0206022.
- [3] S. M. Kopeikin and E. B. Fomalont, *Phys. Lett.* **A355**, 163 (2006).
- [4] K. V. Stepanyantz, *Classical Field Theory*, Fizmatlit, Moscow (2009) (in Russian).
- [5] S. M. Kopeikin and E. B. Fomalont, *Found. Phys.* **36**, 1244 (2006).
- [6] S.M. Kopeikin, in *Relativity in Fundamental Astronomy: Dynamics, Reference Frames and Data Analysis*, Proc. IAU Symp. **261**, 2009, eds. S. Klioner, P. K. Seidelmann and M. Soffel.
- [7] S. M. Kopeikin, *Celest. Mech.* **44**, 87 (1988).
- [8] V. A. Brumberg and S. M. Kopeikin, *Celest. Mech.* **48**, 23 (1990).
- [9] S. A. Klioner and S. M. Kopeikin, *Astron. J. (USA)* **104**, 897 (1992).
- [10] S. M. Kopeikin, in *Reference Frames and Gravitomagnetism. Proc. of the XXIII Spanish Relativity Meeting*, eds. J. F. Pascual-Sanchez, L. Floria. A. San Miguel, F. Vicente, World Sc., Singapore, 2001.
- [11] S. Chandrasekhar, *Astroph. J.* **142** (1965) 1488.
- [12] H. Asada, *Astroph. J.* **574** (2002) L69.
- [13] H. Asada, *Int. J. Mod. Phys.* **D15** (2006) 289.
- [14] St. Samuel, *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 231101-1.
- [15] St. Samuel, *Int. J. Mod. Phys.* **D13** (2004) 1753.
- [16] Cl. Will, *Astroph. J.* **590** (2003) 683.
- [17] J. -F. Pascual-Sanchez, *Int. J. Mod. Phys.* **D13** (2004) 2345.
- [18] T. A. Barneby, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 1741.
- [19] A. N. Petrov, *Nonlinear Perturbations and Conservation Laws on Curved Backgrounds in GR and Other Metric Theories*, in "Classical and Quantum Gravity Research", eds. M. N. Christiansen and Th. K. Rasmussen, p. 1-88, Nova Science Publishers Inc., 2008, arXiv: 0705.0019.



УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ (СПМ) В ТЕОРИИ КАЛУЦА-КЛЕЙНА

У.Н. Закиров<sup>1</sup>

Казанский государственный университет, Россия, Казань

<sup>1</sup>E-mail: zakirural@mail.ru

Для пятимерного уравнения согласно Лейбовицу и Розену [1] имеем уравнение возмущенного движения

$$d(d(\delta x^A)/dS)/dS + 2\Gamma_{BC}^A(dx^B/dS)(dx^C/dS) + \Gamma_{BC,D}^A(dx^B/dS)(dx^C/dS)\delta x^D = 0, \quad (1)$$

где для плоского случая  $\theta = \pi/2$   $A, B, C, D = 1, 3, 5, 0$ . Из уравнений опорного движения

$$d(dx^A/dS)/dS + \Gamma_{BC}^A(dx^B/dS)(dx^C/dS) = 0 \quad A, B, C, D = 1, 3, 5, 0 \quad (2)$$

для выбранных граничных условий (например, движения по круговой орбите) и из первых интегралов (2) удастся найти связь пятиимпульса и реактивного потенциала, введенного в метрику в работе [2]. Для примера рассмотрим функцию Лагранжа для обобщенной пятимерной метрики Керра [2]:

$$L = (dx^0/dS)^2 - \Sigma(dr/dS)^2/\Delta - \{A_3^2\Delta P^2 + (Q^2)\sin^2\theta\}/\Sigma)(d\psi/dS)^2 + 2\{A_3P\Delta + a^2(\sin^2\theta)(Q/a)\}/\Sigma)(d\psi/dS)(dx^5/dS) - \{(\Delta + a^2\sin^2\theta)/\Sigma\}(dx^5/dS)^2 = 1, \quad (3)$$

где  $\Delta = r^2 - \alpha r - a^2$ ,  $\Sigma = r^2 - a^2$ ,  $P = a$ ,  $Q = r^2 - a^2$ ,  $a$  – параметр вращения источника гравитации,  $\alpha$  – гравитационный радиус.

Введем обозначения  $\xi^1 = \delta r$ ,  $\xi^3 = \delta\psi$ ,  $\xi^0 = \delta x^0$ ,  $\xi^5 = \delta x^5$ ;  $\psi$ ,  $x^0$  – угловая и временная координаты. Итак, из (1), (2), (3) получим уравнения возмущенного движения СПМ:

$$d(d\xi^1)/dS + \sigma_1((d\xi^3)/dS) + \sigma_2((d\xi^5)/dS) + \sigma_3\xi^1 + \sigma_4\xi^0 = 0, \quad (4)$$

$$d(d\xi^3)/dS + \sigma_5((d\xi^3)/dS) + \sigma_6((d\xi^5)/dS) + \sigma_7\xi^0 + \sigma_8\xi^1 = 0, \quad (5)$$

$$d(d\xi^5)/dS + \sigma_9((d\xi^3)/dS) + \sigma_{10}((d\xi^5)/dS) + \sigma_{11}\xi^1 = 0, \quad (6)$$

$$d(d\xi^0)/dS + \sigma_{12}(d\xi^5)/dS + \sigma_{13}\xi^1 = 0. \quad (7)$$

Здесь

$$\sigma_1 = -\{2r_0(1 - \alpha/r_0 - a^2/r_0^2)(B_1h_\psi - B_4H_5)/(B_1B_3 - B_2B_4) + (\alpha/2r_0^2) \cdot (B_3H_5 - B_2h_\psi)/(B_1B_3 - B_2B_4)\},$$

где

$$B_1 = -2(\Delta + a^2)/\Sigma,$$

$$B_2 = 2(A_3r_0P\Delta + aQ)/\Sigma,$$

$$B_3 = -2\{A_3^2\Delta P^2 + Q^2\}/\Sigma,$$

$$B_4 = (A_3P\Delta + aQ)/\Sigma,$$

$$H_5 = B_1(dx^5/dS) + B_2(d\psi/dS) = const =$$

$$= [2^{1/2}r_0(1 - \alpha/r_0)/(\alpha/r_0)^{1/2} + 2(1 - a^2/r_0^2)a](d\psi/dS)_0,$$

$$h_\psi = B_3(d\psi/dS) + B_4(dx^5/dS) = const =$$

$$= -[1 + (1 - a^2/r_0^2)/(2\alpha/r_0)^{1/2}]2r_0a(d\psi/dS)_0;$$

физический интервал  $ds$  связан с интервалом  $dS$  соотношением

$$dS = ds(1 - n_1/\Phi_1^2 - n_2/\Phi_2^2),$$

$$\Phi_1^2 = \Delta/\Sigma,$$

$$\Phi_2^2 = a^2/\Sigma.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_2 &= 2(2\alpha/r_0)^{1/2}(1 - \alpha/r_0 - 2a^2/r_0^2)(d\psi/dS)_0; \\
\sigma_3 &= -(1 + a^2/r_0^2)(d\psi/dS)_0^2 + (\alpha/r_0^3)(dx^5/dS)_0; \\
\sigma_4 &= a(dA_3/dS)_0(d\psi/dS)_0(dx^5/dS)_0; \\
\sigma_5 &= -2a^2(dA_3/dS)_0(r_0(1 - \alpha/r_0 - 2a^2/r_0^2))(dx^0/dS)_0; \\
\sigma_6 &= -2(a/r_0)(dA_3/dS)_0(1 - \alpha/r_0)(dx^0/dS)_0; \\
\sigma_7 &= -(a^2(dA_3/dS)_0^2 \cdot (1 - \alpha/r_0)(d\psi/dS)_0(dx^0/dS)_0); \\
\sigma_8 &= \{(1 + ((2\alpha/r_0)^{1/2}/(a/r_0))(1 - 2\alpha/r_0 - 2a^2/r_0^2) \cdot (d\psi/dS)_0 + \\
&+ (1 - 2\alpha/r_0 + 6a^2/r_0^2)(dx^5/dS)_0\}(a^2/r_0^2)(dA_3/dS)_0(dx^0/dS)_0; \\
\sigma_9 &= -2ar_0(dA_3/dS)_0 \cdot (1 + a^2/r_0^2)(dx^0/dS)_0; \\
\sigma_{10} &= -2(a^2/r_0)(1 - \alpha/r_0)(dx^0/dS)_0(dA_3/dS)_0; \\
\sigma_{11} &= -\{a(1 - a^2/r_0^2) \cdot (d\psi/dS)_0 + (a^2/r_0^2)(1 - \alpha/r_0)(dx^5/dS)_0\}(dA_3/dS)_0(dx^0/dS)_0; \\
\sigma_{12} &= -2ar_0(1 - \alpha/r_0)(d\psi/dS)_0 \cdot (dA_3/dS)_0; \\
\sigma_{13} &= -a(d\psi/dS)_0(dx^5/dS)_0(dA_3/dS)_0; \\
(dx^0/dS)_0 &= const = h_0.
\end{aligned}$$

Полученная система дифференциальных уравнений учитывает возмущения и по пяти импульсу, позволяет рассчитывать эффекты смещения частот гравитационных колебаний и устойчивость СПМ в обобщенном поле Гросса-Перри и Керра с учетом реактивного потенциала при движении СПМ относительно Галактик, нейтронных звезд, вращающихся черных дыр.

## Литература

- [1] E.leibowitz and N.Rosen // *Gen. Rel. Grav.*, 4, 449, 1973.  
[2] У.Н Закиров Об уравнениях движения сосредоточенной переменной массы (СПМ) в теории Калуцы-Клейна// *Известия Вузов, физика*, 2, 2010.

## ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ИНДУЦИРОВАННОЙ ГРАВИТАЦИИ

Ф.Ш. Зарипов<sup>1</sup>

Татарский государственный гуманитарно - педагогический университет, Россия,  
Казань

<sup>1</sup>E-mail: farhat\_zaripov@mail.ru

В работе [1] было предложено конформно-инвариантное обобщение теории струн на объекты большей размерности. Частными случаями модели являются теория струн и эйнштейновская теория гравитации. Данная работа является продолжением исследований и обобщений рассматриваемой модели. При изучении космологических приложений предлагаемой теории необходимо учитывать влияние наличия вещества, что приводит к нарушению конформной инвариантности первоначальной теории и к ее модификации. Данная работа посвящена получению самосогласованных уравнений в теории индуцированной гравитации [1] в случае присутствия вещества, тензор энергии-импульса (ТЭИ) которой имеет структуру ТЭИ идеальной жидкости, взаимодействующей с скалярными полями. В этой модели возникают эволюционирующие во времени гравитационная ( $G_e$ ), космологическая ( $\Lambda_e$ ) "постоянная", где

$$G_e = -\frac{w_0}{16\pi\xi Y}, \quad \Lambda_e = -\frac{1}{2\xi Y}(-B + \Lambda Y^2)$$

и "средний квадрат" скалярных полей  $Y \equiv (X, X)$  - величины которых могут быть согласованы с наблюдательными данными. Здесь  $\Lambda$  - постоянная самодействия скалярных полей,  $w_0$  - затравочная константа теории. Получены аналог уравнений Эйнштейна для макроскопической среды:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\xi Y}[-\frac{n-2}{2}B + \Lambda Y^\rho]g_{\alpha\beta} + \frac{1}{Y}[\nabla_\alpha \nabla_\beta - g_{\alpha\beta}\square]Y + \frac{w}{2\xi Y}T_{(e)\alpha\beta}, \quad (1)$$

где  $G_{\alpha\beta}$  -тензор Эйнштейна;  $T_{(e)\alpha\beta}$ - ТЭИ полей материи (например идеальной жидкости). Следствием этих уравнений является закон сохранения энергии, имеющего вид:

$$-\frac{n-2}{2}\nabla_\beta B + \nabla_\beta Y \cdot (\xi R + \rho\Lambda Y^{\rho-1}) + w\nabla_\alpha T_{(e)\beta}^\alpha = 0. \quad (2)$$

Сохраняя идеологию теории струн, предполагаем, что функции  $X^A = X^A(\sigma^\mu)$ , где  $A, B = 1, 2, \dots, D$ ;  $\mu, \nu = 0, 1, \dots, n-1$ , отображают  $n$ -мерное многообразие  $\Pi$  описываемое метрикой  $g_{\mu\nu}$ , в  $D$ -мерное плоское пространство - время  $M$  с метрикой  $\eta_{AB}$ . При этом вводится гипотеза, что индуцированная метрика (отображения)  $(\nabla_\mu X, \nabla_\nu X)$  связана с метрикой многообразия  $M$  посредством формулы:

$$Bg_{\mu\nu} = (\nabla_\mu X, \nabla_\nu X) \quad \mu, \nu = \overline{0, n-1}, \quad (3)$$

Рассматриваемая модель позволяет интерпретировать развитие Вселенной как развитие  $n = 4$  мерных объектов, вложенных в многомерное плоское пространство-время  $\Pi$ . Интересно отметить, что существуют решения описывающие эволюцию Вселенной, когда величины  $Y$ ,  $G_e$ ,  $\Lambda_e$  являются функциями времени.

## Литература

- [1] F.Sh. Zaripov, *Gravitation and Cosmology*, **13**, (2007), No. 4.

### Космологическая эволюция неравновесной анизотропной плазмы

Д.Ю. Игнатьев<sup>1</sup>

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет

<sup>1</sup>E-mail: ignatyev.id@gmail.com

**Аннотация.** Представлены результаты исследования неравновесной космологической модели, предложенной Автором в [1]. Осуществлена гладкая склейка решений на бесстолкновительной и столкновительной стадии эволюции. С учетом результатов [2] сделан вывод о возможности сохранения анизотропии Вселенной на современном этапе при выполнении энергетических условия на неравновесную компоненту  $\varepsilon_n/\varepsilon > 5/32$ .

## Литература

- [1] Д.Ю. Игнатьев, Ю.Г. Игнатьев. Кинетическая модель неравновесной анизотропной вселенной. Материалы 2-ой Российской школы-семинара «Современные проблемы теории гравитации и космологии» (Gracos-2009), Казань: изд-во «Фолиант», 2009, с. 68-75.
- [2] Yu.G. Ignat'ev and V.Yu. Shulikovskiy. Relativistic kinetics of collisional damping of gravitational waves in a hot Universe. *Gravitation & Cosmology*, **12** (2006), No 4, p. 321-327.

### ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ САМОСОГЛАСОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЫ НА ФОНЕ МЕТРИКИ БОНДИ-ПИРАНИ-РОВИНСОНА

Ю.Г. Игнатьев<sup>1</sup>, А.А. Агафонов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Татарский государственный гуманитарно - педагогический университет, Россия, Казань, <sup>2</sup>Татарский государственный гуманитарно - педагогический университет, Россия, Казань

<sup>1</sup>E-mail: ignatev\_yu@rambler.ru, <sup>2</sup>E-mail: a.a.agathonov@gmail.com

## Введение

В [1] из требования равенства динамических скоростей плазмы и электромагнитного поля<sup>1</sup> на основе уравнений Эйнштейна и уравнений Максвелла были сформулированы уравнения релятивистской магнитной гидродинамики (РМГД) магнитоактивной плазмы в гравитационном поле. В этой же работе был найден замечательный класс *точных решений* полученных уравнений РМГД, описывающий движение магнитоактивной локально изотропной плазмы в поле плоской гравитационной волны (ПГВ) и названный *гравимагнитными ударными волнами* (GMSW). Найденный класс решений, во-первых, описывает *существенно-нелинейные процессы*, которые отсутствуют в линейном приближении магнитной гидродинамики; во-вторых, - существенно релятивистские процессы в смысле преобладания безмассового электромагнитного компонента в магнитоактивной плазме.

В [2, 4] показано, что GMSW в магнитосферах пульсаров могут являться высокоэффективным детектором гравитационного излучения нейтронных звезд. Принципиальная важность для теории гравитации GMSW, как прямого эффекта конвертации энергии гравитационных волн в электромагнитную энергию, приводит к

<sup>1</sup>Это требование полностью эквивалентно условию бесконечной проводимости плазмы [1].

необходимости более детального и всестороннего исследования этого явления. В [5] на основе релятивистской кинетической теории дано строгое обоснование гидродинамической теории GMSW. В [1],[2], [3], [4] показано, что GMSW реализуется в существенно бесстолкновительной, неравновесной плазме, находящейся в аномально сильных магнитных полях. В этих условиях вследствие сильного магнитотормозного излучения существенно нарушается изотропия локального распределения электронов плазмы, поэтому фактор анизотропии магнитоактивной плазмы является весьма существенным для эффективности механизма образования GMSW. В [6] на основе общих уравнений РМГД построена гидродинамическая модель GMSW в анизотропной плазме при заданной функциональной связи между продольной и поперечной компонентами давления плазмы. В частности, в [6] рассмотрен простейший вариант такой связи - линейный. Исследование, проведенное в [6], выявило сильную зависимость процесса GMSW от степени анизотропии плазмы, что привело к необходимости построения динамической модели движения анизотропной магнитоактивной плазмы в поле гравитационного излучения. Далее, в [7] было проведено детальное численное моделирование GMSW при различных параметрах анизотропной магнитоактивной плазмы в системе компьютерной математики Mathematica. Это исследование основывалось на численном решении нелинейного уравнения энергобаланса с помощью специальных методов численного интегрирования. Результаты, полученные в работе [7] в целом подтвердили сделанные ранее аналитические оценки поведения магнитоактивной плазмы в поле сильной гравитационной и уточнили некоторые характеристики GMSW.

Однако, при всем разнообразии моделей плазмы во всех цитированных работах исследовался лишь случай монополяризованной гравитационной волны с поляризацией  $e_+$ . При этом было показано, что случай монополяризованной гравитационной волны с поляризацией  $e_x$  сводится с помощью преобразований координат и физических величин к случаю поляризации  $e_+$ . Однако, случай одновременного существования двух поляризаций гравитационной волны остался неисследованным. В этой статье мы рассмотрим именно такой случай. При этом удалось снять ряд дополнительных условий, с помощью которых в [1] была установлена форма потенциала электромагнитного поля в магнитоактивной плазме, и тем самым придать полученным ранее результатам более общий характер. Везде в статье принята система единиц, в которых: ( $c = G = \hbar = 1$ ).

## Самосогласованные уравнения релятивистской магнитной гидродинамики в гравитационном поле

### Условие вмороженности магнитного поля в плазму

В [1] в предположении равенства динамических времениподобных скоростей,  $v^i$ , плазмы и электромагнитного поля<sup>2</sup>:

$$\overset{p}{T}_{ij} v^j = \varepsilon_p v_i; \quad \overset{f}{T}_{ij} v^j = \varepsilon_f v_i; \quad (v, v) = 1 \quad (1)$$

на основе сохранения полного тензора энергии-импульса плазмы и электромагнитного поля,

$$T^{ij} = \overset{p}{T}{}^{ij} + \overset{f}{T}{}^{ij}, \quad (2)$$

$$T^{ij}{}_{;j} = 0 \quad (3)$$

была получена полная самосогласованная система уравнений релятивистской магнитной гидродинамики магнитоактивной плазмы в произвольном гравитационном поле, описывающая движение релятивистской плазмы и электромагнитного поля в заданном гравитационном поле.

В частности, было показано, что при положительности первого инварианта электромагнитного поля:

$$\text{Inv}_1 = F_{ij} F^{ij} = 2H^2 > 0 \quad (4)$$

и равенстве нулю второго инварианта:

$$\text{Inv}_2 = \overset{*}{F}_{ij} F^{ij} = 0 \quad (5)$$

необходимым и достаточным условием разрешимости уравнений (1) является *условие вмороженности магнитного поля в плазму*, т.е., равенство нулю сопутствующей напряженности электрического поля  $E_i$ :

$$E_i = F_{ji} v^j = 0. \quad (6)$$

В формулах (4)- (6) и далее:  $F_{ij}$  - антисимметричный тензор Максвелла,  $\overset{*}{F}_{ij}$  - дуальный к нему тензор:

$$\overset{*}{F}_{ij} = \frac{1}{2} \eta_{ijkl} F^{kl}, \quad (7)$$

где  $\eta_{ijkl}$  - ковариантно постоянный дискриминантный тензор (тензор Levi-Civita)[8].

При выполнении условия вмороженности (6) условие совпадения динамических скоростей (1) выполняется всегда, независимо от условий (4)-(5). Одним из авторов на основе строгой кинетической модели плазмы было

<sup>2</sup>Индекс "p" относится к плазме, индекс "f" - к полю, запятой обозначены ковариантные производные.

показано [5], что условие в замороженности (6) фактически является следствием дрейфового приближения, т.е., малости Ларморовской длины для электронов,  $\lambda_e = c/\omega_e$ , по сравнению с характерным масштабом неоднородности,  $r$ :

$$\Lambda = \frac{c}{r\omega_e} \ll 1; \quad \omega_c = \frac{eH}{m_e}, \quad (8)$$

где  $\omega_c$  - Ларморовская частота для электронов.

### Самосогласованные уравнения магнитной гидродинамики

Полная система самосогласованных уравнений релятивистской магнитной гидродинамики (РМГД) для плазмы в гравитационном поле, полученная в [1], состоит из уравнений Максвелла первой группы:

$$F^{*ik}_{,k} = 0; \quad (9)$$

уравнений Максвелла второй группы:

$$F^{ik}_{,k} = -4\pi J_{dr}^i \quad (10)$$

с пространственноподобным дрейфовым током:

$$J_{dr}^i = -\frac{2F^{ik} T_{k,l}^p}{F_{jm} F^{jm}}; \quad (J_{dr}, J_{dr}) < 0 \quad (11)$$

и закона сохранения полной энергии-импульса системы:

$$T^{*ik}_{,k} + T^f{}^{ik}_{,k} = 0. \quad (12)$$

Вследствие уравнений (10) должно выполняться уравнение непрерывности для дрейфового тока:

$$J_{dr,i}^i = 0. \quad (13)$$

Отметим также ряд полезных строгих следствий уравнений магнитной гидродинамики:

$$F_{ik}^* J_{dr}^k = 0; \quad (14)$$

$$v^i T_{i,k}^p = 0; \quad (15)$$

$$H^i T_{i,k}^k = 0. \quad (16)$$

### Представление тензора Максвелла через сопутствующие напряженности

Компоненты тензора Максвелла удобно представить через пару пространственноподобных векторов сопутствующей напряженности электрического,  $E_i$  (6), и магнитного,  $H_i$ , поля [9]:

$$E_i = F_{ji} v^j; \quad H_i = F_{ji}^* v^j, \quad (17)$$

так что:

$$(E, E) = -E^2; \quad (H, H) = -H^2; \quad (v, E) = 0; \quad (v, H) = 0. \quad (18)$$

Тогда тензор Максвелла и дуальный к нему можно выразить через пару пространственноподобных векторов сопутствующих напряженностей [9]:

$$F_{ij} = v_i E_j - v_j E_k - \eta_{ijkl} v^k H^l; \quad (19)$$

$$F_{ij}^* = v_i H_j - v_j H_k + \eta_{ijkl} v^k E^l, \quad (20)$$

причем:

$$\frac{1}{2} F_{ij} F^{ij} = \frac{1}{2} F_{ij}^* F^{*ij} = (E, E) - (H, H) = H^2 - E^2; \quad (21)$$

$$\frac{1}{2} F_{ij} F^{*ij} = (E, H). \quad (22)$$

Тензор энергии-импульса (ТЭИ) электромагнитного поля:

$$T_k^i = \frac{1}{4\pi} \left( F_{ij}^i F^j_k + \frac{1}{4} \delta_k^i F^{lm} F_{lm} \right) \quad (23)$$

также можно представить через тройку векторов  $v, E, H$  (см. [1]). В интересующем нас случае равенства динамических скоростей плазмы и электромагнитного поля (1) ТЭИ представляется через пару векторов,  $v, H$  [1]:

$$\overset{f}{T}_k^i = -\frac{1}{8\pi} \left[ (\delta_k^i - 2v^i v_k) H^2 + 2H^i H_k \right], \quad (24)$$

так что:

$$\overset{f}{T} \equiv \overset{f}{T}_i^i = 0. \quad (25)$$

Легко проверить, что и вектор  $v$  и пространственноподобный орт магнитного поля  $h$

$$h^i = \frac{H^i}{H}; \quad (h, h) = -1; \quad (v, h) = 0 \quad (26)$$

действительно являются собственными векторами тензора  $\overset{f}{T}{}^{ik}$ :

$$\overset{f}{T}_k^i v^k = \varepsilon_H v^i; \quad (27)$$

$$\overset{f}{T}_k^i h^k = \varepsilon_H h^i, \quad (28)$$

где

$$\varepsilon_H = \frac{H^2}{8\pi} \quad (29)$$

- плотность энергии магнитного поля.

### Тензор энергии-импульса магнитоактивной плазмы

Тензор энергии-импульса релятивистской анизотропной магнитоактивной плазмы в гравитационном и магнитном полях имеет вид (см., например, [6]):

$$\overset{p}{T}{}^{ij} = (\varepsilon + p_\perp) v^i v^j - p_\perp g^{ij} + (p_\parallel - p_\perp) h^i h^j, \quad (30)$$

где  $p_\perp, p_\parallel$  - давление плазмы в ортогональном и параллельном магнитному полю направлениях. След тензора энергии-импульса (30) равен:

$$\overset{p}{T} \equiv \overset{p}{T}_i^i = \varepsilon - p_\perp - 2p_\parallel \geq 0 \quad (31)$$

и поскольку он неотрицателен, выполняется соотношение:

$$p_\perp + 2p_\parallel \leq \varepsilon. \quad (32)$$

Нетрудно также убедиться в том, что векторы  $v$  и  $h$  также являются собственными векторами и тензора энергии-импульса плазмы (см. (27), (28)):

$$\overset{p}{T}{}^{ik} v_k = \varepsilon v^i; \quad (33)$$

$$\overset{p}{T}{}^{ik} h_k = -p_\parallel h^i. \quad (34)$$

## Решение уравнений РМГД в метрике ПГВ

### Метрика плоской гравитационной волны

Метрика вакуумной ПГВ имеет вид (см., например, [10]):

$$ds^2 = 2dudv - L^2 d\Sigma^2, \quad (35)$$

где:

$$d\Sigma^2 = \text{ch } 2\gamma (e^{2\beta} (dx^2)^2 + e^{-2\beta} (dx^3)^2) - 2 \text{sh } 2\gamma dx^2 dx^3 \quad (36)$$

- метрика "плоскости"  $(x^2, x^3)$ ;  $\beta(u), \gamma(u)$  - амплитуды поляризации  $e_+$  и  $e_\times$ , соответственно;  $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - x^1)$  - запаздывающее,  $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + x^1)$  - опережающее время. Амплитуды ПГВ - произвольные функции запаздывающего времени  $u$ , а *фоновый фактор* ПГВ,  $L(u)$ , определяется единственным нетривиальным вакуумным уравнением Эйнштейна<sup>3</sup>:

$$L'' + L(\text{ch}^2 2\gamma\beta'^2 + \gamma'^2) = 0. \quad (37)$$

При инверсии координат в плоскости  $(x^2, x^3)$  и преобразовании амплитуды ПГВ:

$$x^2 = x'^3; \quad x^3 = x'^2; \quad \beta' = -\beta; \quad \gamma' = \gamma \quad (38)$$

<sup>3</sup>Штрих означает дифференцирование по запаздывающему времени  $u$ .

двумерная метрика переходит сама в себя. При повороте в плоскости  $(x^2, x^3)$  на “угол”  $\pi/4$ :

$$x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'^2 + x'^3); \quad x^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'^3 + x'^2) \quad (39)$$

двумерная метрика преобразуется к виду:

$$d\Sigma'^2 = (\text{ch } 2\gamma \text{ ch } 2\beta + \text{sh } 2\gamma)(dx'^2)^2 + (\text{ch } 2\gamma \text{ ch } 2\beta - \text{sh } 2\gamma)(dx'^3)^2 + 2 \text{ch } 2\gamma \text{ sh } 2\beta dx'^2 dx'^3. \quad (40)$$

При  $\beta = 0$ , т.е., в случае ПГВ с единственной поляризацией  $\mathbf{e}_\times$ , получим из (40):

$$d\Sigma'^2 = e^{2\gamma}(dx'^2)^2 + e^{-2\gamma}(dx'^3)^2$$

- метрику ПГВ с единственной поляризацией  $\mathbf{e}_+$ .

Для слабой гравитационной волны:

$$|\beta(u)| \ll 1; \quad |\gamma(u)| \ll 1; \quad L^2(u) = 1 + O^2(|\beta, \gamma|) \quad (41)$$

поворот (39) эквивалентен преобразованию:

$$\beta' = \gamma; \quad \gamma' = -\beta. \quad (42)$$

### Начальные условия

Пусть в отсутствие ПГВ ( $u \leq 0$ ):

$$\beta(u \leq 0) = 0; \quad \beta'(u \leq 0) = 0; \quad L(u \leq 0) = 1, \quad (43)$$

плазма однородна и покоится:

$$v^v(u \leq 0) = v^u(u \leq 0) = 1/\sqrt{2}; \quad v^2 = v^3 = 0; \\ \varepsilon(u \leq 0) = \overset{0}{\varepsilon}; \quad p_{\parallel}(u \leq 0) = \overset{0}{p}_{\parallel}; \quad p_{\perp}(u \leq 0) = \overset{0}{p}_{\perp}, \quad (44)$$

а однородное магнитное поле направлено в плоскости  $\{x^1, x^2\}$ :

$$H_1(u \leq 0) = \overset{0}{H} \cos \Omega; \quad H_2(u \leq 0) = \overset{0}{H} \sin \Omega; \\ H_3(u \leq 0) = 0; \quad E_i(u \leq 0) = 0, \quad (45)$$

где  $\Omega$  - угол между осью  $0x^1$  (направлением распространения ПГВ) и вектором напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$ . Как мы отмечали выше, в цитированных работах [1]-[6] исследовалось действие ПГВ с поляризацией  $\mathbf{e}_+$  на однородную плазму с начальными условиями (44)-(45). С учетом указанных в разделе 48 свойств преобразования метрики это означает, что ранее было исследовано действие монополяризованной ПГВ на однородную плазму в случае параллельности проекции вектора начальной напряженности магнитного поля,  $\mathbf{H}$ , на плоскость фронта ПГВ и оси поляризации. При этом, нет принципиальной разницы между случаями, когда эта проекция совпадает с направлением  $x^2$  или  $x^3$  - достаточно лишь сделать замену (38), - ни между выбором состояния поляризации  $\mathbf{e}_+$  или  $\mathbf{e}_\times$ , - в этом случае поворотом в плоскости фронта ПГВ на угол  $\pi/4$  совместно с поворотом вектора напряженности магнитного поля - один случай можно свести к другому. Для полного понимания механизма взаимодействия сильной ПГВ с анизотропной магнитоактивной плазмой принципиально важно исследовать комбинированную ситуацию, когда ПГВ имеет сразу две поляризации, а проекция вектора напряженности магнитного поля на плоскость фронта ПГВ параллельна оси одной из них. Этому случаю и соответствуют начальные условия (44)-(45).

### Симметрии задачи

Как известно, метрика (35) допускает группу движений  $G_5$ , которой соответствует три линейно независимых в точке вектора Киллинга:

$$\xi_{(1)}^i = \delta_v^i; \quad \xi_{(2)}^i = \delta_2^i; \quad \xi_{(3)}^i = \delta_3^i. \quad (46)$$

Вследствие существования векторов Киллинга в метрике автоматически сохраняются при движениях вдоль направлений Киллинга все геометрические объекты, в том числе символы Кристоффеля, тензор Римана, тензор Риччи, а, следовательно, и - тензор энергии-импульса магнитоактивной плазмы:

$$\underset{\xi_\alpha}{L} g_{ij} = 0; \Rightarrow \underset{\xi_\alpha}{L} R_{ij} = 0; \Rightarrow \underset{\xi_\alpha}{L} T_{ij} = 0, \quad (47)$$

где  $L T_{ij}$  - производная Ли в направлении  $\xi$ :

$$L_{\xi} T_{ij} = T_{ij,k} \xi^k + T_{kj} \xi_{,i}^j + T_{ik} \xi_{,j}^k. \quad (48)$$

Потребуем далее, чтобы симметрию наследовали по отдельности тензоры энергии-импульса плазмы,  $T_{ij}^p$ , и электромагнитного поля,  $T_{ij}^f$ :

$$L_{\xi_{\alpha}} T_{ij}^p = 0; \quad (49)$$

$$L_{\xi_{\alpha}} T_{ij}^f = 0; \quad (\alpha = \overline{1,3}). \quad (50)$$

Следствиями (50) являются:

$$L_{\xi_{\alpha}} F_{ij} = 0, \quad L_{\xi_{\alpha}} \overset{*}{F}_{ij} = 0 \implies L_{\xi_{\alpha}} H = 0, \quad L_{\xi_{\alpha}} E_i = 0, \quad L_{\xi_{\alpha}} H_i = 0. \quad (51)$$

Следствиями (49) и (51) являются:

$$L_{\xi_{\alpha}} \varepsilon = 0, \quad L_{\xi_{\alpha}} v^i = 0, \quad L_{\xi_{\alpha}} p_{\perp} = 0, \quad L_{\xi_{\alpha}} p_{\parallel} = 0. \quad (52)$$

Таким образом, все физически наблюдаемые величины  $\mathbf{P}$  наследуют симметрию метрики (35):

$$L_{\xi_{\alpha}} \mathbf{P} = 0; \quad (\alpha = \overline{1,3}), \quad (53)$$

т.е., с учетом явного вида векторов Киллинга (46):

$$p = p(u); \quad \varepsilon = \varepsilon(u); \quad v^i = v^i(u); \quad (54)$$

$$F_{ik} = F_{ik}(u); \quad H_i = H_i(u); \quad h_i = h_i(u). \quad (55)$$

## Тензор Максвелла

В этом разделе мы получим выражение для векторного потенциала электромагнитного поля в метрике с учетом начальных условий (44)-(45) методом отличным от использованного в работе [1], основанного только на уравнениях Максвелла первой группы и начальных условиях и поэтому имеющему большую общность. Начальным условиям (45) соответствует векторный потенциал:

$$\begin{aligned} A_v = A_u = A_2 = 0; \\ A_3 = \overset{0}{H} (x^1 \sin \Omega - x^2 \cos \Omega); \quad (u \leq 0). \end{aligned} \quad (56)$$

Этим условиям соответствуют следующие начальные значения тензора Максвелла:

$$\begin{aligned} F_{23}(u \leq 0) = -\overset{0}{H} \cos \Omega; \quad F_{v3}(u \leq 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{0}{H} \sin \Omega; \quad F_{v2}(u \leq 0) = 0; \\ F_{u2}(u \leq 0) = 0; \quad F_{u3}(u \leq 0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \overset{0}{H} \sin \Omega; \quad F_{uv}(u \leq 0) = 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Как известно, первую группу уравнений Максвелла (9), являющейся следствием существования векторного потенциала, можно записать в форме:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_j \sqrt{-g} \overset{*}{F}{}^{ij} = 0. \quad (58)$$

Учитывая (55), получим отсюда:

$$L^2 \overset{*}{F}{}^{u\alpha} = C_{(\alpha)} \quad (= \text{Const}); \quad \alpha = \{v, 2, 3\}, \quad (59)$$

Полагая здесь и в дальнейшем следующий порядок перечисления координат:

$$\text{Coords} := [v, u, x^2, x^3], \quad (60)$$

установим связь компонент тензора Максвелла с компонентами дуального к нему тензора:

$$\begin{aligned} \overset{*}{F}{}^{uv} = -\frac{1}{L^2} F_{23}; \quad \overset{*}{F}{}^{u2} = \frac{1}{L^2} F_{v3}; \quad \overset{*}{F}{}^{u3} = -\frac{1}{L^2} F_{v2}; \\ \overset{*}{F}{}^{v2} = \frac{1}{L^2} F_{u3}; \quad \overset{*}{F}{}^{v3} = \frac{1}{L^2} F_{u2}; \quad \overset{*}{F}{}^{23} = -\frac{1}{L^2} F_{uv}. \end{aligned} \quad (61)$$



Тогда начальные условия (45) дают:

$$L^2 \overset{*}{F}{}^{uv} = -F_{23} = \overset{0}{H} \cos \Omega; \quad (62)$$

$$L^2 \overset{*}{F}{}^{u2} = F_{v3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{0}{H} \sin \Omega; \quad (63)$$

$$L^2 \overset{*}{F}{}^{u3} = -F_{v2} = 0. \quad (64)$$

Таким образом, второй инвариант электромагнитного поля равен:

$$\text{Inv}_2 = F_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik} = \frac{2}{L^2} (F_{v3} F_{u2} - F_{23} F_{uv}), \quad (65)$$

так что условие (5) равенства нулю второго инварианта электромагнитного поля с учетом (63), (11) сводится к соотношению:

$$L^2 \overset{*}{F}{}^{v3} \equiv F_{u2} = -\sqrt{2} F_{uv} \text{ctg} \Omega. \quad (66)$$

Как известно (см., например, [11]), первая группа уравнений Максвелла эквивалентна условию существования векторного потенциала  $A_i$ :

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i. \quad (67)$$

Заметим, что в отличие от тензора Максвелла компоненты векторного потенциала  $A_i$  могут зависеть от переменных  $v, x^2, x^3$ . Запишем соотношения (62)-(66) относительно векторного потенциала  $A_i$ , используя определение тензора Максвелла (67):

$$\partial_3 A_2 - \partial_2 A_3 = \overset{0}{H} \cos \Omega; \quad (68)$$

$$\partial_v A_3 - \partial_3 A_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{0}{H} \sin \Omega; \quad (69)$$

$$\partial_v A_2 - \partial_2 A_v = 0; \quad (70)$$

$$\partial_u A_2 - \partial_2 A_u = -\sqrt{2} \text{ctg} \Omega (\partial_u A_v - \partial_v A_u) \quad (71)$$

Вводя новые функции:

$$\tilde{A}_2 = A_2 - \overset{0}{H} \cos \Omega x^3 \equiv A_2 - \delta A_2; \quad (72)$$

$$\tilde{A}_v = A_v + \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{0}{H} \sin \Omega x^3 \equiv A_v - \delta A_v, \quad (73)$$

$$\tilde{A}_3 = A_3, \quad (74)$$

где:

$$\delta A_2 = \overset{0}{H} \cos \Omega x^3; \quad \delta A_v = -\frac{1}{\sqrt{2}} \overset{0}{H} \sin \Omega x^3; \quad \delta A_3 = 0, \quad (75)$$

придадим соотношениям (68) и (69) вид, аналогичный (70):

$$\partial_3 \tilde{A}_2 - \partial_2 A_3 = 0; \quad (76)$$

$$\partial_v A_3 - \partial_3 \tilde{A}_v = 0. \quad (77)$$

Заметим, что перенормировка компонент векторного потенциала (72), (73) сохраняет неизменным соотношение (70). Но тогда систему уравнений (70), (76), (77) можно записать в виде:

$$\partial_\sigma \tilde{A}_\delta - \partial_\delta \tilde{A}_\sigma = 0; \quad (\sigma, \delta = v, 2, 3) \quad (78)$$

и рассматривать как уравнения на трехмерной гиперповерхности  $V^3 = \{v, x^2, x^3\}$ . Как известно, единственными решениями уравнений (78) на  $V^3$  являются градиентная функция:

$$\tilde{A}_\sigma = \partial_\sigma \Phi, \quad (\sigma = v, 2, 3), \quad (79)$$

где  $\Phi = \Phi(u, v, x^2, x^3)$  произвольная скалярная функция. Заметим, что начальным условиям (56) соответствует следующее значение потенциальной функции:

$$\Phi(u \leq 0) = x^3 \overset{0}{H} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (v - u) \sin \Omega - x^2 \cos \Omega \right). \quad (80)$$

Таким образом:

$$A_\sigma = \partial_\sigma \tilde{\Phi} + \delta A_\sigma \quad (81)$$

Как известно (см., например, [11]), на 4 компоненты векторного потенциала можно наложить одно калибровочное условие. Выберем это условие в виде, соответствующем начальным условиям (56):

$$A_u = 0. \quad (82)$$

Тогда для не сохраняющихся компонент тензора Максвелла  $F_{u\sigma}$  справедливо представление:

$$F_{u\sigma} = \partial_{u\sigma} \Phi; \quad (\sigma = v, 2, 3). \quad (83)$$

Но тогда условие (71) может быть записано в виде:

$$\partial_u (A_2 + \sqrt{2} \operatorname{ctg} \Omega A_v) = 0. \quad (84)$$

Интегрируя (84) с начальными условиями (56), найдем:

$$A_2 + \sqrt{2} \operatorname{ctg} \Omega A_v = 0. \quad (85)$$

Учитывая тождество:

$$\delta A_2 + \sqrt{2} \operatorname{ctg} \Omega \delta A_v \equiv 0, \quad (86)$$

Получим из (85) линейное дифференциальное уравнение:

$$\partial_2 \Phi + \sqrt{2} \operatorname{ctg} \Omega \partial_v \Phi = 0,$$

интегрируя которое, найдем:

$$\Phi = \Phi(v\sqrt{2} \sin \Omega - x^2 \cos \Omega, u, x^3), \quad (87)$$

где  $\Phi$  - произвольная функция своих аргументов. Используя теперь начальное условие (80), получим окончательно:

$$\Phi = x^3 \overset{0}{H} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (v - \psi(u)) \sin \Omega - x^2 \cos \Omega \right), \quad (88)$$

где  $\psi(u)$  - произвольная функция запаздывающего времени, удовлетворяющая начальному условию:

$$\psi(u \leq 0) = u. \quad (89)$$

При этом окончательное выражение для компонент векторного потенциала принимает вид:

$$A_2 = A_v = A_u = 0; \quad A_3 = \overset{0}{H} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (v - \psi(u)) \sin \Omega - x^2 \cos \Omega \right) \quad (90)$$

Компоненты тензора Максвелла относительно потенциала (90) равны:

$$\begin{aligned} F_{vu} = 0; \quad F_{2u} = 0; \quad F_{3u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{0}{H} \psi' \sin \Omega; \\ F_{2v} = 0; \quad F_{3v} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \overset{0}{H} \sin \Omega; \quad F_{23} = -\overset{0}{H} \cos \Omega \end{aligned} \quad (91)$$

и определяются лишь одной неизвестной функцией  $\psi(u)$ . Для компонент дуального тензора Максвелла (7) найдем:

$$\begin{aligned} \overset{*}{F}{}^{vu} = \frac{1}{L^2} \overset{0}{H} \cos \Omega; \quad \overset{*}{F}{}^{2u} = -\frac{1}{\sqrt{2}L^2} \overset{0}{H} \sin \Omega; \quad \overset{*}{F}{}^{3u} = 0; \\ \overset{*}{F}{}^{2v} = \frac{1}{\sqrt{2}L^2} \overset{0}{H} \psi' \sin \Omega; \quad \overset{*}{F}{}^{3v} = 0; \quad \overset{*}{F}{}^{23} = 0. \end{aligned} \quad (92)$$

### Сопутствующие напряженности и условие вмороженности поля

Согласно (17) определим компоненты вектора сопутствующей напряженности электрического поля,  $E_i$ :

$$\begin{aligned} E_v = -\frac{1}{\sqrt{2}} \overset{0}{H} \sin \Omega v^3; \quad E_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{0}{H} \psi' \sin \Omega v^3; \\ E_2 = \overset{0}{H} \cos \Omega v^3; \quad E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{0}{H} \sin \Omega (v^v - \psi' v^u) - \overset{0}{H} \cos \Omega v^2. \end{aligned} \quad (93)$$

Таким образом, условие вмороженности магнитного поля в плазму (6) принимают вид:

$$v^3 = 0; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (v_v \psi' - v_u) \sin \Omega + v^2 \cos \Omega = 0. \quad (94)$$

В итоге - ковариантные компоненты тензора Максвелла, контрвариантные компоненты дуального тензора Максвелла и контрвариантные компоненты вектора скорости определяются выражениями, полученными в [1], но для более общей метрики гравитационной волны и при более слабых предположениях. В цитированной работе, в частности, для получения явного вида компонент тензора Максвелла и вектора скорости проводился анализ компонент дрейфового тока и использовался закон сохранения этого тока. Как показали вышеприведенные вычисления, для достижения этой цели достаточны три предположения:

1. наследование симметрии пространства по отдельности тензором импульса электромагнитного поля и тензором энергии-импульса плазмы;
2. равенство нулю второго инварианта тензора Максвелла;
3. замороженность магнитного поля в плазму.

При этом достаточен анализ первой группы уравнений Максвелла и начальных условий. Вычисляя далее ковариантные компоненты дуального тензора Максвелла с учетом (92), найдем:

$$\begin{aligned} F_{uv}^* &= \frac{H}{L^2} \cos \Omega; & F_{u2}^* &= \frac{H}{\sqrt{2}} e^{2\beta} \operatorname{ch} 2\gamma\psi' \sin \Omega; & F_{v2}^* &= -\frac{H}{\sqrt{2}} e^{2\beta} \operatorname{ch} 2\gamma \sin \Omega; \\ F_{v3}^* &= \frac{H}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} 2\gamma \sin \Omega; & F_{u3}^* &= -\frac{H}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} 2\gamma\psi' \sin \Omega; & F_{23}^* &= 0. \end{aligned} \quad (95)$$

Ковариантные компоненты вектора напряженности магнитного поля относительно тензора Максвелла (92) равны:

$$H_v = -\frac{H}{L^2} \left( v_v \cos \Omega + \frac{1}{\sqrt{2}} v^2 \sin \Omega \right); \quad (96)$$

$$H_u = \frac{H}{L^2} \left( v_u \cos \Omega - \frac{1}{\sqrt{2}} v^2 \psi' \sin \Omega \right); \quad (97)$$

$$H_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{H}{L} \operatorname{ch} 2\gamma e^{2\beta} \sin \Omega (v_v \psi' + v_u); \quad (98)$$

$$H_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{H}{L} \operatorname{sh} 2\gamma \sin \Omega (v_v \psi' + v_u). \quad (99)$$

При этом легко показать на основе формул (92):

$$H^3 = F^{i3} v_i = 0, \quad (100)$$

,т.е., третья контрвариантная координата вектора напряженности магнитного поля, как и вектора динамической скорости плазмы, равна нулю. Легко также убедиться в ортогональности вектора скорости и напряженности магнитного поля (18):

$$H_i v^i \equiv 0. \quad (101)$$

Квадрат напряженности магнитного поля, т.е., скаляр  $H^2$ , проще всего вычислить с помощью соотношения (21), используя явную форму контрвариантных, (92), и ковариантных, (95) компонент дуального тензора Максвелла:

$$H^2 = \frac{H^2}{L^4} (L^2 \psi' \operatorname{ch} 2\gamma e^{2\beta} \sin^2 \Omega + \cos^2 \Omega). \quad (102)$$

Условия замороженности магнитного поля в плазму (94) устанавливают связь между ненулевыми контрвариантными компонентами вектора скорости  $v^2, v^v = v_u, v^u = v_v$ . Кроме того, имеется еще соотношение нормировки вектора скорости (1). Поэтому, фактически, независимой остается лишь одна координата вектора скорости, а электромагнитное поле определяется одной неизвестной функцией запаздывающего времени,  $\psi(u)$ . Соотношение нормировки вектора скорости с помощью (96) - (102) может быть представлено в эквивалентной форме:

$$\left[ v_v \cos \Omega + v_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \Omega \right]^2 = \frac{H^2}{H^2} v_v^2 L^4 - \frac{\sin^2 \Omega}{2} L^2 \operatorname{ch} 2\gamma e^{2\beta}. \quad (103)$$

### Дрейфовый ток

Вычислим компоненты дрейфового тока с помощью уравнений Максвелла (10), учитывая зависимость компонент тензора Максвелла только от запаздывающего времени (55):

$$J_{\text{dr}}^i = -\frac{1}{4\pi L^2} \partial_u (L^2 F^{iu}). \quad (104)$$

Тогда:

$$J_{\text{dr}}^v = J_{\text{dr}}^u = 0, \quad (105)$$

$$J_{\text{dr}}^2 = -\frac{H \sin \Omega}{2\sqrt{2}\pi L^2} \text{ch } 2\gamma \cdot \gamma', \quad (106)$$

$$J_{\text{dr}}^3 = -\frac{H \sin \Omega e^{2\beta}}{2\sqrt{2}\pi L^2} (\text{sh } 2\gamma \cdot \gamma' + \text{ch } 2\gamma \cdot \beta'). \quad (107)$$

Вычисляя с помощью (98), (99), (105), (106), (107) скалярное произведение вектора напряженности магнитного поля и вектора плотности дрейфового тока, найдем:

$$(J_{\text{dr}}, H) = \frac{H^2}{4\pi L^2} (v_v \psi' + v_u) (\gamma' - \frac{\beta'}{2} \text{sh } 4\gamma). \quad (108)$$

Таким образом, наличие второй поляризации гравитационной волны приводит к нарушению ортогональности векторов плотности дрейфового тока и напряженности магнитного поля<sup>4</sup>.

### Интегралы движения

Вследствие существования движений (46) выполняются уравнения Киллинга:

$$\xi_{(\alpha)}^{i,k} + \xi_{(\alpha)}^{k,i} = 0, \quad (\alpha = \overline{1,3}). \quad (109)$$

Поэтому законы сохранения полного ТЭИ плазмы в поле ПГВ после свертки их последовательно со всеми векторами Киллинга (46) могут быть записаны в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_k \sqrt{-g} \xi_{(\alpha)}^{iT_i^k}) = 0; \quad (\alpha = \overline{1,3}). \quad (110)$$

С учетом того факта, что компоненты тензора энергии-импульса могут зависеть только от запаздывающего времени, получаем следующие интегралы [1]:

$$L^2 \xi_{(\alpha)}^{iT_{vi}} = C_\alpha = \text{Const}; \quad (\alpha = \overline{1,3}). \quad (111)$$

В этой статье мы ограничимся рассмотрением случая *поперечного распространения* ПГВ ( $\Omega = \pi/2$ ). Тогда, подставляя в интегралы (111) выражения для ТЭИ плазмы и электромагнитного поля, используя соотношения (99) - (103) а также начальные условия (43), (44), приведем интегралы движения к виду:

$$2L^2(\varepsilon + p_{\parallel})v_v^2 - (p_{\parallel} - p_{\perp})\frac{H^2}{H^2} \text{ch } 2\gamma e^{2\beta} = (\overset{0}{\varepsilon} + \overset{0}{p})\Delta(u); \quad (112)$$

$$L^2(\varepsilon + p_{\parallel})v_v v_2 = 0, \quad (113)$$

$$L^2(\varepsilon + p_{\parallel})v_v v_3 = 0, \quad (114)$$

где:

$$\overset{0}{p} = \overset{0}{p}_{\perp}; \quad (115)$$

и введена так называемая *управляющая функция GMSW*:

$$\Delta(u) = 1 - \alpha^2 (\text{ch } 2\gamma e^{2\beta} - 1), \quad (116)$$

с безразмерным параметром  $\alpha^2$ :

$$\alpha^2 = \frac{H^2}{4\pi(\overset{0}{\varepsilon} + \overset{0}{p})}. \quad (117)$$

Разрешая (112) относительно  $v_v$  получим выражения для координаты вектора скорости через скаляры:  $\varepsilon$ ,  $p_{\parallel}$ ,  $p_{\perp}$ ,  $\psi'$  и явные функции запаздывающего времени:

$$v_v^2 = \frac{(\overset{0}{\varepsilon} + \overset{0}{p})}{2L^2(\varepsilon + p_{\parallel})} \Delta(u) + \frac{(p_{\parallel} - p_{\perp})}{(\varepsilon + p_{\parallel})} \frac{H^2}{H^2} \frac{\text{ch } 2\gamma e^{2\beta}}{2L^2}; \quad (118)$$

Из (112) получим:

$$v_2 = 0. \quad (119)$$

<sup>4</sup>Напомним, что в случае монополяризованной гравитационной волны эти пространственноподобные векторы взаимно ортогональны [1].

С помощью (118), (119) из соотношения нормировки вектора скорости найдем координату  $v_u$  вектора скорости:

$$v_u = \frac{1}{2v_v}, \quad (120)$$

а из условия вмороженности (94) найдем значение производной потенциала  $\psi'$ :

$$\psi' = \frac{1}{2v_v^2}, \quad (121)$$

с помощью которой из соотношения (102) определяется скаляр  $H^2$ :

$$H^2 = \frac{H^2}{L^2} \frac{\text{ch } 2\gamma e^{2\beta}}{2v_v^2}. \quad (122)$$

Заметим, что в случае изотропной плазмы ( $p_\perp = p_\parallel = p$ ) выражение (118) принимает вид:

$$v_v^2 = \frac{(\overset{0}{\varepsilon} + \overset{0}{p})}{2L^2(\varepsilon + p)} \Delta(u); \quad (123)$$

Из системы уравнений РМГД можно получить следующее дифференциальное уравнение в метрике ПГВ:

$$L^2 \varepsilon' v_v + (\varepsilon + p_\parallel)(L^2 v_v)' + \frac{1}{2} L^2 (p_\parallel - p_\perp) v_v (\ln H^2)' = 0. \quad (124)$$

Уравнение (124) в конечном счете представляет собой дифференциальное уравнение на 3 неизвестные скалярные функции:  $\varepsilon$ ,  $p_\parallel$  и  $p_\perp$ . Такая недоопределенность является известным следствием неполноты гидродинамического описания плазмы. Для решения этого уравнения необходимо наложить две дополнительные связи между функциями  $\varepsilon$ ,  $p_\parallel$ ,  $p_\perp$ , т.е., уравнения состояния вида:

$$p_\parallel = f(\varepsilon); \quad p_\perp = g(\varepsilon). \quad (125)$$

## Баротропное уравнение состояния

### Общие формулы

Рассмотрим баротропное состояние анизотропной плазмы, когда связи (125) являются линейными:

$$p_\parallel = k_\parallel \varepsilon; \quad p_\perp = k_\perp \varepsilon, \quad (126)$$

Уравнение (124) при связях (126) легко интегрируется, и мы получим еще один интеграл:

$$\varepsilon (\sqrt{2} L^2 v_v)^{(1+k_\parallel)} H^{(k_\parallel - k_\perp)} = \overset{0}{\varepsilon} \overset{0}{H}^{(k_\parallel - k_\perp)}. \quad (127)$$

Таким образом, формально задача решена, так как свелась к решению системы алгебраических уравнений, которая, однако, все еще слишком сложна для ее решения и анализа. Решение задачи существенно определяется двумя безразмерными параметрами:  $k_\perp$  и  $k_\parallel$ . Ниже мы рассмотрим частные значения этих параметров.

### Поперечное распространение ПГВ

В случае баротропного уравнения состояния при связях (126) подстановка (122) в (118) приводит к результату:

$$v_v^2 = \frac{1}{2} \frac{\overset{0}{\varepsilon}}{L^2 \varepsilon} \Delta(u). \quad (128)$$

Подставляя (122), (128) в (127), получаем замкнутое уравнение на переменную  $\varepsilon$ , решая которое, найдем окончательно:

$$\varepsilon = \overset{0}{\varepsilon} \left[ \Delta^{1+k_\perp} L^{2(1+k_\parallel)} (\text{ch } 2\gamma e^{2\beta})^{k_\parallel - k_\perp} \right]^{-g_\perp}; \quad (129)$$

$$v_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \Delta L^{(k_\parallel + k_\perp)} (\text{ch } 2\gamma e^{2\beta})^{\frac{k_\parallel - k_\perp}{2}} \right]^{g_\perp}; \quad (130)$$

$$H = \overset{0}{H} \left[ \Delta L^{(1+k_\parallel)} (\text{ch } 2\gamma e^{2\beta})^{-\frac{1-k_\parallel}{2}} \right]^{-g_\perp}, \quad (131)$$

где

$$g_\perp = \frac{1}{1 - k_\perp} \in [1, 2]. \quad (132)$$

В частности, для ультрарелятивистской плазмы с нулевым продольным давлением:

$$k_{\parallel} \rightarrow 0; \quad k_{\perp} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (133)$$

получим из (129) - (132):

$$v_v = \frac{1}{\sqrt{2}} L \Delta^2 (\operatorname{ch} 2\gamma e^{2\beta})^{-1/2}; \quad (134)$$

$$\varepsilon = \overset{0}{\varepsilon} L^{-4} \Delta^{-3} (\operatorname{ch} 2\gamma e^{2\beta}); \quad H = \overset{0}{H} L^{-2} \Delta^{-2} (\operatorname{ch} 2\gamma e^{2\beta}). \quad (135)$$

## Уравнение энергодоланса

В [1] указано, что сингулярное состояние, возникающее в магнитоактивной плазме при выполнении условия  $2\beta_0\alpha^2 > 1$  на гиперповерхности:

$$\Delta(u_*) = 0, \quad (136)$$

снимается учетом обратного действия магнитоактивной плазмы на ГВ, что приводит к эффективному поглощению энергии ГВ плазмой и ограничению на амплитуду ГВ. Строгое решение вопроса о трансформации энергии ПГВ в энергию ударной волны возможно лишь на основе исследования самосогласованной системы уравнений Эйнштейна и уравнений магнитной гидродинамики. Однако, качественный анализ ситуации можно провести и с помощью более простой модели энергодоланса, предложенной в [2]. Поток энергии магнитоактивной плазмы направлен вдоль направления распространения ПГВ, т.е., вдоль оси  $0x^1$ . Пусть  $\beta_*(u)$  и  $\gamma_*(u)$  есть вакуумные амплитуды ПГВ, а  $\beta(u)$  и  $\gamma(u)$  - амплитуды ПГВ с учетом поглощения в плазме;  $T^{ij}$  - полный тензор энергии-импульса плазмы и электромагнитного поля (2).

## Интегральный закон сохранения энергии

В [1] было предложено полуколичественное решение этого вопроса на основе простой модели энергодоланса. Вследствие чрезвычайной важности, не ограничиваясь рассмотрением в [1], вернемся к более полному решению вопроса о передачи энергии от ГВ к магнитоактивной плазме. При этом вместо решения системы уравнений Эйнштейна мы воспользуемся их следствием - законом сохранения полного импульса "плазма + гравитационные волны". Ясно, что данная модель является приближенной и не может заменить строгого решения уравнений Эйнштейна. Согласно [11] в произвольном гравитационном поле имеет место закон сохранения полного импульса системы:

$$p^i = \frac{1}{c} \int (-g)(T^{i4} + \overset{g}{T}{}^{i4}) dV, \quad (137)$$

где  $\overset{g}{T}{}^{ik}$  - псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля, и интегрирование приводится по всему трехмерному пространству. Учтем, что приведенное выше решение является плоскосимметричным и зависит лишь от запаздывающего "времени"  $u$ . Вследствие этого интегрирование по "плоскости"  $\{x^2, x^3\}$  в (137) сводится к простому умножению на "площадь" бесконечной двумерной площадки. Поделив обе части (137) на эту площадь и учитывая что при  $\Omega = \pi/2$  из трехмерных потоков отличен от нуля лишь  $P^1$ , получим закон сохранения соответствующей поверхностной плотности импульса  $P_{\Sigma}^1$ :

$$P_{\Sigma}^1 = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} (-g)(T^{14} + \overset{g}{T}{}^{14}) dx \quad (= \text{Const}). \quad (138)$$

Пусть правое полупространство  $x > 0$  заполнено магнитоактивной плазмой, а левое  $x < 0$  - материей, не взаимодействующей со слабой ГВ. Пусть далее весь гравитационный импульс сосредоточен в интервале  $u \in [0, u_f]$ , где  $t_f = \sqrt{2}u_f$  - длительность гравитационного импульса. Поскольку интеграл в (138) сохраняется во все времена, рассмотрим его во времена  $t_0 < 0$ , когда ГВ еще не попала в магнитоактивную плазму, и  $-t_f > t > 0$ , когда ГВ уже достигла плазмы. Учитывая, что вакуумное решение зависит лишь от запаздывающего времени, получим для интеграла в (138):

$$\int_0^{u_f} \overset{g}{T}{}^1{}_{014} du = \int_0^{t\sqrt{2}} (T^{14} + \overset{g}{T}{}^{14}) du + \int_{t/\sqrt{2}}^{u_f} \overset{g}{T}{}^1{}_{014} du, \quad (139)$$

где  $\overset{g}{T}{}^1{}_{014} = \overset{g}{T}{}^{14}(\beta_*(u), \gamma_*(u)); \overset{g}{T}{}^{14} = \overset{g}{T}{}^{14}(\beta(u), \gamma(u))$ . Переносим один из интегралов в левую часть (139), получим соотношение:

$$\int_0^u \overset{g}{T}{}^1{}_{014} du = \int_0^u (T^{14} + \overset{g}{T}{}^{14}) du, \quad (140)$$

где переменная  $u = t/\sqrt{2} > 0$  - теперь уже может принимать *любые положительные* значения.

Аналогичный закон можно записать и для полной энергии плазмы; в этом случае вместо (140) получим:

$$\int_0^u \overset{g}{T}{}^4{}_0 du = \int_0^u (T^{44} - \mathcal{E}_0 + \overset{g}{T}{}^{14}) du,$$

где,  $\mathcal{E}_0$  - суммарная плотность энергии невозмущенной плазмы.

### Локальный анализ сохранения

Поскольку соотношение (140) должно выполняться при любых значениях переменной  $u$ , то должно выполняться и соответствующее локальное соотношение:

$$T^{41}(\beta, \gamma) + \overset{g}{T}{}^{41}(\beta, \gamma) = \overset{g}{T}{}^{41}(\beta_*, \gamma_*), \quad (141)$$

где  $\overset{g}{T}{}^{41}(\beta, \gamma)$  - поток энергии слабой ГВ в направлении  $0x^1$  (см. [11]):

$$\overset{g}{T}{}^{41} = \frac{1}{16\pi} \left[ h_{23}^2 + \frac{1}{4}(h'_{22} - h'_{33})^2 \right] = \frac{1}{4\pi} [(\gamma')^2 + (\beta')^2]. \quad (142)$$

Штрихом обозначено дифференцирование по  $t$ . Подставляя (142) в (141) и переходя к переменным  $v, u$ , получим:

$$2\pi [T^{vv} - T^{uu}] + (\gamma')^2 + (\beta')^2 = (\gamma'_*)^2 + (\beta'_*)^2. \quad (143)$$

В случае поперечного распространения ПГВ при баротропном уравнении состояния анизотропной плазмы:

$$T^{vv} - T^{uu} = \left( \frac{1}{4v_v^2} - v_v^2 \right) \left( \varepsilon(1 + k_\perp) + \frac{H^2}{4\pi} \right). \quad (144)$$

Используя решение уравнений магнитной гидродинамики для баротропного уравнения состояния плазмы (129), (130), (131) и безразмерный параметр  $\alpha^2$  (117), перепишем уравнение энергодбаланса (143) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\overset{0}{H}^2}{4L^2} \left( \Delta^{-\frac{4}{1-k_\perp}} L^{-\frac{4(k_\parallel+k_\perp)}{1-k_\perp}} (\text{ch } 2\gamma e^{2\beta})^{-\frac{2(k_\parallel-k_\perp)}{1-k_\perp}} - 1 \right) \left( \frac{1}{\alpha^2} + 1 \right) + \\ + (\gamma')^2 + (\beta')^2 = (\gamma'_*)^2 + (\beta'_*)^2. \end{aligned} \quad (145)$$

Разложим выражение в скобках по малости амплитуд ПГВ (41), но удержим член с  $\Delta^{-1}$ , так как параметр  $\alpha^2$  в сильно замагниченной плазме может оказаться настолько большим, что выполняется условие  $2\alpha^2\beta > 1$ . Тогда уравнение энергодбаланса принимает вид:

$$\frac{\overset{0}{H}^2}{4} (\Delta^{-4g_\perp} - 1) \left( \frac{1}{\alpha^2} + 1 \right) + (\gamma')^2 + (\beta')^2 = (\gamma'_*)^2 + (\beta'_*)^2. \quad (146)$$

Поскольку в линейном приближении по малости амплитуд  $\beta$  и  $\gamma$  управляющая функция (116) не зависит от функции  $\gamma(u)$ :

$$\Delta(u) = 1 - 2\alpha^2\beta + O(\beta^2, \gamma^2), \quad (147)$$

а функции  $\beta(u)$  и  $\gamma(u)$  произвольны и функционально независимы, то с точностью до  $\beta^2, \gamma^2$  соотношение (146) должно распадаться на два независимых:

$$2 \overset{0}{H}^2 g_\perp (1 + \alpha^2)\beta + (\beta')^2 = (\beta'_*)^2, \quad (148)$$

$$(\gamma')^2 = (\gamma'_*)^2. \quad (149)$$

Здесь учтено также то обстоятельство, что согласно самому смыслу локального уравнения энергодбаланса, мы рассматриваем короткие гравитационные волны, поэтому можно пренебречь квадратами амплитуды гравитационной волны по сравнению с квадратами их производных по запаздывающему времени. Таким образом, согласно (149):

$$\gamma_*(u) = \gamma(u), \quad (150)$$

т.е., в линейном приближении слабая гравитационная волна с поляризацией  $\mathbf{e}_x$  не взаимодействует с магнитоактивной плазмой, что совпадает с выводом работы [12].

Таким образом, в линейном приближении ПГВ с  $\mathbf{e}_x$  поляризацией проходит через магнитоактивную плазму без поглощения, а уравнение энергодбаланса принимает вид, полученный в работе [6]. Дальнейшие выводы

аналогичны случаю распространения ПГВ с одной поляризацией  $\mathbf{e}_+$ .  
При  $\alpha^2 \gg 1$  уравнение (146) можно записать в форме (см. также [2]):

$$\xi^2 V(q) + \dot{q}^2 = \dot{q}_*^2, \quad (151)$$

где  $q = \beta/\beta_0$ , точка означает дифференцирование по безразмерной временной переменной  $s$ :

$$s = \sqrt{2}\omega u, \quad (152)$$

( $\omega$  - частота ПГВ),  $V(q)$  - потенциальная функция, которая в слабой ПГВ принимает вид:

$$V(q) = \Delta^{-4g_\perp}(q) - 1, \quad (153)$$

где  $\xi^2$  - так называемый *первый параметр GMSW* [2]:

$$\xi^2 = \frac{{}^0 H^2}{4\beta_0^2 \omega^2}. \quad (154)$$

Введем новый безразмерный параметр:

$$\Upsilon = 2\alpha^2 \beta_0 \quad (155)$$

- (*второй параметр GMSW*), и перепишем (147) в виде:

$$\Delta(q(s)) = 1 - 2\alpha^2 \beta_0 q(s) = 1 - \Upsilon q(s). \quad (156)$$

Из (156):

$$\dot{q} = -\frac{\dot{\Delta}(q)}{\Upsilon}. \quad (157)$$

Для анализа поведения системы предположим, что момент  $s = 0$  соответствует переднему фронту ГВ, причем:

$$\beta_* \approx \beta_0(1 - \cos(s)) \Rightarrow q_* \approx 1 - \cos(s). \quad (158)$$

Согласно (156)-(158) система стартует с отрицательным значением производной управляющей функции и значением функции, равному 1:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}(s) &\approx -\Upsilon \sin s \approx -\Upsilon s; \\ \Delta(s) &\approx 1 - \Upsilon(1 - \cos s) \approx 1 - \Upsilon \frac{s^2}{2}; \end{aligned} \quad (s \rightarrow +0). \quad (159)$$

Уравнение энергобаланса (151) с учетом (153), (157), (158) принимает вид:

$$\dot{\Delta}^2 + \xi^2 \Upsilon^2 [\Delta^{-4g_\perp} - 1] = \Upsilon^2 \sin^2(s). \quad (160)$$

Минимально возможное значение управляющей функции, достигаемое при значении  $s = \pi/2$ :

$$\Delta_{min} = \left( \frac{1}{\xi^2} + 1 \right)^{-\gamma_\perp}, \quad (161)$$

где:

$$\gamma_\perp = \frac{1}{4g_\perp} = \frac{1 - k_\perp}{4} \Rightarrow \frac{1}{8} \leq \gamma_\perp \leq \frac{1}{4}. \quad (162)$$

При этом максимально достижимая плотность энергии магнитного поля равна:

$$\left( \frac{H^2}{8\pi} \right)_{max} = \frac{{}^0 H^2}{8\pi} \sqrt{1 + \frac{1}{\xi^2}} \quad (163)$$

и вообще не зависит от уравнений состояния плазмы. Скорость плазмы в GMSW также оказывается не зависящей от уравнения состояния. Максимальная же плотность энергии плазмы без магнитного поля оказывается зависящей от степени анизотропии плазмы:

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon \left( 1 + \frac{1}{\xi^2} \right)^{\frac{1}{4}(1+k_\perp)} \quad (164)$$

и максимальна для ультрарелятивистской плазмы с равным нулю продольным давлением.



## Заключение

Таким образом, получено обобщение результатов статей [1]-[3] на случай гравитационной волны с двумя поляризациями и показано, что в линейном приближении поляризация  $e_x$  не взаимодействует с магнитоактивной плазмой. Этот факт является обоснованием применимости ранее полученных результатов на случай произвольно поляризованной гравитационной волны.

## Литература

- [1] Yu.G. Ignat'ev, *Gravitation and Cosmology*, **1** No 4, 287 (1995).
- [2] Yu.G. Ignat'ev, *Gravitation and Cosmology*, **2** No 4, 345 (1996).
- [3] Yu.G. Ignat'ev, *Gravitation and Cosmology*, **2** No 2, 174 (1996).
- [4] Yu.G. Ignat'ev, *Phys. Lett. A*, **230**, 171 (1997).
- [5] Yu.G. Ignat'ev, *Gravitation and Cosmology*, **3**, No 4, 254 (1997).
- [6] Yu.G. Ignat'ev, D. N. Gorokhov, *Gravitation and Cosmology*, **3** No 4, 261 (1997).
- [7] Yu.G. Ignat'ev, A.A. Agafonov, *Gravitation and Cosmology*, **16**, No. 1, 16 (2010).
- [8] J.L. Syng, *Relativity: The General Theory*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1963.
- [9] Захаров А.В., Игнатьев Ю.Г. Известия ВУЗов, Физика, 1976, т.19, №9, с.57-62.
- [10] С.В. Misner, К.С. Торн, Ж.А. Вилер, *Gravitation*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, (1973).
- [11] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. Теория поля.- М.: Наука, 1988, 512 с.
- [12] Игнатьев Ю.Г., Хуснутдинов Н.Р. УФЖ, 1986, 31, с.707-715.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ЭВОЛЮЦИИ ВЫРОЖДЕННОЙ ФЕРМИ-СИСТЕМЫ СО СКАЛЯРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ЧАСТИЦ В СКМ МАТНЕМАТИСА

Ю.Г. Игнатьев<sup>1</sup>, Р.Ф. Мифтахов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Татарский государственный гуманитарно - педагогический университет,  
Россия, Казань, <sup>2</sup>Татарский государственный гуманитарно - педагогический  
университет, Россия, Казань

<sup>1</sup>E-mail: ignatev\_yu@rambler.ru, <sup>2</sup>E-mail: rustor@bk.ru

В работах [1, 2, 3] построена математическая модель, описывающая статистическую самогравитирующую систему частиц со скалярным взаимодействием. Тензор энергии - импульса (ТЭИ) массивного скалярного поля  $\Phi$  возьмем в наиболее простом виде:

$$T_s^{ik} = \frac{\epsilon}{8\pi} \left( \frac{4}{3} \Phi^{,i} \Phi^{,k} - \frac{1}{3} g^{ik} \Phi^{,j} \Phi_{,j} + g^{ik} \mu_s^2 \Phi^2 \right), \quad (1)$$

где  $\epsilon = +1$  в случае скалярного взаимодействия с притяжением одноименно скалярно заряженных частиц,  $\epsilon = -1$  - для отталкивания одноименно заряженных частиц. Определим с помощью функций распределения  $F(x, P)$  скалярную плотность заряда,  $\sigma(x)$ , [3]:

$$\sigma(x) = \sum_{P(x)} m_a q_a \int dP_a F_a(x, P_a). \quad (2)$$

Введенный скаляр можно выразить через свертку ТЭИ частиц:

$$\sigma(x) = \sum_a \frac{q_a T_p^a}{m_a + q_a \Phi}, \quad (3)$$

где  $T_p$  - свертка ТЭИ частиц. Уравнения Эйнштейна для статистической системы скалярно заряженных частиц имеют вид:

$$R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik} = 8\pi (T_p^{ik} + T_s^{ik}), \quad (4)$$

где  $T_p^{ik}$  - ТЭИ Ферми - системы:

$$T_p^{ik}(x) = \left(1 + \frac{q\phi}{m}\right) \int_{P(x)} F(x, P) p^i p^k dP. \quad (5)$$

Уравнение скалярного поля с источником (3) имеет вид:

$$\square\Phi + \mu^2\Phi = -\frac{4\pi}{(m + q\Phi)^2} qT_p. \quad (6)$$

Полученная выше замкнутая система самосогласованных уравнений (1), (4), (5) и представляет математическую модель, описывающую статистическую систему частиц со скалярным взаимодействием.

В этой работе в качестве статистической системы мы рассмотрим полностью вырожденный Ферми-газ, состоящий из массивных частиц со спином 1/2 одного сорта. В этом случае интегрирование макроскопических плотностей (5) представимо в элементарных функциях:

$$\mathcal{E}_f = \frac{m_*^4}{8\pi^2} \left[ \psi \sqrt{1 + \psi^2} (1 + 2\psi^2) - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2}) \right]; \quad (7)$$

$$P_f = \frac{m_*^4}{24\pi^2} \left[ \psi \sqrt{1 + \psi^2} (2\psi^2 - 3) + 3 \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2}) \right]; \quad (8)$$

$$T = \mathcal{E}_f - 3P_f = \frac{m_*^4}{2\pi^2} \left[ \psi \sqrt{1 + \psi^2} - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2}) \right], \quad (9)$$

$$\mathcal{E}_f + P_f = \frac{m_*^4}{3\pi^2} \psi^3 \sqrt{1 + \psi^2}, \quad (10)$$

$$\sigma = \frac{q \cdot m_*^3}{2\pi^2} \left[ \psi \sqrt{1 + \psi^2} - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2}) \right], \quad (11)$$

где  $\psi = p_F/|m_*|$  - отношение импульса Ферми к эффективной массе. В этой статье рассмотрим упрощенное уравнение скалярного поля (5) без учета конформного члена и кубической нелинейности, - тогда самосогласованное уравнение массивного скалярного поля принимает вид [1]:

$$\square\Phi + \mu^2\Phi = -\frac{4\pi}{(m + q\Phi)^2} qT,$$

причем плотность числа фермионов с импульсом Ферми связана соотношением [6]:

$$n(x) = \frac{p_F^3}{3\pi^2} \Rightarrow p_F = (3\pi^2 n(x))^{1/3}. \quad (12)$$

Таким образом, переменную  $\psi$  можно выразить через два скаляра - плотность числа частиц в собственной системе отсчета и скалярный потенциал:

$$\psi = \frac{(3\pi^2 n(x))^{1/3}}{|m + q\Phi|}. \quad (13)$$

Рассмотрим космологическую ситуацию, когда материя представлена двухкомпонентной самосогласованной системой [4], состоящей из массивного скалярного поля и фермионов, имеющих скалярный заряд, с помощью которого статистическая система может управлять фундаментальным скалярным полем. Полная система самосогласованных уравнений в пространственно - плоском мире Фридмана:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (14)$$

состоит из двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка: одного уравнения Эйнштейна и уравнения скалярного поля:

$$\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} \left( a^3 \frac{d\Phi}{dt} \right) + \mu_s^2 \Phi = -4\pi\sigma; \quad (15)$$

$$3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\varepsilon. \quad (16)$$

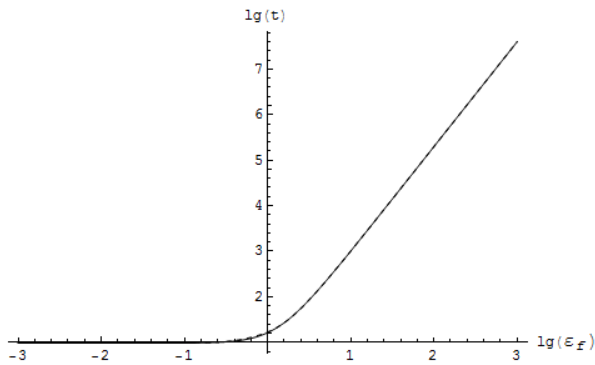
Прямое численное интегрирование системы (15, 16) не дает результатов вследствие специфического нелинейного характера этих уравнений, а именно, наличия в коэффициентах уравнений многозначных функций типа  $\sqrt{\phantom{x}}$ ,  $\ln \phantom{x}$ , зависящих от неизвестных величин, которые весьма неудобны для численных методов. Поэтому были получены аналитические интерполяции макроскопических плотностей, которые, с одной стороны, дают хорошее совпадение на всем исследуемом интервале значений, а с другой, - выражаются через аналитические однозначные функции:

$$\tilde{P}_f = \frac{8}{15} e^{-2\psi} \psi + \frac{2\psi^2}{3(1+\psi^2)}; \tag{17}$$

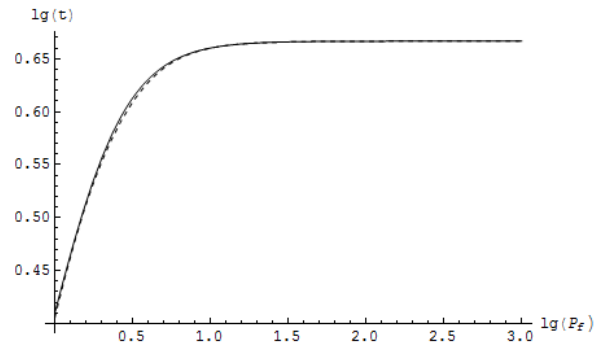
$$\tilde{\mathcal{E}}_f = \frac{(1 - e^{-2\psi-2\psi^2}) \left( \frac{38}{15} + \frac{4}{3\psi^2} + \frac{8\psi^2}{15} \right)}{1 + \frac{4\psi^2}{15}}; \tag{18}$$

$$\tilde{T} = \frac{(1 - e^{-2\psi-2\psi^2}) \left( \frac{38}{15} + \frac{4}{3\psi^2} + \frac{8\psi^2}{15} \right)}{1 + \frac{4\psi^2}{15}} - \frac{8}{5} e^{-2\psi} \psi - \frac{2\psi^2}{1+\psi^2}. \tag{19}$$

Полученные выражения позволили эффективно использовать программы компьютерной математики, увеличить точность и скорость вычислений. Приведем графики сравнения исходных выражений для макроскопических плотностей и соответствующих интерполяционных приближений.

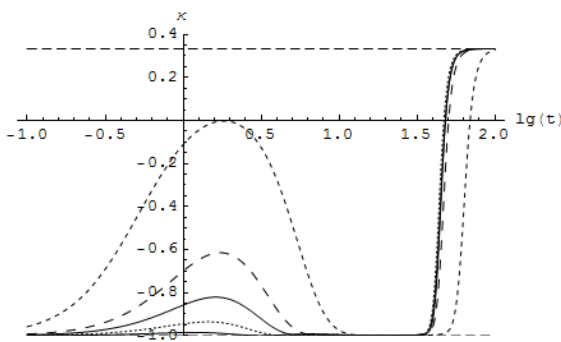


**Рис.1.** Пунктирная линия график точного выражения для  $P_f$ , сплошная линия график интерполяционной функции  $\tilde{P}_f$ .

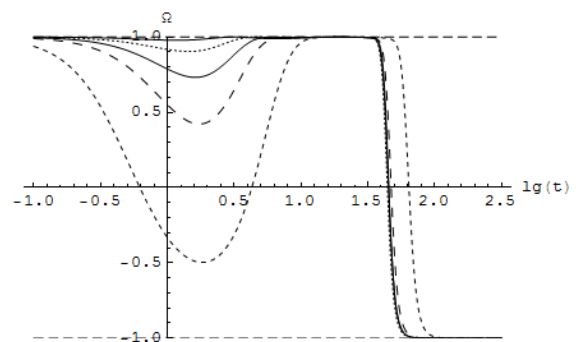


**Рис.2.** Пунктирная линия график точного выражения для  $\mathcal{E}_f$ , сплошная линия график интерполяционной функции  $\tilde{\mathcal{E}}_f$ .

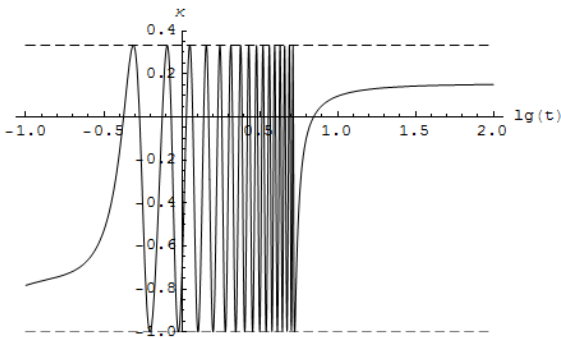
Численное моделирование космологических моделей, основанных на вырожденной Ферми-системе со скалярным взаимодействием частиц обнаруживает чрезвычайно богатый набор типов поведения в зависимости от фундаментальных констант  $q, m, \mu$  и начальных условий  $p_F^0, \Phi(0), \dot{\Phi}(0), a(0)$ . На рис. 3-6 показаны некоторые результаты численного моделирования космологической эволюции, демонстрирующие различные типы поведения - со вторичным ускорением, а также с колебательным характером ускорения.



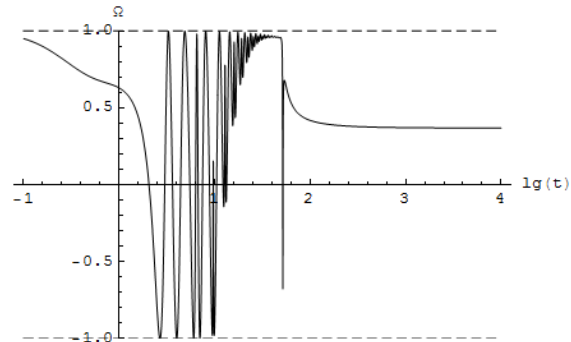
**Рис.3.** Эволюция коэффициента баротропы,  $\kappa$ , в зависимости от массы скалярного поля  $\mu$ : (частая пунктирная линия  $\mu \rightarrow 0,03$ , пунктирная линия -  $\mu \rightarrow 0,1$ , разреженная пунктирная линия -  $\mu = 0,2$ , сплошная линия -  $\mu = 0,25$ , сплошная жирная линия -  $\mu = 0,35$ ). Всюду:  $p_F(0) = 0,01; m = 1; q = 0,3; a(0) = 1; \Phi(0) = 1; \dot{\Phi}(0) = 1$ . Время измеряется в планковских единицах.



**Рис.4.** Эволюция космологического ускорения,  $\Omega$ , в зависимости от массы скалярного поля  $\mu$ : (частая пунктирная линия  $\mu \rightarrow 0,03$ , пунктирная линия -  $\mu \rightarrow 0,1$ , разреженная пунктирная линия -  $\mu = 0,2$ , сплошная линия -  $\mu = 0,25$ , сплошная жирная линия -  $\mu = 0,35$ ). Всюду:  $p_F(0) = 0,01; m = 1; q = 0,3; a(0) = 1; \Phi(0) = 1; \dot{\Phi}(0) = 1$ . Время измеряется в планковских единицах.



**Рис.5.** Эволюция коэффициента баротропы,  $\kappa$ , в зависимости от скалярного заряда фермионов  $\mu = 10$ . Всюду:  $p_F(0) = 0,01$ ;  $m = 1$ ;  $q = 0, 1$ ;  $a(0) = 1$ ;  $\Phi(0) = 1$ ;  $\dot{\Phi}(0) = 1$ . Время измеряется в планковских единицах.



**Рис.6.** Эволюция космологического ускорения,  $\Omega$ , в зависимости от скалярного заряда фермионов  $\mu = 2$ . Всюду:  $p_F(0) = 0,01$ ;  $m = 1$ ;  $q = 0, 1$ ;  $a(0) = 1$ ;  $\Phi(0) = 1$ ;  $\dot{\Phi}(0) = 1$ . Время измеряется в планковских единицах.

## Литература

- [1] Ю.Г.Игнатьев. Известия ВУЗов, Физика, 1983, т. 24, Вып.8, с. 15
- [2] Ю.Г.Игнатьев. Известия ВУЗов, Физика, 1983, т. 24, Вып.8, с. 19
- [3] Ю.Г.Игнатьев. Известия ВУЗов, Физика, 1983, т. 24, Вып.12, с. 9
- [4] Yu.G. Ignat'ev, R.F. Miftakhov. *Statistical systems of particles with scalar interaction in cosmology* Gravitation and Cosmology, M., 2006, v. 12, №.4, с. 185
- [5] Ю.Г.Игнатьев. *Кинетические методы в релятивистской теории гравитации*, Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук, Казань, 1986
- [6] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Статистическая физика. М, Наука, 1964
- [7] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. М, Наука, 1973

## НЕЭКСТЕНСИВНЫЕ ПОПРАВКИ В ОДНОПЕТЛЕВОЙ $\Omega$ -ПОТЕНЦИАЛ КВАНТОВЫХ ПОЛЕЙ С КВАДРАТИЧНЫМ ЗАКОНОМ ДИСПЕРСИИ

П.О. Казинский<sup>1</sup>, М.А. Шипуля<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Томский государственный университет, Россия, Томск, <sup>2</sup>Томский государственный университет, Россия, Томск

<sup>1</sup>E-mail: kpo@phys.tsu.ru, <sup>2</sup>E-mail: sma@phys.tsu.ru

**Аннотация.** В работе исследуются неэкстенсивные вклады в статистическую сумму свободных квантовых полей с «квадратичным» законом дисперсии. Неэкстенсивные поправки обусловлены конечными размерами системы. Под квадратичным законом дисперсии подразумевается зависимость энергии  $E$  от квантовых чисел  $p$  вида:  $E = \omega(p^2 + 2ar + m^2)$  с произвольной функцией  $\omega$ . Разработана общая процедура нахождения таких поправок. В качестве примера рассматривается модель идеального газа нерелятивистских фермионов в кубе. Получены уравнения состояния для этой системы.

## Введение

Проблема описания квантовых систем при конечной температуре является сложной задачей даже для свободных полей, подчиненных нетривиальным граничным условиям (см., например, обзор [1]). Поэтому особую значимость представляют модели, допускающие аналитическое исследование при разумных ограничениях на

входящие в них параметры. В этой работе мы изучаем класс моделей свободных квантовых полей, закон дисперсии которых, в определенном смысле, является изотропным

$$E(p) = \omega(g^{ij} p_i p_j + 2p_i a^i + m_0^2), \quad \det g^{ij} \neq 0, \quad (1)$$

где  $g_{ij}$ ,  $a_i$  и  $m_0$  – постоянные вещественные величины, а  $\omega(x)$  – некоторая непрерывная неотрицательная функция. Здесь и далее подразумевается соглашение о суммировании Эйнштейна, индексы поднимаются и опускаются с помощью “метрики”  $g^{ij}$  и обратной к ней. Данный закон дисперсии позволяет свести задачу нахождения статистической суммы к одномерной, что, в свою очередь, дает возможность значительно продвинуться на пути аналитического исследования термодинамических свойств таких моделей.

При изучении данных систем мы будем особое внимание уделять неэкстенсивным вкладам в статистическую сумму, свойства которых довольно слабо освещены в научной литературе. Причиной возникновения таких поправок является конечность размеров рассматриваемой системы. При этом будет возникать два типа неэкстенсивных поправок: поправки от суммирования по пространству квантовых чисел меньшей “размерности” (скажем, от суммирования по двум квантовым числам вместо трех исходных), и существенно квантовые осциллирующие поправки, приводящие к так называемому эффекту Лившица-Косевича [2].

Поскольку даже в предположении “квадратичности” закона дисперсии не удается получить замкнутого выражения для  $\Omega$ -потенциала системы, нашей целью является вывод асимптотического разложения для статистической суммы. При некоторых разумных ограничениях на параметры системы (таких как макроскопичность ее объема) полученный асимптотический ряд для неэкстенсивных поправок будет сходиться с экспоненциальной точностью. Фактически, исходный медленно сходящийся ряд – статистическая сумма – будет переписан в виде другого быстро сходящегося ряда, который можно оборвать, учтя только несколько первых членов, не допуская при этом существенной ошибки. Общая процедура анализа статистических свойств квантовых систем с законом дисперсии (1) при конечной температуре рассматривается на примере модели нерелятивистских фермионов в кубическом объеме.

## Частицы в “ящике”

Рассмотрим нерелятивистский газ фермиевских частиц, заключенных в замкнутом объеме в виде куба с длиной ребра  $L$ . Квантовые свойства системы описываются решениями уравнения Шредингера

$$H\psi_p(\mathbf{x}) = E(p)\psi_p(\mathbf{x}), \quad (2)$$

с нулевыми граничными условиями. Здесь и далее  $p = (p_x, p_y, p_z)$  – набор квантовых чисел. Для нерелятивистского гамильтониана

$$H = -\varepsilon_0 \nabla^2, \quad \varepsilon_0 = \frac{\hbar^2}{2mL^2}, \quad (3)$$

где  $L$  – ребро куба, решение спектральной задачи (2) имеет стандартный вид с законом дисперсии

$$E(p) = \varepsilon_0 \pi^2 p^2, \quad p \in \mathbb{N}^3. \quad (4)$$

Термодинамические свойства рассматриваемой системы определяется статистической суммой большого канонического ансамбля

$$Z(V, \beta, \mu) = \text{Sp} e^{-\beta(\mathcal{H} - \mu N)} = \int D\bar{\psi} D\psi e^{S[\bar{\psi}, \psi]}, \quad (5)$$

где  $\mathcal{H}$  – гамильтониан системы фермионов,  $N$  – оператор числа частиц, интегрирование проводится по фермионным полям, удовлетворяющим антипериодическим граничным условиям  $\psi(x, 0) = -\psi(x, \beta)$ , а евклидово действие записывается как

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int_0^\beta d\tau \int dx \bar{\psi}^\dagger (\partial_\tau - H + \mu) \psi. \quad (6)$$

Здесь  $\beta$  – обратная температура, а  $\mu$  – химический потенциал. Интегрируя по фермионным полям и исключая вклад нулевых колебаний, получаем ожидаемый результат [3]

$$\Omega \equiv \beta^{-1} \ln Z = \beta^{-1} \sum_p \ln(1 + e^{\beta(\mu - E(p))}). \quad (7)$$

Основные термодинамические величины выражаются через  $\Omega$ -потенциал:

$$E = -\partial_\beta(\beta\Omega), \quad P = \partial_V \Omega, \quad N = \beta \partial_\mu \Omega, \quad S = -\beta^2 \partial_\beta \Omega. \quad (8)$$

Таким образом, нахождение термодинамических свойств системы при конечной температуре в однопетлевом приближении сводится вычислению ряда (7).

## Вычисление $\Omega$ -потенциала

Для вычисления статистической суммы (7) удобно перейти к бесконечным пределам суммирования

$$\ln Z = \sum_{n=0}^3 \sum_{p_1, \dots, p_n} (-2)^{n-3} C_n^3 \ln(1 + e^{\beta(\mu - E(p_n))}), \quad E(p_n) \equiv E(p_1, \dots, p_n, 0, \dots, 0), \quad p_i \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

т.е. низшие размерности вносят вклад в статистическую сумму. Здесь  $C_n^k$  – биномиальные коэффициенты, и мы использовали симметричность спектра (4) относительно перестановок квантовых чисел.

Рассмотрим отдельно ряд вида

$$I_d = \sum_p \ln(1 + e^{\mu - E(p)}), \quad p \in \mathbb{Z}^d, \quad (10)$$

с законом дисперсии (1). Используя представление  $\delta$ -функции рядом Фурье, можно записать (формула Пуассона)

$$I_d = \sum_q \int d^d p e^{-2\pi i p_i q^i} \ln(1 + e^{\mu - E(p)}) = \sum_q e^{2\pi i a_i q^i} \int d^d p e^{-2\pi i p_i q^i} \ln(1 + e^{\mu - \omega(p^2 + m^2)}), \quad (11)$$

где  $q$  – мультииндекс, принимающий такие же значения, что и  $p$ , а  $m^2 = m_0^2 - a^2$ .

**Осциллирующий вклад.** Рассмотрим отдельно интеграл

$$I_d^q = \int d^d p e^{-2\pi i p_i q^i} \ln(1 + e^{\mu - \omega(p^2 + m^2)}) =: \int d^d p e^{-2\pi i p_i q^i} \tilde{f}(p^2), \quad (12)$$

где  $q \neq 0$ . К случаю  $q = 0$  мы вернемся позднее. В дальнейшем нам будет удобнее работать с функцией

$$f(p^2) := \partial_\mu^2 \tilde{f}(p^2). \quad (13)$$

Продолжим функцию  $f(p^2)$  аналитическим образом по переменной  $s := p^2$  в комплексную плоскость. Будем предполагать, что  $\omega(s + m^2)$ , либо всюду аналитична по  $s$ , либо имеет разрез вдоль части вещественной оси  $(-\infty, s_0]$ ,  $s_0 \leq 0$ . Тогда, помимо указанного разреза функция  $f(s)$  будет иметь особенности в виде полюсов второго порядка в точках

$$\omega(s_k + m^2) = \mu + i\omega_k, \quad \omega_k = \pi(2k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (14)$$

где  $\omega_k$  – мадубаровские частоты. Поскольку  $f(s)$  вещественна на положительной вещественной полуоси и не имеет там разреза, то согласно принципу симметрии Шварца можно выбрать такую ветвь функции, что

$$f^*(s) = f(s^*). \quad (15)$$

Обозначим через  $C'$  контур, обходящий полюсы (14) против часовой стрелки, а через  $C_\infty$  – окружность, с радиусом стремящемся к бесконечности. Тогда, используя формулу Коши,  $f(p^2)$  можно представить в виде, аналогичном представлению Челлена-Лемана для фурье-образа полного пропагатора,

$$f(p^2) = - \int_C \frac{ds}{2\pi i} \frac{f(s)}{p^2 - s} = \int_{C'} \frac{ds}{2\pi i} \frac{f(s)}{p^2 - s} + \int_{-\infty}^{s_0} \frac{ds}{2\pi i} \frac{f(s + i\epsilon) - f(s - i\epsilon)}{p^2 - s} - \int_{C_\infty} \frac{ds}{2\pi i} \frac{f(s)}{p^2 - s}, \quad (16)$$

где контур  $C$  охватывает только особую точку  $s = p^2$ , а  $\epsilon$  – бесконечно малая положительная величина, также мы предполагаем, что  $f(s)$  интегрируема в окрестности точки  $s = s_0$ . Если функция  $\omega(s)$  не имеет разрезов, то второй интеграл отсутствует. Если  $f(s)$  стремится к нулю при  $|s| \rightarrow \infty$ , то последний интеграл также отсутствует. В частности, для функции (13) последнее свойство выполнено, если

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} |\omega(s)| = 0. \quad (17)$$

В противном случае в соотношении (16) необходимо делать вычитания. Отбрасывая в (16) интеграл по бесконечно удаленной окружности и выделяя вещественную часть, получаем “дисперсионное соотношение”

$$\operatorname{Re} f(p^2) = \operatorname{Im} \int_{C'} \frac{ds}{2\pi} \frac{f(s)}{p^2 - s} + \int_{-\infty}^{s_0} \frac{ds}{\pi} \frac{\operatorname{Im} f(s)}{p^2 - s}. \quad (18)$$

Если  $f(s)$  вещественна на разрезе функции  $\omega(s)$ , т.е., к примеру, имеет особенность типа<sup>1</sup>

$$s^{k/2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (19)$$

<sup>1</sup>Два важных случая – спектры нерелятивистской и релятивистской частиц – удовлетворяют этому предположению.

то последний интеграл в (18) отсутствует. Тогда имеем

$$\partial_\mu^2 I_d^q = \int d^d p e^{-2\pi i p_i q^i} \operatorname{Im} \int_{C'} \frac{ds}{2\pi} \frac{f(s)}{p^2 - s} = \operatorname{Im} \int_{C'} \frac{ds}{2\pi} f(s) \int d^d p \frac{e^{-2\pi i p_i q^i}}{p^2 - s}. \quad (20)$$

После перестановки порядка интегрирования обратный фурье-образ от свободного "пропагатора" с массой  $s^{1/2}$  в  $d$ -мерном пространстве понимается в смысле обобщенных функций. Явное координатное представление для свободного пропагатора можно найти, если воспользоваться формулой Пицетти. А именно, можно показать, что для произвольной гладкой функции на  $\mathbb{R}^d$  интегрирование по углам  $\Omega_d$  в эллиптической системе координат, связанной с метрикой  $g^{ij}$ , дает

$$\int d\Omega_d \psi(p_1, \dots, p_d) = \sqrt{g} \Omega_d \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k \psi(0)}{k! \Gamma(k + d/2)} \left(\frac{p}{2}\right)^{2k}, \quad \Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}, \quad (21)$$

где  $g = \det g_{ij}$ ,  $\Delta := g_{ij} \partial_p^i \partial_p^j$  и  $p := \sqrt{p^2}$ . Откуда, используя представление функции Бесселя в виде ряда,

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}, \quad (22)$$

приходим к

$$\int d^d p \frac{e^{-2\pi i p_i q^i}}{p^2 - s} = 2\pi q^{1-d/2} \sqrt{g} \int_0^\infty dp \frac{p^{d/2} J_{d/2-1}(2\pi qp)}{p^2 - s}, \quad (23)$$

где  $q := \sqrt{q^2}$ . Далее воспользуемся формулой ([4], стр. 466)

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{\nu+1} J_\nu(ax)}{(x^2 - s)^{m+1}} = \frac{i\pi}{2m!} \frac{d^m}{ds^m} \left[ s^{\nu/2} H_\nu^{(1)}(as^{1/2}) \right], \quad a > 0, \quad \operatorname{Re} \nu \in \left(-1, 2m + \frac{3}{2}\right). \quad (24)$$

В нашем случае  $m = 0$  и  $q \neq 0$  для размерности пространства  $d \leq 4$ . Чтобы получить выражение для интеграла  $I_d^q$  при размерностях  $d > 4$ , необходимо в (20) проинтегрировать по частям по переменной  $s$  столько раз, чтобы интеграл по  $p$  стал сходящимся. Затем воспользоваться формулой (24) при  $m \neq 0$  и опять проинтегрировать по частям в обратном порядке. Другими словами, в нашем случае можно использовать формулу (24) при  $m = 0$  для любой размерности пространства  $d$ , несмотря на то, что при больших  $d$  интеграл расходится, и понимать результат в смысле обобщенных функций

$$\int d^d p \frac{e^{-2\pi i p_i q^i}}{p^2 - s} = i\pi \sqrt{g} \partial_s h_{d/2}(q, s^{1/2}), \quad (25)$$

где

$$h_\nu(q, p) := \left(\frac{p}{q}\right)^\nu H_\nu^{(1)}(2\pi qp). \quad (26)$$

Разрез функции  $s^{1/2}$  выберем вдоль положительной вещественной полуоси. В итоге получаем

$$\partial_\mu^2 I_d^q = \frac{\sqrt{g}}{2} \operatorname{Re} \int_{C'} ds f(s) \partial_s h_{d/2}(q, s^{1/2}). \quad (27)$$

Если  $f(s)$  не вещественно на обоих берегах разреза  $\omega(s)$ , то этот разрез будет также давать вклад в последнее выражение.

Учитывая явный вид функции  $f(s)$ , т.е.

$$\operatorname{res}_{s=s_k} f(s) \partial_s h_{d/2}(q, s^{1/2}) = -\partial_\mu^2 h_{d/2}(q, s_k^{1/2}), \quad (28)$$

где  $s_k$  определяются уравнением (14), интеграл  $I_d^q$  переписется в виде суммы вычетов

$$I_d^q = \pi \sqrt{g} \operatorname{Im} \sum_k h_{d/2}(q, p_k), \quad p_k := s_k^{1/2}. \quad (29)$$

Согласно выбранному нами определению корня его ветвь для каждого  $k$  выбирается так, чтобы  $\operatorname{Im} p_k \geq 0$ . Интересно отметить, что если в выражении (12) взять

$$\tilde{f}(p^2) = (p^2 + s^2)^{-\lambda}, \quad (30)$$

и воспользоваться обобщением интеграла (24) на комплексные  $m$  ([4], стр. 477)

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{\nu+1} J_\nu(ax)}{(x^2 + s^2)^{\mu+1}} = \left(\frac{a}{2}\right)^\mu \frac{s^{\nu-\mu} K_{\nu-\mu}(as)}{\Gamma(\mu+1)}, \quad (31)$$

то из формулы вида (23) легко получить, что в данном случае

$$I_d^q = \sqrt{g} \frac{2\pi^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \left(\frac{s}{q}\right)^{d/2-\lambda} K_{d/2-\lambda}(2\pi qs), \quad \forall q^i \in \mathbb{Z}^n. \quad (32)$$

После подстановки этого выражения в формулу для ряда (9), приходим к известному разложению [5] для обобщенной  $\zeta$ -функции Эпштейна [6].

**Условия применимости.** Если  $\text{Im } p_k$  (величина, обратная “радиусу корреляции”) быстро стремится к бесконечности с увеличением номера  $k$ , полученный ряд можно использовать для приближенного вычисления статсуммы (10). Беря первых несколько членов ряда, мы получим оценку для  $I_d^q$  с экспоненциальной точностью, причем чем больше  $q^2 = g_{ij}q^i q^j$ , тем оценка лучше. Другими словами, разложение (29) дает хорошую оценку при малых значениях элементов матрицы  $g^{ij}$ . На этом же основании можно оборвать ряд по  $q$ . Из уравнения (14), определяющего особые точки, видно, что при больших  $s$  и  $\omega(s) \sim s^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , мнимая часть  $p_k$  растет с увеличением  $k$ , причем, чем больше  $\alpha$ , тем медленнее. Для  $\omega(s) \sim \exp(s)$  мнимая часть  $p_k$  убывает. Таким образом, если  $\omega(s)$  растет при больших  $s$  быстрее его любой степени<sup>2</sup>, то полученное разложение (29) не может быть использовано для оценки ряда (10).

Более точно условия применимости полученного разложения могут быть сформулированы при задании конкретного закона дисперсии. В частности, в релятивистском случае полюсы, определяющие осциллирующую часть статистической суммы, имеют вид

$$p_k = \sqrt{(\mu + i\omega_k)^2 - m^2}. \quad (33)$$

Нам требуется найти такие значения  $\mu$  и  $m$ , при которых мнимая часть корней (33) достаточно быстро растет с номером  $k$ . Поскольку  $\text{Im } p_k$  монотонно растет с увеличением модуля мацубаровской частоты  $\omega_k$  для любых вещественных  $\mu$  и  $m$ , для эффективного использования разложения (29) необходимо чтобы

$$2\pi q_m \text{Im}(p_k - p_0) \gg 1, \quad (34)$$

где  $q_m := \min(q)$ ,  $q \neq 0$ . Если температура много меньше  $m$ , то можно считать  $\omega_k$  малым по сравнению с  $\mu$  и  $m$  при малых  $k$ . Разлагая (33) в ряд, несложно получить в ведущем порядке

$$\text{Im}(p_k - p_0) = \begin{cases} \mu(\mu^2 - m^2)^{-1/2}(\omega_k - \omega_0), & |\mu| > m; \\ m^2(m^2 - \mu^2)^{-3/2}(\omega_k^2 - \omega_0^2)/2, & |\mu| < m. \end{cases} \quad (35)$$

Для бозонов необходимо использовать второе условие. В больцмановском пределе для газа фермионов также  $|\mu| < m$  (см., например, [7]), однако для слабо вырожденного фермионного газа нерелятивистский химический потенциал  $\mu_{nr} = \mu - m$  положителен. Беря  $k = 1$ , приходим к ограничениям на значения химического потенциала

$$\mu^2 \ll \frac{m^2}{1 - (2\pi)^4 q_m^2}, \quad |\mu| > m, \quad \mu^2 \gg m^2 \left[ 1 - \pi^2 \left( (2) \frac{4q_m}{m} \right)^{2/3} \right], \quad |\mu| < m, \quad (36)$$

где множитель (2) отвечает фермиевскому случаю. Аналогично, для нерелятивистского закона дисперсии полюсы определяются как

$$p_k = \sqrt{\bar{\mu} + i\omega_k}, \quad \bar{\mu} := \mu + m^2. \quad (37)$$

Мнимая часть  $p_k$  монотонно растет с увеличением  $k$ . Беря наихудший вариант  $\omega_k \rightarrow 0$ , получаем условие применимости разложения

$$\mu \ll 4\pi^2 q_m^2, \quad \mu > 0, \quad |\mu| \ll \pi^2 [(2)q_m]^{2/3}, \quad \mu < 0. \quad (38)$$

Эти условия можно также получить, взяв нерелятивистский предел в (35).

Если разность между полюсами  $|s_{k+1} - s_k|$  стремится к нулю с увеличением номера  $k$ , то оценку, получающуюся учетом нескольких членов разложения (29), можно улучшить, просуммировав остаток по формуле Эйлера-Маклорена

$$\sum_{k=N}^{\infty} h_{d/2}(q, p_k) = \int_{s_N}^{\infty} \frac{ds}{2\pi^2 i} \omega'(s) \partial_s h_{d/2+1}(q, s^{1/2}) + \frac{1}{2} h_{d/2}(q, p_N) - \frac{i\pi^2}{6} h_{d/2-1}(q, p_N) + \dots \quad (39)$$

В частности, для нерелятивистского спектра, когда  $\omega'(s) = 1$ , расстояние между полюсами стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$ , и интеграл в формуле Эйлера-Маклорена берется. Это верно и для любого полиномиального спектра.

<sup>2</sup>Если  $\omega(s)$  растет быстро, то хорошее приближение для статсуммы получается непосредственно из формулы (10), отбрасыванием высших членов ряда.



**Нулевая мода.** Исследуем теперь нулевую ( $q = 0$ ) моду суммы  $I_d$ . После интегрирования по углам она запишется как

$$I_d^0 = \frac{2\pi^{d/2}\sqrt{g}}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty dx x^{d-1} \ln(1 + e^{\mu - \omega(x^2 + m^2)}). \quad (40)$$

Обозначим через

$$\omega(x^2 + m^2) - \omega(m^2) = S(y), \quad (41)$$

и переопределим химический потенциал  $\mu \rightarrow \mu + \omega(m^2)$ . Чтобы избавиться от логарифма в (40), проинтегрируем по частям и представим  $x^\alpha(y)$  в виде ряда

$$x^\alpha(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^\alpha y^{\alpha+k}, \quad \lambda_k^\alpha = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{k!} \left[ \frac{1}{S'(y)} \frac{d}{dy} \right]^k \left[ \frac{y}{S(y)} \right]^\alpha. \quad (42)$$

Тогда, используя определение полилогарифма,

$$Li_\nu(z) = \frac{z}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{e^x - z}, \quad Li_\nu(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^\nu}, \quad |z| < 1, \quad (43)$$

получаем разложение (для релятивистского закона дисперсии см., например, [8])

$$I_d^0 = \pi^{d/2} \sqrt{g} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d/2 + 1 + k)}{\Gamma(d/2 + 1)} \lambda_k^{d/2} Li_{d/2+1+k}(-e^\mu). \quad (44)$$

Данное разложение хорошо работает в случае низких температур (нерелятивистский предел) при  $\mu \gg 1$ . В частности, для нерелятивистского спектра ряд обрывается на первом члене.

## Уравнения состояния

Складывая вместе вклады от нулевой моды и осциллирующей части, в нашем случае получаем

$$\Omega = \beta^{-1} \sum_{n=0}^3 \sum_{p_1, \dots, p_n} (-2)^{n-3} C_n^3 \left( I_n^0 + \sum_{q \neq 0} e^{2\pi i a_i q^i} I_n^q \right). \quad (45)$$

Отметим, что в выражениях (29) и (44) для  $I_n^q$  в качестве метрики берется часть  $g_{ij}^n$  (блок  $n \times n$ ) исходной метрики  $g_{ij}$ , входящей в закон дисперсии (1). В частности, общий множитель перед обоими вкладами в скобках в формуле для  $\Omega$ -потенциала (45),

$$\sqrt{g^n} = (L/l_D)^n, \quad l_D := \left( \frac{\beta \pi^2 \hbar^2}{2m} \right)^{1/2}, \quad (46)$$

велик, при макроскопических объемах системы и не слишком низких температурах, и увеличивается с увеличением размерности  $n$ . В результате основной вклад будут давать слагаемые, отвечающие физической размерности пространства. Учитывая только ведущие вклады от неэкстенсивных поправок и осцилляций, приходим к

$$\Omega = \beta^{-1} \left( I_3^0 - 3I_2^0 + \sum_{q \neq 0} e^{2\pi i a_i q^i} I_3^q + \dots \right). \quad (47)$$

Тензор натяжений можно записать в стандартном для общей теории относительности виде через производные по метрике

$$T_{ni}^j = l_D^n \frac{2}{\sqrt{g^n}} g_{ik}^n \frac{\partial \Omega}{\partial g_{jk}^n}. \quad (48)$$

Однако, в отличие от общей теории относительности, в данном случае имеется еще одна “метрика”, равная  $\delta_{ij}$ , которая ассоциирована с решеткой квантовых чисел  $p$ . Если метрика диагональна, как в рассматриваемом нами случае, то тензор натяжений также диагонален. Действительно, на первый взгляд может показаться, что недиагональные элементы могут возникнуть от дифференцирования  $q = \sqrt{g_{ij}^n} q^i q^j$ , входящего в осциллирующую часть, но

$$\frac{\partial I_d(q)}{\partial g_{ij}} = \frac{1}{2} q^i q^j q^{-1/2} \partial_q I_d(q) \rightarrow \frac{1}{2} \delta^{ij} (q^i)^2 q^{-1/2} \partial_q I_d(q), \quad (49)$$

где стрелка означает равенство под знаком суммы в пределах, симметричных относительно замены  $q^i \rightarrow -q^i$  для любого  $i$ . Осциллирующая экспонента в выражении (45) не нарушает это свойство. Если метрика пропорциональна единичной матрице, то формула (48) для тензора натяжений редуцируется к (8).

Для нахождения уравнения состояния системы необходимо выразить неэкстенсивные величины, входящие в выражение для  $\Omega$ -потенциала через экстенсивные. В частности, необходимо получить выражение для химического потенциала, как функции  $N, V, T$ . Для упрощения выкладок будем искать химический потенциал из (8) в больцмановском пределе  $|\mu| \gg 1$ . Тогда

$$I_d^0 = (\rho_0 V)^{d/3} e^\mu (1 + 2^{-d/2-1} e^\mu + \dots), \quad \rho_0 V = \sqrt{g} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3/2}, \quad (50)$$

и в ведущем порядке

$$\mu_0 = \ln(\rho\rho_0^{-1}), \quad (51)$$

где  $\rho = N/V$  – плотность числа частиц. Используя это значение в качестве нулевого приближения теории возмущений  $\mu = \mu_0 + \delta\mu$ , первая поправка имеет вид

$$\delta\mu = -\frac{1}{\partial_\mu^2 I_3^0} \partial_\mu \left( -3I_2^0 + \sum_{q \neq 0} e^{2\pi i a_i q^i} I_3^q + \dots \right) = 3 \left[ (\rho_0 V)^{-1/3} \rho \rho_0^{-1} - 8\pi^2 \operatorname{Im} h_{1/2} \left( \frac{V^{1/3}}{l_D}, p_0 \right) \right]. \quad (52)$$

Давление, определяемое формулой (8), после подстановки выражения для химического потенциала и удерживания ведущих вкладов запишется как

$$\beta P = \rho \left[ 1 - 2^{-d/2-1} \rho \rho_0^{-1} - 2(\rho_0 V)^{-1/3} - 24\pi^2 \operatorname{Im} h_{1/2} \left( \frac{V^{1/3}}{l_D}, p_0 \right) + 48\pi^{-1/2} \operatorname{Im} h_{3/2} \left( \frac{V^{1/3}}{l_D}, p_0 \right) - \frac{256\pi^{-1/2}}{(\rho_0 V)^{1/3}} \operatorname{Im} h_{5/2} \left( \frac{V^{1/3}}{l_D}, p_0 \right) \right]. \quad (53)$$

Вклады во второй строке формулы описывают осцилляции давления в зависимости от объема и температуры. Второй вклад в первой строке формулы – это хорошо известная первая поправка от вириального разложения для идеального газа фермионов [7]. Третье слагаемое задает неэкстенсивный вклад от низших измерений.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-02-00723-а, Федеральным агентством по науке и инновациям, контракт №02.740.11.0238, Федеральным агентством по образованию, контракты №П1337, П2596.

## Литература

- [1] Klimchitskaya G. L., Mohideen U., and Mostepanenko V. M. The Casimir force between real materials: Experiment and theory, *Rev. Mod. Phys.*, **81**, 1827 (2009).
- [2] Лифшиц И. М., Косевич А. М. К теории магнитной восприимчивости тонких слоев металлов при низких температурах, *ДАН СССР*, **92**, 795 (1953).
- [3] Kapusta J. I., Gale C. *Finite-Temperature Field Theory*. – N.Y.: Cambridge University Press, 2006. – 428 p.
- [4] Ватсон Г. Н. *Теория бесселевых функций*. т. 1. – М.: Издательство иностранной литературы, 1949. – 799с.
- [5] Elizalde E. Zeta function methods and quantum fluctuations, *J. Phys. A*, **41**, 304040 (2008). arXiv: 0712.1346.
- [6] Epstein P. Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen, *Math. Ann.*, **56**, 615 (1903).
- [7] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Статистическая физика. ч. 1*. – М.: Физматлит, 2002. – 616с.
- [8] Haber H. E., Weldon H. A. Finite-temperature symmetry breaking and Bose-Einstein condensation, *Phys. Rev. D*, **25**, 502 (1982).

## ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ 5-МЕРНОЙ МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

А.С. Киселев<sup>1</sup>, В.Г. Кречет<sup>2</sup>, Б.Н. Фролов<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Московский педагогический государственный университет, Россия, Москва

<sup>1</sup>E-mail: kalek0@inbox.ru, <sup>2,3</sup>E-mail: frolovbn@orc.ru

Теория Калуцы–Клейна обобщается путем рассмотрения ее на геометрическом фоне 5-мерного пространства-времени Вейля–Картана с неметричностью  $\nabla_{AGBC} = 2W_{AGBC}$  ( $A, B, C, = 0, 1, 2, 3, 4$ ) и кручением  $Q_{AB}^C = \Gamma_{[AB]}^C$ . Гравитационный лагранжиан теории модифицируется и принимает вид  $L_g = {}^5R + \lambda\Omega_{AB}\Omega^{AB}$ , где

$\Omega_{AB} = R^C{}_{CAB} = 10W_{[A,B]}$  – 5-мерная сегментарная кривизна. С использованием монадного формализма производится (4+1)-разбиение  $L_g$ . Учтены условия цилиндричности по пятой координате  $x^4$ , а монада  $\lambda_A = \delta_A^4/g_{44}$  полагается пропорциональной электромагнитному потенциалу.

Исследование данной модели производится с помощью компьютерной системы символьных вычислений [1]. Получены решения 5-мерных вакуумных уравнений Эйнштейна  $R_{AB} = 0$  для случаев сферической и цилиндрической симметрий. В цилиндрически симметричном случае исследованы статические метрики четырех типов:

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{2U} dt^2 - e^{-2U} (e^{2a} (d\rho^2 + dz^2) + (\rho d\alpha + V dx^4)^2) - W^2 (dx^4)^2, \\ ds^2 &= e^{2U} dt^2 - e^{-2U} [e^{2a} (d\rho^2 + (dz + V dx^4)^2) + \rho^2 d\alpha^2] - W^2 (dx^4)^2, \\ ds^2 &= e^{2U} dt^2 - e^{-2U} (e^{2a} (d\rho^2 + dz^2) + (\rho d\alpha + G dt)^2) - W^2 (dx^4)^2, \\ ds^2 &= e^{2U} dt^2 - e^{-2U} [e^{2a} (d\rho^2 + (dz + V dx^4)^2) + (\rho d\alpha + G dt)^2] - W^2 (dx^4)^2, \end{aligned}$$

где  $U(\rho)$ ,  $a(\rho)$ ,  $V(\rho)$ ,  $G(\rho)$ ,  $W(\rho)$  – неизвестные функции. С помощью компьютерной системы [1] вычислены геометрические величины теории и определен вид уравнений Эйнштейна для этих метрик. Найдены решения, в том числе для пространств с нетривиальной топологией типа “кротовой норы” с пространственно-плоской асимптотикой:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - dx^2 - (x^2 + a^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\alpha^2) - (dx^4)^2, \quad (-\infty < x < \infty), \\ ds^2 &= dt^2 - d\rho^2 - (\rho^2 + a^2)d\alpha^2 - dz^2 - (dx^4)^2, \end{aligned}$$

или “космической струны” ( $-\infty < \rho < \infty$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi - \delta$ ):

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\alpha^2 - dz^2 - (dx^4)^2.$$

Данная поисковая научно-исследовательская работа проведена в рамках реализации ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013гг.

## Литература

- [1] Babourova O. V., Kostkin R. S., Frolov B. N. // *Gravitation and Cosmology*, **15**, 302–305 (2009).

## MATHEMATICAL MODELLING COMPOSITE STARS AN WORMHOLES IN EINSTEIN AND JORDAN-BRANS-DICKE

S.M. Kozyrev<sup>1</sup>

Scientific center gravity wave studies "Dulkyn", Russia, Kazan

<sup>1</sup>E-mail: sergey@tnpko.ru

**Annotation.** *In this article, we provide a discussion on a composite class of exact static spherically symmetric vacuum solutions of Einstein's equations. We construct the composite solution of Einstein field equation by match the interior vacuum metric in Schwarzschild original gauge, to the exterior vacuum metric in isotropic gauge, at a junction surface. This approach allows us to associate rigorously with both gauges as a single glued "space", which is a unique differentiable manifold  $M^4$ . A simple Heckmann's vacuum wormhole solution of Jordan-Brans-Dicke gravitation is presented and analysed. It is shown that in contrast with class I Brans solution where the throat radius becomes real when  $\omega < -4/3$  here it becomes positive when  $\omega < -1$ .*

## Introduction

Here we are provide a discussion on a composite class of exact static spherically symmetric vacuum solutions of Einstein's equations. We construct the composite solution of Einstein field equation Jordan-Brans-Dicke (JBD) theory and general relativity by match the interior vacuum metric, to the exterior vacuum metric in another gauge, at a junction surface. This approach allows us to associate rigorously with both gauges as a single glued "space-time", which is a unique differentiable manifold  $M^4$ .

Thus, in the case of general relativity, the common geometry emerges from the junction conditions at the boundary surface. It must be combined with Darmois-Israel junction conditions. We show that our approach provides a clear way of showing that the Schwarzschild solution is not a unique static spherically symmetric solution, providing some incite on how the current form of Birkhoff's theorem breaks down. It should also be noted that because general

relativity is a highly non-linear theory, it is not always easy to understand what qualitative features solutions might possess, and here the composite class of solutions can be used as a guide.

For the JBD theory one can construct composite scalar star models or vacuum wormhole solutions by matching an interior Heckmann [1] or Brans [2] solution to a vacuum exterior Schwarzschild spacetime. It led us to consider the static solutions in vacuum, where the source of gravity being the scalar field. JBD theory can agree with general relativity in empty space, it is important to study the interior of wormhole in which the two theories may give different predictions. It furthermore contains an interesting special case: a bridge between separated Schwarzschild asymptotically flat region and region with different spacetime geometry (Heckmann, Brans solutions or others). Using the key assumption that the Brans solution is physically acceptable because the solutions have a well defined boundary and they can match with the Schwarzschild exterior solution at the boundary surface it was found the mass and radius of scalar stars.

## Composite solution in Einstein theory

The metric satisfies to those or other co-ordinate conditions if some of quantities  $g_{ab}$  are linked by some relations, - whether it be in any point, on a surface or in four-dimensional domain  $\Omega \subset V^4(g)$ . By definition all co-ordinate systems in manifold  $M^4$  at least locally are equivalent; on the other hand if in  $M^4$  the metric is introduced, properties of functions  $g_{ab}$  in different co-ordinates become different. Let us consider two distinct manifolds  $M^{4+}$  and  $M^{4-}$ . The metric in these manifolds generated by set of solutions of field equations (25) given by  $g_{ab}^+(x^a_+)$  and  $g_{ab}^-(x^a_-)$ , in terms of independently defined coordinate systems  $x^a_+$  and  $x^a_-$ . The manifolds are glued at the boundary hypersurfaces  $\Sigma_+$  and  $\Sigma_-$  using independently defining co-ordinates systems  $x^a_\pm$ . A common manifold  $M = M^+ \cup M^-$  is obtained by assuming the continuity of four-dimensional coordinates  $x^a_\pm$  across  $\Sigma$ , then  $g_{ab}^+ = g_{ab}^-$  is required, which together with the continuous derivatives of the metric components  $\partial g_{ab} / \partial x^c|_+ = \partial g_{ab} / \partial x^c|_-$ , provide the Lichnerowicz conditions [8].

The resulting manifold  $M$  is geodesically complete and possesses two regions connected by a hypersurface  $\Sigma$ . Since the interior vacuum solution is to be matched with an exterior Schwarzschild solution at the junction surface  $r = a$  we use the Darmois-Israel formalism [9]. Using the field equations, the surface stress-energy tensor can be calculated in terms of the jump in the second fundamental form across  $\Sigma$ . Because  $M$  is piecewise vacuum solution, the Einstein tensor is zero everywhere the stress-energy tensor localized at the junction surface can be calculated

$$T_{ab} = -\delta(\eta)([K_b^a] - \delta_b^a[K]). \quad (1)$$

The extrinsic curvature, or the second fundamental form, is defined as

$$K_{b\pm}^a = \frac{1}{2}g^{ab} \frac{\partial g_{ba}}{\partial \eta} |_{\eta=\pm 0}$$

where  $\eta$  the proper distance away from the  $\Sigma$  and  $[K]$  denotes the trace of  $[K_{ab}] = K_{ab}^+ - K_{ab}^-$ .

The approach to be taken here to the static spherically symmetric relativistic configurations involved a match between solutions of Einstein equations in Schwarzschild original coordinates [10], with solutions in isotropic gauge [11]. The field equations in this case simply state the metric field is just a field in a spherically symmetric space time. The solution will be given in terms of explicit closed-form functions of the radial coordinate for the three metric coefficients. According to the widespread common opinion, the most common form of line element of a spherically symmetric spacetime in comoving coordinates can be written as

$$ds^2 = -g_{tt}(r, t)dt^2 + g_{rr}(r, t)dr^2 + 2g_{rt}(r, t)drdt + \rho(r, t)^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2). \quad (2)$$

We are free to reset our clocks by defining a new time coordinate

$$t = t' + f(r).$$

with  $f(r)$  an arbitrary function of  $r$ . This allows us to eliminate the off-diagonal element  $g_{rt}$ . Therefore we shall consider the matching of two static and spherically symmetric spacetimes given by the following line elements

$$ds_\pm^2 = -g_{tt}(r, t)_\pm dt^2 + g_{rr}(r, t)_\pm dr^2 + \rho(r, t)_\pm^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2). \quad (3)$$

of  $M_\pm^4$ , respectively, where  $g_{tt}(r, t)$ ,  $g_{rr}(r, t)$  and  $\rho(r, t)$  are of class  $C^2$ .

In his pioneering article Schwarzschild has used a radial variable  $r$  and the gauge

$$\det \|g_{ab}\| = 1, \quad (4)$$

for the spherically symmetric static metric. He had fixed the three unknown functions

$$g_{tt}(r) = 1 - \frac{2M}{\rho(r)} > 0, \quad g_{rr}(r) = -\frac{1}{g_{tt}} < 0 \quad (5)$$

obtaining

$$\rho(r) = \sqrt[2]{r^3 + \rho_G^3},$$

Another widespread form of the Schwarzschild's solution, was reached using isotropic gauge (for example in [12]),

$$ds^2 = -\hat{g}_{tt}(r)dt^2 + \hat{g}_{rr}(r)(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\varphi^2), \quad (6)$$

Obviously, these co-ordinates may be used as the same co-ordinate for the metric field with various properties in different domain. To begin with, we consider the solutions of field equations for line elements (18) and (13), (15). The result is

$$\hat{g}_{tt} = \frac{\hat{\alpha}(1 - 4r\hat{\beta})^4}{r^4}, \quad \hat{g}_{rr} = \frac{\hat{\gamma}(1 + 4r\hat{\beta})^2}{(1 - 4r\hat{\beta})^2}, \quad (7)$$

and

$$g_{tt} = \frac{\alpha r^4}{(r^3 + \rho_G^3)[\alpha(r^3 + \rho_G^3)^{1/3} - \beta]}, \quad g_{rr} = \alpha - \frac{\beta}{(r^3 + \rho_G^3)^{1/3}}, \quad (8)$$

where  $\alpha, \beta, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$  arbitrary constants.

Analogous as in stellar models this implies that the one of the solutions we can assume as "interior" but another as "exterior" vacuum solution. Now in order for these line elements to be continuous across the junction we impose an explicit definition for the arbitrary constants in solutions (7), (8). The brief computation yields

$$\alpha = \frac{\hat{\gamma}}{9 - 4\sqrt{5}}, \quad \beta = \frac{4\hat{\gamma}a}{5^{5/6}(9 - 4\sqrt{5})}, \quad \hat{\alpha} = -\frac{a}{5^{5/12}}, \quad \hat{\beta} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4a}, \quad \rho_G = a(\sqrt{5} - 1)^{1/3}, \quad (9)$$

where  $a$  junction radius.

In this case the boundary surface entails via the field equations a jump in second derivations of metric coefficient, but first derivatives remains. Thus, from the junction conditions, the "interior" metric parameters can be determined at the boundary surface in terms of the "exterior" metric parameters. Note that for this case  $K_b^a$  is continuous across  $\Sigma$ . Hence, Darmois-Israel junction conditions are fulfilled. Such construction allows us to associate rigorously with both gauges as a same "space", which is a unique differentiable manifold  $M^4$ .

## The Heckmann's wormholes solutions

JBD theory are described by the following action in the Jordan frame is:

$$S = \int dx \sqrt{-g} (\phi R - \omega g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + S_m). \quad (10)$$

Here,  $R$  is the Ricci scalar curvature with respect to the space-time metric  $g_{\mu\nu}$  and  $S_m$  denote action of matter fields. (We use units in which gravitational constant  $G=1$  and speed of light  $c=1$ .)

Variation of (25) with respect to  $g_{\mu\nu}$  and  $\phi$  gives, respectively, the field equations:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{1}{\phi} T_{\mu\nu}^M + T_{\mu\nu}^{JBD}, \quad (11)$$

where

$$T_{\mu\nu}^{JBD} = \left[ \frac{\omega}{\phi^2} \left( \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi \right) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha \phi) \right]. \quad (12)$$

and

$$\nabla_\alpha \nabla^\alpha \phi = \frac{T_\lambda^{M \lambda}}{3 + 2\omega}, \quad (13)$$

and  $T_\lambda^{M \lambda}$  is the energy momentum tensor of ordinary matter which obeys the conservation equation  $T_{\mu\nu;\lambda}^M g^{\nu\lambda} = 0$ .

One can chose the static spherically symmetric metric in curvature coordinates form

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (14)$$

Then the solutions of the gravitational field equations in the vacuum take the form [17]

$$r = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\tau}(\tau^{-h} - \tau^h)}, \quad e^\lambda = \frac{4h^2}{\left[ \left( \frac{1}{2} + h \right) \tau^h - \left( \frac{1}{2} - h \right) \tau^{-h} \right]^2}, \quad e^\nu = \tau^{\frac{1}{B}}, \quad \phi = \phi_0 \tau^{\frac{\beta_0}{B}}, \quad (15)$$

where  $\tau$  parameter, arbitrary constant and

$$h^2 = \frac{1}{4} - \frac{A}{B^2}; A = \frac{\beta_0}{2} (1 - \beta_0\omega); B = 1 + 2\beta_0.$$

The constant  $\phi_0$  are determined by an asymptotic flatness condition as  $\phi_0 = 1$ , while  $\alpha_0$  and  $\beta_0$  is determined by the requirement of having Schwarzschild geometry in the weak field limit [1]. Thereby

$$\alpha_0 = 4hM (1 + 2\beta_0) \quad (16)$$

is the function of central mass of the configuration and

$$\beta_0 = -\frac{1}{3 + 2\omega}. \quad (17)$$

This implies that the range of  $\beta_0$  is dictated by the range of  $\omega$ , which, in turn, is to be dictated by the requirements of wormhole geometry. In order to investigate whether a given solution represents a wormhole geometry, it is convenient to cast the metric into Morris-Thorne canonical form:

$$ds^2 = -e^{2\chi(\overset{*}{R})} dt^2 + \left[ 1 - \frac{b(\overset{*}{R})}{\overset{*}{R}} \right]^{-1} dr^2 + \overset{*}{R}^2 d\Omega^2, \quad (18)$$

where  $\chi(\overset{*}{R})$  and  $b(\overset{*}{R})$  are arbitrary functions of the radial coordinate,  $\overset{*}{R}$ .  $\chi(\overset{*}{R})$  is denoted as the redshift function, for it is related to the gravitational redshift;  $b(\overset{*}{R})$  is called the form function, because as can be shown by embedding diagrams, it determines the shape of the wormhole [18]. The radial coordinate has a range that increases from a minimum value at  $\overset{*}{R}_0$ , corresponding to the wormhole throat, to infinity. The Heckmann solution can be cast to the form (18) by defining a radial coordinate  $\overset{*}{R}$  which is related with  $r$  via the expression

$$\overset{*}{R} = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\tau}(\tau^{-h} - \tau^h)}, \quad (19)$$

The functions  $\chi(\overset{*}{R})$  and  $b(\overset{*}{R})$  are the given by

$$\begin{aligned} \chi(\overset{*}{R}) &= \tau^{\frac{1}{B}}, \\ b(\overset{*}{R}) &= \overset{*}{R} \left[ 1 - \left[ \frac{(1+2h)}{4h} \tau^h - \frac{(1-2h)}{4h} \tau^{-h} \right]^2 \right] \end{aligned} \quad (20)$$

The axially symmetric embedded surface  $z = z(\overset{*}{R})$  shaping the wormhole's spatial geometry is obtained from

$$\frac{dz}{d\overset{*}{R}} = \pm \left[ \frac{\overset{*}{R}}{b(\overset{*}{R})} - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (21)$$

By definition of wormhole at throat its embedded surface is vertical. The throat of the wormhole occurs at  $\overset{*}{R} = \overset{*}{R}_0$  such that  $b(\overset{*}{R}_0) = \overset{*}{R}_0$ . This gives minimum allowed  $R$  - coordinate radii  $R_0^\pm$  as [17]

$$R_0^\pm = \frac{\alpha_0 \sqrt{1 - 4h^2}}{4h} \left( \frac{1 + 2h}{1 - 2h} \right)^{\frac{1}{4h}} \quad (22)$$

The values  $R_0^\pm$  can be obtained from (23) using the (17).

$$R_0^\pm = \sqrt{\frac{-3(1+\omega)}{2}} \left( \frac{1+2\omega+\Omega}{1+2\omega-\Omega} \right)^{\frac{1+2\omega}{\Omega}}, \quad (23)$$

where  $\Omega = \sqrt{7 + 10\omega + 4\omega^2}$ .

In contrast with class I Brans solution where the throat radius becomes real when  $\omega < -4/3$  here it becomes positive when  $\omega < -1$ . This range thus gives rise viable wormhole geometry. The redshift function has a singularity at  $\tau = 0$  which corresponds to the point  $\overset{*}{R} = 0$ .

The new results include matching between exact interior solutions in the perfect fluid family and the Brans and after that Schwarzschild solutions. We have shown that this predicts a rather interesting physics for the range from stars to clusters of galaxies. First of all we point out that in this model the stars acquires features of a two-component objects (ordinary matter and scalar field) whose distribution in the observed 3-dimensional volume can has, in an

addition to standard model, an envelope of scalar field. Moreover, such a picture can represent a Schwarzschild background, while the interior should be considered as vacuum solution of JBD which defined a Keplerian mass of this object.

In scheme presented in this report, studies of possible wormhole solutions in alternative gravitation was thought of as a way of understanding the role of different fields as the "carrier" of exoticity together with the aim of finding phenomena for which different qualitative behaviors to those of standard General Relativity model may arise.

## Discussion

The field equations in Einstein gravity theory are non linear in nature. For a classical field, the differential equations consist of purely geometric requirements imposed by the idea that space and time can be represented by a Riemannian (Lorentzian) manifold, together with the description of the interaction of matter and gravitation contained in Einstein's equations

$$G_{ab} = T_{ab}, \quad (24)$$

This equation involved a match between a purely geometrical object so called Einstein tensor  $G$ , and an object which depends on the properties of matter the energy-momentum tensor  $T$  which contains quantities like the ordinary density and pressure of matter. Hence, the geometry of 4D spacetime is governed by the matter it contains. However, this split is artificial. According to the standard textbooks the general relativity exhibits general covariance: its laws and further laws formulated within the general relativistic framework take on the same form in all coordinate systems [3]. On the other hand Einstein's equations (24) determine the solution of a given physical problem up to four arbitrary functions, i.e., up to a choice of gauge transformations. This theory for definition of concept of co-ordinate system use geometrical terms; meanwhile, the geometrically interpreted co-ordinate system can emerge here only together with the geometry, i.e. with definition of metric tensor  $g_{ab}$  [4]. The variables  $x$ , used in Einstein's equations, represent co-ordinates of points of abstract four-dimensional manifold  $M^4$  over which there are a set pseudo Rimanien spaces  $V^4(g)$ , generated by set of solutions  $g_{ab}$ . Co-ordinates in each of such spaces have the specific properties differing from their properties in other spaces [5]. Moreover, a new class of co-ordinates each time is postulated subsystem

$$C(\mu)g_{ab} = 0. \quad (25)$$

where  $C(\mu)$  - some algebraic or differential operators. Specifically four of ten field equations will not be transformed by those or other rules, but simply replaced by hand with the new. In contrast with general relativity, Newtonian theory has as the geometrical foundation the Euclidean space and absolute time. Compared with Newtonian gravity, general relativity has one more independent variable, 9 more dependent ones, the result of these changes being that the general form of the field equations expands to 10 partial differential equations (in terms of the metric and coordinates). Usually used co-ordinate conditions can be write in the form of four equations (25). Thereby for any four of components  $g_{ab}$  emerge the relations with remaining six and, probably, any others, known functions. Certainly, equations (25) cannot be covariant for the arbitrary transformations of independent variables, and similarly should not contradict Einstein's equations or to be their consequence.

The choice of a reference frame in a general relativity quite often compare to gauges of potentials in an electrodynamics. But this analogy is the most superficial: this or that gauge is a problem of exclusively convenience, its this or that expedient does not influence in any way on a values of physical quantities and it is not related to observation requirements, - whereas the choice of co-ordinate system is related to all it essentially.

The specification of the energy-momentum tensor played a very important role. The exact solutions known have all been obtained by restricting the algebraic structure of the Riemann tensor, by adding field equations for the matter variables or by imposing initial and boundary conditions. One surprise for the reader may lie in the fact that in a certain gauge any metric whatsoever is a 'solution' of (24) if no restriction is imposed on the energy-momentum tensor, since (24) then becomes just a definition of  $T_{ab}$ . Since the field equations are very complicated, to find solutions physicists makes simplifying assumptions about the left-hand-side or the right-hand-side. Most popular simplifying assumptions about the right-hand-side of (1) are that  $T_{ab}$  represents vacuum. On the other hand, as is well known simplifying assumptions about the left-hand-side often comprise static and spherical symmetry. The most commonly approach employ the assumption that this configurations describes the gravitational field outside any body with spherically symmetric mass distribution. Some of this solutions were discovered at early stage of development of general relativity, but up to now they are often considered as equivalent representation of some "unique" solution. However, the physical and the geometrical meaning of the radial coordinate  $r$  are not defined by symmetry reasons and are unknown a priori [6],[7]. The review by Fizev outlines that various vacuum spherical solution in different gauges leads to existence infinitely many different static solutions of Einstein equations (24) with spherical symmetry, a point singularity, placed at the center of symmetry, and vacuum outside this singularity, and with the same Keplerian mass  $M$ . This paper will present a new feature of well known solution to the spherically symmetric time independent Einstein system of equations that govern the behavior of the space-time in the "interior" vacuum Schwarzschild solution. At the outer boundary the solutions will be matched to the external vacuum solution, in a different gauge, for the field equations i.e. the solution in isotropic coordinates.

The gravitational field equations define only the metric over manifold  $M^4$ , but not its topological property. The same system of reference in manifold  $M^4$  is interpreted as this or that co-ordinate system in pseudo - Riemannian space  $V^4(g)$  at a different selection of equations (25), giving some minimum of information about properties of the required metric. Nevertheless, Einstein's equations have, of course, a non-enumerable set of the solutions which are not possessing properties of the necessary metric. Generally it is impossible to be assured, that always it will be possible to coat  $V^4(g)$  with set of co-ordinate neighborhoods of the same class, i.e. featured by the same operators  $C(\mu)$ . It does necessary acceptance enough wide guesses of the nature of operators  $C(\mu)$ . The above consideration confirms the conclusion, that space  $V^4$  one can featured by two or more known class of co-ordinates. The solutions of Einstein's equations for such constructions one assume as "interior" and "exterior" one. Thus, the common geometry emerges from the junction conditions at the boundary surface. It must be combined with Darmois-Israel junction conditions. We show that our approach provides a clear way of showing that the Schwarzschild solution is not a unique static spherically symmetric solution, providing some incite on how the current form of Birkhoff's theorem breaks down. All results can be stated for four dimensional (pseudo) Riemannian manifolds. It should also be noted that because general relativity is a highly non-linear theory, it is not always easy to understand what qualitative features solutions might possess, and here the composite class of solutions can used as a guide.

## Литература

- [1] P. Jordan, *Schwerkraft und Weltall*, (Braunschweig), (1955).
- [2] C. Brans and R. H. Dicke, *Phys. Rev.*, **124**, 925-935 (1961).
- [3] Wald, Robert M. (1984), *General Relativity*, University of Chicago Press.
- [4] A.N.Temchin, *Urvneniia Einshteina Na Mnogoobrazii*, Moskow, URSS,1999, (Russian).
- [5] A. Gullstrand, *Allgemeine Losung des statischen Eink?rperproblem in der Einsteinschen Gravitationstheorie*. Ark. for Mat., Astr. o. fysik, Bd.16, N 8, (1921)
- [6] A. S. Eddington, *The mathematical theory of relativity*, 2nd ed. Cambridge, University Press, 1930 (repr.1963.)
- [7] P. Fiziev, Gravitational Field of Massive Point Particle in General Relativity, gr-qc/0306088, ICTP preprint IC/2003/122. P.P. Fiziev, T.L. Bojadjev, D.A. Georgieva, Novel Properties of Bound States of Klein-Gordon Equation in Gravitational Field of Massive Point, gr-qc/0406036. P. Fiziev, S. Dimitrov, Point Electric Charge in General Relativity, hep-th/0406077. P. Fiziev, On the Solutions of Einstein Equations with Massive Point Source, gr-qc/0407088.
- [8] A. Lichnerowicz, *Theories Relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnetisme*, Masson, Paris (1955).
- [9] W. Israel, *Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity*, Nuovo Cimento 44B, 1 (1966); and corrections in ibid. 48B, 463 (1966).
- [10] K. Schwarzschild, Sitzungsber. *Preus. Acad. Wiss. Phys. Math. Kl.*, **189** (1916).
- [11] Misner, Thorne, Wheeler (1973). *Gravitation*. W H Freeman and Company.
- [12] Misne E. Arnowitt, S. Deser, C. M. Misner, *Phys. Rev. Lett.*
- [13] B. Nayak, L. P. Singh, *Modern Physics Letters A* (MPLA), **24**, 22 (2009) pp. 1785-1792
- [14] A. Agnese and M. La Camera, *Phys. Rev. D*, **51**, 2011 (1995)
- [15] K. K. Nandi, A. Islam and J. Evans, *Phys. Rev. D*, **55**, 2497 (1997); K.K. Nandi, B. Bhattacharjee, S.M.K. Alam and J. Evans, *Phys. Rev. D*, **57**, 823 (1998); K.K. Nandi, *Phys. Rev. D*, **59**, 088502 (1999); P.E. Bloomfield, *Phys. Rev. D*, **59**, 088501 (1999); K.K. Nandi and Y.Z. Zhang, *Phys. Rev. D*, **70**, 044040 (2004).
- [16] F. He, S-W. Kim, *Phys.Rev.D*, **65**, 084022 (2002).
- [17] O. Heckmann, P. Jordan, R.Fricke, *Astroph., Zur erweiterten Gravitationstheorie*, Z. 28, 113-149, (1951).
- [18] M. Visser, *Lorentzian wormholes: from Einstein to Hawking*, Springer-Verlag, New York, Inc. (1996).

## НОВЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ИНФЛЯЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ В КИРАЛЬНОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

А.С. Кубасов<sup>1</sup>

Ульяновский государственный университет, Россия, Ульяновск

---

<sup>1</sup>E-mail: as-kubasov@rambler.ru



### Киральные космологические модели

Действие и тензор энергии-импульса для самогравитирующей нелинейной сигма модели с потенциалом самодействия  $W(\varphi)$  имеют вид [1]

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left( \frac{R}{2k} + \frac{1}{2} h_{AB}(\varphi) \varphi_{,\mu}^A \varphi_{,\nu}^B g^{\mu\nu} - W(\varphi) \right) \quad (1)$$

$$T_{\mu\nu} = \varphi_{A,\mu} \varphi_{,\nu}^A - g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} \varphi_{,\alpha}^A \varphi_{,\beta}^B g^{\alpha\beta} h_{AB} - W(\varphi^C) \right) \quad (2)$$

где  $g_{\mu\nu}(x)$  - метрика пространства-времени, и  $h_{22}$  - метрика фонового поля  $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ ,  $\partial_\mu \varphi^A = \varphi_{,\mu}^A$ .

Вариация действия (1) по  $\varphi^C$  дает уравнение киральных полей

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \varphi_{,\mu}^A) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{BC}}{\partial \varphi^A} \varphi_{,\mu}^B \varphi_{,\nu}^C g^{\mu\nu} + W_{,A} = 0 \quad (3)$$

где  $W_{,A} = \frac{\partial W}{\partial \varphi^A}$ . Метрики кирального пространства и пространства-времени Фридмана-Робертсона-Уокера запишем в форме:

$$ds_{ts}^2 = d\phi^2 + h_{22}(\phi, \psi) d\psi^2 \quad (4)$$

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \quad (5)$$

### Метод решения

Полевые уравнения двухкомпонентной киральной космологической модели (3) в метрике (4) и уравнения Эйнштейна принимают вид

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}}{\partial \phi} \dot{\psi}^2 + \frac{\partial W}{\partial \phi} = 0 \quad (6)$$

$$3H(h_{22}\dot{\psi}) + \partial_t(h_{22}\dot{\psi}) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}}{\partial \psi} \dot{\psi}^2 + \frac{\partial W}{\partial \psi} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \dot{\phi}^2(t) + \frac{1}{2} h_{22}(t) \dot{\psi}^2(t) = \frac{1}{k} \left[ \frac{K}{a^2} - \dot{H} \right] \quad (8)$$

$$W(t) = \frac{3}{k} \left( H^2 + \frac{1}{3} \dot{H} + \frac{2}{3} \frac{K}{a^2} \right) \quad (9)$$

Рассмотрим три физически значимых случая: 1) пространственно-плоская Вселенная ( $K = 0$ ), 2) открытая Вселенная ( $K = -1$ ), 3) замкнутая Вселенная ( $K = 1$ ). Суть метода заключается в специальном разбиении ТЭИ киральных полей. Используя разбиения в случае 1) в виде

$$h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\phi), W(\phi, \psi) = W_1(\phi) + W_2(\psi) \quad (10)$$

и в случае 2) и 3) – в виде

$$h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\phi), W(\phi, \psi) = W_1(\phi) + e^{f(\phi)} W_2(\psi) \quad (11)$$

получены классы новых точных решений.

Предложенный подход позволяет по-новому описать открытую и замкнутую Вселенную. Проблема евклидовости Вселенной обсуждается во многих работах [2]. По имеющимся данным современная наблюдаемая Вселенная близка к пространственно-плоской. Предложенный метод решения для открытой или замкнутой Вселенной позволяет разделить компоненты киральных полей на плоскую часть и часть, отвечающую за "скривление" пространства-времени до открытого или замкнутого. Таким образом, генерация решений зависит от выбора масштабного фактора, или, при небольшой модификации метода, от потенциала  $W$ . Отметим, что структура уравнений модели такова, что если на начальном этапе Вселенная начала свою эволюцию, как открытая или замкнутая, то этому этапу соответствовало поле  $\psi$ . При дальнейшем расширении, когда доминирование компоненты  $\frac{3}{k} \left( H^2 + \frac{1}{3} \dot{H} \right)$  начало преобладать над  $\frac{2}{k} \frac{K}{a^2}$ , основную роль начало играть поле  $\phi$ .

### Выводы

При исследовании киральной двухкомпонентной космологической модели, порождающей степенную и экспоненциальную инфляцию в плоской, открытой и замкнутой Вселенной, были получены решения, которые будут представлены в статье. Особый интерес представляет структура решений, отвечающая открытой и замкнутой Вселенной. В этом случае поля распределяются таким образом, что поле  $\phi$  отвечает пространственно-плоской вселенной, а поле  $\psi$  - за "скривление" плоского пространства времени до открытого или замкнутого. В свете проблемы евклидовости наблюдаемой вселенной [2], это приводит к мысли, что, если в начальный период своей эволюции Вселенная была замкнутой или открытой и ей отвечало поле  $\psi$ , то при последующем расширении начало преобладать поле  $\phi$ .

## Благодарности

Автор признателен профессору Червону С.В. за постановку задачи и интерес к работе.

## Литература

- [1] S.V.Chervon, Chiral non-linear sigma models and cosmological inflation. // *Gravitation and Cosmology*, **1**, No.2, p.91-96, 1995.  
 [2] А.Д. Линде, *Физика элементарных частиц и инфляционная космология.* // Москва, "Наука"1990.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СПОНТАННОГО НАРУШЕНИЯ СИММЕТРИИ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ В СКМ MAPLE

О.Н. Кучумов<sup>1</sup>

Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатьев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Татарский государственный гуманитарно - педагогический университет,  
Россия, Казань

<sup>2</sup>Татарский Государственный Гуманитарно-Педагогический Университет,  
Казань

<sup>1</sup>E-mail: nikoleg85@bk.ru, <sup>2</sup>E-mail: ignatev\_yu@rambler.ru

В статье рассматривается спонтанное нарушение симметрии в равновесной статистической системе частиц со скалярным взаимодействием. Функция Гамильтона для массивных частиц, взаимодействующих со скалярным полем  $\Phi$  посредством скалярного заряда  $q$ , есть:

$$H_a = \frac{1}{2} \left[ \frac{g^{ik} P_i P_k}{1 + \frac{q_a \Phi}{m_a c^2}} - m_a q_a \Phi \right] = \frac{m_a^2 c^2}{2} \quad (1)$$

В статическом скалярном поле равновесная изотропная функция распределения имеет вид:

$$f_a^0(x, P_a) = \left\{ \exp \left[ \frac{-\mu_a + P_4}{\theta} \right] \mp 1 \right\}^{-1} \quad (2)$$

$$P_4 = (1 + q\Phi/m) \sqrt{m^2 + p^2}, \quad (3)$$

$p$  - модуль кинематического импульса частицы. Скалярное поле  $\Phi$  удовлетворяет уравнению типа Клейна-Гордона с источником:

$$\square \Phi + \mu_s^2 \Phi = -4\pi \epsilon_s \sigma, \quad (4)$$

где  $\epsilon = 1$  для полей с притяжением, и  $\epsilon = -1$  для полей с отталкиванием одноименных частиц, плотность скалярных зарядов  $\sigma$  определяется с помощью следа тензора энергии-импульса частиц:

$$\sigma = \sum_A \frac{q_A T_A}{m_a + q_a \Phi} = \frac{qT_+}{m_a + q_a \Phi} - \frac{qT_-}{m_a + q_a \Phi} \quad (5)$$

скалярные плотности энергии равновесного распределения равны:

$$T_a = \epsilon_a - 3P_a$$

$$T_a = \frac{m_*^2 \rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \left\{ \exp \left[ \frac{-\mu'_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta} \right] \pm 1 \right\}^{-1} \frac{P^2 dP}{\sqrt{m_*^2 + P^2}} \quad (6)$$

$$\epsilon_a = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \left\{ \exp \left[ \frac{-\mu'_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta} \right] \mp 1 \right\}^{-1} \sqrt{m_*^2 + P^2} P^2 dP \quad (7)$$

$$P_a = \frac{\rho}{6\pi^2} \int_0^\infty \left\{ \exp \left[ \frac{-\mu'_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta} \right] \mp 1 \right\}^{-1} \frac{P^4 dP}{\sqrt{m_*^2 + P^2}} \quad (8)$$

При этом плотность числа частиц определяется выражением:

$$n = \sum_a \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \left\{ \exp \left[ \frac{-\mu'_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta} \right] \mp 1 \right\}^{-1} P^2 dP \quad (9)$$

Рассмотрим однородную систему частиц в евклидовом пространстве. Тогда  $\Phi = \Phi_0 = \text{Const}$ , и уравнение (4) становится алгебраическим относительно потенциала:

$$\mu_s^2 \Phi_0 = -4\pi\epsilon_s \sigma(\Phi_0), \quad (10).$$

В статье исследуется вопрос о существовании нетривиальных решений уравнения (10), соответствующих нарушению зарядовой симметрии частиц. При условии изначально зарядовой симметричности плазмы в отсутствии скалярного поля уравнение (10) примет вид:

$$\xi = -\frac{2\rho\epsilon_s}{\pi} \left(\frac{qm}{\mu}\right)^2 \sum_{\pm} \pm(1 \pm \xi) \int_0^{\infty} \left[ e^{-\vartheta_{\pm} + \lambda\sqrt{(1 \pm \xi)^2 + x^2}} + 1 \right]^{-1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1 \pm \xi)^2 + x^2}} \quad (11),$$

где введены обозначения:

$$m_{\pm} = |m \pm q\Phi| \equiv m|1 \pm \xi|, \quad \xi = \frac{q\Phi}{m}, \quad P = mx, \quad \lambda = m/\theta, \quad \vartheta_{\pm} = \mu_{\pm}/\theta.$$

Вводя безразмерные функции:

$$S(\xi, \vartheta, \lambda) = \int_0^{\infty} \left\{ \exp \left[ -\vartheta + \lambda\sqrt{(1 + \xi)^2 + x^2} \right] + 1 \right\}^{-1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1 + \xi)^2 + x^2}}, \quad (12)$$

перепишем уравнение (11) в виде:

$$\xi = -\epsilon_s \alpha^2 [(1 + \xi)S(\xi, \vartheta_+, \lambda) - (1 - \xi)S(-\xi, \vartheta_-, \lambda)]. \quad (13)$$

Поскольку в системе частиц существует термодинамическое равновесие и возможны реакции двухфотонной аннигиляции вида:

$$f + f_{\pm} \rightleftharpoons \gamma|\gamma, \quad (14)$$

а химический потенциал безмассовых фотонов равен нулю, то условие химического равновесия имеет вид:

$$\mu_+ - \mu_- = 0.$$

Таким образом:

$$\mu_- = -\mu_+ \equiv -\mu. \quad (15)$$

Поэтому уравнение поля (13) в условиях термодинамического равновесия сводится к виду:

$$\xi = -\epsilon_s \alpha^2 ((1 + \xi)S(\xi, \vartheta, \lambda) - (1 - \xi)S(-\xi, -\vartheta, \lambda))$$

Нетрудно увидеть, что  $\xi = 0$  есть точное решение уравнения (11). Рассмотрим различные случаи параметров.

Представим безразмерные функции (12) в виде:

$$S(\xi, \vartheta, \Lambda) = (1 + \xi)^2 K_{\lambda}(\vartheta, \Lambda)$$

где

$$K_{\lambda}(\vartheta, \Lambda) = \int_0^{\infty} \left\{ \exp \left[ -\vartheta + \Lambda\sqrt{1 + t^2} \right] + 1 \right\}^{-1} \frac{t^2 dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \int_0^{\infty} \frac{\sinh^2 U dU}{\exp[-\vartheta + \Lambda \cosh U] + 1}$$

где введены обозначения:

$$x = (1 + \xi)t, \quad \lambda(1 \pm \xi) = \Lambda_{\pm}$$

Поэтому уравнение поля (13) сводится к виду:

$$\xi = -\epsilon_s \alpha^2 ((1 + \xi)^3 K_{\lambda}(\vartheta, \lambda(1 + \xi)) - (1 - \xi)^3 K_{\lambda}(-\vartheta, \lambda(1 - \xi)))$$

При  $\Lambda \gg 1$  и  $\vartheta \ll 1 \Rightarrow$

## Литература

- [1] Ю. Г. Игнатьев. Законы сохранения и термодинамическое равновесие в общерелятивистской кинетической теории неупруго взаимодействующих частиц, Известия ВУЗов, Физика, №.12, 1983.

### Квантовое рождение вселенной типа IX по Бьянки со сдвигом

Е.В. Кувшинова<sup>1</sup>, В.Ф. Панов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Пермский государственный университет, Россия, Пермь, <sup>2</sup>Пермский государственный университет, Россия, Пермь

---

<sup>1</sup>E-mail: kuvlenka@narod.ru, <sup>2</sup>E-mail: panov@psu.ru

Нами построена нестационарная космологическая модель типа IX по Бьянки со сдвигом. Метрика модели имеет вид

$$ds^2 = -dt^2 + (B\omega^{(1)})^2 + C^2((\omega^{(2)})^2 + (\omega^{(3)})^2),$$

где  $B = B(C)$ ,  $C = C(t)$ , а  $\omega^{(1)}$ ,  $\omega^{(2)}$ ,  $\omega^{(3)}$  - есть 1-формы, удовлетворяющие структурным соотношениям типа IX по Бьянки. Источником гравитации является анизотропная жидкость. При отсутствии сдвига наша модель переходит в модель де Ситтера. Исследовано квантовое рождение Вселенной типа IX по Бьянки в нашем случае. Для рассматриваемой модели получено уравнение Уилера - ДеВитта. Вычислен коэффициент туннелирования Вселенной. Для нашего случая произведено сравнение вероятностей квантового рождения Вселенной со сдвигом и Вселенной без сдвига.

### Квантовое рождение вселенной с вращением типа VIII по Бьянки

Е.В. Кувшинова<sup>1</sup>, В.Ф. Панов<sup>2</sup>, О.В. Сандакова<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Пермский государственный университет, Россия, Пермь

---

<sup>1</sup>E-mail: kuvlenka@narod.ru, <sup>2</sup>E-mail: panov@psu.ru, <sup>3</sup>E-mail: o\_sandakova@list.ru

Нами построена нестационарная космологическая модель типа VIII по Бьянки с вращением. Метрика модели имеет вид

$$ds^2 = -(dt + kC\omega^{(1)})^2 + (\alpha C\omega^{(1)})^2 + C^2((\omega^{(2)})^2 + (\omega^{(3)})^2),$$

где  $C = C(t)$ ,  $k, \alpha - const$ , а  $\omega^{(1)}$ ,  $\omega^{(2)}$ ,  $\omega^{(3)}$  - есть 1-формы, удовлетворяющие структурным соотношениям типа VIII по Бьянки. Источником гравитации является анизотропная жидкость. Исследовано квантовое рождение Вселенной типа VIII по Бьянки в нашем случае. Мы квантуем уравнение связи по аналогии с работой [1] с помощью замены  $t$  конформным временем  $\eta$ :  $dt = cd\eta$  и заменой производной  $\frac{dC}{d\eta}$  оператором  $\frac{1}{i} \frac{d}{dC}$ , где  $i$  - мнимая единица. Таким образом получено уравнение Уилера - ДеВитта. Вычислен коэффициент туннелирования Вселенной.

## Литература

- [1] Р.Х. Сайбаталов, М.Л. Фильченков. Российская летняя школа - семинар "Современные проблемы гравитации и космологии". GRACOS - 2007, 9-16 сентября 2007 г., Казань - Яльчик. Труды семинара. - Казань: Изд-во Фолиантъ, 2007г., с. 152 - 155.

### Гравитация, космология и переход к новым определениям единиц СИ

В.Н. Мельников<sup>1</sup>

Центр гравитации и фундаментальной метрологии ВНИИМС и Институт гравитации и космологии РУДН, Россия, Москва

---

<sup>1</sup>E-mail: melnikov@phys.msu.ru

Анализируются современные проблемы объединения гравитационного и других фундаментальных физических взаимодействий, проблемы космологии, роль дополнительных измерений, а также планируемый переход к новым определениям единиц Международной системы единиц физических величин СИ и возникающие при этом проблемы.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 - 2013 годы.

## Литература

- [1] Multidimensional Cosmology and Fundamental Constants. Int. J. Mod. Phys. A, 2009, V. 24, N 8/9, 1473-1480.
- [2] V.N. Melnikov. Models of G Time Variations in Diverse Dimensions. Frontiers of Physics. 2009, V.4, N 1, pp.75-93.
- [3] V.N. Melnikov. Multidimensional Models, Dark Energy and Fundamental Constants. AIP Conf. Proc., 2009, v. 1206. pp. 27-47.
- [4] S.A. Kononogov, V.V. Khrushchov and V.N. Melnikov. Constants of Extended Standard Model and Search for Their Temporal Variations. Grav. Cosmol., 2009, N 2, p. 158-163.
- [5] V.N. Melnikov. Extra Dimensions, Integrable Models and Observational Windows. In: Physical Interpretation of Relativity Theory: Proceedings of the International Meeting. Moscow, 6 - 9 July 2009. Edited by M.C. Duffy, V.O. Gladyshev, A.N. Morozov, P. Rowlands. Moscow: BMSTU, 2009. pp. 6-14.

### Accelerating expansion as local isotropic rotation

*I.S. Nurgaliev<sup>1</sup>*

*Moscow State Timiryazev University, Russia, Moscow*

---

<sup>1</sup>E-mail: ildus58@mail.ru

The cosmologic singularity is a consequence of using simplistic expansion law instead of the realistic  $V_\alpha = H_{\alpha\beta}R^\beta$ . Here  $H_{\alpha\beta}$  is expansion tensor (affinor),  $R^\beta$  is radius-vector of galaxies. Excessive symmetric character of the Hubble's law along with assumption that H-tensor is strictly real (not complex) is nothing but oversimplification of the cosmological principles of homogeneity and isotropy. The law given above includes distributed rotation which is imperative attribute of cosmological kinematics and has been ignored in the Hubble's law. (Was not the intuitive feeling of the oversimplification of the expansion law the reason for the contradictory attitude to expansion interpretation of redshift-distance correlation by Hubble?) Historically, looking a few centuries back, lack of given tensor (affinor) law might be considered the reason for the idea of the Cartesian vortexes to be less popular in comparison to the ideas of Newtonian potential forces.

The centrifugal forces acting between particles rotating randomly around each other are shown below to be able to reverse gravitational collapse. It is shown in this report that contribution from vortex  $\omega$  (anti-symmetric part of  $H_{\alpha\beta}$ ) provides stabilization of cosmological collapse and induces rotational structure formation. It makes natural to interpret increasing redshift for larger distances as the transverse redshift effect.

The exact expression and one for small  $RH/c$  and  $R\omega/c$ , respectively, hold

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\sqrt{1 - \frac{R^2(\omega^2 - H^2)}{c^2}}}{1 - \frac{RH}{c}}, \quad (1)$$

$$\frac{\nu}{\nu_0} = 1 - \frac{RH}{c} + \frac{3}{2}\left(\frac{RH}{c}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{R\omega}{c}\right)^2, \quad (2)$$

therefore, the most natural candidate for acceleration cause is "local rotation"  $\omega > 3H$  which is homogenous and isotropic. It might compose either all or a part of the expansion itself. If we decline to the perfect cosmological principle (time symmetry included) the complex isotropic rotation composes all visible (redshift based) expansion.

## Литература

- [1] I. S. Nurgaliev. Cosmological Expansion Started from the Big Bounce on Local Rotation. arXiv:0807.4837.

## Not singular and not dark universe

I.S. Nurgaliev<sup>1</sup>

Moscow State Timiryazev University, Russia, Moscow

<sup>1</sup>E-mail: ildus58@mail.ru

Local imaginary spherical region of the homogeneous and isotropic infinite distribution of gravitating “dust” considered. As Milne and McCrea did, we can ignore the surrounding matter (Birkhoff theorem). But in contrary to Milne and McCrea [1], we do not demand the test particle rest at the contracting sphere marking the boundary of the ball of the constant mass but let it move with the typical peculiar cosmological velocity  $\vec{v}_{peculiar}$  on the sphere because rotation is a typical motion in the Universe along with well measured expansion, and the galaxies do have peculiar components of their motion. In other words we rehabilitate vorticity, and thereby long time ignored centrifugal cosmological forces as well.  $\vec{v}_{peculiar}$  is perpendicular to pure Hubble-type expansion. We get

$$V_\alpha = H_{\alpha\beta} R^\beta. \quad (1)$$

It is ignored component of the cosmological motion in the standard general relativistic Friedman-Lemaitre models. In Newtonian cosmology we derive in traditional notations:

$$\dot{H} + H^2 = K_1^2 \rho^{4/3} - (4\pi G/3)\rho. \quad (2)$$

Here we have got good surprise. The same functional dependence of  $\omega^2$  on R as of energy density and pressure of ultra-relativistic matter (electromagnetic radiation, photons gas), all of them while isotropic, are proportional to  $1/R^4$ , and the very same law of conservation of the averaged shear squared  $\sigma^2$  (the latter causes black “matter” effect along with “black energy” effect of  $\omega^2$ ) remain the functional character of (2) unchanged causing only the re-defining the constant  $K^2 = \Omega^2 - \Gamma^2 - \Sigma^2$ , where constants  $\Omega, \Gamma, \Sigma$  stand for vortex, radiation (energy density and pressure) and shear constants in corresponding conservation laws.

Here is the first integral of (2):

$$H^2/2 = -K^2/2R^4 + GM/R^3 + A/R^2,$$

where A is a constant of integration. A final integral of the cosmologic equations holds:

For  $A \geq 0$  we have:

$$t + t_0 = -(2A)^{-1}(2AR^2K + 2GMR - K^2)^{1/2} - GM(2A)^{3/2} \ln(2^{3/2}A^{1/2}(2AR^2 + 2MGR - K^2) + 4AR + 2GM);$$

For  $A \leq 0$  we have:

$$t + t_0 = (2A)^{-1}(2AR^2K + 2GMR - K^2)^{1/2} - GM(-2A)^{3/2} \arcsin[(2AR + GM)/(2A^2K^2 + GM^2)^{1/2}].$$

## Литература

- [1] McCrea W.A., Milne E.A. *Q. J. Math. (CityplaceOxford)*, **5**, 73, 1934
- [2] Nurgaliev I.S. “Singularities Are Averted by Vortex”. 13th Gravitational Conference – International Conference on Gravitation, Cosmology and Astrophysics. June 23-28, 2008. PlaceNamePeoples PlaceNameFriendship PlaceTypeUniversity of country-regionRussia (PFUR), CityplaceMoscow, country-regionRussia. Abstracts. Published by PFUR, ISBN 978-5-209-03274-8, page 117–118

## SELF-FORCE ON A SCALAR POINT CHARGE IN THE LONG THROAT

A.A. Попов<sup>1</sup>Татарский государственный гуманитарно - педагогический университет, Россия,  
Казань<sup>1</sup>E-mail: apopov@ksu.ru

**Annotation.** An analytic method is presented which allows for the computation of the self-force for a static particle with a scalar charge in the region of an ultrastatic spacetime which one can call the long throat. The method is based on the approximate WKB solution of a radial mode equation for a scalar field. This field is assumed to be massless, with a coupling  $\xi$  to the scalar curvature is satisfied the condition  $\xi > 1/8$ .

## Introduction

In curved spacetimes there is an interesting interaction charged particle with its own field due to scattering on the curvature [1]. The origin of this self-force is associated with nonlocal structure of the field, the source of which is the particle. The original investigations focused on the self-acceleration of an electrically-charged point particle in flat spacetime [2]. Later DeWitt, Brehme, and Hobbs [1, 3] studied the influence of the self-force on a charge in a curved spacetime. In contrast to the case of a flat spacetime this force can be non-zero even for a static charge in a curved background. A number of static configurations has been analyzed, including the self-action in the spacetimes of a Schwarzschild black hole [4, 5], of a Kerr black hole [6], of a Kerr-Newman black hole [5] and in a spherically symmetric Brans-Dicke field [7]. The analytic approximation of self-force have been obtained for a scalar charge at rest in an axisymmetric spacetime [8]. The self-force can be non-zero for a static particle in flat spacetimes of the topological defects [9]. In curved spacetimes with nontrivial topological structure the investigations of this type have the additional interesting features [10, 11].

Are there the situations in which the effect of self-action is determined by the local geometry of the curved spacetime? As it is demonstrated below such type situation for the static scalar charge takes place, for example, in the throat of the wormhole if the length of this throat much more than the radius of throat. As the examples of such wormholes one can consider the spacetimes with metric

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \left( r_0 + \rho \tanh \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1)$$

or

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \left( r_0 + \rho \coth \frac{\rho}{\rho_0} - \rho_0 \right)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2)$$

where  $r_0$ ,  $\rho_0$  are the constants ( $r_0$  is radius of the throat,  $\rho_0$  is the parameter which describes the length of the throat) and

$$\frac{r_0}{\rho_0} \ll 1. \quad (3)$$

The effect of self-action in the region  $\rho \leq \rho_0$  does not depend on the geometry of a spacetime outside of this region and we shall call this region the long throat (the accurate determination of the long throat is given below).

The organization of this paper is as follows. In the following section we develop the general approach to a procedure of the self-force calculation. In section III, we develop an approximation for the self-force acting on a scalar charge at fixed position using the WKB approximation for the radial modes of the scalar field. In section IV, we evaluate the explicit expressions for the self-force on the two specific gravitational backgrounds. Finally, in section V we present the concluding remarks.

Throughout this paper, we use units  $c = G = 1$ .

## 1. General approach

Let us consider a massless scalar field  $\phi$  with scalar source  $j$ . The corresponding action is given by

$$S = -\frac{1}{8\pi} \int (\phi_{,\mu} \phi^{,\mu} + \xi R \phi^2) \sqrt{-g} d^4x + \int j \phi \sqrt{-g} d^4x, \quad (4)$$

where  $\xi$  is a coupling of the scalar field to the scalar curvature  $R$  and  $g$  is the determinant of the metric  $g_{\mu\nu}$ . The corresponding field equation has a form

$$\left( \square_x - \xi R(x) \right) \phi(x; \tilde{x}) = -4\pi j(x; \tilde{x}), \quad (5)$$

where

$$j(x; \tilde{x}) = q \int \delta^{(4)}(x^\mu, \tilde{x}^\mu(\tau)) \frac{d\tau}{\sqrt{-g}}, \quad (6)$$

is the scalar current,  $q$  is the scalar charge and  $\tau$  is its proper time. The world line of the charge is given by  $\tilde{x}^\mu(\tau)$ . We shall consider only the case in which the charge is at rest in a ultrastatic spacetime. This means that one can rewrite the field equation in the following way

$$\left( \Delta_x - \xi R(x^\alpha) \right) \phi(x^\alpha; \tilde{x}^\alpha) = -\frac{4\pi q}{u^t \sqrt{-g}} \delta^{(3)}(x^\alpha, \tilde{x}^\alpha), \quad (7)$$

where  $t$  is the time coordinate,  $u^t = dt/d\tau$  and  $\alpha = 1, 2, 3$ .

The procedure of the self-force evaluation requires the renormalization of a scalar potential  $\phi(x; \tilde{x})$  which is diverged in the limit  $x \rightarrow \tilde{x}$  (see, for example, [10, 11]). This renormalization is achieved by subtracting from  $\phi(x; \tilde{x})$  the DeWitt-Schwinger counterterm  $\phi_{DS}(x; \tilde{x})$  and then letting  $x \rightarrow \tilde{x}$ :

$$\phi_{ren}(x) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow x} [\phi(x; \tilde{x}) - \phi_{DS}(x; \tilde{x})]. \quad (8)$$

The expression for  $\phi_{DS}(x; \tilde{x})$  is evaluated in [13] and in 3D case has a form (see, also, [11])

$$\phi_{DS}(x; \tilde{x}) = q \frac{\Delta^{1/2}}{\sqrt{2\sigma}} \quad (9)$$

where  $\sigma$  is one half the square of the distance between the points  $x$  and  $\tilde{x}$  along the shortest geodesic connecting them and  $\Delta$  is DeWitt-Morrett determinant.

Finally the self-force acting on a static charge is

$$f_\alpha(x) = -\frac{q}{2} \nabla_\alpha \phi_{ren}(x). \quad (10)$$

## 2. WKB approximation for the self-force

The metric of an ultrastatic spherically symmetric spacetime under consideration is

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + r^2(\rho) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (11)$$

In this spacetime for the static charge  $u^t = 1$  and the solution of (7) can be expanded in terms of Legendre polynomials  $P_l$  with the result that

$$\phi(x^\alpha; \tilde{x}^\alpha) = q \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \gamma) g_l(\rho, \tilde{\rho}), \quad (12)$$

where  $\cos \gamma \equiv \cos \theta \cos \tilde{\theta} + \sin \theta \sin \tilde{\theta} \cos(\varphi - \tilde{\varphi})$  and  $g_l(\rho, \tilde{\rho})$  satisfies the equation

$$g_l'' + \frac{(r^2)'}{r^2} g_l' - \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \xi R \right] g_l = -\frac{\delta(\rho, \tilde{\rho})}{r^2}. \quad (13)$$

In this expression and below a prime denotes a derivative with respect to  $\rho$ . The homogeneous solutions to this equation will be denoted by  $p_l(\rho)$  and  $q_l(\rho)$ .  $p_l(\rho)$  is chosen to be the solution which is well behaved at  $\rho = -\infty$  and divergent at  $\rho \rightarrow +\infty$ .  $q_l(\rho)$  is chosen to be the solution which is divergent at  $\rho \rightarrow -\infty$  and well behaved at  $\rho = \infty$ . Thus

$$\left\{ \frac{d}{d\rho^2} + \frac{(r^2)'}{r^2} \frac{d}{d\rho} - \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \xi R \right] \right\} \begin{Bmatrix} p_l(\rho) \\ q_l(\rho) \end{Bmatrix} = 0, \quad (14)$$

$$g_l(\rho, \tilde{\rho}) = C_l p_l(\rho <) q_l(\rho >) = C_l \begin{Bmatrix} \Theta(\tilde{\rho} - \rho) p_l(\rho) q_l(\tilde{\rho}) \\ -\Theta(\rho - \tilde{\rho}) p_l(\tilde{\rho}) q_l(\rho) \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

where  $\Theta(x)$  is the Heaviside step function, i.e.,  $\Theta(x) = 1$  for  $x > 0$  and  $\Theta(x) = 0$  for  $x < 0$ ,  $C_l$  is a normalization constant which could be absorbed into the definition of  $p_l$  and  $q_l$ . Normalization of  $g_l$  is achieved by integrating (13) once with respect to  $\rho$  from  $\tilde{\rho} - \delta$  to  $\tilde{\rho} + \delta$  and letting  $\delta \rightarrow 0$ . This results in the Wronskian condition

$$C_l \left( p_l \frac{dq_l}{d\rho} - q_l \frac{dp_l}{d\rho} \right) = -\frac{1}{r^2}. \quad (16)$$

The WKB approximation for the radial modes  $p_l$  and  $q_l$  is obtained by the change of variables [14]

$$p_l = \frac{1}{\sqrt{2r^2 W}} \exp \left( \int^\rho W d\rho \right), \quad q_l = \frac{1}{\sqrt{2r^2 W}} \exp \left( -\int^\rho W d\rho \right). \quad (17)$$

Substitution of these expressions into (16) shows that Wronskian condition is obeyed if

$$C_l = 1. \quad (18)$$

Substitution into the mode equation (14) gives the following equation for  $W$ :

$$W^2 = \frac{l(l+1) + 2\xi}{r^2} + \frac{(W^2)''}{4W^2} - \frac{5(W^2)'^2}{16W^4} + \frac{(r^2)''}{2r^2} - \frac{(r^2)'^2}{4r^4} + \xi \left( -2 \frac{(r^2)''}{r^2} + \frac{(r^2)'^2}{2r^4} \right). \quad (19)$$

This equation can be solved iteratively when the metric function  $r^2(\rho)$  is slowly varying, that is,

$$\varepsilon_{WKB} = L_\star / L \ll 1, \quad (20)$$

where

$$L_\star(\rho) = \frac{r(\rho)}{\sqrt{2\xi}}, \quad (21)$$



and  $L$  is a characteristic scale of variation of  $r(\rho)$ :

$$\frac{1}{L(\rho)} = \max \left\{ \left| \frac{r'}{r} \right|, \left| \frac{r''}{r} \right|^{1/2}, \left| \frac{r'''}{r} \right|^{1/3}, \dots \right\}. \quad (22)$$

We shall call the region of spacetime where metric function  $r(\rho)$  is slowly varying the long throat.

The zeroth-order WKB solution of equation (19) corresponds to neglecting terms with derivatives in this equation

$$W^2 = \Omega \cdot \left( 1 + O(\varepsilon_{\text{WKB}}^2) \right), \quad (23)$$

where

$$\Omega(\rho, l + 1/2) = \frac{l(l+1) + 2\xi}{r^2} = \frac{1}{r(\rho)^2} \left[ \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 + \mu^2 \right], \quad (24)$$

and

$$\mu^2 = 2\xi - \frac{1}{4}. \quad (25)$$

Let us stress that  $\Omega$  is the exact solution of equation (19) in a spacetime with metric  $ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + r_0^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ , where  $r_0$  is constant. Below it is assumed that

$$\mu^2 > 0. \quad (26)$$

Substituting the solution (23) into (17) and (12), and neglecting terms of the second order and higher with respect to  $\varepsilon_{\text{WKB}}$  we can obtain the following expression for the zeroth-order WKB approximation for  $\phi(x^\alpha; \tilde{x}^\alpha)$  under the assumptions  $\theta = \tilde{\theta}, \varphi = \tilde{\varphi}$  and  $\tilde{\rho} = \rho + \delta\rho > \rho$

$$\phi(\rho, \theta, \varphi; \tilde{\rho}, \theta, \varphi) = \frac{q}{r(\rho)r(\tilde{\rho})} \sum_{l=0}^{\infty} \left( l + \frac{1}{2} \right) \frac{\exp \left( - \int_{\rho}^{\rho+\delta\rho} \sqrt{\Omega \left( \rho', l + \frac{1}{2} \right)} d\rho' \right)}{\sqrt[4]{\Omega \left( \rho, l + \frac{1}{2} \right) \Omega \left( \tilde{\rho}, l + \frac{1}{2} \right)}}. \quad (27)$$

The sum over  $l$  can be evaluated by using the Plana sum method (see, for example, [15])

$$\begin{aligned} \phi(\rho, \theta, \varphi; \tilde{\rho}, \theta, \varphi) &= \frac{q}{r(\rho)r(\tilde{\rho})} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\exp \left( - \int_{\rho}^{\rho+\delta\rho} \sqrt{\Omega(\rho', x)} d\rho' \right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho, x)\Omega(\tilde{\rho}, x)}} x dx + \right. \\ &+ \left. \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon} \frac{\exp \left( - \int_{\rho}^{\rho+\delta\rho} \sqrt{\Omega(\rho', z)} d\rho' \right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho, z)\Omega(\tilde{\rho}, z)} (1 + e^{i2\pi z})} z dz - \int_{\epsilon}^{\epsilon+i\infty} \frac{\exp \left( - \int_{\rho}^{\rho+\delta\rho} \sqrt{\Omega(\rho', z)} d\rho' \right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho, z)\Omega(\tilde{\rho}, z)} (1 + e^{-i2\pi z})} z dz \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

The first integral in this expression can be rewritten as follows

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\exp \left( - \int_{\rho}^{\rho+\delta\rho} \sqrt{\Omega(\rho', x)} d\rho' \right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho, x)\Omega(\tilde{\rho}, x)}} x dx \sqrt{r(\rho)r(\tilde{\rho})} &= \int_0^{\infty} \frac{x \exp \left( - \sqrt{x^2 + \mu^2} \int_{\rho}^{\rho+\delta\rho} d\rho' / r(\rho') \right)}{\sqrt{x^2 + \mu^2}} dx = \\ &= \sqrt{r(\rho)r(\tilde{\rho})} \frac{\exp \left( - \mu \int_{\rho}^{\rho+\delta\rho} d\rho' / r(\rho') \right)}{\int_{\rho}^{\rho+\delta\rho} d\rho' / r(\rho')} \end{aligned} \quad (29)$$

and expanded in powers of  $\delta\rho$

$$\int_0^{\infty} \frac{\exp \left( - \int_{\rho}^{\rho+\delta\rho} \sqrt{\Omega(\rho', x)} d\rho' \right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho, x)\Omega(\tilde{\rho}, x)}} x dx \frac{r(\rho)^2}{\delta\rho} \left[ 1 + \left( \frac{dr(\rho)}{d\rho} - \mu \right) \frac{\delta\rho}{r(\rho)} + O(\delta\rho^2) \right]. \quad (30)$$

The next two integrals in (28) do not diverge at  $\delta\rho \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon} \frac{\exp \left( - \int_{\rho}^{\rho+\delta\rho} \sqrt{\Omega(\rho', z)} d\rho' \right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho, z)\Omega(\tilde{\rho}, z)} (1 + e^{i2\pi z})} z dz - \int_{\epsilon}^{\epsilon+i\infty} \frac{\exp \left( - \int_{\rho}^{\rho+\delta\rho} \sqrt{\Omega(\rho', z)} d\rho' \right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho, z)\Omega(\tilde{\rho}, z)} (1 + e^{-i2\pi z})} z dz \right\} &= \\ = r(\rho) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{i\epsilon}^{i\epsilon+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{\mu^2 - x^2} (1 + e^{2\pi x})} + \int_{-i\epsilon}^{-i\epsilon+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{\mu^2 - x^2} (1 + e^{2\pi x})} + O(\delta\rho) \right\} &= \\ = 2r(\rho) \int_0^{\mu} \frac{x dx}{\sqrt{\mu^2 - x^2} (1 + e^{2\pi x})} + O(\delta\rho). \end{aligned} \quad (31)$$

Thus the zeroth-order WKB approximation of  $\phi$  is

$$\begin{aligned} \phi(\rho, \theta, \varphi; \tilde{\rho}, \theta, \varphi) &= \frac{q}{\delta\rho} + \frac{q}{r(\rho)} \left( -\mu + 2 \int_0^\mu \frac{xdx}{\sqrt{\mu^2 - x^2} (1 + e^{2\pi x})} \right) \\ &+ O(\delta\rho). \end{aligned} \quad (32)$$

The DeWitt-Schwinger counterterm  $\phi_{DS}(x; \tilde{x})$  in the limit  $\theta = \tilde{\theta}$ ,  $\varphi = \tilde{\varphi}$  can be easily calculated using the metric (11):

$$\begin{aligned} 2\sigma &= \delta\rho^2, \Delta = 1 + O(\delta\rho^2), \\ \phi_{DS}(\rho, \theta, \varphi; \tilde{\rho}, \theta, \varphi) &= q \frac{\Delta^{1/2}}{\sqrt{2\sigma}} = q \left( \frac{1}{\delta\rho} + O(\delta\rho) \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Thus  $\phi_{ren}(x)$  is

$$\begin{aligned} \phi_{ren}(x) &= \lim_{\delta\rho \rightarrow 0} [\phi(\rho, \theta, \varphi; \tilde{\rho}, \theta, \varphi) - \phi_{DS}(\rho, \theta, \varphi; \tilde{\rho}, \theta, \varphi)] \\ &= \frac{q}{r(\rho)} \left( -\sqrt{2\xi - \frac{1}{4}} + 2 \int_0^{\sqrt{2\xi - 1/4}} \frac{xdx}{(1 + e^{2\pi x}) \sqrt{2\xi - 1/4 - x^2}} \right) \\ &\cdot \left( 1 + O(\varepsilon_{WKB}^2) \right), \end{aligned} \quad (34)$$

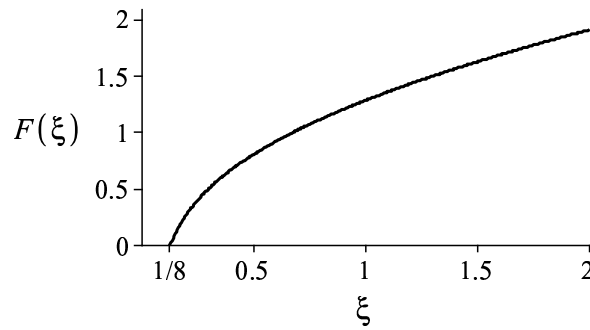
and the single nonzero component of the self-force is

$$\begin{aligned} f_\rho(x) &= -\frac{q}{2} \frac{\partial \phi_{ren}}{\partial \rho} = -\frac{q^2}{2r^2} \frac{dr}{d\rho} \left( \sqrt{2\xi - \frac{1}{4}} \right. \\ &\left. - 2 \int_0^{\sqrt{2\xi - 1/4}} \frac{xdx}{(1 + e^{2\pi x}) \sqrt{2\xi - 1/4 - x^2}} \right) \left( 1 + O(\varepsilon_{WKB}^2) \right). \end{aligned} \quad (35)$$

In the case  $\xi = 1/6$  we can numerically evaluate

$$F(\xi) = \sqrt{2\xi - \frac{1}{4}} - 2 \int_0^{\sqrt{2\xi - 1/4}} \frac{xdx}{(1 + e^{2\pi x}) \sqrt{2\xi - 1/4 - x^2}} \quad (36)$$

as follows  $F(1/6) \simeq 0.1723\dots$



**Рис.1.** The curve represents the function  $F(\xi)$ .

---

Let us note if one use  $r$  as the new radial coordinate

$$ds^2 = -dt^2 + \left( \frac{d\rho}{dr} \right)^2 dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (37)$$

the expression (35) may be rewritten as follows

$$f_r = f_\rho \frac{d\rho}{dr} = -F(\xi) \frac{q^2}{2r^2} \left( 1 + O(\varepsilon_{WKB}^2) \right). \quad (38)$$

## 2. Specific examples

First of all note that  $\varepsilon_{\text{WKB}} = 0$  in spacetime with metric

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + r_0^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (39)$$

where  $r_0$  is constant and the expression (34) is exact. The self-force is zero in this case.

As a second example let us consider the spacetime with metric

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^n} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (40)$$

The case  $n = 2$  correspond to the spacetime of a horn (semi-infinite throat) [16]. The part of this spacetime with  $r > r_g$  is globally static and geodesically complete. In the vicinity of  $r = r_g$

$$\left| \frac{d^m r}{r d\rho^m} \right|^{1/m} \simeq \frac{1}{r_g} \left( \frac{r - r_g}{r_g} \right)^{(n/2-1)+1/m}, \quad (41)$$

where  $\rho$  is the radial proper distance ( $dr/d\rho = (1 - r_g/r)^{n/2}$ ). Thus in the region  $r - r_g \ll r_g$

$$\varepsilon_{\text{WKB}} \simeq \left( \frac{r - r_g}{r_g} \right)^{n/2-1}. \quad (42)$$

$\varepsilon_{\text{WKB}} \ll 1$  in the case  $n > 2$  and one can call this region the long throat.

The expression (35) in the case  $r - r_g \ll r_g$  and  $n > 2$  takes the form

$$f_\rho = -F(\xi) \frac{q^2}{2r(\rho)^2} \left(1 - \frac{r_g}{r(\rho)}\right)^{n/2} \left(1 + O(\varepsilon_{\text{WKB}}^2)\right) \quad (43)$$

or in the coordinates (40)

$$f_r = f_\rho \frac{d\rho}{dr} = -F(\xi) \frac{q^2}{2r^2} \left(1 + O(\varepsilon_{\text{WKB}}^2)\right). \quad (44)$$

## 3. Conclusions

The considered approach gives the possibility to compute the exact expression for the self-potential and the self-force in spacetime (39). In the long throat (11,20-22) such approach permits to obtain the approximate expression for the self-force (35, 38). Let us note that the validity of WKB approximation for the all modes (including  $l = 0$  mode) of a massless scalar field is the consequence of the nonminimal coupling ( $\xi > 1/8$ ) of a scalar field with the curvature of spacetime. This implies also that the approximate solution (23) of the equation (19) does not depend on the conditions at infinity and in considered situation the effect of self-action is the local one.

### Acknowledgements

The author would like to thank N. Khusnutdinov for interesting and helpful discussions. This work was supported in part by grant 08-02-00325 from the Russian Foundation for Basic Research.

## Литература

- [1] B. DeWitt and R. Brehme, *Ann. Phys.***9** (1960), p. 220
- [2] P. Dirac, *Proc. R. Soc. London, Ser. A***167** (1938), p. 148
- [3] J. Hobbs, *Ann. Phys.***47** (1968), p. 141  
J. Hobbs, *Ann. Phys.***47** (1968), p. 166
- [4] A. Smith and C. Will, *Phys. Rev. D***22** (1980), p. 1276  
A. Zel'nikov and V. Frolov, *Sov. Phys. JETP***55** (1982), p. 191  
B. Leaute and B. Linet, *Class. Quantum Grav.***1** (1984), p. 55  
A. Wiseman, *Phys. Rev. D* bf 61 (2000), p. 084014  
L. Burko, *Class. Quantum Grav.***17** (2000), p. 227  
E. Rosenthal, *Phys. Rev. D***69** (2004), p. 064035  
E. Rosenthal, *Phys. Rev. D***70** (2004), p. 124016  
W. Anderson and A. Wiseman, *Class. Quantum Grav.***22** (2005), p. S783  
P. Anderson, A. Eftekhazadeh and B. Hu, *Phys. Rev. D***73** (2006), p. 064023  
D. Cho, A. Tsokaros and A. Wiseman, *Class. Quantum Grav.***24** (2007), p. 1035  
A. Ottewill and B. Wardell, *Phys. Rev. D***77** (2008), p. 104002

- [5] D. Lohiya, *J. Phys.* **A15** (1982), p. 1815
- [6] B. Leaute and B. Linet, *J. Phys.* **A15** (1982), p. 1821  
F. Piazzese and G. Rizzi, *Gen. Rel. and Grav.* **23** (1991), p. 403
- [7] B. Linet and P. Teyssandier, *Gen. Relativ. Grav.* **10** (1979), p. 313
- [8] L. Burko and Y. Liu, *Phys. Rev.* **D64** (2001), p. 024006
- [9] B. Linet, *Phys. Rev.* **D33** (1986), p. 1833  
B. Linet, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **45** (1986), p. 249  
A. Smith, in *The Formation and Evolution of Cosmic Strings*, edited by G. W. Gibbons, S. W. Hawking and T. Vachaspati (Cambridge: Cambridge University Press) (1990)  
N. Khusnutdinov, *Class. Quantum Grav.* **11** (1994), p. 1807  
N. Khusnutdinov, in *Quantum Field Theory under the Influence of External Conditions* (Teubner-Texte zur Physik, Bd. 30, Ed. M. Bordag) (Stuttgart: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft) (1996), p. 97  
N. Khusnutdinov, *Teor. Mat. Fiz.* **103** (1995), p. 339 [*Theor. Math. Phys.* **103** (1995), p. 603]  
V. De Lorenci and Jr. E. Moreira, *Phys. Rev.* **D65** (2002), p. 085013
- [10] N. Khusnutdinov and I. Bakhmatov, *Phys. Rev.* **D76** (2007), p. 124015  
B. Linet, *Electrostatics in a wormhole geometry*, arXiv:0712.0539 [gr-qc]  
S. Krasnikov, *Class. Quantum Grav.* **25** (2008), p. 245018  
M. Casals, S. Dolan, A. Ottewill and B. Wardell, *Self-Force Calculations with Matched Expansions and Quasinormal Mode Sums*, arXiv:0903.0395 [gr-qc]
- [11] V. Bezerra and N. Khusnutdinov, *Phys. Rev.* **D79** (2009), p. 064012
- [12] T. Quinn, *Phys. Rev.* **D62** (2000), p. 064029
- [13] S. Christensen, *Phys. Rev.* **D17** (1978), p. 946
- [14] P. Anderson, W. Hiscock and D. Samuel, *Phys. Rev.* **D51** (1995), p. 4337
- [15] A. Popov, *Phys. Rev.* **D64** (2001), p. 104005
- [16] D. Garfinkle, G. Horowitz and A. Strominger, *Phys. Rev.* **D43** (1991), p. 3140

**Аналитические вычисления в дифференциальной геометрии и качественный анализ  
космологических моделей с нелинейными источниками**

В.С. Рихвицкий<sup>1</sup>, С. Биджан<sup>2</sup>, М. Вишинеску<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>ЛИТ, ОИЯИ, Россия, Дубна

---

<sup>1</sup>E-mail: rqvtsk@jinr.ru, <sup>2</sup>E-mail: bijan@jinr.ru

Изучена космологическая модель типа Бьянки-I в присутствии одномерной особенности типа космической струны и магнитного поля. Показано, что спинорная модель космической струны позволяет решать уравнения Эйнштейна без дополнительных допущений.

Исследовано асимптотическое поведение при различных значениях параметров и различных начальных условиях.

Аналитические вычисления выполнены посредством системы компьютерной алгебры Maple, содержащей развитые встроенные пакеты дифференциальной геометрии, тензорных вычислений, теории групп и др.

Аналитические вычисления дополнены качественным анализом и классификацией как в пространстве параметров, так и в пространстве начальных условий всех допустимых режимов эволюции и графическим представлением этих эволюций.

С формальной стороны построена машина логического вывода, в контексте которой алгебраические структуры дифференциальной геометрии и принимаемые допущения имеют вид логических конструкций - утверждений и правил вывода.

Замечено, что систематический перебор является собственно свойством машины вывода, а логический перебор эквивалентен замыканию алгебраических моделей.

**Метод изометрических погружений: точные космологические решения, полученные в рамках сферически-симметричной нелинейной сигма модели**

Ю.А. Свистунова<sup>1</sup>, С.В. Червон<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ульяновский государственный университет, Россия, Ульяновск, <sup>2</sup>Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, Россия, Ульяновск

<sup>1</sup>E-mail: u.a.svistunova@gmail.com, <sup>2</sup>E-mail: sv\_chervon@rambler.ru

Метод изометрических погружений основывается на теореме Кэмпбелла-Магаарда [1], и ее обобщениях на случай пространств с дополнительными свойствами  $\pi$ : псевдоевклидовость, Риччи - плоскостность, эйнштейновость пространств и наличие гравитирующих скалярных полей [2]. Теорема утверждает, что любое многообразие  $\mathcal{M}^n$  может быть погружено в класс пространств - времен  $\mathcal{M}_\pi^{(n+1)}$ , обладающих вышеперечисленными геометрическими свойствами  $\pi$ .

В работе в качестве источника гравитационного поля рассматривалась кинетическая сферически-симметричная нелинейная сигма-модель (НСМ), динамические уравнения которой соответствуют гармоническому отображению. Таким образом ставилась задача поиска точных решений для самогравитирующей НСМ с интегралом действия [3]

$$S = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} d^m x \left( \frac{R}{2\kappa} + \frac{1}{2} h_{AB}(\varphi) \varphi_{,\mu}^A \varphi_{,\nu}^B g^{\mu\nu} \right)$$

Для того, чтобы применить метод изометрического погружения к НСМ, было предложено обобщение теоремы Кэмпбелла-Магаарда на случай, когда источником гравитационного поля являются киральные поля [3]. Согласно методу изометрических погружений пространство целей изометрически погружается в пространство-время [4] при этом происходит упрощение самосогласованной системы полевых уравнений и уравнений Эйнштейна за счет выбора связи между киральными полями и пространственно-временными координатами.

Представлены результаты применения метода в рамках двух- и трехкомпонентных сферически-симметричных НСМ.

В рамках трехкомпонентной НСМ исследовались два класса моделей:

1. Класс определялся  $\bar{g}_{33} = -1$  и  $u = x^3 = r$ . Соответствующее пространство погружения:  $ds_1^2 = (\omega_0 r - 1)^2 (h(r, t) dt^2 - f(r, t) r^2 d\theta^2 - r^2 f(r, t) \sin^2 \theta d\phi^2) - dr^2$  где  $h(r, t)$  и  $f(r, t)$  - некоторые функции времени и координат,  $\omega_0$  - некоторая константа.

2. Класс включал в себя частный случай:  $h(r, t) = const = 1$ . Тогда можно выбрать  $\bar{g}_{33} = 1$  и  $u = x^3 = t$ . Пространство погружения определяется метрикой:  $ds_2^2 = dt^2 - (\omega_0 t - 1)^2 (f(r, t) r^2 d\theta^2 - r^2 f(r, t) \sin^2 \theta d\phi^2 - dr^2)$  Для каждого класса моделей методом генерации на основе ИП были получены точные решения в рамках сферически-симметричной НСМ.

Аналогичным образом исследовалась двумерная НСМ, построенная как двумерная часть сферически-симметричного пространства-времени. В рамках данной модели также было исследовано два класса моделей и также были получены точные решения.

## Литература

- [1] J. Campbell. A Course of Differential Geometry. Oxford: Clarendon (1926); L. Magaard. Zur einbettung riemannscher Raume in Einstein-Raume und konformeulidische Raume // PhD Thesis Kiel (1963).
- [2] F. Dahia, C. Romero. // *J. Math. Phys.*, **43**, 11, 5804, (2002); E. Anderson, F. Dahia, J. Lidsey and C. Romero. // *J. Math. Phys.*, **44**, (2002), 5108, arXiv:gr-qc/0111094; E. Anderson, J. Lidsey. // *Class. Quant. Grav.*, **18**, (2001), 4831.
- [3] Ю. Свистунова, С. Червон. // *Изв. вузов. Поволжский регион. Физ-мат. науки.*, **№2**, (2008), 95-107.
- [4] Г.Г. Иванов. // *Теор. и Мат. Физика*, **57**, №3, (1983), 45-55.

### Кротовые норы - некоторые новые результаты

S. V. Sushkov<sup>1</sup>

Department of Mathematics, Tatar State University of Humanities and Education,  
Tatarstan str. 2, Kazan 420021

<sup>1</sup>E-mail: sergey\_sushkov@mail.ru

We investigate cosmological scenarios with a non-minimal derivative coupling between the scalar field and the curvature, examining both the quintessence and the phantom cases with zero and constant potentials. In general, we find that the universe transits from one de Sitter solution to another, determined by the coupling parameter. Furthermore, according to the parameter choices and without the need for matter, we can obtain a Big Bang, an expanding universe with no beginning, a cosmological turnaround, an eternally contracting universe, a Big Crunch, a Big Rip avoidance and a cosmological bounce. This variety of behaviors reveals the capabilities of the present scenario.

#### References

- [1] S.V. Sushkov, Phys. Rev. D80, 103505 (2009).  
 [2] E.N. Saridakis, S.V. Sushkov, Phys. Rev. D81, 083510 (2010).

#### Влияние полей темного сектора на структуру Вселенной

С.В. Червон<sup>1</sup>, О.Г. Панина<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, Россия, Ульяновск, <sup>2</sup>Самарский государственный аэрокосмический университет, Россия, Самара

<sup>1</sup>E-mail: chervon.sergey@gmail.com, <sup>2</sup>E-mail: panina.ph@gmail.com

Рассматривается развитие полей тёмного сектора на основе динамических уравнений на фоне инфляционной стадии эволюции Вселенной. При этом считаем, что энергетические характеристики полей темного сектора того же порядка, что и возмущения гравитационного поля и инфлатона. Исследованы эффекты воздействия полей тёмного сектора на формирование крупномасштабной структуры на примере экспоненциальной инфляции.

Построена модель, в которой тёмная энергия и другие поля тёмного сектора существуют на стадии космологической инфляции в ранней Вселенной и оказывают в те времена «слабое» воздействие на гравитирующее поле инфлатона. В то же время поля тёмного сектора представляют собой «жёсткий источник», так как они не подвержены влиянию гравитационного поля. Поля тёмного сектора представлены нелинейной сигма моделью с потенциалом взаимодействия, которая впервые рассматривалась в рамках космологической инфляции в работах [1, 2].

Мы предполагаем, что поля тёмного сектора сформировались в доинфляционный период и присутствуют на инфляционном этапе как слабые поля. Поэтому киральные поля, представляющие собой поля тёмного сектора, на этапе инфляции будем рассматривать как слабые и их воздействие возможно только на уровне возмущений инфлатона:  $\delta\phi \sim \varphi^C$ . Понятно, что в такой модели, поля тёмного сектора не оказывают влияния на динамику процесса расширения, но могут внести коррективы в итоговую картину крупномасштабной структуры. Именно ответ на вопрос: какие качественные изменения на структуру Вселенной могут оказать слабые в период инфляции поля тёмного сектора? – мы исследуем для двух полей тёмного сектора с учетом того, что одно из них может быть фантомным.

Как пояснение физической ситуации в рассматриваемом подходе приводится следующий случай. Излучение может рассматриваться в качестве жесткого внешнего источника на этапе преобладания материи, но не во время эпохи преобладания радиации. В качестве внешнего жесткого источника, который представляет собой поля тёмного сектора, рассматривается O(N)- инвариантная нелинейная сигма модель.

#### Литература

- [1] S.V. Chervon, Chiral nonlinear sigma models and cosmological inflation. // *Gravitation and Cosmology*, **1**, No 2, 91. 1995.  
 [2] S.V. Chervon *Izv. Vyssh. Ucheb. Zaved. Fiz.* **5** 114 (1995).

#### Ускоренное расширение Вселенной без темной энергии

Ю.А. Портнов<sup>1</sup>

РГГРУ, Россия, Москва

<sup>1</sup>E-mail: portnovyura@yandex.ru

Для однозначного описания положения твердого тела в пространстве необходимо определить три пространственных координаты тела, момент времени и три координаты которые ориентируют тело в пространстве

$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z, x^4 = \sqrt{\frac{J_\varphi}{m}}\varphi, x^5 = \sqrt{\frac{J_\psi}{m}}\psi, x^6 = \sqrt{\frac{J_\theta}{m}}\theta$ . В неинерциальной системе отсчета квадрат интервала является квадратичной формой общего вида  $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$ , где  $i, k$  пробегает значения от 0 до 6. В инерциальной системе отсчета величины метрического тензора равны  $g_{00} = 1, g_{\alpha\alpha} = -1, g_{45} = g_{54} = -\cos(\theta)$ , где  $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

Используя уравнения движения  $\frac{du^i}{dt_0} + \Gamma^i_{kl}u^k u^l = 0$ , в инерциальной системе отсчета, для вращательных координат, можно получить уравнения гироскопа. Для расчета  $g_{ik}$  в неинерциальных системах отсчета, воспользуемся уравнениями движения и гравитационными уравнениями семимерного пространства  $R_{mn} = \varkappa S_{mn} + \Lambda_{mn}$ , где  $S_{mn} = T_{mn} - \frac{1}{5}g_{mn}T$  – свертка тензора энергии-импульса,  $\Lambda_{mn}$  – дополнительный тензор который можно трактовать как тензор нулевой энергии, так-как он всегда постоянен,  $\varkappa = \frac{5\pi k}{c^4}$  – гравитационная постоянная семимерного пространства-времени.

Рассматривая эволюцию Вселенной в семимерном пространстве-времени с тензором энергии-импульса идеальной жидкости с вращением получаем уравнение для скорости масштабного множителя до появления материи  $\dot{a} = \sqrt{\frac{\varkappa\varepsilon_0 c^4}{15a}}$ , где  $\varepsilon_0$  – начальное значение плотности энергии. Скорость расширения Вселенной убывает, это можно трактовать, как переход от стадии инфляции к стадии расширения Фридмана. После чего наступает эпоха нуклеосинтеза, при которой протоны, объединяясь с нейтронами, образуют ядра легких изотопов. Происходит рождение материи  $\tilde{J}_\varphi \neq 0$  и уравнение для скорости масштабного множителя принимает вид

$$\dot{a} = \sqrt{\frac{\varkappa\varepsilon_0 c^4}{30a} \left( \frac{2Mc^2 - a^2 \tilde{J}_\varphi \tilde{\omega}_\varphi^2}{Mc^2 - a^2 \tilde{J}_\varphi \tilde{\omega}_\varphi^2} \right)}$$

Согласно этому уравнению скорость расширения вновь начинает увеличиваться (при стремлении знаменателя дроби к нулю), что можно трактовать как переход от стадии расширения Фридмана к стадии ускоренного расширения (второй инфляции). Еще одной интересной особенностью этого уравнения является тот факт, что скорость расширения будет стремиться к бесконечности. Это, так называемый, Большой разрыв (Big Rip) – космологическая гипотеза о судьбе Вселенной, предсказывающая развал (разрыв) всей материи за конечное время.

Резюмируя, приходим к идее, что для описания ускоренного расширения Вселенной нет необходимости привлечения понятия темная энергия, причиной вызывающей ускоренное расширение Вселенной является вращение тел имеющих не нулевой объем.

## Информация о конференции

---

С 6 по 10 сентября 2010 года в г. Казани на базе Татарского государственного гуманитарно - педагогического университета (ТГГПУ) в рамках единой конференции проводились летняя школа «Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики» - ММСКМ-10 и научный семинар «Нелинейные поля и релятивистская статистика в теории гравитации и космологии». Цель конференции состояла в совместном обсуждении фундаментальных проблем современной науки специалистами в области теоретической физики и математического моделирования в системах компьютерной математики.

Научная программа конференции составлена из пленарных и секционных докладов и неформальных дискуссий. Программа школы составлена из обзорных лекций по актуальным проблемам математического моделирования; к чтению лекций привлечены ведущие российские специалисты. Для участия в работе школы были приглашены молодые ученые, аспиранты и студенты старших курсов физико-математических отделений вузов, специализирующихся в области теоретической и математической физики и прикладной математики. В программу научного семинара вошли доклады приглашенных ведущих специалистов в области теории нелинейных полей, гравитации и космологии. Конференция проводилась в учебно-оздоровительном центре ТГГПУ «Яльчик», расположенном в Марийской тайге на берегу живописного озера Яльчик в окружении соснового леса.

Следует отметить, что летняя школа «Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики» - ММСКМ-10 продолжает традиции, заложенные на Российском семинаре по математическому моделированию в 2007 году, который проводился в Казани на базе ТГГПУ в рамках Международной конференции «ИТО - Поволжье - 2007», а научный семинар «Нелинейные поля и релятивистская статистика в теории гравитации и космологии» продолжает последовательность Российских школ-семинаров «Gracos».

### Организационный комитет Школы:

- Ю.Г. Игнатьев, д.ф.-м.н., профессор (председатель, ТГГПУ, Казань), [ignatev\\_yurambler.ru](mailto:ignatev_yurambler.ru)
- В.П. Дьяконов, д.т.н., профессор (зам. председателя, СмолГУ, Смоленск)
- Д.П. Голоскоков, д.ф.-м.н., профессор (зам. председателя, С-ПУВК, Санкт-Петербург)
- М.М. Карчевский, д.ф.-м.н., профессор (КГУ, Казань)
- М.Н. Кирсанов, д.ф.-м.н., профессор (МЭИ, Москва)
- Н.Б. Плещинский, д.ф.-м.н., профессор (КГУ, Казань)
- С.В. Сушков, д.ф.-м.н., профессор (учёный секретарь оргкомитета, ТГГПУ, Казань), [sergey\\_sushkovmail.ru](mailto:sergey_sushkovmail.ru)

### Направления работы школы:

1. Математические модели фундаментальных объектов и явлений. (Руководители: Ю.С. Владимиров, Н.Б. Плещинский, М.Д. Миссаров)
2. Математическая физика в системах компьютерной математики. (Руководители: Д.П. Голоскоков, Ю.Г.Игнатьев)
3. Системы компьютерной математики. (Руководители: В.П. Дьяконов, Н.М. Кирсанов)
4. Механика и теория поля в системах компьютерной математики. (Руководители: Ю.Г. Игнатьев, Н.М. Кирсанов, А.А. Матросов)

### Организационный комитет Семинара:

- Председатель: проф. В.Н. Мельников (ЦГФМ ВНИИМС и РУДН, РГО, Москва)
- Зам. председателя: проф. Д.В. Гальцов (МГУ, Москва), проф. Ю.Г. Игнатьев (ТГГПУ, Казань), чл.корр. А.А. Старобинский (ИТФ РАН им. Л.Д. Ландау, Москва)
- Учёный секретарь: проф. С.В. Сушков (ТГГПУ, Казань)

**Местный организационный комитет:** проф. Игнатьев Юрий Геннадиевич (председатель, ТГГПУ), проф. Сушков Сергей Владимирович (ТГГПУ), доц. Попов Аркадий Александрович (ТГГПУ), С.В. Мытничук (технический секретарь, ТГГПУ), А.Р. Самигуллина (технический секретарь, ТГГПУ).

### Направления работы семинара:

1. Классические нелинейные и калибровочные поля в теории гравитации и космологии (Руководители: Ю.С. Владимиров, А.Б. Балакин)

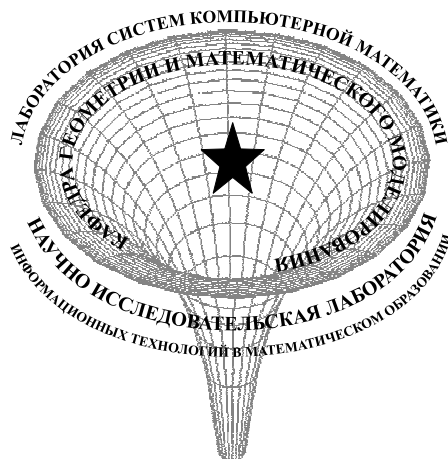


2. Релятивистские статистические системы частиц со скалярными и векторными взаимодействиями в теории гравитации и космологии (Руководители: А.А. Старобинский, Ю.Г. Игнатьев)
3. Квантованные поля и вакуумное рождение частиц в теории и космологии (Руководители: А.А. Гриб, Д.В. Гальцов)
4. Топологические эффекты в теории гравитации и космологии (Руководители: К.А. Бронников, С.В. Сушков)

Набор сборника осуществлен в издательском пакете LaTeX2 $\epsilon$  в научно-исследовательской лаборатории «Информационных технологий в математическом образовании» ТГГПУ.

Разработка авторского LaTeX-стиля оформления - Ю.Г.Игнатьев

Техническая редакция, набор и верстка: Ю.Г.Игнатьев, В.И.Ковтун, А.А.Агафонов.



Оформление обложки - А.А.Агафонов

В сборнике трудов опубликованы **65** статей, посвященных современным проблемам теории гравитации, космологии и математическому моделированию в системах компьютерной математики.

Подписано в печать 15.07.10. Формат 60×84/8  
Печать офсетная. Бумага офсетная. Печ. л. 22. Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии «Фолиант»  
420052, г. Казань, ул. Дементьева, 1а. Тел. (843) 292-27-25