



Кобрин А.И.

д.ф.-м.н, профессор НИУ «МЭИ»

Лекции по курсу
ДИНАМИКА МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ

Москва 2002, 2017

СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИЙ

Лекция 1

Неприменимость методов коммутативной алгебры для непосредственного построения решений линейных систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Фундаментальная матрица решений однородной системы уравнений. Импульсная переходная матрица. Вид общего решения уравнений динамики управляемой линейной нестационарной машины.

Кинематически подобные матрицы. Матрицы Ляпунова. Преобразования Ляпунова. Приводимые системы уравнений.

Теорема Еругина о необходимых и достаточных условиях приводимости системы уравнений в терминах фундаментальных матриц.

Теорема Флоке о представлении фундаментальной матрицы системы уравнений с периодическими коэффициентами.

Теорема Ляпунова о приводимости систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Лекция 2

Системы уравнений с переменными коэффициентами, удовлетворяющие условию Гейзенберга-Лакса.

Матричный коммутатор. L - A пара с постоянной матрицей L . Подобие матриц $A(0)$ и $A(t)$ с обертывающей матрицей $\exp(Lt)$. Приводимость систем с матрицей, удовлетворяющей условию Гейзенберга-Лакса, к системе уравнений с постоянными коэффициентами. Изоспектральность матрицы $A(t)$.

Роль матрицы L в описании временной эволюции модальных столбцов (собственных векторов) матрицы $A(t)$. Методы нахождения матрицы L .

Лекция 3

Связь характера поведения решений приводимой системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами с устойчивостью связанной с ней стационарной системы. О нестационарных системах, состоящих из уравнений второго порядка.

Задача динамики материальной точки в центральном гравитационном поле. Проверка выполнения условия Гейзенберга-Лакса. Построение матрицы L . Исследование поведения решений приведенной стационарной и исходной системы дифференциальных уравнений. Физический смысл преобразования приведения. Использование условия Гейзенберга-Лакса в задачах динамики машин, описываемых нестационарной системой дифференциальных уравнений второго порядка.

Лекция 4

Динамика гировертикали с вращающимися сосудами. Конструкция и предназначение прибора. Использование прецессионной теории гироскопов.

Запись уравнений движения в системе координат, жестко связанной с кожухом. Уравнения для расхода и давления жидкости, наполняющей вращающиеся сосуды.

Лекция 5

Уравнения динамики жидкости, наполняющей вращающиеся сосуды. Составление замкнутой системы прецессионных уравнений динамики гировертикали с вращающимися сосудами в переменных, задающих угловое положение кожуха гироскопа и угол наклона "зеркала" поверхности жидкости в сосудах по отношению к экваториальной плоскости прибора.

Лекция 6

Условия устойчивости характеристического полинома приведенной стационарной системы уравнений гировертикали с вращающимися сосудами. Поведение решений исходной нестационарной системы уравнений. Определение параметров, обеспечивающих максимальную степень устойчивости гировертикали. Решение задачи о разработке оптимальной конструкции гировертикали с вращающимися сосудами.

Лекция 7

Фазовый объем линейной нестационарной системы. Теорема об изменении фазового объема. Роль следа матрицы линейной системы.

Системы уравнений с периодическими коэффициентами. Матрица монодромии. Отображение Пуанкаре. Характеристические показатели. Мультипликаторы.

Нормальные решения системы с периодическими коэффициентами. Связь характеристических показателей и мультипликаторов.

Лекция 8

Условия периодичности и антипериодичности решений системы уравнений с периодическими коэффициентами. Системы с неизменяющимся фазовым объемом.

Лекция 9

Принцип обратной связи в динамике машин. Обеспечение необходимого качества переходных процессов в полностью управляемой стационарной машине за счет управления в виде обратной связи по состоянию.

Лекция 10

Управление перевернутым маятником.

Не вполне управляемые системы. Структура не полностью управляемой системы.

Лекция 11

Декомпозиция не полностью управляемой системы

Задача об управлении колебаниями системы, состоящей из двух маятников с подвижной осью подвеса. Условия полной управляемости. Условия отсутствия полной управляемости. Декомпозиция. Физический смысл новых переменных.

Лекция 12

Условия управляемости и наблюдаемости.

Понятие сопряженной системы. Двойственность необходимых и достаточных условий полной управляемости и полной наблюдаемости сопряженных систем.

Решение задачи о максимальном быстродействии линейной вполне управляемой стационарной SISO машины как пример совместного анализа динамики сопряженных систем.

Лекция 13

Задача о наискорейшей остановке в заданном месте поступательно движущегося твердого тела с помощью ограниченного по модулю силового воздействия. Задача об оптимальном по быстродействию торможении колебаний физического маятника, находящегося в поле сил тяжести.

Лекция 14

Пример Л.Чезари, подтверждающий необходимость требований теоремы Ляпунова о стремлении к нулю решений системы с почти постоянными коэффициентами при неограниченно нарастающем времени. Неравенство Вайсвесского. Евклидова норма. Симметризация матрицы. Минимальная и максимальная оценка для собственных чисел симметризованной матрицы. Получение двусторонней оценки Вайсвесского для евклидовой нормы решения однородной системы уравнений с переменными коэффициентами. Устойчивость по А.М.Ляпунову. Невозмущенные решения. Возмущенные решения. Определение устойчивости по Ляпунову невозмущенного решения. Устойчивость по Ляпунову как равномерно непрерывная зависимость возмущенных решений от начальных условий на бесконечном интервале времени. Определение неустойчивости по Ляпунову. Определение асимптотической устойчивости по Ляпунову невозмущенного решения.

Лекция 15

Система уравнений возмущенного движения. Сведение исследования устойчивости невозмущенного движения к исследованию устойчивости тривиального решения системы возмущенного движения.

Исследование устойчивости по Ляпунову перманентных вращений и регулярных прецессий волчка Лагранжа. Функция Лагранжа. Циклические координаты. Обобщенные импульсы. Уравнения движения волчка Лагранжа в форме, предложенной Раусом. Перманентные вращения и регулярные прецессии как множество решений, невозмущенных по Ляпунову.

Дифференциальное уравнение для косинуса угла нутации волчка Лагранжа. Определение регулярных прецессий.

Лекция 16

Система уравнений возмущенного движения для регулярных прецессий волчка Лагранжа. Перманентное вращение волчка вокруг вертикали. Исследование устойчивости тривиального решения нелинейной системы дифференциальных уравнений, обобщающей уравнения возмущенного движения волчка около стационарных режимов: регулярных прецессий и перманентного вращения.

Существование первого интеграла, соответствующего закону сохранения энергии.

Лекция 17

Теоремы об устойчивости и неустойчивости по Ляпунову тривиального решения рассматриваемой системы уравнений. Функции Ляпунова. Прямой (второй) метод Ляпунова в теории устойчивости. Проверка необходимых и достаточных условий устойчивости регулярных прецессий волчка Лагранжа. Проверка необходимых и достаточных условий устойчивости перманентных вращений волчка Лагранжа.

Лекция 18

Устойчивость по Ляпунову линейных управляемых систем. О других определениях устойчивости. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Устойчивость по части переменных.

Лекция 19

Фазовый объем линейной нестационарной системы. Теорема об изменении фазового объема. Роль следа матрицы линейной системы. Системы уравнений с периодическими коэффициентами. Матрица монодромии. Отображение Пуанкаре. Характеристические показатели. Мультипликаторы. Нормальные решения системы с периодическими коэффициентами. Связь характеристических показателей и мультипликаторов.

Лекция 20

Условия периодичности и антипериодичности решений системы уравнений с периодическими коэффициентами. Системы с неизменяющимся фазовым объемом. Случай систем второго порядка. Поведение мультипликаторов. Критерии устойчивости, неустойчивости, сильной устойчивости. Существование T -периодических и $2T$ -периодических решений и граница области устойчивости системы с периодическими коэффициентами в пространстве параметров.

Уравнение Матье. Сведение задачи нахождения условий сильной устойчивости в задаче Матье с малой глубиной модуляции к построению матрицы монодромии в задаче о колебаниях математического маятника.

Лекция 21

Необходимые условия параметрического резонанса в задаче Матье с малой глубиной модуляции.

Нахождение границ основной области параметрического резонанса в задаче Матье с малой глубиной модуляции с помощью применения ряда последовательных замен, приводящих к системе с почти постоянной матрицей. Введение "расстройки" по частоте в окрестности основной зоны "динамической неустойчивости".

Использование фундаментальной матрицы решений задачи Матье с нулевой глубиной модуляции (порождающей системы) для получения системы с медленно меняющимися переменными методом вариации произвольных постоянных. Применение близкого к тождественному ляпуновского преобразования для получения системы уравнений с почти постоянной матрицей. Условия параметрического резонанса в задаче Матье при малой глубине модуляции.

Лекция 22

Установление границ основной области параметрической неустойчивости в задаче Матье. Диаграммы Айнса -Стретта. Способ построения диаграмм, использующий представление периодических решений в виде рядов Фурье с неизвестными коэффициентами. Бесконечные определители Хилла.

Задача акад.П.Л.Капицы о динамической устойчивости перевернутого маятника. Описание проведенного им эксперимента.

Лекция 23

Определение условий устойчивости верхнего положения маятника, точка подвеса которого колеблется в вертикальном направлении с постоянным в течение каждого полупериода колебаний ускорением. Построение матрицы монодромии. Вычисление ее следа. Асимптотический анализ условий устойчивости перевернутого маятника при малой амплитуде и высокой частоте колебаний точки подвеса. Числовые оценки.

Колебания параметрически возмущаемой машины с учетом демпфирования. Приближенный метод определения границ областей динамической неустойчивости на примере системы, описываемой обобщенным уравнением Матье.

Лекция 24

Пространственное и временное среднее. Теорема об усреднении. Медленные и быстрые переменные. Уменьшение размерности торов в зонах параметрического резонанса с помощью замены переменных - введения резонансной расстройки. Одночастотные колебания в расширенном фазовом пространстве. Критерий устойчивости как условие неразрушаемости порождающих торов и близости \square (неразбегаия) фаз. Примеры возникновения явлений параметрического резонанса в динамике машин. Анализ уравнений динамики машины с кривошипно-шатунным приводом, учитывающий конечную жесткость элементов конструкции.

Лекция 25

Получены условия существования автовращений ветровой турбины с вертикальной осью (VAWT), дана естественная классификация ветроустановок по отношению скорости вращения к скорости воздействующего ветрового потока. Определены точки смены характера поведения ветроустановки при увеличении ее момента инерции от “бесконечно малых” значений до значений конечного порядка.

Лекция 26

Задача позиционирования однозвенного манипулятора конечной жесткости, управляемого через редуктор двигателем постоянного тока и снабженного датчиком угла поворота, тахометром и тензометром.

Лекция 27

Дельта-функционал как предел последовательности импульсных воздействий.

Получение весовой функции системы с помощью силового воздействия типа дельта-функции Дирака. Введение начальных условий в дифференциальное уравнение с помощью импульсивных воздействий.

Отклик системы на произвольное воздействие в классе обобщенных функций.

Примеры решения уравнений движения в классе обобщенных функций. Связь обобщенного (слабого) решения с решением, определенным при всех значениях времени.

Лекция 28

Антропоморфные роботы. Импульсное управление маятником. Решение методом Хевисайда в классе обобщенных функций с помощью перехода к односторонним функциям времени.

Лекция 29

Применение диссипативного потенциала при изучении теории удара.

Лекция 30

Мини-ветроэлектростанция – ветроэнергетическая установка малой мощности, предназначенная для обслуживания небольшого числа потребителей электроэнергии.

ЛЕКЦИИ «ДИНАМИКА МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ. VIII СЕМЕСТР»

Лекция 01.

Неприменимость методов коммутативной алгебры для непосредственного построения решений линейных систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Операторный метод Хевисайда позволяет сводить задачу решения уравнений динамики линейных стационарных машин - обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами - к чисто алгебраической. В случае переменных коэффициентов (нестационарные машины) дело обстоит значительно сложнее. Существенная трудность связана с тем, что операторы дифференцирования по времени t и умножения на t не коммутируют, и задача построения символа дифференциального оператора с переменными коэффициентами не имеет очевидного решения. Пусть, например, алгебраический полином $P(t,p)$ имеет простейший вид

$$P(t,p) = tp \quad (1.1)$$

Какой дифференциальный оператор должен соответствовать этому “символу”? Ведь подстановка t и D в разном порядке дает разные результаты

$$tDy(t) = t \frac{d}{dt} y(t), \quad Dty(t) = \frac{d}{dt} (ty(t)) = y(t) + t \frac{dy}{dt} \quad (1.2)$$

Этот пример показывает, что исследования поведения, так называемых, нестационарных линейных машин требуют принципиально нового подхода. Ведь в ранее изложенном материале важнейшую роль играли соответствующие алгебраические методы.

Разумеется, с усложнением моделей возрастает роль вычислительной математики, механики, физики и т.д. В условиях применения ЭВМ появляется возможность, отпрываясь от начальных условий, шаг за шагом вычислять новые значения вектора состояния независимо от того, стационарна или нестационарна данная система. Принципиальная трудность, связанная с нестационарностью, при численном решении оказывается как бы устраненной. Правда, при этом приходится платить отсутствием конечной формулы для результата и дискретностью аргумента. В условиях зависимости решения от многих параметров это обстоятельство может сильно затруднить исследование. Более того, отсутствие аналитического решения и формальное использование принципиально правильной

алгоритмической схемы может привести к необъяснимым результатам. Поэтому серьезное внимание инженер должен уделить пониманию аналитической структуры решений соответствующих уравнений.

Фундаментальная матрица решений однородной системы уравнений. Импульсная переходная матрица. Вид общего решения уравнений динамики управляемой линейной нестационарной машины.

Выпишем в общем виде линейную нестационарную систему уравнений, описывающую динамику управляемой системы

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}(t) \mathbf{z} + \mathbf{f}(t)$$

$(n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times 1) \quad (n \times 1)$

(1.3)

вектор-функции $\mathbf{f}(t)$ представляются в виде

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{B}(t) \mathbf{u}$$

$(n \times 1) \quad (n \times m) \quad (m \times 1)$

(1.4)

Здесь \mathbf{u} - вектор управления, \mathbf{B} - матрица “дозатор” (distributor) - распределитель управляющих сигналов по координатам системы.

Соответствующая однородная система имеет вид

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}(t) \mathbf{z}, \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}^0$$

$(n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times 1) \quad (n \times 1) \quad (n \times 1)$

(1.5)

Фундаментальная система решений линейной однородной системы уравнений (1.5) представляет собой базисную систему n векторов-столбцов, образующих фундаментальную матрицу $\mathbf{Z}(t)$. Общее решение однородной системы выписывается в виде

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Z}(t) \mathbf{c}, \mathbf{c} = \mathbf{Z}^{-1}(0) \mathbf{z}^0$$

$(n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times 1) \quad (n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times 1)$

(1.6)

Или иначе

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Z}(t) \mathbf{Z}^{-1}(0) \mathbf{z}^0 = \mathbf{N}(t,0) \mathbf{z}^0$$

$(n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times n) \quad (n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times 1)$

(1.7)

$$\mathbf{N}(t, s) = \mathbf{Z}(t) \mathbf{Z}^{-1}(s)$$

$(n \times n) \quad (n \times n) \quad (n \times n)$

(1.8)

- импульсная переходная матрица системы.

Запишем решение системы уравнений (1.3), (1.4) с помощью импульсной переходной матрицы

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{N}(t, 0) \mathbf{z}^0 + \int_0^t \mathbf{N}(t, s) \mathbf{B}(s) \mathbf{u}(s) ds$$

$(n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times m) \quad (m \times 1)$

(1.9)

Таким образом, проблема построения общего решения (1.3), (1.4) сводится к задаче нахождения импульсной переходной матрицы (фундаментальной системы решений однородной системы).

Кинематически подобные матрицы. Матрицы Ляпунова. Преобразования Ляпунова. Приводимые системы уравнений.

Очень плодотворный метод при работе с дифференциальными уравнениями, описывающими динамику машин, состоит в том, чтобы их не решать, а преобразовывать к возможно более простому виду. Рассмотрим зависящую от времени замену вектора $\mathbf{z}(t)$

$$\mathbf{z} = \mathbf{L}(t) \mathbf{y}$$

$(n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times 1)$

(1.10)

Линейное преобразование вида (1.10) с невырожденной матрицей, имеющей непрерывно дифференцируемые элементы, ограниченной, имеющей ограниченную производную и строго отличный от нуля определитель, называют преобразованием Ляпунова.

Пусть (1.10) - преобразование Ляпунова.

Подставляя выражение (1.1) в систему (1.5), получим

$$\mathbf{z}' = \mathbf{L}' \mathbf{y} + \mathbf{L} \mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{z} = \mathbf{A} \mathbf{L} \mathbf{y}$$

$(n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times n) \quad (n \times 1)$

(1.11)

Следовательно,

$$\mathbf{y}' = \mathbf{L}^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{L} - \mathbf{L}') \mathbf{y}$$

$(n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times n) \quad (n \times n) \quad (n \times n) \quad (n \times 1)$

(1.12)

Матрицы $\mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{B}(t)$, связанные между собой преобразованием

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{L}^{-1}(t)(\mathbf{A}(t)\mathbf{L}(t) - \mathbf{L}'(t))$$

$(n \times n) \quad (n \times n) \quad (n \times n) \quad (n \times n) \quad (n \times n)$

(1.13)

называются кинематически подобными.

Таким образом,

$$\mathbf{y}' = \mathbf{B}(t) \mathbf{y}$$

$(n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times 1)$

(1.14)

С матрицей $\mathbf{B}(t)$, кинематически подобной матрице $\mathbf{A}(t)$.

Линейная система (1.5) называется приводимой, если при помощи преобразования Ляпунова она может быть преобразована в систему (1.14) с постоянной матрицей \mathbf{B} .

Теорема Еругина о необходимых и достаточных условиях приводимости системы уравнений в терминах фундаментальных матриц.

Линейная система (1.5) приводима тогда и только тогда, когда ее фундаментальная матрица $\mathbf{Z}(t)$ может быть представлена в виде

$(n \times n)$

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{L}(t) \exp(\mathbf{B}t),$$

$(n \times n) \quad (n \times n) \quad (n \times n)$

(1.15)

где $\mathbf{L}(t)$ матрица Ляпунова, а \mathbf{B} - постоянная матрица.

$(n \times n) \quad (n \times n)$

Доказательство необходимости.

Пусть система (1.5) приводима. Тогда с помощью преобразования (1.10) она приводится к виду (1.14) с постоянной матрицей \mathbf{B} . В этом случае фундаментальная матрица решений системы (1.14) выписывается с помощью матричной экспоненты

$$\mathbf{Y}(t) = \exp(\mathbf{B}t)$$

$(n \times n) \quad (n \times n)$

(1.16)

Следовательно,

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{L}(t) \mathbf{Y}(t) = \mathbf{L}(t) \exp(\mathbf{B}t).$$

$$\begin{matrix} (n \times n) & (n \times n) & (n \times n) & (n \times n) & (n \times n) \end{matrix}$$

Доказательство достаточности.

Пусть фундаментальная матрица решений (1.5) представляется в виде (1.15). Сделаем преобразование Ляпунова с матрицей

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{Z}(t) \exp(-\mathbf{B}t)$$

$$\begin{matrix} (n \times n) & (n \times n) & (n \times n) \end{matrix}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= \mathbf{Z}' \exp(-\mathbf{B}t) \mathbf{y} - \mathbf{Z}(t) \exp(-\mathbf{B}t) \mathbf{B} \mathbf{y} + \\ &+ \mathbf{Z}(t) \exp(-\mathbf{B}t) \mathbf{y}' = \\ &= \mathbf{A} \mathbf{Z} \exp(-\mathbf{B}t) \mathbf{y} - \mathbf{Z}(t) \exp(-\mathbf{B}t) \mathbf{B} \mathbf{y} + \\ &+ \mathbf{Z}(t) \exp(-\mathbf{B}t) \mathbf{y}' \end{aligned} \quad (1.17)$$

С другой стороны

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A} \mathbf{z} = \mathbf{A} \mathbf{L} \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{Z}(t) \exp(-\mathbf{B}t) \mathbf{y} \quad (1.18)$$

$$\begin{matrix} (n \times 1) & (n \times n) & (n \times 1) & (n \times n) & (n \times n) & (n \times 1) & (n \times n) & (n \times n) & (n \times n) & (n \times 1) \end{matrix}$$

Таким образом, сравнивая (1.17) и (1.18), имеем

$$\mathbf{y}' = \mathbf{B} \mathbf{y}.$$

$$\begin{matrix} (n \times 1) & (n \times n) & (n \times 1) \end{matrix}$$

Теорема Флоке о представлении фундаментальной матрицы системы уравнений с периодическими коэффициентами.

Фундаментальная матрица решений линейной системы (1.5) с непрерывной периодической матрицей периода T

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t + T)$$

$$\begin{matrix} (n \times n) & (n \times n) \end{matrix}$$

(1.19)

всегда может быть представлена в виде

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{P}(t) \exp(\mathbf{B}t)$$

$$\begin{matrix} (n \times n) & (n \times n) & (n \times n) \end{matrix}$$

(1.20)

Здесь $\mathbf{P}(t)$ непрерывно дифференцируемая периодическая матрица с периодом T , $\mathbf{P}(0)=\mathbf{E}$, \mathbf{B} - некоторая постоянная матрица.

Действительно. Если матрица $\mathbf{Z}(t)$ является фундаментальной матрицей системы (1.5), то матрица $\mathbf{Z}(t+T)$ также фундаментальна, поскольку

$$\mathbf{Z}'(t + T) = \mathbf{A}(t + T)\mathbf{Z}(t + T) = \mathbf{A}(t)\mathbf{Z}(t + T) \quad (1.21)$$

Но в этом случае

$$\mathbf{Z}(t + T) = \mathbf{Z}(t)\tilde{\mathbf{N}} \quad (1.22)$$

Здесь \mathbf{C} - постоянная матрица с отличным от нуля определителем. Всегда можно представить матрицу $\mathbf{Z}(t + T)$ в виде

$$\mathbf{Z}(t + T) = \mathbf{P}(t + T) \exp(\mathbf{B}(t + T)) \quad (1.23)$$

с некоторыми матрицами \mathbf{B} и \mathbf{P} ($\mathbf{P}(0)=\mathbf{E}$).

Используя соотношение (1.22), имеем

$$\mathbf{P}(t + T) \exp(\mathbf{B}(t + T)) = \mathbf{P}(t) \exp(\mathbf{B}t)\tilde{\mathbf{N}} \quad (1.24)$$

Положим $\exp(\mathbf{B}(T)) = \tilde{\mathbf{N}}$. Тогда получим, что

$$\mathbf{P}(t + T) = \mathbf{P}(t), \quad (1.25)$$

то есть матрица $\mathbf{P}(t)$ периодична с периодом T .

Теорема Ляпунова о приводимости систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Линейные системы вида (1.5) с непрерывной периодической матрицей $\mathbf{A}(t)$ всегда приводимы.

Действительно. По теореме Флоке фундаментальная матрица решений системы (1.5) с периодической матрицей имеет вид (1.20). Матрица $\mathbf{P}(t)$ - матрица Ляпунова, так как она периодична и, следовательно, ограничена вместе со своей производной. Следовательно по теореме Еругина система (1.5) с периодической матрицей приводима.

Лекция 02.

Системы уравнений с переменными коэффициентами, удовлетворяющие условию Гейзенберга-Лакса.

Матричный коммутатор. L-A пара с постоянной матрицей L. Подобие матриц $A(0)$ и $A(t)$ с обертывающей матрицей $\exp(Lt)$. Приводимость систем с матрицей, удовлетворяющей условию Гейзенберга-Лакса, к системе уравнений с постоянными коэффициентами. Изоспектральность матрицы $A(t)$.

Рассмотрим специальный класс систем с переменными коэффициентами. Пусть матрица $A(t)$ системы уравнений

$$\underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}'} = \underset{(n \times n)}{\mathbf{A}(t)} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}} \quad (2.1)$$

удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{A}' = \mathbf{L}\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{L}, \quad (2.2)$$

где \mathbf{L} - некоторая постоянная матрица.

Соотношение типа (2.2) будем называть условием Гейзенберга-Лакса. Правая часть уравнения (2.2) носит название “коммутатор матриц \mathbf{L} , \mathbf{A} ” и обычно обозначается квадратными скобками

$$[\mathbf{L}, \mathbf{A}] = \mathbf{L}\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{L}$$

Имеет место следующее утверждение.

Система уравнений (2.1) с матрицей $\mathbf{A}(t)$, удовлетворяющей условию Гейзенберга-Лакса, приводима.

Действительно. Непосредственной проверкой устанавливаем, что, если матрица $\mathbf{A}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.2), то

$$\underset{(n \times n)}{\mathbf{A}(t)} = \underset{(n \times n)}{\exp(Lt)} \underset{(n \times n)}{\mathbf{A}(0)} \underset{(n \times n)}{\exp(-Lt)} \quad (2.3)$$

Иначе говоря, матрицы $\mathbf{A}(0)$ и $\mathbf{A}(t)$ подобны, а $\exp(Lt)$ их обертывающее преобразование.

Проведем замену переменных в системе (2.1). Пусть

$$\underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}} = \underset{(n \times n)}{\exp(Lt)} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{y}} \quad (2.4)$$

Тогда с одной стороны

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}(t) \exp(\mathbf{L}t) \mathbf{y} \quad (2.5)$$

$(n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times n) \quad (n \times 1)$

с другой стороны

$$\mathbf{z}' = \exp(\mathbf{L}t) \mathbf{L} \mathbf{y} + \exp(\mathbf{L}t) \mathbf{y}' \quad (2.6)$$

$(n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times n) \quad (n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times 1)$

Сравнивая (2.5), (2.6) и учитывая соотношение (2.3), получаем

$$\mathbf{y}' = (\mathbf{A}(0) - \mathbf{L}) \mathbf{y} \quad (2.7)$$

$(n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times n) \quad (n \times 1)$

Получили систему уравнений с постоянными коэффициентами.

Решение системы уравнений (2.1) может быть представлено в виде

$$\mathbf{z} = \exp(\mathbf{L}t) \exp((\mathbf{A}(0) - \mathbf{L})t) \mathbf{z}^0 \quad (2.8)$$

$(n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times n) \quad (n \times n) \quad (n \times n) \quad (n \times 1)$

Во избежание недоразумений отметим, что показатели степени матричных экспонент при их умножении друг на друга, вообще говоря, складывать нельзя, что связано с некоммутативностью операции умножения матриц. Поэтому, вообще говоря,

$$\exp(\mathbf{L}t) \exp((\mathbf{A}(0) - \mathbf{L})t) \neq \exp(\mathbf{A}(0)t) \quad (2.9)$$

Замечательным свойством матрицы $\mathbf{A}(t)$, удовлетворяющей соотношению (2.2) является ее изоспектральность - независимость собственных значений матрицы $\mathbf{A}(t)$ от времени.

Действительно. В силу (2.3)

$$\exp(-\mathbf{L}t) \mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(0) \exp(-\mathbf{L}t) \quad (2.10)$$

С другой стороны имеет место тождество

$$\exp(-\mathbf{L}t) \lambda \mathbf{E} = \lambda \mathbf{E} \exp(-\mathbf{L}t) \quad (2.11)$$

Вычитая (2.11) из (2.10), имеем

$$\exp(-\mathbf{L}t) (\mathbf{A}(t) - \lambda \mathbf{E}) = (\mathbf{A}(0) - \lambda \mathbf{E}) \exp(-\mathbf{L}t) \quad (2.12)$$

Следовательно,

$$\det(\mathbf{A}(t) - \lambda \mathbf{E}) = \det(\mathbf{A}(0) - \lambda \mathbf{E}) \quad (2.13)$$

Роль матрицы L в описании временной эволюции модальных столбцов (собственных векторов) матрицы $A(t)$. Методы нахождения матрицы L .

Собственные векторы (модальные столбцы) $\mathbf{v}_i(t)$ характеристической матрицы $\mathbf{A}(t) - \lambda \mathbf{E}$ удовлетворяют уравнению

$$(\mathbf{A}(t) - \lambda_i \mathbf{E}) \mathbf{v}_i(t) = \mathbf{0} \quad (i=1,2,3,\dots,n) \quad (2.14)$$

Здесь λ_i - корни уравнения $\det(\mathbf{A}(t) - \lambda\mathbf{E})=0$.

Дифференцируя уравнение (2.14) по времени, имеем

$$\mathbf{A}'(t)\mathbf{v}_i(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{v}_i'(t) = \lambda_i\mathbf{E}\mathbf{v}_i'(t) \quad (2.15)$$

Следовательно, учитывая (2.2),

$$(\mathbf{L}\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{L})\mathbf{v}_i(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{v}_i'(t) = \lambda_i\mathbf{E}\mathbf{v}_i'(t) \quad (2.16)$$

Принимая во внимание соотношение (2.14), получим

$$(\mathbf{A}(t) - \lambda_i\mathbf{E})(\mathbf{v}_i' - \mathbf{L}\mathbf{v}_i) = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

Таким образом, либо

$$\mathbf{v}_i' - \mathbf{L}\mathbf{v}_i = \mathbf{0}, \quad (2.18)$$

либо, если \mathbf{v}_i - собственный вектор, то $\mathbf{v}_i' - \mathbf{L}\mathbf{v}_i$ - также собственный вектор, и эти векторы линейно зависимы. Следовательно,

$$\mathbf{v}_i' - \mathbf{L}\mathbf{v}_i = k(t)\mathbf{v}_i \quad (2.19)$$

Матрица \mathbf{L} играет важнейшую роль в описании временной эволюции собственных векторов матрицы $\mathbf{A}(t)$.

Соотношения (2.18), (2.19) дают возможность, по крайней мере в некоторых случаях, упростить алгоритм построения матрицы \mathbf{L} .

Этой же цели служит следующая лемма.

Пусть матрица $\mathbf{N}(t)$, являющаяся решением задачи Коши

$$\mathbf{N}' = \mathbf{L}\mathbf{N}, \mathbf{N}(0) = \mathbf{E}, \quad (2.20)$$

удовлетворяет условию $\mathbf{N}^\circ(t)\mathbf{N}(t) = \mathbf{E}$. Иначе говоря $\mathbf{N}(t)$ - ортогональная матрица. В этом случае \mathbf{L} - кососимметричная матрица. Действительно,

$$\begin{aligned} (\mathbf{N}^\circ(t)\mathbf{N}(t))' &= (\mathbf{N}^\circ(t))'\mathbf{N}(t) + \mathbf{N}^\circ(t)(\mathbf{N}(t))' = \\ &= \mathbf{N}^\circ(t)\mathbf{L}^\circ\mathbf{N}(t) + \mathbf{N}^\circ(t)\mathbf{L}\mathbf{N}(t) = \mathbf{N}^\circ(t)(\mathbf{L}^\circ + \mathbf{L})\mathbf{N}(t) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Следовательно, $\mathbf{L}^\circ + \mathbf{L} = \mathbf{0}$, то есть \mathbf{L} - кососимметрична.

Рассмотрим модельный пример работы с нестационарной линейной системой. Конкретизируем матричное уравнение (25.5). Пусть динамика системы описывается уравнением

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\omega t & \sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Прежде всего обратим внимание на след матрицы системы - сумму элементов матрицы $\mathbf{A}(t)$, расположенных на главной диагонали. След равен сумме корней характеристического уравнения. Поэтому его постоянство - необходимое требование для выполнения условия Гейзенберга-Лакса. В данном случае след равен нулю.

Характеристическая матрица системы имеет вид

$$\mathbf{A}(t) - \lambda \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -\cos \omega t - \lambda & \sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t - \lambda \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Характеристическое уравнение

$$\det(\mathbf{A}(t) - \lambda \mathbf{E}) = \lambda^2 - 1 = 0 \quad (2.24)$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ постоянны (матрица $\mathbf{A}(t)$ переменна, но изоспектральна) и можно надеяться на выполнение условия Гейзенберга-Лакса.

Попробуем найти матрицу \mathbf{L} . Для этого, исходя из соотношений вида (2.18), (2.19), выпишем собственные векторы матрицы $\mathbf{A}(t)$. В качестве собственных векторов можно взять векторы, пропорциональные столбцам матрицы \mathbf{F} , присоединенной к характеристической, поскольку на спектре

$$(\mathbf{A}(t) - \lambda \mathbf{E})\mathbf{F}(t, \lambda) = \mathbf{E} \det(\mathbf{A}(t) - \lambda \mathbf{E}) = 0 \quad (2.25)$$

Имеем

$$\mathbf{F}(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos \omega t - \lambda & -\sin \omega t \\ -\sin \omega t & -\cos \omega t - \lambda \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Нормируя первый столбец матрицы $\mathbf{F}(t, 1)$, положим

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{1}{2 \sin \frac{\omega t}{2}} \begin{pmatrix} \cos \omega t - 1 \\ -\sin \omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\omega t}{2} \\ \cos \frac{\omega t}{2} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Нормируя второй столбец матрицы $\mathbf{F}(t, -1)$, положим

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2 \sin \frac{\omega t}{2}} \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \frac{\omega t}{2} \\ \sin \frac{\omega t}{2} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Векторы-столбцы \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 образуют ортонормированную матрицу $\mathbf{N}(t) = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2)$. Учитывая доказанную выше лемму

и используя соотношение (2.18), имеем (для вектора \mathbf{v}_1)

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega t}{2} \\ -\frac{\omega}{2} \sin \frac{\omega t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \frac{\omega t}{2} \\ \cos \frac{\omega t}{2} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

или (для вектора \mathbf{v}_2)

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega}{2} \sin \frac{\omega t}{2} \\ \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \frac{\omega t}{2} \\ \sin \frac{\omega t}{2} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Положим

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\omega}{2} \\ -\frac{\omega}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

При таком выборе матрицы \mathbf{L} условия (2.29), (2.30) будут удовлетворены.

Проверяя выполнение условия Гейзенберга-Лакса (2.2) с матрицей \mathbf{L} из (2.31), убеждаемся в его выполнении.

Таким образом, с помощью замены переменных

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \exp \left[\begin{pmatrix} 0 & \frac{\omega}{2} \\ -\frac{\omega}{2} & 0 \end{pmatrix} t \right] \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

система (2.22) приводится к системе с постоянными коэффициентами

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{\omega}{2} \\ \frac{\omega}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

По теореме Гамильтона-Кели матрица \mathbf{L} удовлетворяет своему характеристическому уравнению. Следовательно,

$$\mathbf{L}^2 + \frac{\omega^2}{4} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2.34)$$

Матричная экспонента $\mathbf{N}(t) = \exp(\mathbf{L}t)$ является решением $\begin{matrix} (2 \times 2) & (2 \times 2) \end{matrix}$ матричного уравнения типа (2.20) и может быть представлена в виде

$$\mathbf{N}(t) = \alpha_0(t) \mathbf{E} + \alpha_1(t) \mathbf{L} \quad (2.35)$$

Следовательно, для нахождения коэффициентов $\alpha_0(t)$,

$\alpha_1(t)$ получаем систему скалярных уравнений

$$\alpha_0' = -\frac{\omega^2}{4} \alpha_1, \quad \alpha_0(0) = 1 \quad (2.36)$$

$$\alpha_1' = \alpha_0, \quad \alpha_1(0) = 0$$

решение которой имеет вид

$$\alpha_0 = \cos \frac{\omega t}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega t}{2} \quad (2.37)$$

Таким образом,

$$\exp(\mathbf{L}t) = \mathbf{E} \cos \frac{\omega t}{2} + \frac{2}{\omega} \mathbf{L} \sin \frac{\omega t}{2} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\omega t}{2} & \sin \frac{\omega t}{2} \\ -\sin \frac{\omega t}{2} & \cos \frac{\omega t}{2} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Решение системы (2.22) имеет вид

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\omega t}{2} & \sin \frac{\omega t}{2} \\ -\sin \frac{\omega t}{2} & \cos \frac{\omega t}{2} \end{pmatrix} \exp \left[\begin{pmatrix} 0 & \frac{\omega}{2} \\ -\frac{\omega}{2} & 0 \end{pmatrix} t \right] \begin{pmatrix} z_1^0 \\ z_2^0 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Лекция 03.

Связь характера поведения решений приводимой системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами с устойчивостью связанной с ней стационарной системы.

Полученное в лекции 2 решение (2.37) системы (2.22) показывает, что в данном случае преобразование Ляпунова к системе с постоянными коэффициентами представляет собой плоский разворот. Координатные оси Y_1, Y_2 , в которых система стационарна, поворачиваются относительно исходных осей Z_1, Z_2 по часовой стрелке на угол $\varphi = \omega t / 2$.

Существенный интерес представляет исследование траекторий корней приведенной системы (2.31) с постоянными коэффициентами на комплексной плоскости.

Характеристическое уравнение системы (2.31) имеет вид

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & -\frac{\omega}{2} \\ \frac{\omega}{2} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{\omega^2}{4} - 1 = 0 \quad (3.1)$$

При $\omega = 0$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. При $0 < \omega \leq 2$ корни действительны, имеют разные знаки, с ростом ω стремятся к нулю. При $\omega > 2$ корни чисто мнимы.

Все это разительно отличается от корней характеристического уравнения матрицы $\mathbf{A}(t)$, которые вообще не зависят от параметра ω . Но роль корней характеристического уравнения матрицы $\mathbf{A}(t)$ в представлении решений различных классов нестационарных линейных систем нам еще предстоит рассмотреть, а роль спектра в решении систем с постоянными коэффициентами нами уже выяснена. На вопросы об устойчивости, степени затухания и колебательности решений приводимых систем можно уверенно отвечать, рассматривая поведение решений приведенной системы с постоянными коэффициентами.

О нестационарных системах, состоящих из уравнений второго порядка.

Следует отметить, что в теории колебаний в силу закона Ньютона возникают системы дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет второй порядок. Пусть система уравнений приводится к виду

$$\underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}''} = \underset{(n \times n)}{\mathbf{A}(t)} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}} \quad (3.2)$$

И пусть при этом матрица $\mathbf{A}(t)$ удовлетворяет условию (2.2) Гейзенберга-Лакса. В этом случае преобразование (2.4) приводит систему (3.2) к системе с постоянными коэффициентами.

Действительно. Дифференцируя соотношение (2.6) по времени, имеем

$$\begin{aligned} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}''} &= \underset{(n \times n)}{\exp(\mathbf{L}t)} \underset{(n \times n)}{\mathbf{L}^2} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{y}} + 2 \underset{(n \times n)}{\exp(\mathbf{L}t)} \underset{(n \times n)}{\mathbf{L}} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{y}'} + \\ &+ \underset{(n \times n)}{\exp(\mathbf{L}t)} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{y}''} = \underset{(n \times n)}{\exp(\mathbf{L}t)} (\underset{(n \times 1)}{\mathbf{y}''} + 2 \underset{(n \times n)}{\mathbf{L}} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{y}'} + \underset{(n \times n)}{\mathbf{L}^2} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{y}}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

С другой стороны, учитывая (2.2), (2.4),

$$\underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}''} = \underset{(n \times n)}{\mathbf{A}(t)} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}} = \underset{(n \times n)}{\exp(\mathbf{L}t)} \underset{(n \times n)}{\mathbf{A}(0)} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{y}} \quad (3.4)$$

Следовательно,

$$\underset{(n \times 1)}{\mathbf{y}''} + 2 \underset{(n \times n)}{\mathbf{L}} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{y}'} + (\underset{(n \times n)}{\mathbf{L}^2} - \underset{(n \times n)}{\mathbf{A}(0)}) \underset{(n \times 1)}{\mathbf{y}} = 0 \quad (3.5)$$

Получили приведенную систему - линейную систему дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Задача динамики материальной точки в центральном гравитационном поле. Проверка выполнения условия Гейзенберга-Лакса. Построение матрицы L. Исследование поведения решений приведенной стационарной и исходной системы дифференциальных уравнений. Физический смысл преобразования приведения. Использование условия Гейзенберга-Лакса в задачах динамики машин, описываемых нестационарной системой дифференциальных уравнений второго порядка.

Рассмотрим задачу динамики материальной точки, находящейся в поле притягивающего гравитационного центра. Эта задача играет роль “нулевого

приближения” при анализе динамики спутника Земли, служащего одной из реперных точек современных систем определения местоположения. Векторные уравнения этой задачи имеют вид

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (3.6)$$

Здесь GM - геоцентрическая гравитационная постоянная ($GM = 3986005 \cdot 10^8 \text{ m}^3 \text{ c}^{-2}$), \mathbf{r} - радиус-вектор точки ($r = \sqrt{X^2 + Y^2}$).

В скалярной форме уравнения движения точки в поле притягивающего центра представляются в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} X &= -GM \frac{X}{(X^2 + Y^2)^{3/2}} \\ \frac{d^2}{dt^2} Y &= -GM \frac{Y}{(X^2 + Y^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Система уравнений (3.7) имеет следующее частное решение

$$X_* = a \cos \Omega t, \quad Y_* = a \sin \Omega t \quad (3.8)$$

Здесь a - радиус окружности, по которой движется точка, $\Omega = \sqrt{GM / a^3}$ - угловая скорость вращения радиуса-вектора точки.

Вводя переменные

$$x = X / a, \quad y = Y / a, \quad \tau = \Omega t, \quad (3.9)$$

представим систему (3.7) в безразмерном виде

$$\begin{aligned} x'' &= -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ y'' &= -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Решение (3.8) запишется следующим образом

$$x_* = \cos \tau, \quad y_* = \sin \tau \quad (3.11)$$

Предположим теперь, что истинное движение точки не совпадает с выписанным частным решением, а незначительно (по крайней мере, на некотором временном интервале) отличается от него.

$$x = \cos \tau + \xi, \quad y = \sin \tau + \eta, \quad |\xi| < 1, \quad |\eta| < 1 \quad (3.12)$$

Подставляя соотношения (3.12) в уравнения (3.6) и пренебрегая нелинейными по ξ, η членами уравнений, получим

$$\begin{aligned} \xi'' &= -\xi + 3\xi \cos^2 \tau + 3\eta \sin \tau \cos \tau \\ \eta'' &= -\eta + 3\xi \cos \tau \sin \tau + 3\eta \sin^2 \tau \end{aligned} \quad (3.13)$$

Или

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 + 3 \cos 2\tau}{2} & \frac{3 \sin 2\tau}{2} \\ \frac{3 \sin 2\tau}{2} & \frac{1 - 3 \cos 2\tau}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Прежде всего обратим внимание на след матрицы системы - сумму элементов матрицы $\mathbf{A}(t)$, расположенных на главной диагонали. Его постоянство - необходимое требование для выполнения условия Гейзенберга-Лакса. В данном случае след равен единице.

Характеристическая матрица системы имеет вид

$$\mathbf{A}(t) - \lambda \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{1 + 3 \cos 2\tau}{2} - \lambda & \frac{3 \sin 2\tau}{2} \\ \frac{3 \sin 2\tau}{2} & \frac{1 - 3 \cos 2\tau}{2} - \lambda \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Характеристическое уравнение

$$\det(\mathbf{A}(t) - \lambda \mathbf{E}) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad (3.16)$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$ постоянны (матрица $\mathbf{A}(t)$ переменна, но изоспектральна) и можно надеяться на выполнение условия Гейзенберга-Лакса.

Найдем матрицу \mathbf{L} . Для этого выпишем собственные векторы матрицы $\mathbf{A}(t)$. В качестве собственных векторов можно взять векторы, пропорциональные столбцам матрицы \mathbf{F} , присоединенной к характеристической матрице.

Имеем

$$F(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1 - 3 \cos 2\tau}{2} - \lambda & -\frac{3 \sin 2\tau}{2} \\ -\frac{3 \sin 2\tau}{2} & \frac{1 + 3 \cos 2\tau}{2} - \lambda \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Нормируя первый столбец матрицы $F(t, 2)$, положим

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{1}{3 \cos \tau} \begin{pmatrix} \frac{1 - 3 \cos 2\tau}{2} - 2 \\ -\frac{3 \sin 2\tau}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Используя соотношение (2.18), имеем (для вектора \mathbf{v}_1)

$$\begin{pmatrix} -\sin \tau \\ \cos \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Положим

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

При таком выборе матрицы \mathbf{L} условие (2.29) будет удовлетворено. Проверяя выполнение условия Гейзенберга-Лакса (2.2) с матрицей \mathbf{L} из (3.20), убеждаемся в его выполнении.

Таким образом, с помощью замены переменных

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \exp \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t \right] \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

система (3.14) в соответствии с (3.5) приводится к системе с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.22)$$

В рассматриваемой задаче преобразование Ляпунова к системе с постоянными коэффициентами так же, как и в первой модельной задаче, представляет собой плоский разворот. Координатные оси y_1, y_2 , в которых система стационарна, поворачиваются относительно исходных осей z_1, z_2 против часовой стрелки на угол $\varphi = \tau$.

Характеристическое уравнение системы (3.22)

$$\lambda^4 + \lambda^2 = 0 \quad (3.23)$$

имеет два нулевых и два чисто мнимых корня.

Соответствующая системе (3.22) λ -матрица имеет естественную нормальную форму вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^4 + \lambda^2 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Следовательно, один из инвариантных множителей имеет кратный нулевой корень. Соответствующий этому корню модальный столбец имеет растущие линейно по времени компоненты. Стало быть, если не предпринять специальные усилия по наблюдению за вектором состояния и управлению данной системой, возмущенное движение материальной точки в центральном поле сил в неподвижной системе координат может существенно отличаться от решения (3.11) системы (3.8).

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & -\frac{\omega}{2} \\ \frac{\omega}{2} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{\omega^2}{4} - 1 = 0 \quad (3.25)$$

При $\omega = 0$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. При $0 < \omega \leq 2$ корни действительны, имеют разные знаки, с ростом ω стремятся к нулю. При $\omega > 2$ корни чисто мнимы.

Все это разительно отличается от корней характеристического уравнения матрицы $\mathbf{A}(t)$, которые вообще не зависят от параметра ω . Но роль корней характеристического уравнения матрицы $\mathbf{A}(t)$ в представлении решений различных классов нестационарных линейных систем нам еще предстоит рассмотреть, а роль спектра в решении систем с постоянными

коэффициентами нами уже выяснена. На вопросы об устойчивости, степени затухания и колебательности решений приводимых систем можно уверенно отвечать, рассматривая поведение решений приведенной системы с постоянными коэффициентами.

Лекция 04.

Динамика гировертикали с вращающимися сосудами. Конструкция и предназначение прибора. Использование прецессионной теории гироскопов.

Запись уравнений движения в системе координат, жестко связанной с кожухом. Уравнения для расхода и давления жидкости, наполняющей вращающиеся сосуды.

При решении задач автономного определения местоположения, возникающих при функционировании движущихся управляемых объектов, часто оказывается удобным использование прибора, дающего возможность постоянно иметь информацию о направлении местной вертикали на поверхности Земли. В качестве прибора, хорошо сохраняющего направление в инерциальном пространстве, используется астатический гироскоп, а его “радиальную коррекцию”, то есть приведение оси гироскопа к местной вертикали, определяемой направлением вектора силы тяжести в данной точке Земли, осуществляется, например, с помощью системы миниатюрных сообщающихся сосудов, наполненных ртутью. (Силы радиальной коррекции называют еще неконсервативными позиционными силами). Прибор представляет собой гироскоп с вертикальной осью собственного вращения, который заключен в кожух и подвешен в кардановом подвесе. На кожухе гироскопа смонтирована платформа, которая при помощи мотора и зубчатой передачи вращается вокруг оси, геометрически совпадающей с осью ротора, с постоянной угловой скоростью. На платформе установлены два сообщающихся, соединенных капиллярной трубкой сосуда со ртутью. Когда ртуть поровну распределена между сосудами, центр тяжести всей системы совпадает с “точкой опоры” астатического гироскопа. Платформа вращается в ту же сторону, что и ротор гироскопа.

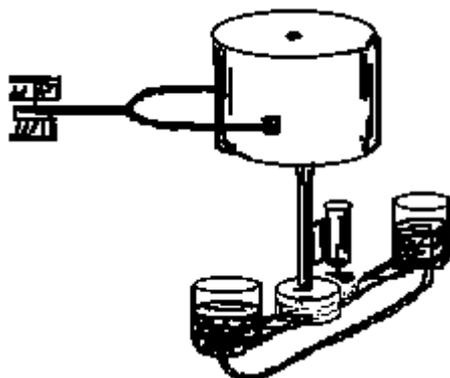


Рис.4.1

Для изучения движения гировертикали примем в качестве “неподвижной” системы отсчета трехгранник $\xi\eta\zeta$, жестко связанный с Землей. То есть вращением Земли в дальнейшем пренебрегаем. Оси ξ и η

горизонтальны и направлены соответственно на восток и на север, ось ζ - вертикальна. Положение оси ротора гироскопа определяется углами α и β . Схема описания разворотов трехгранников, жестко связанных с кожухом гироскопа X_*Y_*Z и с сосудах xyz , представлена графом

$$\xi\eta\zeta \xrightarrow{o\xi,\alpha} \xi y_* \zeta_1 \xrightarrow{o y_*,\beta} X_* Y_* Z \xrightarrow{o z,\vartheta} xyz \quad (4.1)$$

Соответствующие матрицы плоского поворота имеют вид

$$\Gamma_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \Gamma_2(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$$\Gamma_3(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Платформа с ртутными сосудах вращается вокруг оси z с угловой скоростью $\omega = \text{const}$. Оси x и y связаны с платформой, и ее положение определяется углом $\vartheta = \omega t$, образованным осью x с осью X_* , связанной с кожухом гироскопа. Углы α и β можно считать малыми.

При составлении уравнений движения системы воспользуемся прежде всего теоремой об изменении момента количества движения относительно неподвижной точки - центра подвеса гироскопа. Используя формулу Бура для вычисления производной по времени от вектора, заданного в подвижной системе координат, в осях X_*Y_*Z эту теорему можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}_o + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{K}_o = \mathbf{M}_o \quad (4.3)$$

Здесь $\boldsymbol{\Omega}$ - вектор угловой скорости кожуха гироскопа, а оператор $\frac{d}{dt}$ - означает взятие локальной производной по времени в системе X_*Y_*Z .

Величина угловой скорости ротора гироскопа ω_δ во много раз превосходит угловые скорости остальных тел системы, осевой момент инерции ротора I_δ также достаточно велик, поэтому моментом количества движения остальных тел системы пренебрегаем

$$\mathbf{K}_o = I_\delta \omega_\delta \quad (4.4)$$

Кроме того, вектор кинетического момента \mathbf{K}_o ротора гироскопа геометрически расположен ближе к оси симметрии ротора, чем вектор его угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_\delta$, поскольку вектор \mathbf{K}_o может быть получен как градиент “эллипсоида энергии” - поверхности уровня энергии в пространстве угловых скоростей.

$$T = \frac{1}{2}(\mathbf{I}_\delta \boldsymbol{\omega}_\delta, \boldsymbol{\omega}_\delta) = \frac{1}{2}(\mathbf{K}_o, \boldsymbol{\omega}_\delta) \quad (4.5)$$

$$\text{grad}_\omega 2T = \mathbf{K}_o \quad (4.6)$$

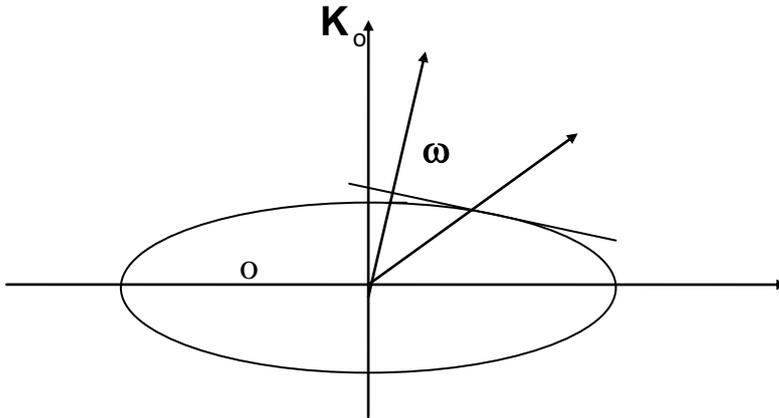


Рис.4.2

Эллипсоид энергии гомотетичен эллипсоиду инерции. Он сплюснут в направлении оси симметрии гироскопа. Поэтому нормаль к эллипсоиду в точке $\boldsymbol{\omega}_\delta$ ближе к оси симметрии, чем сам вектор $\boldsymbol{\omega}_\delta$.

Вектор угловой скорости ротора по направлению очень близок к оси z кожуха гироскопа. Будем считать, что

$$\mathbf{K}_o \approx K_{oz} \mathbf{e}_z \quad (4.7)$$

В прикладной механике это называется прецессионной теорией гироскопов.

Кроме того, будем предполагать, что двигатель, вращающий ротор, идеально компенсирует потери на трение и можно считать, что

$$K_{oz} = H = \text{const} \quad (4.8)$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}_o = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{K}_o = \mathbf{M}_o \quad (4.9)$$

Вектор угловой скорости кожуха гироскопа

$$\boldsymbol{\Omega} = \alpha' \mathbf{e}_{x_*} + \beta' \mathbf{e}_{y_*} \quad (4.10)$$

В системе координат $X_* Y_* Z_*$, связанной с кожухом,

$$\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_{y_*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_{\xi} = \Gamma_2(\beta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Таким образом

$$\boldsymbol{\Omega} = \alpha' \begin{pmatrix} \cos \beta \\ 0 \\ \sin \beta \end{pmatrix} + \beta' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

В системе координат x_*y_*z скалярные уравнения движения гироскопа имеют вид

$$\begin{aligned} H\beta' &= M_{ox_*} \\ H\alpha' &= -M_{oy_*} \end{aligned} \quad (4.13)$$

На рис. 4.3 изображена схема ртутных сосудов.

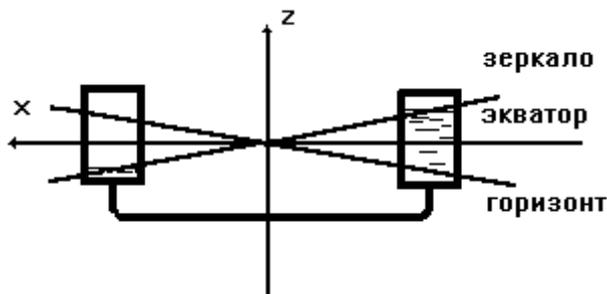


Рис.4.3

Поскольку гироскоп астатический и вектор силы тяжести гироскопа проходит через его “точку опоры” - центр карданова подвеса, то единственным внешним силовым фактором, входящим в прецессионные уравнения движения, является момент пары сил, действующий со стороны системы сообщающихся сосудов.

Введем следующие обозначения: b - расстояние между цилиндрическими стаканами со ртутью, S - площадь днщ стаканов, L, R - длина и радиус цилиндрического капилляра, связывающего сосуды, γ - удельный вес жидкости, φ - угол наклона зеркала жидкости (прямая, соединяющая геометрические центры свободной поверхности) к экватору прибора, ψ - угол наклона экватора прибора к горизонту.

В одном сосуде по сравнению с другим может оказаться избыток жидкости, благодаря чему создается момент сил M_y относительно оси Oy .

В системе координат XYZ , связанной с сосудами,

$$\mathbf{M}_o = \begin{pmatrix} 0 \\ M_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

В системе координат X_*Y_*Z , связанной с кожухом,

$$\mathbf{M}_o = \Gamma_3^{-1}(\vartheta) \begin{pmatrix} 0 \\ M_y \\ 0 \end{pmatrix} = \Gamma_3^{\dot{\vartheta}}(\vartheta) \begin{pmatrix} 0 \\ M_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -M_y \sin \vartheta \\ M_y \cos \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Таким образом уравнения (4.13) уточняются так

$$\begin{aligned} H\beta' &= -M_y \sin \vartheta \\ -H\alpha' &= M_y \cos \vartheta \end{aligned} \quad (4.16)$$

Момент сил M_y находим (с учетом малости угла φ) как произведение “избыточного веса” жидкости на плечо

$$M_y = -\frac{b}{2}(\gamma S b \varphi) = -\frac{\gamma S b^2}{2} \varphi \quad (4.17)$$

Найдем уравнение, описывающее изменение угла φ , описывая перемещение жидкости в системе сообщающихся сосудов.

Обозначая $q_{\hat{n}\hat{i}\hat{n}}$ – расход жидкости через сечение сосуда, имеем

$$q_{\hat{n}\hat{i}\hat{n}} = \left(-\frac{b}{2} \varphi'\right) S = -\frac{bS}{2} \varphi' \quad (4.18)$$

С другой стороны, рассматривая движение жидкости в капилляре и обозначая через p – давление жидкости в капилляре, через δp – перепад давления на краях капилляра, связанный с разностью столбов жидкости в наклоненных сосудах, имеем

$$\delta p = \gamma(b(\varphi + \psi)) \quad (4.19)$$

Угол наклона экватора прибора к горизонту ψ можно выразить через углы α, β, ϑ , учитывая следующее геометрическое соотношение

$$\psi \approx \sin \psi = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) = -(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z) \quad (4.20)$$

В системе координат XYZ , связанной с сосудами,

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_x &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_\zeta = \Gamma_3(\vartheta)\Gamma_2(\beta)\Gamma_1(\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= \Gamma_3(\vartheta)\Gamma_2(\beta) \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} = \Gamma_3(\vartheta) \begin{pmatrix} -\cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \\ \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -\cos \alpha \sin \beta \cos \vartheta + \sin \alpha \sin \vartheta \\ \cos \alpha \sin \beta \sin \vartheta + \sin \alpha \cos \vartheta \\ \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Таким образом

$$\psi \cong \beta \cos \vartheta - \alpha \sin \vartheta \tag{4.22}$$

И, следовательно,

$$\delta p = \gamma(\mathbf{b}(\varphi + \beta \cos \vartheta - \alpha \sin \vartheta)) \tag{4.23}$$

Лекция 05.

Уравнения динамики жидкости, наполняющей вращающиеся сосуды. Составление замкнутой системы прецессионных уравнений динамики гиросвертикали с вращающимися сосудами в переменных, задающих угловое положение кожуха гироскопа и угол наклона "зеркала" поверхности жидкости в сосудах по отношению к экваториальной плоскости прибора.

Перейдем к описанию движения жидкости в капилляре.

Пусть \mathbf{v} - скорость жидкости, ρ , μ - соответственно ее плотность и вязкость. Уравнения Навье-Стокса для динамики жидкости в цилиндрической трубке имеют вид

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} \quad (5.1)$$

Здесь символом ∇ (набла) обозначается операция взятия градиента, а символом Δ (дельта) - оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ в декартовой системе координат.}$$

Условие несжимаемости жидкости

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (5.2)$$

Условие прилипания жидкости на поверхности цилиндрического капилляра

$$\mathbf{v}|_{\hat{r}=\hat{a}} = 0 \quad (5.3)$$

Будем в дальнейшем считать, что движение жидкости "одномерно" и направлено только вдоль капилляра, то есть

$$v_y = v_z = 0 \quad (5.4)$$

Следовательно, из условия несжимаемости (5.2) имеем

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (5.5)$$

Иначе говоря, вдоль капилляра скорость частиц жидкости одинакова. Тогда из уравнений движения (5.1) получаем, что

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (5.6)$$

Предположим, что движение жидкости в капилляре квазистационарно, то есть вектор скорости жидкости явно от времени не зависит. (Он медленно меняется в связи с изменением параметров системы). Тогда

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 \quad (5.7)$$

и, как следует из уравнений динамики жидкости (5.1)

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \quad (5.8)$$

Таким образом

$$\mu \Delta \mathbf{v} = \nabla p \quad (5.9)$$

Или, в скалярной форме

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.10)$$

С учетом обозначения перепада давления на краях капилляра уравнение (5.10) имеет следующее частное решение

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\delta p}{L}, \quad v_x^* = -\frac{\delta p}{4L\mu}(y^2 + z^2) \quad (5.11)$$

На поверхности капилляра решение (5.11) равно

$$v_x^*|_{r=R} = -\frac{\Delta p}{4L\mu} R^2 \quad (5.12)$$

Подправляя решение (5.11) с учетом граничного условия (5.3), имеем

$$v_x = -\frac{\Delta p}{4L\mu}(y^2 + z^2) + \frac{\Delta p}{4L\mu} R^2 = \frac{\Delta p}{4L\mu}(R^2 - r^2) \quad (5.13)$$

Найдем теперь расход жидкости через капилляр.

Обозначая q_{kai} – расход через сечение капилляра, имеем

$$q_{kai} = \int_0^R v_x(r) 2\pi r dr = \int_0^R \frac{\delta p}{4L\mu} (R^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8L\mu} \delta p \quad (5.14)$$

Учитывая, что расход жидкости через сечения сосудов и через сечения капилляра одинаков

$$q = q_{coc} = q_{kai} \quad (5.15)$$

и опираясь на соотношения (5.18), (5.23), (5.14) и (5.15), получаем

$$\begin{aligned} \varphi' &= -\frac{2}{Sb} q = -\frac{\pi r^4}{4\mu L Sb} \delta p = \\ &= -\frac{\pi r^4 \gamma}{4\mu L S} (\varphi + \beta \cos \omega t - \alpha \sin \omega t) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Итак, в системе координат $X_* Y_* Z$ получили уравнения, связывающие переменные α, β -углы наклона кожуха гироскопа относительно вертикали, и

переменную φ - угол, определяющий наклон зеркала поверхности жидкости относительно экватора прибора

$$\begin{aligned}\alpha' &= \frac{\gamma S b^2}{2H} \varphi \cos \omega t \\ \beta' &= \frac{\gamma S b^2}{2H} \varphi \sin \omega t \\ \varphi' &= -\frac{\pi r^4 \gamma}{4\mu L S} (\varphi + \beta \cos \omega t - \alpha \sin \omega t)\end{aligned}\tag{5.17}$$

Введем следующие обозначения для комплексов параметров (характерных частот) системы (5.17)

$$k = \frac{\gamma S b^2}{2H}, \quad n = \frac{\gamma \pi r^4}{4\mu L S}\tag{5.18}$$

Тогда система уравнений (5.17) приобретет следующую векторно-матричную форму

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \cos \omega t \\ 0 & 0 & k \sin \omega t \\ n \sin \omega t & -n \cos \omega t & -n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \varphi \end{pmatrix}\tag{5.19}$$

Отметим, что матрица системы (5.19) имеет постоянный след. Проверим систему на изоспектральность.

Харктеристическое уравнение системы (5.19)

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & k \cos \omega t \\ 0 & -\lambda & k \sin \omega t \\ n \sin \omega t & -n \cos \omega t & -n - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda + n) = 0\tag{5.20}$$

имеет корни $\lambda_1 = -n$, $\lambda_{2,3} = 0$.

Поскольку выполнено условие изоспектральности, имеет смысл проверить выполнение условия (26.2) Гейзенберга-Лакса для матрицы системы (5.19). Иными словами, можно сделать попытку построения матрицы

L преобразования (26.4), приводящего систему (5.19) к системе с постоянными коэффициентами.

Для некратного корня $\lambda_1 = -n$ построим соответствующий собственный вектор - один из столбцов присоединенной матрицы. Определяя алгебраические дополнения к первой строке характеристической матрицы системы и проводя простую нормировку, получим собственный вектор

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{1}{n\sqrt{k^2 + n^2} \sin \omega t} \begin{pmatrix} kn \sin \omega t \cos \omega t \\ kn \sin^2 \omega t \\ -n^2 \sin \omega t \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{k^2 + n^2}} \begin{pmatrix} k \cos \omega t \\ k \sin \omega t \\ -n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Используя уравнение (26.18), получим соотношение для определения компонент матрицы **L**, входящей в условие Гейзенберга-Лакса для матрицы системы (5.19)

$$\begin{pmatrix} -k\omega \sin \omega t \\ k\omega \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \cos \omega t \\ k \sin \omega t \\ -n \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Выберем матрицу **L** следующим образом

$$\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

Непосредственная проверка показывает, что матрица системы (5.19) удовлетворяет условию Гейзенберга-Лакса с матрицей **L** из (5.23).

Матричная экспонента $\exp(\mathbf{L}t)$, удовлетворяющая уравнению типа (26.20), имеет вид

(3×3)

$$\exp(\mathbf{L}t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

Это соответствует развороту в плоскости α, β . Координатные оси Y_1, Y_2 , в которых система стационарна, поворачиваются относительно исходных осей α, β против часовой стрелки на угол ωt .

Приведенная система уравнений, соответствующая системе (5.19), имеет вид

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega & k \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & -n & -n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

Решение системы (5.19) получается из решения системы (5.25) умножением слева на матричную экспоненту (5.24).

Таким образом исследование динамики прецессионной модели гировертикали с вращающимися сосудами свелось к изучению поведения решений стационарной системы (5.25).

Лекция 06.

Условия устойчивости характеристического полинома приведенной стационарной системы уравнений гироскопической системы с вращающимися сосудами. Поведение решений исходной нестационарной системы уравнений. Определение параметров, обеспечивающих максимальную степень устойчивости гироскопической системы. Решение задачи о разработке оптимальной конструкции гироскопической системы с вращающимися сосудами.

Характеристическое уравнение приведенной системы уравнений гироскопической системы с вращающимися сосудами имеет следующий вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \omega & k \\ -\omega & -\lambda & 0 \\ 0 & -n & -n - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + n\lambda^2 + \omega^2\lambda + \omega n(\omega - k) = 0 \quad (6.1)$$

Применяя критерий Ляпунова-Шипара, получим условия устойчивости характеристического полинома приведенной системы уравнений. Эти условия налагают следующие ограничения на коэффициенты полинома, то есть на параметры (характерные частоты или постоянные времени) системы

$$n > 0, k > 0, \omega > k \quad (6.2)$$

При выполнении условий (6.2) гироскопическая веркаль с вращающимися сосудами будет “автоматически” находить направление вектора силы тяжести, предоставляя возможность построения приборной вертикали данного места на Земле. Условия (6.2) практически сводятся к заданию достаточно большой угловой скорости $\omega > k$ платформы с вращающимися сосудами.

Найдем условия, обеспечивающие максимальную степень устойчивости характеристического полинома (6.1).

Проведя замену переменной в характеристическом полиноме в соответствии с рекомендациями, изложенными в лекции 4 (формула 4.12),

$$\lambda = \omega p$$

и разделив все слагаемые характеристического полинома на ω^3 , имеем

$$p^3 + \frac{n}{\omega} p^2 + p + \frac{n}{\omega} \left(1 - \frac{k}{\omega}\right) = 0 \quad (6.3)$$

Соответствующий кубический полином, обеспечивающий максимальную степень устойчивости имеет вид

$$p^3 + \sqrt{3}p^2 + p + \frac{\sqrt{3}}{9} = 0 \quad (6.4)$$

Поэтому семейство параметров, обеспечивающее максимальную степень устойчивости, удовлетворяет следующим соотношениям

$$-\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3} \omega = \frac{1}{3} n = \frac{3\sqrt{3}}{8} k \quad (6.5)$$

Это соотношение можно интерпретировать как уравнение прямой в пространстве характерных частот n , ω , k .

В качестве примера реализованной системы рассмотрим параметры гировертикали, приведенные в монографии Я.Н.Ройтенберга “Гироскопы”, являющейся одной из лучших книг по прикладной теории гироскопов. (Ниже сохранена система единиц, принятая в монографии Я.Н.Ройтенберга)

$H = 200000 \text{ Г см с}$, $S = 10 \text{ см}^2$, $b = 25 \text{ см}$, $\gamma = 13,6 \text{ Г см}^{-3}$, $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$, $k = 0,2125 \text{ с}^{-1}$, $n = 0,2 \text{ с}^{-1}$.

Нетрудно видеть, что параметры данной гировертикали, разумеется, обеспечивая ее устойчивость, не удовлетворяют требованиям максимальной степени устойчивости (рис.6.1). При угловой скорости платформы с сосудами $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$ коэффициент затухания в “основном движении оси ротора гироскопа” $-\lambda = 0,01$, в то время как при оптимальном выборе параметров в соответствии с (6.5) при той же угловой скорости вращения сосудов $-\lambda = 1,1547$.

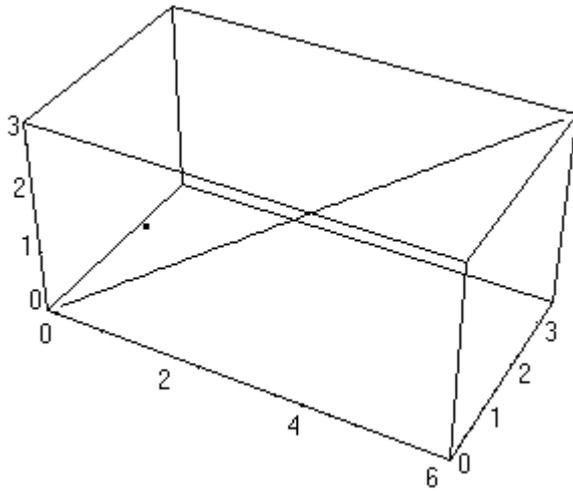


Рис.6.1

Теорема А.М.Ляпунова о поведении решений системы уравнений с почти постоянной матрицей. Лемма Гронуолла-Беллмана.

Мощным средством анализа нестационарных линейных систем является теорема А.М. Ляпунова о поведении решений системы уравнений с почти постоянной матрицей.

Пусть матрица системы $\mathbf{A}(t)$ может быть представлена в виде суммы постоянной матрицы \mathbf{B} и зависящей от времени матрицы $\mathbf{C}(t)$. Наряду с системой уравнений

$$\underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}'} = \underset{(n \times n)}{(\mathbf{B} + \mathbf{C}(t))} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}}, \underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}(0)} = \underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}^0} \quad (6.6)$$

рассмотрим систему

$$\underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}'} = \underset{(n \times n)}{\mathbf{B}} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}}, \quad (6.7)$$

с постоянными коэффициентами.

Предположим, что характеристический полином матрицы \mathbf{B} устойчив. Кроме того, предположим, что при $t \geq 0$ норма матрицы $\mathbf{C}(t)$ ограничена сверху некоторой константой c

$$\|\mathbf{C}(t)\| \leq c \quad (6.8)$$

Под нормой матрицы $\mathbf{C}(t)$ в данном случае будем понимать сумму модулей всех элементов этой матрицы.

В том случае, когда постоянная c оказывается достаточно малой (что означают слова “достаточно малой” далее будет разъяснено), все решения

системы уравнений (6.6) со временем затухают, то есть стремятся к нулю при t , стремящемся к бесконечности.

Действительно. Выпишем общий вид решения системы (6.6), рассматривая слагаемое $\mathbf{C}(t)\mathbf{z}$ как возмущение

$$\mathbf{z}(t) = \exp(\mathbf{B}t) \mathbf{z}^0 + \int_0^t \exp(\mathbf{B}(t-s)) \mathbf{C}(s) \mathbf{z}(s) ds \quad (6.9)$$

$(n \times 1)$ $(n \times n)$ $(n \times 1)$ $(n \times n)$ $(n \times n)$ $(n \times 1)$

Это, конечно, не решение системы (6.6), но интегральное уравнение для векторной функции $\mathbf{z}(t)$.

Следовательно,

$$\mathbf{z}(t) = \exp(\mathbf{B}t) \left(\mathbf{z}^0 + \int_0^t \exp(-\mathbf{B}s) \mathbf{C}(s) \mathbf{z}(s) ds \right) \quad (6.10)$$

$(n \times 1)$ $(n \times n)$ $(n \times 1)$ $(n \times n)$ $(n \times n)$ $(n \times 1)$

Построим оценку нормы вектора $\mathbf{z}(t)$.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}(t)\| &= \left\| \exp(\mathbf{B}t) \left(\mathbf{z}^0 + \int_0^t \exp(-\mathbf{B}s) \mathbf{C}(s) \mathbf{z}(s) ds \right) \right\| \leq \\ &\leq \left\| \exp(\mathbf{B}t) \right\| \left\| \mathbf{z}^0 + \int_0^t \exp(-\mathbf{B}s) \mathbf{C}(s) \mathbf{z}(s) ds \right\| \leq \\ &\leq \left\| \exp(\mathbf{B}t) \right\| \left(\|\mathbf{z}^0\| + \int_0^t \left\| \exp(-\mathbf{B}s) \right\| \|\mathbf{C}(s)\| \|\mathbf{z}(s)\| ds \right) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Известна оценка нормы матрицы $\exp(\mathbf{B}t)$.

Пусть $\xi = \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(\mathbf{B})$ - степень устойчивости характеристического полинома матрицы \mathbf{B} . Тогда при любом, сколь угодно малом числе $\varepsilon > 0$ для $0 \leq t < \infty$

$$\begin{aligned} \left\| \exp(\mathbf{B}t) \right\| &\leq a(\varepsilon) \exp((-\xi + \varepsilon)t) \\ \left\| \exp(-\mathbf{B}t) \right\| &\leq b(\varepsilon) \exp((\xi - \varepsilon)t) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Поскольку естественно считать, что существует число d такое, что $\|\mathbf{z}^0\| \leq d$, имеем

$$\|z(t)\|_{(n \times 1)} \exp((\xi - \varepsilon)t) \leq a \left(d + \int_0^t bc \exp((\xi - \varepsilon)s) \|z(s)\|_{(n \times 1)} ds \right) \quad (6.13)$$

Соотношение (6.13) позволит получить нужную нам оценку Ляпунова. Но прежде сформулируем и докажем одну знаменитую теорему, которая называется “Лемма Гронуолла-Беллмана”, и очень часто используется в теории управляемых систем.

Пусть даны две скалярные функции времени $0 \leq t < \infty$: $u(t) \geq 0, v(t) \geq 0$, и пусть про них известно, что

$$u(t) \leq f + \int_0^t u(s)v(s)ds \quad (6.14)$$

с некоторой неотрицательной постоянной f . Тогда имеет место неравенство

$$u(t) \leq f \exp \int_0^t v(s)ds \quad (6.15)$$

Действительно. Умножим левую и правую части соотношения (6.14) на $v(t)$ и разделим обе части полученного неравенства на сумму

$f + \int_0^t u(s)v(s)ds$. Тогда получим

$$\frac{u(t)v(t)}{f + \int_0^t u(s)v(s)ds} \leq v(t) \quad (6.16)$$

Следовательно,

$$\frac{d(f + \int_0^t u(s)v(s)ds)}{f + \int_0^t u(s)v(s)ds} \leq v(t) \quad (6.17)$$

Интегрируя обе части неравенства (6.17) по времени от 0 до t , при $f \neq 0$ получаем

$$\ln \frac{f + \int_0^t u(s)v(s)ds}{f} \leq \int_0^t v(s)ds \quad (6.18)$$

Потенцируя, имеем

$$f + \int_0^t u(s)v(s)ds \leq f \exp \int_0^t v(s)ds \quad (6.19)$$

Учитывая условие (6.14), получим неравенство (6.15).

Если $f = 0$, то можно применить ту же схему доказательства, считая, что $f \neq 0$, а затем применить операцию предельного перехода. При $f \rightarrow 0$ из (6.15) получим, что $u(t) \leq 0$, и, сравнивая с условием теоремы, приходим к выводу, что в этом случае $u(t)=0$.

Применим лемму Гронуолла-Беллмана в теореме Ляпунова о решении системы с почти постоянной матрицей.

Пусть $u(t) = \left\| \begin{matrix} \mathbf{z}(t) \\ (n \times 1) \end{matrix} \right\| \exp((\xi - \varepsilon)t)$, $v(t) = abc$, $f = ad$.

Тогда получим, что

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{z}(t) \\ (n \times 1) \end{matrix} \right\| \exp((\xi - \varepsilon)t) \leq ad \exp \int_0^t (abc)dt = ad \exp(abct) \quad (6.20)$$

Или

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{z}(t) \\ (n \times 1) \end{matrix} \right\| \leq ad \exp((-\xi + \varepsilon + abc)t) \quad (6.21)$$

Из неравенства (6.21) следует, что в том случае, когда оценка с нормы матрицы C в системе (6.6) достаточно мала

$$c < \frac{\xi - \varepsilon}{ab}, \quad (6.22)$$

норма решения системы (6.6) экспоненциально убывает во времени.

Лекция 07.

Фазовый объем линейной нестационарной системы. Теорема об изменении фазового объема. Роль следа матрицы линейной системы.

Исключительно важной характеристикой, описывающей временную эволюцию линейной нестационарной системы является, так называемый, фазовый объем, равный модулю определителя фундаментальной матрицы ее решений.

Рассмотрим систему уравнений собственного движения линейной нестационарной машины

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}(t) \mathbf{z} \quad (7.1)$$

$(n \times 1)$ $(n \times n)$ $(n \times 1)$

Фундаментальная матрица решений системы (7.1) удовлетворяет матричному уравнению

$$\mathbf{N}' = \mathbf{A}(t) \mathbf{N} \quad (7.2)$$

$(n \times n)$ $(n \times n)$ $(n \times n)$

с начальным условием

$$\mathbf{N}(0) = \mathbf{E} \quad (7.3)$$

$(n \times n)$ $(n \times n)$

Как изменяется во времени числовая функция, равная определителю матрицы $\mathbf{N}(t)$?

Рассмотрим сначала систему с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A} \mathbf{z} \quad (7.4)$$

$(n \times 1)$ $(n \times n)$ $(n \times 1)$

В этом случае

$$\mathbf{N}(t) = \exp t\mathbf{A} \quad (7.5)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \det \mathbf{N}(t) &= \det(\exp t\mathbf{A}) = \det \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbf{E} + \frac{t\mathbf{A}}{n} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \det \left(\mathbf{E} + \frac{t\mathbf{A}}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \det^n \left(\mathbf{E} + \frac{t\mathbf{A}}{n} \right) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Для любой невырожденной матрицы \mathbf{S}

$$\det \left(\mathbf{E} + \frac{t\mathbf{A}}{n} \right) = \det \left(\mathbf{S}^{-1} \left(\mathbf{E} + \frac{t\mathbf{A}}{n} \right) \mathbf{S} \right) = \det \left(\mathbf{E} + \frac{t\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}}{n} \right) \quad (7.7)$$

Имеет место следующая теорема Шура, играющая важную роль в вычислительной линейной алгебре

Всякую матрицу \mathbf{A} с помощью обвертывающего преобразования подобия можно привести к треугольному виду

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \Delta \quad (7.8)$$

Треугольная матрица Δ , называемая формой Шура матрицы \mathbf{A} , содержит на диагонали ее собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Форма Шура определена неоднозначно. Прежде всего она может быть выбрана верхней треугольной $a_{ij} = 0$ ($i > j$) или нижней треугольной $a_{ij} = 0$ ($i < j$) матрицей (верхней или нижней формой Шура). Кроме того, для любого заданного порядка расположения собственных значений найдется форма Шура, на диагонали которой числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ расположены в нужной последовательности.

Из теоремы Шура следует, что можно найти матрицу \mathbf{S} такую, что

$$\begin{aligned} \det \left(\mathbf{E} + \frac{t\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}}{n} \right) &= \det \left(\mathbf{E} + \frac{t\Delta}{n} \right) = \\ &= \left(1 + \frac{\lambda_1 t}{n} \right) \dots \left(1 + \frac{\lambda_n t}{n} \right) = 1 + \frac{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t}{n} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) = \\ &= 1 + \frac{\text{Tr} \mathbf{A}}{n} t + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned} \quad (7.9)$$

Здесь $\text{Tr} \mathbf{A}$ обозначает след (сумму диагональных элементов) матрицы \mathbf{A} .

Итак, поскольку

$$\begin{aligned} \det(\exp t\mathbf{A}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \det^n \left(\mathbf{E} + \frac{t\mathbf{A}}{n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\text{Tr}\mathbf{A}}{n} t + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t\text{Tr}\mathbf{A}}{n} \right)^n = \\ &= \exp \text{Tr}\mathbf{A}t \end{aligned} \quad (7.10)$$

получаем формулу для вычисления фазового объема системы (7.4) с постоянными коэффициентами

$$\det \mathbf{N}(t) = \exp \text{Tr}\mathbf{A}t \quad (7.11)$$

Рост, сохранение или убывание фазового объема системы с постоянными коэффициентами зависит от знака следа $\text{Tr} \mathbf{A}$ матрицы \mathbf{A} .

Рассмотрим теперь систему с переменными коэффициентами (7.1).

Для фундаментальной матрицы решений этой системы справедливо соотношение

$$d\mathbf{N}(t) = dt\mathbf{A}(t)\mathbf{N}(t) \quad (7.12)$$

Следовательно, имеет место приближенное равенство

$$\Delta\mathbf{N}(t) = \Delta t\mathbf{A}(t)\mathbf{N}(t) \quad (7.13)$$

Или

$$\mathbf{N}(t + \Delta t) = \mathbf{N}(t) + \Delta t\mathbf{A}(t)\mathbf{N}(t) \quad (7.14)$$

Таким образом

$$\mathbf{N}(t + \Delta t) = (\mathbf{E} + \Delta t\mathbf{A}(t))\mathbf{N}(t) \quad (7.15)$$

Вычисляя определитель матриц, стоящих в левой и в правой частях выражения (7.15), имеем

$$\begin{aligned} \det \mathbf{N}(t + \Delta t) &= \det(\mathbf{E} + \Delta t\mathbf{A}(t)) \det \mathbf{N}(t) = \\ &= (1 + \Delta t\text{Tr}\mathbf{A}(t)) \det \mathbf{N}(t) = \\ &= \det \mathbf{N}(t) + \Delta t\text{Tr}\mathbf{A}(t) \det \mathbf{N}(t) \end{aligned} \quad (7.16)$$

Следовательно,

$$(\det \mathbf{N}(t))' = \text{Tr}\mathbf{A}(t) \det \mathbf{N}(t) \quad (7.17)$$

Таким образом получаем формулу для вычисления фазового объема нестационарной системы (7.1)

$$\det \mathbf{N}(t) = \exp \int_0^t \text{Tr} \mathbf{A}(s) ds \quad (7.18)$$

*Системы уравнений с периодическими коэффициентами.
Матрица монодромии. Отображение Пуанкаре.
Характеристические показатели. Мультипликаторы.*

Предположим, что матрица системы имеет элементы, периодически изменяющиеся во времени,

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t+T) \quad (7.19)$$

Теория линейных уравнений с периодическими коэффициентами помогает решить задачу управления шагающим аппаратом, задачу стабилизации перевернутого маятника, объясняет эффект раскачивания качелей и так далее.

Используя результаты лекции 25, имеем, что если матрица $\mathbf{Z}(t)$ является фундаментальной матрицей системы (7.1) при условии (7.19), то матрица $\mathbf{Z}(t+T)$ также фундаментальна, поскольку

$$\mathbf{Z}'(t + T) = \mathbf{A}(t + T)\mathbf{Z}(t + T) = \mathbf{A}(t)\mathbf{Z}(t + T) \quad (7.20)$$

И в этом случае

$$\mathbf{Z}(t + T) = \mathbf{Z}(t)\tilde{\mathbf{N}} \quad (7.21)$$

Здесь \mathbf{C} - постоянная матрица с отличным от нуля определителем.

Заметим, что, если $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{E}$, то

$$\mathbf{Z}(T) = \mathbf{C}, \mathbf{Z}(2T) = \mathbf{C}^2, \dots, \mathbf{Z}(nT) = \mathbf{C}^n, \dots \quad (7.22)$$

Наблюдая фундаментальную матрицу системы “с помощью стробоскопа” только в моменты времени $t=0, T, 2T, \dots, nT, \dots$, можно полностью охарактеризовать решение.

Последовательность точек $\mathbf{Z}(T), \mathbf{Z}(2T), \dots, \mathbf{Z}(nT), \dots$ носит название “монодромия”. Матрица \mathbf{C} , характеризующая движение фазовой точки вдоль монодромии, называется матрицей монодромии. Движение фазовой точки вдоль монодромии называют отображением Пуанкаре.

Поскольку в соответствии с соотношением (7.22) $\mathbf{C} = \mathbf{Z}(T)$ матрицу монодромии можно искать с помощью ЭВМ, решая исходную систему уравнений на одном периоде T матрицы системы $\mathbf{A}(t)$.

В соответствии с теоремой Флоке о представлении фундаментальной матрицы системы уравнений с периодическими коэффициентами (лекция 25) фундаментальная матрица решений линейной системы (7.1) с непрерывной периодической матрицей периода T всегда может быть представлена в виде

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{P}(t) \exp(\mathbf{B}t) \quad (7.23)$$

$(n \times n) \quad (n \times n) \quad (n \times n)$

Здесь $\mathbf{P}(t)$ непрерывно дифференцируемая периодическая матрица с периодом T , $\mathbf{P}(0) = \mathbf{E}$, \mathbf{B} - постоянная матрица,

$$\exp(\mathbf{B}(T)) = \tilde{\mathbf{N}} \quad (7.24)$$

В соответствии с теоремами Еругина и Ляпунова (лекция 25) система (7.1) с периодическими коэффициентами приводима к системе с постоянными коэффициентами с матрицей \mathbf{B}

$$\mathbf{y}' = \mathbf{B} \mathbf{y} \quad (7.25)$$

$(n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times 1)$

Корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения системы с постоянными коэффициентами (7.25) называются характеристическими показателями системы (7.1) с периодическими коэффициентами.

Можно также выписать характеристическое уравнение для матрицы монодромии \mathbf{C} . Корни этого уравнения ρ_1, \dots, ρ_n называются мультипликаторами исходной системы.

Нормальные решения системы с периодическими коэффициентами. Связь характеристических показателей и мультипликаторов.

Любому мультипликатору ρ_i отвечает хотя бы одно решение системы (7.1) такое, что

$$\mathbf{z}(t+T) = \rho_i \mathbf{z}(t) \quad (7.26)$$

Это решение (оно называется нормальным) можно построить следующим образом. Возьмем в качестве начального условия для $\mathbf{z}(t)$ собственный вектор \mathbf{u}_i матрицы \mathbf{C} , соответствующий мультипликатору ρ_i

$$\mathbf{C} \mathbf{u}_i = \rho_i \mathbf{u}_i \quad (7.27)$$

Тогда

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{N}(t)\mathbf{z}^0 = \mathbf{N}(t)\mathbf{u} \quad (7.28)$$

Здесь $\mathbf{N}(t)$ - фундаментальная матрица системы.

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t + T) &= \mathbf{N}(t + T)\mathbf{z}^0 = \mathbf{N}(t + T)\mathbf{u}_i = \\ &= \mathbf{N}(t)\mathbf{C}\mathbf{u}_i = \mathbf{N}(t)p_i\mathbf{u}_i = p_i\mathbf{N}(t)\mathbf{u}_i = p_i\mathbf{z}(t) \end{aligned} \quad (7.29)$$

Справедливо и обратное утверждение.

Если $\mathbf{z}(t + T) = q\mathbf{z}(t)$, то q - мультипликатор.

Действительно.

$$\mathbf{z}(t + T) = \mathbf{N}(t + T)\mathbf{z}^0 = \mathbf{N}(t)\mathbf{C}\mathbf{z}^0 = q\mathbf{z}(t) = q\mathbf{N}(t)\mathbf{z}^0 \quad (7.30)$$

Следовательно,

$$\mathbf{C}\mathbf{z}^0 = q\mathbf{z}^0 \quad (7.31)$$

Таким образом \mathbf{z}^0 - собственный вектор матрицы \mathbf{C} , q - соответствующий ему мультипликатор.

Характеристические показатели и мультипликаторы связаны между собой соотношением

$$p_i = \exp(\lambda_i T) \quad (7.32)$$

Здесь p_i, λ_i , вообще говоря, комплексные числа.

Следовательно,

$$\lambda_i = \frac{\ln|p_i| + i \arg p_i}{T} \quad (7.33)$$

Лекция 08.

Условия периодичности и антипериодичности решений системы уравнений с периодическими коэффициентами. Системы с неизменяющимся фазовым объемом.

Пусть среди мультипликаторов системы (7.1) с периодическими коэффициентами оказался мультипликатор $p = 1$, следовательно, в соответствии с равенством (7.26)

$$\mathbf{z}(t+T) = \mathbf{z}(t), \quad (8.1)$$

то есть у системы есть по крайней мере одно периодическое решение с периодом T . И обратно, если у системы с периодическими коэффициентами есть хотя бы одно периодическое решение, то один из мультипликаторов равен единице.

Пусть теперь среди мультипликаторов системы (7.1) с периодическими коэффициентами оказался мультипликатор $p = -1$, следовательно, в соответствии с равенством (7.26)

$$\mathbf{z}(t+T) = -\mathbf{z}(t), \quad (8.2)$$

то есть у системы, как говорят математики, есть по крайней мере одно антипериодическое решение с периодом T . И обратно, если у системы с периодическими коэффициентами есть хотя бы одно антипериодическое решение, то один из мультипликаторов равен минус единице.

Существование антипериодического решения периода T свидетельствует о том, что в системе с периодическими коэффициентами есть периодическое решение с периодом $2T$.

Действительно,

$$\mathbf{z}(t+2T) = -\mathbf{z}(t+T) = \mathbf{z}(t) \quad (8.3)$$

Остановим наше внимание на системах уравнений с периодическими коэффициентами, для которых справедливо следующее условие, налагаемое на матрицу системы,

$$\text{Tr } \mathbf{A}(t) = 0 \quad (8.4)$$

Такого типа соотношение достаточно для того, чтобы фазовый объем системы со временем не менялся.

Поскольку в соответствии с (7.21) для фундаментальной матрицы решений системы справедливо соотношение $\mathbf{Z}(t + T) = \mathbf{Z}(t)\mathbf{N}$, то фазовые объемы системы в моменты времени t и $t+T$ связаны между собой через определитель матрицы монодромии \mathbf{C}

$$\det \mathbf{Z}(t + T) = \det \mathbf{Z}(t) \det \tilde{\mathbf{N}} \quad (8.5)$$

Так как в начальный момент времени $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{E}$, то $\det \mathbf{Z}(0) = 1$, а поскольку фазовый объем системы со временем не меняется, то

$$\det \mathbf{C} = 1 \quad (8.6)$$

Случай систем второго порядка. Поведение мультипликаторов. Критерии устойчивости, неустойчивости, сильной устойчивости. Существование T-периодических и 2T-периодических решений и граница области устойчивости системы с периодическими коэффициентами в пространстве параметров.

Рассмотрим систему второго порядка с периодическими коэффициентами и нулевым следом матрицы $\mathbf{A}(t)$ (фазовый объем такой системы сохраняется)

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}(t) \mathbf{z} \quad (8.7)$$

(2×1) (2×2) (2×1)

Матрица монодромии системы (8.7) имеет вид

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad (8.8)$$

причем $\det \mathbf{C} = 1$, то есть

$$\tilde{n}_{11}\tilde{n}_{22} - \tilde{n}_{12}\tilde{n}_{21} = 1 \quad (8.9)$$

Исследуем в данном случае поведение мультипликаторов. Характеристическое уравнение матрицы \mathbf{C} имеет вид

$$\rho^2 - \text{Tr}(\mathbf{C})\rho + 1 = 0 \quad (8.10)$$

Здесь $\text{Tr}(\mathbf{C}) = c_{11} + c_{22}$.

По теореме Виетта

$$\rho_1\rho_2 = 1, \quad \rho_1 + \rho_2 = \text{Tr}(\mathbf{C}) \quad (8.11)$$

Решая квадратное уравнение (8.10), имеем

$$\rho_{1,2} = \frac{\text{Tr}(\mathbf{C}) \pm \sqrt{\text{Tr}^2(\mathbf{C}) - 4}}{2} \quad (8.12)$$

Выделим три случая.

1). $|\text{Tr}(\mathbf{C})| > 2$

В этом случае имеем два различных действительных корня ρ_1, ρ_2 . В силу соотношений (8.11) один из них (ρ_1) меньше единицы, другой (ρ_2) -

больше, и геометрически они связаны между собой с помощью операции инверсии относительно единичной окружности на комплексной плоскости корней.

$$2). |\text{Tr}(\mathbf{C})| < 2$$

В этом случае имеем два комплексно сопряженных корня $p_1 = r \exp(i\varphi)$, $p_2 = r \exp(-i\varphi)$. В силу соотношений (8.11) они всегда лежат на единичной окружности $r = 1$, то есть

$$p_{1,2} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\text{Tr}(\mathbf{C})}{2} \quad (8.13)$$

$$3). |\text{Tr}(\mathbf{C})| = 2$$

В этом случае имеем два равных действительных корня

$$p_1 = p_2 = 1 \text{ или } p_1 = p_2 = -1 \quad (8.14)$$

Из результатов, изложенных в лекции 7, следует, что мультипликаторы p_1 , p_2 связаны с характеристическими показателями λ_1 , λ_2 - корнями характеристического уравнения постоянной матрицы соответствующей приведенной системы уравнений

$$\lambda_{1,2} = \frac{\ln|p_{1,2}| + i \arg p_{1,2}}{T} \quad (8.15)$$

По корням характеристического уравнения приведенной системы мы можем судить об устойчивости системы (8.7) по Ляпунову.

Если имеет место случай 1, то один из действительных корней (p_2) непременно больше единицы, $\ln p_2 > 0$. Следовательно, корень $\lambda_2 > 0$ и имеет место неустойчивость.

Если имеет место случай 2, то $\ln|p_{1,2}| = 0$. Следовательно, корни λ_1 , λ_2 - чисто мнимые и имеет место устойчивость по Ляпунову.

Этот случай математики называют случаем сильной устойчивости. Дело в том, что если имеет место строгое неравенство $|\text{Tr}(\mathbf{C})| < 2$, то для матриц монодромии \mathbf{C} , элементы которых достаточно мало отличаются от элементов матрицы \mathbf{C} , тип неравенства для следа сохранится: $|\text{Tr}(\mathbf{C})| < 2$, а значит устойчивым по Ляпунову является целый класс матриц с близкими значениями следа матрицы монодромии.

Если имеет место пограничный случай 3, то корни p_1, p_2 оказываются кратными (8.14) и для решения вопроса об устойчивости по Ляпунову требуется дополнительный анализ.

Итак, при анализе траекторий корней приведенной системы на комплексной плоскости мультипликаторов возникает следующая картина смены поведения решений системы (8.7). Пусть сначала параметры системы таковы, что имеет место случай 1. Пусть, кроме того, оба мультипликатора положительны. При убывании модуля следа матрицы монодромии, мультипликаторы, оставаясь действительными и сближаясь, двигаются к точке пересечения действительной оси и единичной окружности. Система при этом остается неустойчивой. Когда модуль следа матрицы монодромии оказывается равным двум (случай 3), оба мультипликатора становятся равными единице. При этом в системе появляются периодические решения периода T . Когда модуль следа матрицы монодромии оказывается меньше двух (случай 2), мультипликаторы начинают, оставаясь на одной вертикали, двигаться вдоль единичной окружности, сначала удаляясь друг от друга (до тех пор пока модуль следа матрицы монодромии не обратится в нуль), а затем, приобретя отрицательные действительные части, при новом нарастании модуля следа матрицы монодромии сближаясь, устремляясь к другой точке пересечения действительной оси и единичной окружности. При этом система является устойчивой по Ляпунову. Таким образом, появление в системе периодического решения периода T явилось событием, сопровождающим переход от неустойчивого к устойчивому по Ляпунову состоянию системы. Когда модуль следа матрицы монодромии вновь становится равным двум (случай 3), оба мультипликатора становятся равными минус единице. При этом в системе появляются периодические решения периода $2T$. Когда модуль следа матрицы монодромии вновь становится больше двух, в системе опять появляется положительный характеристический показатель и она вновь оказывается неустойчивой по Ляпунову. Таким образом, появление в системе периодического решения периода $2T$ явилось событием, сопровождающим переход от устойчивого к неустойчивому по Ляпунову состоянию системы. Можно сказать, что область устойчивости системы по Ляпунову оказалась отгороженной (охваченной) периодическими решениями периодов T и $2T$. Это обстоятельство подсказывает нам одну из заповедей теории устойчивости по Ляпунову для систем с периодическими коэффициентами. Важно уметь находить параметры системы, при которых она имеет периодические и антипериодические решения.

Уравнение Матье. Сведение задачи нахождения условий сильной устойчивости в задаче Матье с малой глубиной модуляции к построению матрицы монодромии в задаче о колебаниях математического маятника.

Рассмотрим возникающее во многих задачах механики и теории управляемых систем уравнение Матье, описывающее колебательную систему с модуляционной накачкой

$$z'' + \omega^2(1 + \varepsilon \cos t)z = 0, \quad (8.16)$$

Здесь в качестве независимой переменной t взято “безразмерное время”, единицей которого является период T модуляционной накачки, $\omega = \rho / \nu$ представляет собой отношение собственной частоты ρ системы при отсутствии модуляции к частоте $\nu = 2\pi / T$ модуляционной накачки, безразмерный параметр ε называют глубиной модуляции.

Представляя это уравнение в виде системы уравнений второго порядка, имеем

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(1 + \varepsilon \cos t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

В данном случае матрица системы

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(1 + \varepsilon \cos t) & 0 \end{pmatrix} \quad (8.18)$$

имеет нулевой след $\text{Tr } \mathbf{A}(t) = 0$ и периодически меняющиеся элементы $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t + 2\pi)$.

Поставим задачу нахождения условий сильной устойчивости системы уравнений (8.17). В соответствии с изложенной выше теорией для этого следует потребовать, чтобы для матрицы монодромии системы (8.17) было выполнено неравенство $|\text{Tr}(\mathbf{C})| < 2$. Но, как аналитически найти матрицу монодромии $\mathbf{C} = \mathbf{Z}(T)$?!

Для начала будем “искать под фонарем”, то есть не станем решать задачу нахождения условий сильной устойчивости системы (8.17) в полном объеме, а попытаемся так упростить задачу, чтобы можно было добиться решения известными нам способами. Предположим, что параметр ε в уравнении Матье достаточно мал. Этот параметр характеризует отличие уравнения Матье от уравнения колебаний математического маятника и носит название “глубина модуляции”. Итак, предположим, что глубина модуляции мала и отличие уравнения Матье от уравнения колебаний маятника в некотором смысле незначительно.

В этом случае следы матриц монодромии для системы, описывающей колебания маятника,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (8.19)$$

и системы (8.17) будут отличаться мало (на величины порядка $\hat{I}(\varepsilon)$).

Это утверждение базируется на знаменитой теореме А.Пуанкаре о существовании и единственности на конечном интервале времени решения задачи Коши с аналитической правой частью

$$\underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}'} = \underset{(n \times 1)}{\mathbf{F}}(\mathbf{t}, \underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}}, \varepsilon), \quad \underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}}(0, \varepsilon) = \underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}^0}(\varepsilon) \quad (8.20)$$

в виде ряда по степеням достаточно малого параметра ε

$$\underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}}(\mathbf{t}, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}_k}(\mathbf{t}), \quad (8.21)$$

где вектор-функции $\underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}_k}(\mathbf{t})$ непрерывно дифференцируемы.

Лекция 09.

Принцип обратной связи в динамике машин. Обеспечение необходимого качества переходных процессов в полностью управляемой стационарной машине за счет управления в виде обратной связи по состоянию.

Описание динамики линейной стационарной машины со скалярным управлением всегда может быть дано с помощью системы уравнений вида (8.8), (8.9), (8.10).

При этом свойства собственных колебаний - переходных процессов в динамике машины определяются параметрами $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ - коэффициентами характеристического уравнения системы. Возникает следующий вопрос. Нельзя ли с помощью введения скалярного управления направленно изменить определяющие параметры машины?

Пусть работа “идеального” устройства задается системой уравнений

$$\mathbf{x}' = \mathbf{B}_0 \mathbf{x} + \mathbf{e}_n v \quad (9.1)$$

$(n \times 1)$ $(n \times n)$ $(n \times 1)$ $(n \times 1)$ (1×1)

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \dots & -b_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{B}_0 \mathbf{x} + \mathbf{e}_n v = \\ &= \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + (\mathbf{B}_0 - \mathbf{A}_0) \mathbf{x} + \mathbf{e}_n v = \\ &= \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + \mathbf{e}_n ((a_0 - b_0)x_1 + \dots + (a_{n-1} - b_{n-1})x_n) + \mathbf{e}_n v \end{aligned} \quad (9.3)$$

$(n \times n)$ $(n \times 1)$ $(n \times n)$ $(n \times n)$ $(n \times 1)$ $(n \times 1)$ (1×1)

$(n \times n)$ $(n \times 1)$ $(n \times 1)$ (1×1) $(n \times 1)$ (1×1)

Обозначим вектор-строку $((a_0 - b_0), \dots, (a_{n-1} - b_{n-1}))$ через \mathbf{k}° (Т - знак транспонирования). Тогда

$$((a_0 - b_0)x_1 + \dots + (a_{n-1} - b_{n-1})x_n) = \mathbf{k}^\circ \mathbf{x} \quad (9.4)$$

$(1 \times n)$ $(n \times 1)$

Таким образом уравнение работы идеального устройства представлено в виде

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + \mathbf{e}_n (\mathbf{k}^0 \mathbf{x} + \mathbf{v}) \quad (9.5)$$

$(n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times 1) \quad (n \times 1) \quad (1 \times n) \quad (n \times 1) \quad (1 \times 1)$

Сравнивая соотношение (9.5) с системой (8.8), приходим к фундаментальной идее об использовании в динамике машин скалярного управления в виде обратной связи по состоянию

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}^0 \mathbf{y} + \mathbf{v}(t) \quad (9.6)$$

Поскольку переменная \mathbf{z} исходной задачи (8.6) связана с переменной \mathbf{y} соотношением (5.11) и $\mathbf{y} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{z}$, управление в виде обратной связи по состоянию может быть представлено в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}^0 \mathbf{C}^{-1} \mathbf{z} + \mathbf{v}(t) \quad (9.7)$$

Применение в динамике управляемых систем принципа обратной связи по состоянию позволяет обеспечивать в машине нужное качество переходных процессов с помощью управления. Правда, при этом необходимо решить вопрос о возможности наблюдения за вектором \mathbf{z} состояния машины и обеспечить ее информационными “датчиками” и силовыми устройствами.

Невозможность изменения свойства полной управляемости с помощью применения принципа обратной связи.

Пусть исходная система описывается уравнениями

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (9.8)$$

$(n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times 1) \quad (n \times m) \quad (m \times 1)$

Здесь \mathbf{u} - вектор управления, \mathbf{B} - матрица, которую в этих лекциях мы называем “дозатор” (distributor).

Матрица управляемости для системы (9.8)

$$\mathbf{W} = \left(\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \right) \quad (9.9)$$

Используя принцип обратной связи, зададим вектор управления в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{F} \mathbf{z} + \mathbf{v}(t) \quad (9.10)$$

$(m \times 1) \quad (m \times n) \quad (n \times 1) \quad (m \times 1)$

Тогда система уравнений (9.8) представится в виде

$$\mathbf{z}' = \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{F} \\ \mathbf{B} \mathbf{v} \end{pmatrix} \mathbf{z} + \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (9.11)$$

Матрица управляемости для системы (9.11)

$$\mathbf{W}_F = (\mathbf{B}, (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})\mathbf{B}, (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})^2\mathbf{B}, \dots, (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})^{n-1}\mathbf{B}) \quad (9.12)$$

Покажем, что введение обратной связи не сказывается на управляемости системы, то есть ранг матрицы \mathbf{W}_F равен рангу матрицы \mathbf{W} .

Пусть

$$\mathbf{x}(t) = \exp(-(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})t)\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}^0 \quad (9.13)$$

Тогда

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{l=0}^{n-1} (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})^l \mathbf{B} \mathbf{U}_l(t) \quad (9.14)$$

Сумму, представленную в правой части уравнения (9.14), всегда можно представить в виде

$$\sum_{l=0}^{n-1} (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})^l \mathbf{B} \mathbf{U}_l(t) = \sum_{l=0}^{n-1} (\mathbf{A})^l \mathbf{B} \mathbf{V}_l(t) \quad (9.15)$$

Здесь $\mathbf{V}_l(t)$ - измененный вектор обобщенного управления.

При доказательстве этого утверждения для упрощения записи ограничимся случаем $n=4$, поскольку идея рассуждения не зависит от размерности.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \sum_{l=0}^3 \underset{(4 \times 1)}{(\mathbf{A} + \mathbf{BF})^l} \underset{(4 \times 4)}{\mathbf{B}} \underset{(4 \times m)}{\mathbf{U}_l} \underset{(m \times 1)}{(\mathbf{t})} = \\
&= \mathbf{B}\mathbf{U}_0 + (\mathbf{A} + \mathbf{BF})\mathbf{B}\mathbf{U}_1 + (\mathbf{A} + \mathbf{BF})^2\mathbf{B}\mathbf{U}_2 + (\mathbf{A} + \mathbf{BF})^3\mathbf{B}\mathbf{U}_3 = \\
&= \mathbf{B}\mathbf{U}_0 + (\mathbf{A} + \mathbf{BF})\{\mathbf{B}\mathbf{U}_1 + (\mathbf{A} + \mathbf{BF})[\mathbf{B}\mathbf{U}_2 + (\mathbf{A} + \mathbf{BF})\mathbf{B}\mathbf{U}_3]\} = \\
&= \mathbf{B}\mathbf{U}_0 + (\mathbf{A} + \mathbf{BF})\{\mathbf{B}\mathbf{U}_1 + (\mathbf{A} + \mathbf{BF})[\mathbf{B}(\mathbf{U}_2 + \mathbf{F}\mathbf{B}\mathbf{U}_3) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{U}_3]\} = \\
&= \mathbf{B}\mathbf{U}_0 + (\mathbf{A} + \mathbf{BF})[\mathbf{B}[\mathbf{U}_1 + \mathbf{F}\mathbf{B}(\mathbf{U}_2 + \mathbf{F}\mathbf{B}\mathbf{U}_3) + \mathbf{F}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{U}_3] + \\
&\quad + \mathbf{A}\mathbf{B}(\mathbf{U}_2 + \mathbf{F}\mathbf{B}\mathbf{U}_3) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{U}_3] = \\
&= \mathbf{B}\{\mathbf{U}_0 + \mathbf{F}[\mathbf{B}[\mathbf{U}_1 + \mathbf{F}\mathbf{B}(\mathbf{U}_2 + \mathbf{F}\mathbf{B}\mathbf{U}_3) + \mathbf{F}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{U}_3] + \\
&\quad + \mathbf{A}\mathbf{B}(\mathbf{U}_2 + \mathbf{F}\mathbf{B}\mathbf{U}_3) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{U}_3]\} + \\
&\quad + \mathbf{A}\mathbf{B}[\mathbf{U}_1 + \mathbf{F}\mathbf{B}(\mathbf{U}_2 + \mathbf{F}\mathbf{B}\mathbf{U}_3) + \mathbf{F}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{U}_3] + \\
&\quad + \mathbf{A}^2\mathbf{B}(\mathbf{U}_2 + \mathbf{F}\mathbf{B}\mathbf{U}_3) + \mathbf{A}^3\mathbf{B}\mathbf{U}_3
\end{aligned}$$

(9.16)

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_0 &= \mathbf{U}_0 + \mathbf{F}[\mathbf{B}[\mathbf{U}_1 + \mathbf{F}\mathbf{B}(\mathbf{U}_2 + \mathbf{F}\mathbf{B}\mathbf{U}_3) + \mathbf{F}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{U}_3] + \\
&\quad + \mathbf{A}\mathbf{B}(\mathbf{U}_2 + \mathbf{F}\mathbf{B}\mathbf{U}_3) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{U}_3]
\end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{U}_1 + \mathbf{F}\mathbf{B}(\mathbf{U}_2 + \mathbf{F}\mathbf{B}\mathbf{U}_3) + \mathbf{F}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{U}_3 \tag{9.17}$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{U}_2 + \mathbf{F}\mathbf{B}\mathbf{U}_3$$

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{B}\mathbf{U}_3$$

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{l=0}^3 \underset{(4 \times 1)}{(\mathbf{A})^l} \underset{(4 \times 4)}{\mathbf{B}} \underset{(4 \times m)}{\mathbf{V}_l} \underset{(m \times 1)}{(\mathbf{t})} \tag{9.18}$$

Соотношение (9.18) представляет собой частный случай соотношения (9.8) при $n=4$. Идея проверки соотношения (9.8) в общем случае аналогична. Таким образом, в представлении решения (9.14), (9.8) для системы, использующей управление в виде обратной связи по состоянию, изменилось лишь обобщенное управление и, следовательно, матрица управляемости фактически осталась неизменной.

Лекция 10.

Управление перевернутым маятником.

Во второй лекции были выписаны уравнения движения управляемого эллиптического маятника, моделирующего динамику мостового крана

$$(m + M) \frac{d^2s}{dt^2} + ml \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cos\varphi - ml \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin\varphi = F \quad (10.1)$$

$$l \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d^2s}{dt^2} \cos\varphi + g \sin\varphi = 0$$

Пусть маятник находится в окрестности верхнего положения $s = s_0$, $\varphi = \pi$. (Он перевернут). Сделав замену переменных $\varphi = \pi + \theta$ и проведя линеаризацию уравнений движения около верхнего положения равновесия, получим

$$(m + M) \frac{d^2s}{dt^2} - ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = F \quad (10.2)$$

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{d^2s}{dt^2} - g\theta = 0$$

Поставим вопрос об управляемости этой системы.

Исключая из первого уравнения системы (10.2) переменную s с помощью второго уравнения, представим систему уравнений (10.2) в виде

$$Ml \frac{d^2\theta}{dt^2} - (m + M)g\theta = F \quad (10.3)$$

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{d^2s}{dt^2} - g\theta = 0$$

Вводя традиционные обозначения для круговой частоты собственных колебаний маятника и управляющего воздействия, действующего на каретку,

$$\omega = \sqrt{\frac{(m + M)g}{Ml}}, \quad u = \frac{F}{M}, \quad (10.4)$$

получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} l \frac{d^2\theta}{dt^2} - \omega^2 l\theta &= u \\ l \frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{d^2s}{dt^2} - g\theta &= 0 \end{aligned} \quad (10.5)$$

Наконец, вводя специальную замену переменных

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{l}{g} (l\theta - s + s_0) \\ y_2 &= \frac{l}{g} \frac{d}{dt} (l\theta - s + s_0) \\ y_3 &= l\theta \\ y_4 &= \frac{d}{dt} l\theta \end{aligned} \quad (10.6)$$

получим представленную в форме Коши систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику управляемого эллиптического маятника

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= y_4 \\ y_4' &= \omega^2 y_3 + u \end{aligned} \quad (10.7)$$

Система (10.7) эквивалентна одному уравнению 4-го порядка

$$y_1^{(4)} = \omega^2 y_1^{(2)} + u \quad (10.8)$$

Представляя систему (10.7) в векторно-матричной форме, имеем

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (10.9)$$

Таким образом в соответствии с теоремой о структурных требованиях, предъявляемых к матрице системы со скалярным управлением и вектору дозатора (см. лекцию 15), управляемый перевернутый эллиптический маятник является вполне управляемой системой и, следовательно, можно поставить задачу об использовании принципа обратной связи для обеспечения необходимых свойств переходного процесса. Например, можно синтезировать коэффициенты характеристического уравнения, обеспечивающие максимальную степень устойчивости в задаче о движении маятника в окрестности точки $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0, \theta = 0$ ($\varphi = \pi$).

Ненормированное характеристическое уравнение системы четвертого порядка при выполнении условия реализации максимальной степени устойчивости имеет вид

$$(\lambda + \Omega)^4 = \lambda^4 + 4\Omega\lambda^3 + 6\Omega^2\lambda^2 + 4\Omega^3\lambda + \Omega^4 \quad (10.10)$$

Здесь параметр Ω определяется требованиями к быстродействию системы (чем больше Ω , тем меньше время переходного процесса) и возможностями управляющих органов.

Следовательно, учитывая соотношение (16.4), получаем следующее выражение для управления, синтезированного в виде обратной связи по состоянию

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{g}(\Omega^4 y_1 + 4\Omega^3 y_2 + (6\Omega^2 + \omega^2)y_3 + 4\Omega y_4) = \\ &= -\left[(\Omega^4 \frac{1}{g} + 6\Omega^2 + \omega^2)\theta + (4\Omega^3 \frac{1}{g} + 4\Omega)\frac{d\theta}{dt} - \right. \\ &\quad \left. -\Omega^4 \frac{1}{g}(s - s_0) - 4\Omega^3 \frac{1}{g} \frac{ds}{dt} \right] \end{aligned} \quad (10.11)$$

Разумеется здесь предполагается, что компоненты вектора состояния $\theta, \theta', (s - s_0), s'$ можно абсолютно точно и сколь угодно быстро измерить.

Не вполне управляемые системы. Структура не полностью управляемой системы.

Пусть известно, что машина со скалярным управлением, описываемая системой уравнений

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{b} u \quad (10.12)$$

$(n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times 1) \quad (n \times 1) \quad (1 \times 1)$

не полностью управляема. В этом случае определитель матрицы управляемости $\mathbf{W} = (\mathbf{A}^0\mathbf{b} \ \mathbf{A}^1\mathbf{b} \ \mathbf{A}^2\mathbf{b} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b})$

равен нулю и $\text{rank } \mathbf{W} = k < n$.

Прежде всего отметим, что справедливо следующее утверждение.

Среди всех векторов-столбцов, составляющих матрицу \mathbf{W} , линейно независимыми будут именно первые k столбцов.

Действительно. Предположим сначала, что первый и второй столбец линейно зависимы, то есть $\mathbf{Ab} = c\mathbf{b}$. В этом случае

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2\mathbf{b} &= \mathbf{A}(\mathbf{Ab}) = \mathbf{A}(c\mathbf{b}) = c\mathbf{Ab} = c^2\mathbf{b} \\ \mathbf{A}^3\mathbf{b} &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^2\mathbf{b}) = \mathbf{A}(c^2\mathbf{b}) = c^2\mathbf{Ab} = c^3\mathbf{b} \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{b}) = \mathbf{A}(c^{n-2}\mathbf{b}) = c^{n-2}\mathbf{Ab} = c^{n-1}\mathbf{b} \end{aligned} \tag{10.13}$$

Следовательно все столбцы линейно зависимы.

Пусть теперь третий столбец является линейной комбинацией первых двух, то есть $\mathbf{A}^2\mathbf{b} = c_0\mathbf{b} + c_1\mathbf{Ab}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^3\mathbf{b} &= \mathbf{A}(c_0\mathbf{b} + c_1\mathbf{Ab}) = c_0\mathbf{Ab} + c_1\mathbf{A}^2\mathbf{b} = \\ &= c_0\mathbf{Ab} + c_1(c_0\mathbf{b} + c_1\mathbf{Ab}) = (\tilde{c}_0\tilde{c}_1)\mathbf{b} + (c_0 + c_1)\mathbf{Ab} \\ \mathbf{A}^4\mathbf{b} &= \mathbf{A}((\tilde{c}_0\tilde{c}_1)\mathbf{b} + (c_0 + c_1)\mathbf{Ab}) = \\ &= c_0c_1\mathbf{Ab} + (c_0 + c_1)\mathbf{A}^2\mathbf{b} = \\ &= c_0c_1\mathbf{Ab} + (c_0 + c_1)(c_0\mathbf{b} + c_1\mathbf{Ab}) = \\ &= (\tilde{c}_0\tilde{c}_1 + c_0^2)\mathbf{b} + (2\tilde{c}_0\tilde{c}_1 + c_1^2)\mathbf{Ab} \end{aligned}$$

Все последующие столбцы являются линейной комбинацией первых двух.

Иначе говоря, если какой-то столбец оказался линейной комбинацией предыдущих, то и все последующие столбцы в матрице управляемости являются их линейной комбинацией. Поэтому, если в матрице \mathbf{W} имеется ровно k линейно независимых столбцов, то они занимают k первых мест.

Используя это обстоятельство, построим специальное преобразование не вполне управляемой системы

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{y}, \quad \det \mathbf{C} \neq 0 \tag{10.14}$$

Подставляя замену переменных (10.14) в систему (10.12), имеем

$$\mathbf{y}' = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{y} + \mathbf{C}^{-1} \mathbf{b} u \quad (10.15)$$

$(n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times 1) \quad (n \times 1) \quad (1 \times 1)$

Обозначим

$$\tilde{\mathbf{N}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{G} \quad (10.16)$$

Столбцы матрицы \mathbf{C} - $\tilde{\mathbf{n}}_1, \tilde{\mathbf{n}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{n}}_n$ - это векторы нового базиса, представленные в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$.

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{C} \mathbf{e}_1, \quad \dots, \quad \mathbf{c}_n = \mathbf{C} \mathbf{e}_n \quad (10.10)$$

Матрицу преобразования \mathbf{C} образуют k линейно независимых векторов-столбцов, являющихся специальной линейной комбинацией первых k столбцов матрицы \mathbf{W} , и $(n-k)$ достаточно произвольно выбранных линейно независимых векторов-столбцов. Они совместно образуют базис в пространстве состояний системы.

Поскольку первые $k+1$ столбцов уже линейно зависимы, то существуют такие числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$, что

$$a_0 \mathbf{E} \mathbf{b} + a_1 \mathbf{A} \mathbf{b} + \dots + a_{k-1} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b} + \mathbf{A}^k \mathbf{b} = 0 \quad (10.18)$$

Положим

$$\mathbf{c}_k = \mathbf{A}^0 \mathbf{b} = \mathbf{b} \quad (10.19)$$

Тогда, поскольку $\mathbf{c}_k = \mathbf{C} \mathbf{e}_k$, то $\mathbf{b} = \mathbf{C} \mathbf{e}_k$.

Пусть, далее,

$$\tilde{\mathbf{n}}_{k-1} = \mathbf{A} \mathbf{b} + a_{k-1} \mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{c}_k + a_{k-1} \mathbf{c}_k \quad (10.20)$$

Тогда, поскольку $\mathbf{c}_{k-1} = \mathbf{C} \mathbf{e}_{k-1}$, то $\mathbf{A} \mathbf{c}_k = \mathbf{C}(\mathbf{e}_{k-1} - a_{k-1} \mathbf{e}_k)$.

Положим

$$\tilde{\mathbf{n}}_{k-2} = \mathbf{A}^2 \mathbf{b} + a_{k-1} \mathbf{A} \mathbf{b} + a_{k-2} \mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{c}_{k-1} + a_{k-2} \mathbf{c}_k \quad (10.21)$$

Тогда, так как $\mathbf{c}_{k-2} = \mathbf{C} \mathbf{e}_{k-2}$, то $\mathbf{A} \mathbf{c}_{k-1} = \mathbf{C}(\mathbf{e}_{k-2} - a_{k-2} \mathbf{e}_k)$.

Положим

$$\tilde{\mathbf{n}}_{k-3} = \mathbf{A}^3 \mathbf{b} + a_{k-1} \mathbf{A}^2 \mathbf{b} + a_{k-2} \mathbf{A} \mathbf{b} + a_{k-3} \mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{c}_{k-2} + a_{k-3} \mathbf{c}_k \quad (10.22)$$

Тогда, так как $\mathbf{c}_{k-3} = \mathbf{C} \mathbf{e}_{k-3}$, то $\mathbf{A} \mathbf{c}_{k-2} = \mathbf{C}(\mathbf{e}_{k-3} - a_{k-3} \mathbf{e}_k)$.

И так далее.

Наконец, положим

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b} + a_{k-1} \mathbf{A}^{k-2} \mathbf{b} + \dots + a_2 \mathbf{A} \mathbf{b} + a_1 \mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{c}_2 + a_1 \mathbf{c}_k \quad (10.23)$$

Тогда, так как $\mathbf{c}_1 = \mathbf{C} \mathbf{e}_1$, то $\mathbf{A} \mathbf{c}_2 = \mathbf{C}(\mathbf{e}_1 - a_1 \mathbf{e}_k)$.

Из соотношений (10.18) и (10.23) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{c}_1 &= \mathbf{A}^k \mathbf{b} + a_{k-1} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b} + \dots + a_1 \mathbf{A} \mathbf{b} + (a_0 \mathbf{b} - a_0 \mathbf{b}) = \\ &= (\mathbf{A}^k + a_{k-1} \mathbf{A}^{k-1} + \dots + a_1 \mathbf{A} + a_0) \mathbf{b} - a_0 \mathbf{b} = -a_0 \mathbf{b} \end{aligned} \quad (10.24)$$

Таким образом $\mathbf{A} \mathbf{c}_1 = \mathbf{C}(-a_0 \mathbf{e}_k)$.

Из соотношений (10.16) следует, что $\mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{C} \mathbf{G}$. Матрица $\mathbf{C} = (\tilde{\mathbf{n}}_1, \tilde{\mathbf{n}}_2, \dots, \mathbf{c}_k, \mathbf{c}_{k+1}, \dots, \tilde{\mathbf{n}}_n)$. Следовательно, матрица $\mathbf{G} = (\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_n)$ полностью определилась

$$\mathbf{G} = ((-a_0 \mathbf{e}_k), (\mathbf{e}_1 - a_1 \mathbf{e}_k), \dots, (\mathbf{e}_{k-1} - a_{k-1} \mathbf{e}_k), \mathbf{G}_{k+1}, \dots, \mathbf{G}_n) \quad (10.26)$$

Итак, построено преобразование (10.14), приводящее не вполне управляемую систему (10.12) к виду

$$\mathbf{y}' = \underset{(n \times 1)}{\mathbf{G}} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{y}} + \underset{(n \times 1)}{\mathbf{e}_k} \underset{(1 \times 1)}{u} \quad (10.27)$$

Лекция 11.

Декомпозиция не полностью управляемой системы

Полученная в лекции 17 специальная форма представления уравнений не полностью управляемой линейной стационарной машины со скалярным управлением

$$\underset{(n \times 1)}{\mathbf{y}'} = \underset{(n \times n)}{\mathbf{G}} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{y}} + \underset{(n \times 1)}{\mathbf{e}_k} \underset{(1 \times 1)}{u} \quad (11.1)$$

позволяет провести так называемую декомпозицию системы. То есть отделить описание (уравнения) неуправляемой части. Это принципиально важная задача, поскольку, как установлено ранее, с помощью применения метода обратной связи всегда можно обеспечить нужное качество переходных процессов вполне управляемой части системы.

Матрица \mathbf{G} состоит из трех блоков. Верхний левый блок размерности

$k \times k$ (напомним, что k - ранг матрицы управляемости \mathbf{W}) имеет структуру сопровождающей матрицы $\mathbf{G}_{11} = \mathbf{A}_0$, нижний левый блок \mathbf{G}_{21}

размерности $(n - k) \times k$ чисто нулевой, правый блок размерности $n \times (n - k)$ может иметь различную структуру в зависимости от выбора векторов-столбцов $\tilde{\mathbf{n}}_k, \tilde{\mathbf{n}}_{k+1}, \dots, \tilde{\mathbf{n}}_n$ матрицы преобразования \mathbf{C} .

Вектор - дозатор системы (11.1) имеет одну нетривиальную компоненту: единица находится на k -том месте.

Переходя к новым переменным ξ , η с помощью соотношения

$$\mathbf{y}^{\circ} = (\xi^{\circ}, \eta^{\circ}) \quad (11.2)$$

и вводя ортонормированный базис $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_k$ в k -мерном пространстве векторов ξ , получим разбиение системы (11.1) на две подсистемы

$$\begin{aligned} \underset{(k \times 1)}{\xi'} &= \underset{(k \times k)}{\mathbf{A}_0} \underset{(k \times 1)}{\xi} + \underset{(k \times k)}{\mathbf{G}_{12}} \underset{((n-k) \times 1)}{\eta} + \underset{(k \times 1)}{\mathbf{i}_k} \underset{(1 \times 1)}{u} \\ \underset{((n-k) \times 1)}{\eta'} &= \underset{((n-k) \times (n-k))}{\mathbf{G}_{22}} \underset{((n-k) \times 1)}{\eta} \end{aligned} \quad (11.3)$$

Вторая подсистема (11.3) (неуправляемая часть) полностью отделилась. Первая подсистема (11.3) при $\eta = 0$ удовлетворяет структурным требованиям, предъявляемым к матрице и вектору дозатора вполне управляемой системы со скалярным управлением.

Проведенная операция и называется декомпозицией не вполне управляемой системы со скалярным управлением.

Задача об управлении колебаниями системы, состоящей из двух маятников с подвижной осью подвеса. Условия полной управляемости. Условия отсутствия полной управляемости. Декомпозиция. Физический смысл новых переменных.

В качестве примера управляемой многочастотной колебательной системы рассмотрим систему двух маятников с подвижной точкой подвеса. Пусть два физических маятника

имеют точки подвеса, находящиеся на твердом теле, которое может передвигаться вдоль горизонтальной прямой

При малых углах отклонения маятников от вертикали линеаризованные уравнения их движения могут быть записаны в виде

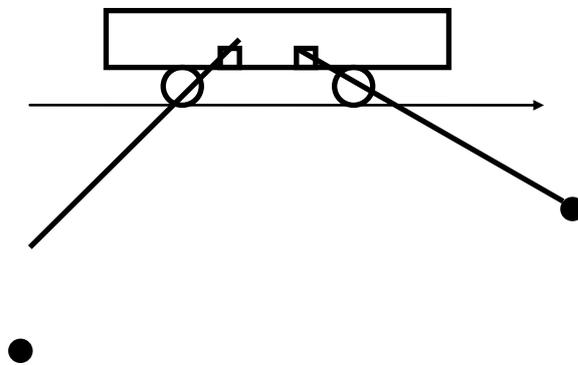


Рис.11.1

$$\begin{aligned}
 z'_1 &= z_2 \\
 z'_2 &= -\omega_1^2 z_1 + b_2 u \\
 z'_3 &= z_4 \\
 z'_4 &= -\omega_2^2 z_3 + b_4 u
 \end{aligned}
 \tag{11.4}$$

Здесь $z_i = \varphi_i$ - угол отклонения i -го маятника от вертикали, $\omega_i^2 = m_i g L_i l_i^{-1}$ - квадрат частоты собственных колебаний i -го маятника (m_i - его масса, l_i - уго момент инерции относительно оси подвеса, L_i - расстояние от точки подвеса до центра масс i -го маятника, g - ускорение силы тяжести), $b_{2i} = m_i L_i l_i^{-1}$ ($i = 1, 2$), u - "управление" - ускорение одной из точек подвеса маятников.

Векторно-матричные уравнения движения системы имеют вид

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_2^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix} u \quad (11.5)$$

То есть

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_2^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

Матрица управляемости системы (11.5)

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & b_2 & 0 & -\omega_1^2 b_2 \\ b_2 & 0 & -\omega_1^2 b_2 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & -\omega_2^2 b_4 \\ b_4 & 0 & -\omega_2^2 b_4 & 0 \end{pmatrix} \quad (11.6)$$

Ее определитель

$$\det \mathbf{W} = b_2^2 b_4^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2)(\omega_2^2 - \omega_1^2) \quad (11.7)$$

отличен от нуля при $\omega_1 \neq \omega_2$.

Следовательно, при этом условии система (11.5) вполне управляема.

Характеристическое уравнение, построенное по матрице \mathbf{A} системы (11.5),

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \omega_1^2 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \omega_2^2 & \lambda \end{vmatrix} = \omega_1^2 \omega_2^2 + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \lambda^2 + \lambda^4 = 0 \quad (11.8)$$

Таким образом, каноническая система с “сопровождающей матрицей” \mathbf{A}_0 , к которой приводится полностью управляемая система со скалярным управлением, в данном случае имеет вид

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_1^2 \omega_2^2 & 0 & -(\omega_1^2 + \omega_2^2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (11.9)$$

Преобразование $\mathbf{z} = \mathbf{C} \mathbf{y}$, приводящее систему к виду (11.9), строится в соответствии с соотношениями (15.19) - (15.24)

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2^2 b_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 b_2 & 0 & b_2 \\ \omega_1^2 b_4 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & \omega_1^2 b_4 & 0 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad (11.10)$$

При полной управляемости, условием которой является требование , могут быть поставлены и решены различные задачи управления колебаниями данной системы. Если же , система перестает быть полностью управляемой (ранг матрицы управляемости падает до), и задачи управления колебаниями, вообще говоря, не имеют решения. Действительно, никакое скалярное управление не сможет перевести две идентичные системы из разных начальных состояний в одно и то же конечное состояние в момент $t = T$. Однако, как уже известно, применяя операции декомпозиции, можно

разделить систему на вполне управляемую и неуправляемую части. К чему же приводит декомпозиция в данной задаче?

Поскольку ранг матрицы управляемости равен двум, то линейно независимыми будут первые два ее столбца.

Поскольку первые 3 столбца уже линейно зависимы, то существуют такие числа a_0, a_1 , что

$$a_0 \mathbf{E} \mathbf{b} + a_1 \mathbf{A} \mathbf{b} + \mathbf{A}^2 \mathbf{b} = 0, \quad (11.11)$$

то есть

$$a_0 \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} b_2 \\ 0 \\ b_4 \\ 0 \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (11.12)$$

Следовательно, $a_0 = \omega^2, a_1 = 0$.

Положим $\mathbf{c}_2 = \mathbf{A}^0 \mathbf{b} = \mathbf{b}, \tilde{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{A} \mathbf{b} + a_1 \mathbf{b}$

$$\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{n}}_1 = \begin{pmatrix} b_2 \\ 0 \\ b_4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11.13)$$

Матрицу преобразования \mathbf{C} образуют два линейно независимых вектора-столбца $\tilde{\mathbf{n}}_1, \tilde{\mathbf{n}}_2$ и два достаточно произвольно выбранных линейно независимых вектора-столбца $\tilde{\mathbf{n}}_3, \tilde{\mathbf{n}}_4$, дополняющих $\tilde{\mathbf{n}}_1, \tilde{\mathbf{n}}_2$ до базиса в пространстве состояний системы.

Поскольку векторы $\tilde{\mathbf{n}}_1, \tilde{\mathbf{n}}_2$ ортогональны друг другу, потребуем, например, чтобы система векторов $\tilde{\mathbf{n}}_1, \tilde{\mathbf{n}}_2, \tilde{\mathbf{n}}_3, \tilde{\mathbf{n}}_4$ была не только базисной, но и ортогональной. С этой целью, пользуясь предоставленной нам определенной свободой, выберем $\tilde{\mathbf{n}}_3, \tilde{\mathbf{n}}_4$ так, чтобы матрица $\tilde{\mathbf{N}} = (\tilde{\mathbf{n}}_1, \tilde{\mathbf{n}}_2, \tilde{\mathbf{n}}_3, \tilde{\mathbf{n}}_4)$ имела вид

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} b_2 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & b_4 \\ b_4 & 0 & -b_2 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & -b_2 \end{pmatrix} \quad (11.14)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{b_2 z_1 + b_4 z_3}{b_2^2 + b_4^2}, y_2 = \frac{b_2 z_2 + b_4 z_4}{b_2^2 + b_4^2} \\ y_3 &= \frac{b_4 z_1 - b_2 z_3}{b_2^2 + b_4^2}, y_4 = \frac{b_4 z_2 - b_2 z_4}{b_2^2 + b_4^2} \end{aligned} \quad (11.15)$$

В переменных y получим систему уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\omega^2 y_1 + u \\ y_3' &= y_4 \\ y_4' &= -\omega^2 y_3 \end{aligned} \quad (11.16)$$

Физический смысл переменных y рассмотрим в том случае, когда $b_2 = b_4 = b$. Вполне управляемыми оказываются синфазные колебания маятников, а неуправляемыми - противофазные.

В рассмотренном примере управляемой двухчастотной колебательной системы обнаружился замечательный факт: условия полной управляемости свелись к требованиям на соотношение частот ω_1, ω_2 и оказались совершенно не зависящими от выбора вектора дозатора \mathbf{b} . Ясно, что требования на соотношение частот - это наложение определенных условий на спектр матрицы \mathbf{A} , то есть на коэффициенты ее характеристического полинома. Характеристический полином матрицы \mathbf{A} - это определитель матрицы $\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}$ (\mathbf{E} - единичная матрица), которая называется характеристической матрицей системы. Таким образом рассмотренный пример показал, что характеристическая матрица системы может обладать такими свойствами, что ни каким выбором вектора дозатора полной управляемости машины со скалярным управлением добиться не удастся.

Лекция 12.

Условия управляемости и наблюдаемости.

Итак, нами построены две матрицы, характеризующие структуру алгебро-дифференциальных систем, описывающих динамику линейных стационарных машин со скалярным управлением:

матрица управляемости $\mathbf{W} = (\mathbf{A}^0\mathbf{b} \ \mathbf{A}^1\mathbf{b} \ \mathbf{A}^2\mathbf{b} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b})$ и матрица

$$\text{наблюдаемости } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{cA}^0 \\ \mathbf{cA}^1 \\ \dots \\ \mathbf{cA}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

При формировании матрицы управляемости используется матрица системы и вектор-столбец дозатор. При формировании матрицы наблюдаемости используется матрица системы и вектор-строка коллектор.

Полная управляемость системы гарантируется условием $\det \mathbf{W} \neq 0$, полная наблюдаемость - условием $\det \mathbf{S} \neq 0$.

Понятие сопряженной системы. Двойственность необходимых и достаточных условий полной управляемости и полной наблюдаемости сопряженных систем.

Наряду с системой (11.16) оказывается полезным рассмотрение, так называемой, сопряженной системы уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= -\mathbf{A}^{\circ} \mathbf{r} + \tilde{\mathbf{n}}^{\circ} \mathbf{v} \\ \mathbf{q} &= \mathbf{b}^{\circ} \mathbf{r} \end{aligned} \tag{12.1}$$

В качестве матрицы сопряженной системы выступает взятая с обратным знаком матрица основной задачи. Вектор-столбец дозатора в сопряженной системе - это транспонированная вектор-строка коллектора

основной системы. Вектор-строка коллектора сопряженной системы - это транспонированный вектор-столбец дозатора основной системы.

Отметим, что, не ограничивая общности, можно предполагать, что начальные условия для сопряженной системы всегда расположены “на единичной сфере” $|\mathbf{r}^0| = 1$. Имеет место следующее утверждение.

Система (11.16) вполне управляема (наблюдаема) тогда и только тогда, когда система (12.1) вполне наблюдаема (управляема). Говорят, что управляемость и наблюдаемость сопряженных систем сами сопряжены (или двойственны).

Действительно. Матрицы управляемости и наблюдаемости для системы (12.1) представляются в виде

$$\mathbf{W}_{\tilde{n} \hat{i} \ddot{i}} = (\mathbf{c}^{\circ} \quad -\mathbf{A}^{\circ} \mathbf{c}^{\circ} \quad (\mathbf{A}^{\circ})^2 \tilde{\mathbf{n}}^{\circ} \quad \dots \quad (-1)^{n-1} (\mathbf{A}^{\circ})^{n-1} \tilde{\mathbf{n}}^{\circ})$$

$$\mathbf{S}_{\tilde{n} \hat{i} \ddot{i}} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^{\circ} \\ -\mathbf{b}^{\circ} \mathbf{A}^{\circ} \\ \dots \\ (-1)^{n-1} \mathbf{b} \mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix} \quad (12.2)$$

Определители этих матриц отличны от нуля тогда и только тогда, когда не равны нулю соответственно определители матриц наблюдаемости и управляемости исходной системы.

Соотношение Грина между скалярным произведением векторов внутреннего состояния сопряженных систем и их входными и выходными сигналами.

Выпишем уравнение, которому удовлетворяет скалярное произведение векторов внутреннего состояния основной и сопряженной систем.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{z}, \mathbf{r}) &= (\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{z}}{dt}) + (\mathbf{z}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}) = \\ &= (\mathbf{r}, (\mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}u)) + (\mathbf{z}, (-\mathbf{A}^{\circ}\mathbf{r} + \tilde{\mathbf{n}}^{\circ}v)) = \\ &= u(\mathbf{b}, \mathbf{r}) + v(\mathbf{z}, \mathbf{c}^{\circ}) = u\mathbf{b}^{\circ}\mathbf{r} + v\mathbf{c}\mathbf{z} = uq + vy \end{aligned} \quad (12.2)$$

Здесь учтено, что

$$(\mathbf{Az}, \mathbf{r}) = (\mathbf{Az})^{\circ} \mathbf{r} = \mathbf{z}^{\circ} \mathbf{A}^{\circ} \mathbf{r} = (\mathbf{z}, \mathbf{A}^{\circ} \mathbf{r}) \quad (12.3)$$

Уравнения типа (12.2), чаще представленные в интегральной форме

$$(\mathbf{z}(T), \mathbf{r}(T)) - (\mathbf{z}(0), \mathbf{r}(0)) = \int_0^T (u(s)q(s) + v(s)y(s))ds, \quad (12.4)$$

в математике называют соотношениями Грина.

Решение задачи о максимальном быстродействии линейной вполне управляемой стационарной SISO машины как пример совместного анализа динамики сопряженных систем.

Применим соотношение Грина между скалярным произведением векторов внутреннего состояния сопряженных систем и их входными и выходными сигналами для решения принципиально важной задачи динамики машин.

Пусть для линейной стационарной вполне управляемой SISO машины, описанной системой уравнений

$$\begin{array}{l} \mathbf{z}' = \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{b} u \\ \begin{matrix} (n \times 1) & (n \times n) & (n \times 1) & (n \times 1) & (1 \times 1) \end{matrix} \end{array} \quad (12.5)$$

$$\begin{array}{l} y = \mathbf{c} \mathbf{z} \\ \begin{matrix} (1 \times 1) & (1 \times n) & (n \times 1) \end{matrix} \end{array}$$

с заданными начальными условиями

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}^0 \quad (12.6)$$

и определенным ограничением на возможности управления

$$|u| \leq f_0 \quad (12.7)$$

поставлена задача как можно скорее определенным образом изменить вектор внутреннего состояния \mathbf{z} (добиться, для определенности, состояния $\mathbf{z} = 0$).

Если обозначить через T время перевода системы в новое состояние, то слова “как можно скорее” заменяются формулой

$$T \rightarrow \min \quad (12.8)$$

Такого типа задачи называются задачами максимального быстродействия.

Для решения задачи наряду с системой (12.5) будем рассматривать сопряженную систему (12.1). Отметим, что она вполне наблюдаема из-за двойственности свойств управляемости и наблюдаемости основной и сопряженной систем. Пусть “сопряженная машина” не управляется ($v = 0$) и пусть $|\mathbf{r}^0| = 1$. Тогда имеет место соотношение, получаемое из (12.2)

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{z}, \mathbf{r}) = \mathbf{u} \mathbf{b}^0 \mathbf{r} = uq \quad (12.9)$$

или в интегральной форме

$$(\mathbf{z}(T), \mathbf{r}(T)) - (\mathbf{z}(0), \mathbf{r}(0)) = \int_0^T u(s)q(s)ds \quad (12.10)$$

Справедливо следующее утверждение.

Для того, чтобы решить задачу максимального быстродействия (если она, вообще, решается) управление u следует выбирать так, чтобы

$$u = f_0 \text{sign}(q) \quad (12.11)$$

То есть модуль управления всегда должен иметь максимально возможную величину, а знак управления должен определяться знаком выхода (наблюдаемой) сопряженной системы.

Действительно. Обозначим вектор состояния машины и время достижения точки $\mathbf{z} = 0$, соответствующие управлению вида (12.11), через $\mathbf{z}_1(t)$ и T_1 , а не соответствующие через $\mathbf{z}_2(t)$ и T_2 . Предположим, что $T_2 < T_1$, то есть, что некоторое управление из другого класса ускоряет процесс.

Используя соотношение (12.10), для режима движения, соответствующего управлению вида (12.11), имеем

$$(\mathbf{z}_1(T_2), \mathbf{r}(T_2)) - (\mathbf{z}^0, \mathbf{r}(0)) = \int_0^{T_2} u(s)q(s)ds = f_0 \int_0^{T_2} |q(s)|ds \quad (12.12)$$

$$-(\mathbf{z}^0, \mathbf{r}(0)) = \int_0^{T_1} u(s)q(s)ds = f_0 \int_0^{T_1} |q(s)|ds,$$

поскольку $\mathbf{z}_1(T_1) = 0$.

Для режима движения, не соответствующего управлению вида (12.11),

$$-(\mathbf{z}^0, \mathbf{r}(0)) = \int_0^{T_2} u(s)q(s)ds, \quad (12.13)$$

поскольку $\mathbf{z}_2(T_2) = 0$.

Вычитая из (12.12) соотношение (2.13), получаем

$$(\mathbf{z}_1(T_2), \mathbf{r}(T_2)) = -f_0 \int_{\dot{O}_2}^{T_1} |q(s)| ds \leq 0 \quad (12.14)$$

$$(\mathbf{z}_1(T_2), \mathbf{r}(T_2)) = \int_0^{T_2} (f_0 |q(s)| - u(s)q(s)) ds \geq 0 \quad (12.15)$$

Из соотношений (12.14), (12.15) вытекает, что в момент времени T_2

$$(\mathbf{z}_1(T_2), \mathbf{r}(T_2)) = 0 \quad (12.16)$$

и, следовательно,

$$\int_{\dot{O}_2}^{T_1} |q(s)| ds = 0 \quad (12.17)$$

То есть при $t \in [T_2, T_1]$ наблюдаемая сопряженной системы тождественно равна нулю. Следовательно, так как сопряженная система вполне наблюдаема, при $t \in [T_2, T_1]$ тождественно обращается в ноль вектор $\mathbf{r}(t)$, но это противоречит тому, что $|\mathbf{r}^0| = 1$. В однородной линейной системе такого быть не может.

Таким образом, мы пришли в противоречие с предположением, что $T_2 < T_1$.

Итак, решение задачи быстрогодействия линейной, стационарной, вполне управляемой машины должно удовлетворять следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{b} \operatorname{sign} q \\ \mathbf{r}' &= -\mathbf{A}^{\dot{}} \mathbf{r} \end{aligned} \quad (12.18)$$

$$q = \mathbf{b}^{\dot{}} \mathbf{r}$$

С дополнительными условиями

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}^0, |\mathbf{r}^0| = 1, \mathbf{z}(T) = 0, T \rightarrow \min \quad (12.19)$$

В задаче (12.18), (12.19) ровно n неизвестных: время T (+) n составляющих вектора начальных условий сопряженной системы (-) условие $|\mathbf{r}^0| - 1 = 0$.

Вообще говоря, задачу приходится решать численно. Для того, чтобы интегрирование уравнений можно было бы вести на фиксированном временном интервале, делают замену независимой переменной, вводя “безразмерное время” $\tau = t / T$. На нулевом шаге задаются некоторыми

$T_{(0)}, \mathbf{r}_{(0)}^0$ и находят соответствующий вектор состояния $\mathbf{r}_{(0)}(t)$ и наблюдаемую $\mathbf{q}_0(t)$ сопряженной системы. По значениям $\mathbf{q}_{(0)}(t_n)$ на сетке $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ определяется функция $\mathbf{u}_{(0)}(t)$. Под действием управления $\mathbf{u}_{(0)}(t)$ вектор состояния основной системы $\mathbf{z}_{(0)}(t)$ к моменту $T_{(0)}$ приобретает некоторое значение $\mathbf{z}_{(0)}(T_{(0)})$, вообще говоря, конечно, отличное от нуля. Однако, если нулевое приближение к решению задачи выбрано хорошо, то

$$\mathbf{z}(T_{(0)} + \Delta T, \mathbf{r}_{(0)}^0 + \Delta \mathbf{r}^0) = \mathbf{0} \quad (12.20)$$

при $\Delta T \ll 1$, $|\Delta \mathbf{r}^0| \ll 1$.

Из соотношения (12.20) можно приближенно найти ΔT , $\Delta \mathbf{r}^0$.

На следующем, первом, шаге принимают $T_{(1)} = T_{(0)} + \Delta T^0$,

$\mathbf{r}_{(1)}^0 = \mathbf{r}_{(0)}^0 + \Delta \mathbf{r}^0$, проводят следующую итерацию и так далее.

Принципиальное значение в вычислительной процедуре имеют задача решения уравнения (12.20) относительно переменных ΔT , $\Delta \mathbf{r}^0$ (применение “модифицированного метода Ньютона”) и выбор способа аппроксимации функции $\text{sign}(q)$ в моменты смены знака выхода сопряженной системы.

На интервале $t \in (t_n, t_{n+1})$ полагают $\mathbf{u} = \text{sign}(q(t_n))$, если $\text{sign}(q(t_n)) = \text{sign}(q(t_{n+1}))$, а если $q(t)$ на интервале $t \in (t_n, t_{n+1})$ меняет знак, то полагают $\mathbf{u} = \xi \text{sign}(q(t_n)) + (1 - \xi) \text{sign}(q(t_{n+1}))$. Число ξ находят как корень уравнения $q(t_n + \xi \tau) = 0$ на интервале $t \in (t_n, t_{n+1})$ с помощью линейной интерполяции с узлов t_n, t_{n+1} .

Эти подробности существенны, так как значения начального вектора \mathbf{r}^0 решения сопряженной системы влияют на значения $\mathbf{z}(T)$ не прямо, а через положение нулей функции $q(t)$.

Лекция 13.

Задача о наискорейшей остановке в заданном месте поступательно движущегося твердого тела с помощью ограниченного по модулю силового воздействия.

В лекции 11 в качестве примера алгебро-дифференциального представления SISO - системы были выписаны уравнения простейшей управляемой системы второго порядка

$$\begin{aligned}x'' &= u \\ y &= x\end{aligned}\tag{13.1}$$

В данном случае наблюдаемая “у” совпадает с параметром внутреннего состояния “х”.

В векторно-матричном представлении система (13.1) имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= (1 \quad 0) \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{13.2}$$

Сопряженная система уравнений представляется в виде

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} \\ q &= (0 \quad 1) \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{13.3}$$

Поставим задачу о максимальном быстродействии.

Пусть для линейной стационарной вполне управляемой SISO машины, описанной системой уравнений (13.2) с заданными начальными условиями

$$\begin{pmatrix} z_0(0) \\ z_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0^0 \\ z_1^0 \end{pmatrix} \quad (13.4)$$

и определенным ограничением на возможности управления

$$|u| \leq 1 \quad (13.5)$$

поставлена задача как можно скорее попасть в состояние

$$\begin{pmatrix} z_0(T) \\ z_1(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \rightarrow \min \quad (13.6)$$

Как ранее показано, решение задачи быстродействия линейной, стационарной, вполне управляемой машины должно удовлетворять следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{sign}(q) \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} \\ q &= (0 \quad 1) \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13.7)$$

С дополнительными условиями (13.4), (13.6) в основной системе и условием

$$(r_0^0)^2 + (r_1^0)^2 = 1 \quad (13.8)$$

на начальные данные в сопряженной системе.

Решим сначала сопряженную систему

$$\begin{pmatrix} r_0(t) \\ r_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0^0 \\ r_1^0 - r_0^0 t \end{pmatrix}, q(t) = r_1^0 - r_0^0 t \quad (13.9)$$

Следовательно,

$$u = \text{sign}(r_1^0 - r_0^0 t) \quad (13.10)$$

По виду наблюдаемой сопряженной системы $q(t)$ можно сказать, что управление имеет одну точку переключения:

$r_1^0 - r_0^0 t_i = 0$. При $t = t_i$ период разгона (торможения) сменяется периодом торможения (разгона).

Таким образом, возникли две задачи с постоянным управлением, решения которых должны быть согласованы с дополнительными условиями и между собой

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (13.11)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (13.12)$$

Решение задачи (13.11) имеет вид

$$\begin{aligned} z_1 &= t + a_1 \\ z_0 &= 0,5t^2 + a_1 t + a_0 = 0,5[(z_1)^2 - (a_1)^2] + a_0 \end{aligned} \quad (13.13)$$

Здесь $a_0 = z_0^0$, $a_1 = z_1^0$ или $a_0 = 0,5T^2$, $\dot{a}_1 = -T$.

Решение задачи (13.12)

$$\begin{aligned} z_1 &= -t + b_1 \\ z_0 &= -0,5t^2 + b_1 t + b_0 = -0,5[(z_1)^2 - (b_1)^2] + b_0 \end{aligned} \quad (13.14)$$

Здесь $b_0 = -0,5T^2$, $b_1 = T$ или $b_0 = z_0^0$, $b_1 = z_1^0$.

Кривая, образованная дугами парабол $z_0 = -0,5(z_1)^2$ в верхней полуплоскости и $z_0 = 0,5(z_1)^2$ в нижней полуплоскости, является линией переключения знака управления.

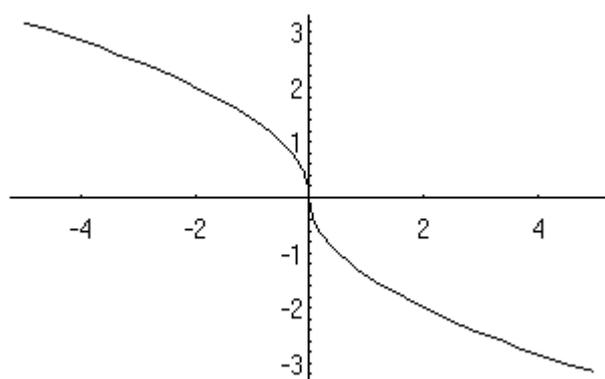


Рис.13.1

Лекция 14.

Пример Л.Чезари, подтверждающий необходимость требований теоремы Ляпунова о стремлении к нулю решений системы с почти постоянными коэффициентами при неограниченно нарастающем времени.

Пример, предложенный Л.Чезари, показывает, что требование теоремы Ляпунова об устойчивости характеристического полинома матрицы \mathbf{B} , вообще говоря, ослабить нельзя.

Действительно. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \\ & \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2/t \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14.1)$$

в которой матрица $\mathbf{C}(t)$, начиная с определенного момента времени t , становится сколь угодно малой, но в которой матрица \mathbf{B} имеет чисто мнимые корни.

Нетрудно проверить, что среди решений нестационарной системы (14.1) имеются растущие. Векторы-столбцы

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + t \sin t \\ t \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos t + t \sin t \\ t \cos t \end{pmatrix} \quad (14.2)$$

являются растущими решениями (14.1), образуя в пространстве решений базис.

Неравенство Важевского. Евклидова норма. Симметризация матрицы. Минимальная и максимальная оценка для собственных чисел симметризованной матрицы. Получение двусторонней оценки Важевского для евклидовой нормы решения однородной системы уравнений с переменными коэффициентами.

Еще одним способом получения аналитической информации (правда, довольно грубой) о поведении нестационарной линейной системы является применение оценок типа “неравенства Важевского”.

Предлагается получить оценку поведения не самого вектора состояния системы $\mathbf{z}(t)$, а его евклидовой нормы

$$\|\mathbf{z}(t)\| = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_n^2} \quad (14.3)$$

Наряду с рассматриваемой однородной нестационарной линейной системой для вектора-столбца $\mathbf{z}(t)$

$$\underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}'} = \underset{(n \times n)}{\mathbf{A}(t)} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}} \quad (14.4)$$

Выпишем системы уравнений для вектора-строки $\mathbf{z}^\circ(t)$

$$\underset{(1 \times n)}{(\mathbf{z}^\circ)'} = \underset{(1 \times n)}{\mathbf{z}^\circ} \underset{(n \times n)}{\mathbf{A}(t)} \quad (14.5)$$

Находя производную по времени от функции $\mathbf{z}^2(t)$, имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{z}^2(t))' &= (\mathbf{z}, \mathbf{z})' = (\mathbf{z}^\circ \mathbf{z})' = (\mathbf{z}^\circ)' \mathbf{z} + \mathbf{z}^\circ \mathbf{z}' = \\ &= \mathbf{z}^\circ \mathbf{A}^\circ(t) \mathbf{z} + \mathbf{z}^\circ \mathbf{A}(t) \mathbf{z} = \mathbf{z}^\circ (\mathbf{A}^\circ(t) + \mathbf{A}(t)) \mathbf{z} \end{aligned} \quad (14.6)$$

Обозначим через $\mathbf{S}(t)$ симметрическую матрицу, равную полусумме матриц $\mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{A}^\circ(t)$,

$$\mathbf{S}(t) = \frac{\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^\circ(t)}{2}, \quad \mathbf{S}(t) = \mathbf{S}^\circ(t) \quad (14.7)$$

Используя матрицу $\mathbf{S}(t)$, представим (14.6) в форме

$$(\mathbf{z}^2(t))' = 2\mathbf{z}^\circ \mathbf{S}(t) \mathbf{z} = 2(\mathbf{z}, \mathbf{S}(t) \mathbf{z}) \quad (14.8)$$

Переход к симметрической матрице $\mathbf{S}(t)$ удобен потому, что

- 1). Все собственные значения всякой симметрической матрицы $\mathbf{S}_{(n \times n)}$ (корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ее характеристического уравнения) действительны.
- 2). Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям всякой симметрической матрицы $\mathbf{S}_{(n \times n)}$ ортогональны между собой.
- 3). Для всякой симметрической матрицы $\mathbf{S}_{(n \times n)}$ существует обвертывающее преобразование с ортогональной матрицей $\mathbf{U}_{(n \times n)}$ ($\mathbf{U}^\circ = \mathbf{U}^{-1}$), которое приводит симметрическую матрицу к диагональному виду. Элементами этой диагональной матрицы $\mathbf{D}_{(n \times n)}$ будут ее собственные значения

$$\mathbf{D}_{(n \times n)} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Эти алгебраические результаты существенно облегчают работу с симметрическими матрицами.

Скалярное произведение $(\mathbf{A}_{(n \times n)} \mathbf{z}_{(n \times 1)}, \mathbf{y}_{(n \times 1)})$ математики называют билинейной формой с матрицей \mathbf{A} .

В скалярном произведении матрицу \mathbf{A} можно перебрасывать с первого места на второе, заменяя ее транспонированной

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{(n \times n)} \mathbf{z}_{(n \times 1)}, \mathbf{y}_{(n \times 1)}) &= (\mathbf{A}_{(n \times n)} \mathbf{z}_{(n \times 1)})^\circ \mathbf{y}_{(n \times 1)} = \\ &= \mathbf{z}_{(1 \times n)}^\circ \mathbf{A}_{(n \times n)}^\circ \mathbf{y}_{(n \times 1)} = (\mathbf{z}_{(n \times 1)}, \mathbf{A}_{(n \times n)}^\circ \mathbf{y}_{(n \times 1)}) \end{aligned} \quad (14.9)$$

Следовательно, если матрица - симметрическая, то

$$(\mathbf{S}_{(n \times n)} \mathbf{z}_{(n \times 1)}, \mathbf{y}_{(n \times 1)}) = (\mathbf{z}_{(n \times 1)}, \mathbf{S}_{(n \times n)} \mathbf{y}_{(n \times 1)}) \quad (14.10)$$

В этом случае скалярное произведение $V(\mathbf{z}) = (\mathbf{z}_{(n \times 1)}, \mathbf{S}_{(n \times n)} \mathbf{z}_{(n \times 1)})$ называется квадратичной формой.

Найдем оценку для функции $V(\mathbf{z})$. Обозначим

$$\lambda(\mathbf{S}) = \min_i \lambda_i(\mathbf{S}), \quad \Lambda(\mathbf{S}) = \max_i \lambda_i(\mathbf{S}) \quad (14.11)$$

Полагая

$$\mathbf{y} = \mathbf{U} \mathbf{z} \quad (\mathbf{z} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{U}^\circ \mathbf{y}) \quad (14.12)$$

Имеем

$$V(\mathbf{z}) = \mathbf{y}^0 \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{U}^0 \mathbf{y} = \mathbf{y}^0 \mathbf{D} \mathbf{y} = \sum_i \lambda_i y_i^2 \quad (14.13)$$

Следовательно,

$$\lambda(\mathbf{S}) \|\mathbf{y}\|^2 \leq V(\mathbf{z}) \leq \Lambda(\mathbf{S}) \|\mathbf{y}\|^2 \quad (14.14)$$

Но,

$$\|\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{y}, \mathbf{y}) = (\mathbf{U}\mathbf{z}, \mathbf{U}\mathbf{z}) = (\mathbf{z}, \mathbf{U}^0 \mathbf{U} \mathbf{z}) = (\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{z}\|^2 \quad (14.15)$$

Таким образом получаем

$$\lambda(\mathbf{S}) \|\mathbf{z}\|^2 \leq V(\mathbf{z}) \leq \Lambda(\mathbf{S}) \|\mathbf{z}\|^2, \quad (14.16)$$

причем равенства слева и справа достигаются на собственном векторе \mathbf{z} , отвечающем, соответственно, наименьшему и наибольшему характеристическому числу матрицы \mathbf{S} .

Итак, поскольку соотношение (14.8) можно представить в виде

$$(\mathbf{z}^2(t))' = 2V(t, \mathbf{z}), \quad (14.17)$$

то имеет место двойное неравенство

$$\lambda(\mathbf{S}(t)) \leq \frac{(\|\mathbf{z}\|^2)'}{2\|\mathbf{z}\|^2} \leq \Lambda(\mathbf{S}(t)) \quad (14.18)$$

Следовательно,

$$\lambda(\mathbf{S}(t)) \leq (\ln \|\mathbf{z}\|)' \leq \Lambda(\mathbf{S}(t)) \quad (14.19)$$

Таким образом, интегрируя (14.19), окончательно получаем неравенство Важевского

$$\exp \int_0^t \lambda(s) ds \leq \frac{\|\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{z}^0\|} \leq \exp \int_0^t \Lambda(s) ds \quad (14.20)$$

Следствие. Для затухания со временем решений системы (14.4) достаточно выполнения условия

$$\Lambda(t) \leq h < 0 \text{ при } 0 \leq t < \infty \quad (14.21)$$

Здесь h - любое положительное число.

Устойчивость по А.М.Ляпунову. Невозмущенные решения. Возмущенные решения. Определение устойчивости по Ляпунову невозмущенного решения. Устойчивость по Ляпунову как равномерно непрерывная зависимость возмущенных решений от начальных условий на бесконечном интервале времени. Определение неустойчивости по Ляпунову. Определение асимптотической устойчивости по Ляпунову невозмущенного решения.

Важнейшим способом получения аналитической информации о поведении решений дифференциальных уравнений динамики машин является использование методов теории устойчивости А. М. Ляпунова.

Специфика линейных задач при начальных этапах изучения теории устойчивости отступает на второй план. Поэтому в данном разделе лекций будем рассматривать системы как линейных, так и нелинейных дифференциальных уравнений.

Итак, рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}'} = \underset{(n \times 1)}{\mathbf{F}(t, \mathbf{z})} \quad (14.22)$$

Пусть нам известно некоторое решение этой системы

$$\mathbf{z} = \mathbf{f}(t) \quad (14.23)$$

Вполне возможно, что это не то, или не совсем то решение, которое нас интересует, но эта именно та информация о поведении машины, которой мы располагаем.

А.М.Ляпунов назвал решение (14.23) “невозмущенным”.

Введем ряд определений ляпуновской теории устойчивости.

Невозмущенное решение (14.23) системы уравнений (14.22) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется хотя бы одно такое положительное число $\delta > 0$ (δ , вообще говоря, может зависеть от ε и от начального момента времени t^0), что, если в начальный момент $t = t^0$ для решений $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ системы (14.22)

справедливо неравенство $|\mathbf{z}(t^0) - \mathbf{f}(t^0)| < \delta$,

то $|\mathbf{z}(t) - \mathbf{f}(t)| < \varepsilon$ при $t^0 \leq t < \infty$.

Если бы мы рассматривали только конечный интервал времени $t^0 \leq t < T < \infty$ и отыскивали бы число $\delta > 0$ не только как функцию ε и t^0 , но и как функцию T , то выше сформулированное определение было бы определением непрерывной зависимости решения от начальных условий при $t^0 \leq t < T < \infty$. Следовательно, устойчивость по Ляпунову - это равномерная по t непрерывная зависимость решения от начальных условий на бесконечном интервале времени.

То есть, устойчивость по Ляпунову это достаточно жесткое требование к решению системы уравнений динамики машины, в то же время (как показала практика) часто соответствующее интуитивному представлению инженера о требованиях к технической устойчивости поведения машин. Следует только отдать себе ясный отчет в том что устойчивость по Ляпунову, вообще говоря, никак не связана с пространственной ограниченностью невозмущенного решения. Устойчивое по Ляпунову решение, конечно, может быть неограниченным. Например, решение $\mathbf{f}(t) = t + \mathbf{f}(t^0)$

уравнения $\mathbf{z}' = \mathbf{1}$. (Здесь $\delta = \varepsilon$). И обратно, ограниченное по пространству решение может оказаться неустойчивым по Ляпунову. Например, решение $\varphi = 0$ уравнения $\varphi' = \sin^2 \varphi$.

Невозмущенное решение (14.23) системы уравнений (14.22) называется неустойчивым по Ляпунову, если существует хотя бы одно такое положительное число $\varepsilon > 0$, что, какое бы положительное число $\delta > 0$ ни взять, существует такой момент времени $t = t_1$, что для решений $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ системы (14.22), удовлетворяющих неравенству $|\mathbf{z}(t^0) - \mathbf{f}(t^0)| < \delta$, имеет место неравенство $|\mathbf{z}(t_1) - \mathbf{f}(t_1)| > \varepsilon$.

Невозмущенное решение (14.23) системы уравнений (14.22) называется асимптотически устойчивым по Ляпунову, если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того, найдется такое положительное число $\delta_1 > 0$, что, если в начальный момент $t = t^0$ для решений $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ системы (14.22) справедливо неравенство $|\mathbf{z}(t^0) - \mathbf{f}(t^0)| < \delta_1$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{z}(t) - \mathbf{f}(t)| = 0$.

Следует отметить, что стремление решений системы (14.22) к невозмущенному решению при $t \rightarrow \infty$ само по себе еще недостаточно для асимптотической устойчивости по Ляпунову, поскольку эти решения в некоторые конечные моменты времени могут недопустимо далеко удаляться от невозмущенного решения.

Лекция 15.

Система уравнений возмущенного движения. Сведение исследования устойчивости невозмущенного движения к исследованию устойчивости тривиального решения системы возмущенного движения.

Введем отклонение произвольного решения $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ системы (14.22) от невозмущенного решения $\mathbf{z} = \mathbf{f}(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{f}(t) \quad (15.1)$$

Система уравнений для возмущения $\mathbf{x}(t)$ имеет вид

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{f} + \mathbf{x}) - \mathbf{F}(t, \mathbf{f}) = \mathbf{G}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t^0) = \mathbf{0} \quad (15.2)$$

$(n \times n)$ $(n \times n)$ $(n \times n)$ $(n \times n)$

Среди решений системы (14.25) есть тривиальное $\mathbf{x}(t^0) = \mathbf{0}$, которое соответствует невозмущенному решению $\mathbf{z} = \mathbf{f}(t)$ исходной системы. Система (15.2) называется системой уравнений возмущенного движения. Ясно, что исследование устойчивости по Ляпунову невозмущенного решения исходной задачи сводится к исследованию устойчивости по Ляпунову тривиального решения системы уравнений возмущенного движения.

Исследование устойчивости по Ляпунову перманентных вращений и регулярных прецессий волчка Лагранжа. Функция Лагранжа. Циклические координаты. Обобщенные импульсы. Уравнения движения волчка Лагранжа в форме, предложенной Раусом. Перманентные вращения и регулярные прецессии как множество решений, невозмущенных по Ляпунову.

В качестве примера исследования устойчивости по Ляпунову невозмущенных решений нелинейной системы уравнений рассмотрим задачу о движении “волчка Лагранжа”.

Так в теоретической механике называют задачу о движении симметричного твердого тела, закрепленного в неподвижной точке, в однородном силовом поле. Движение это, как известно, естественно складывается из трех периодических процессов: собственного вращения, прецессии и нутации.

Рассмотрим твердое тело, закрепленное в неподвижной точке O и подверженное действию силы веса $m\mathbf{g}$. Пусть его эллипсоид инерции с

центром в точке O является эллипсоидом вращения и центр тяжести лежит на оси динамической симметрии.

Для изучения движения волчка примем в качестве неподвижной системы отсчета трехгранник $\xi\eta\zeta$. Оси ξ и η горизонтальны, ось ζ - вертикальна. Положение оси волчка определяется углами ψ и ϑ . Эйлерова схема описания разворотов трехгранника xyz , жестко связанного с твердым телом, представлена графом

$$\xi\eta\zeta \xrightarrow{o\xi, \psi} N\eta_1\zeta \xrightarrow{oN, \vartheta} N\eta_2z \xrightarrow{oZ, \varphi} xyz \quad (15.3)$$

Соответствующие матрицы плоского поворота имеют вид

$$\Gamma_1(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15.4)$$

Абсолютная угловая скорость волчка может быть представлена в виде

$$\Omega = \psi' \mathbf{e}_\zeta + \vartheta' \mathbf{e}_N + \varphi' \mathbf{e}_z \quad (15.5)$$

В системе координат xyz , связанной с волчком,

$$\Omega = \psi' \Gamma_3(\varphi) \Gamma_1(\vartheta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \vartheta' \Gamma_3(\varphi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (15.6)$$

Система уравнений (15.6) в скалярной форме имеет вид кинематических уравнений Эйлера

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \psi' \sin \vartheta \sin \varphi - \vartheta' \cos \varphi \\ \Omega_y &= \psi' \sin \vartheta \cos \varphi + \vartheta' \sin \varphi \\ \Omega_z &= \psi' \cos \vartheta + \varphi' \end{aligned} \quad (15.7)$$

Кинетическая энергия волчка

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} A(\Omega_x^2 + \Omega_y^2) + \frac{1}{2} C\Omega_z^2 = \\ &= \frac{1}{2} A((\psi')^2 \sin^2 \vartheta + (\vartheta')^2) + \frac{1}{2} C(\psi' \cos \vartheta + \varphi')^2 \end{aligned} \quad (15.8)$$

Здесь A - экваториальный, C - осевой моменты инерции волчка.

Потенциальная энергия волчка

$$\ddot{I} = mgl \cos \vartheta \quad (15.9)$$

Здесь l - расстояние от неподвижной точки O до центра масс волчка.

Функция Лагранжа $L = T - \Pi$

$$L = \frac{1}{2} A ((\dot{\varphi}')^2 \sin^2 \vartheta + (\dot{\vartheta}')^2) + \frac{1}{2} C (\dot{\psi}' \cos \vartheta + \dot{\varphi}')^2 - mgl \cos \vartheta \quad (15.10)$$

Обобщенные координаты ψ, φ - циклические координаты, так как не вошли в выражение для функции Лагранжа.

Соответствующие обобщенные импульсы

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}'} = A \dot{\psi}' \sin^2 \vartheta + C (\dot{\psi}' \cos \vartheta + \dot{\varphi}') \cos \vartheta = v \quad (15.11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}'} = C (\dot{\psi}' \cos \vartheta + \dot{\varphi}') = u \quad (15.12)$$

Физический смысл обобщенных импульсов - моменты количества движения волчка относительно оси ζ и оси z . Обозначая $v/A=a$, $u/A=b$, из (15.11), (15.12) получим выражения для угловых скоростей прецессии и собственного вращения через параметры a и b

$$\dot{\psi}' = \frac{a - b \cos \vartheta}{1 - \cos^2 \vartheta} \quad (15.13)$$

$$\dot{\varphi}' = \frac{A}{C} b - \frac{a - b \cos \vartheta}{1 - \cos^2 \vartheta} \cos \vartheta$$

Уравнения (15.13) должны быть дополнены уравнениями

$$a' = 0 \quad (15.14)$$

$$b' = 0$$

И уравнением для угла нутации ϑ

$$\vartheta'' = \left[\left(\frac{a - b \cos \vartheta}{1 - \cos^2 \vartheta} \right)^2 \cos \vartheta - b \left(\frac{a - b \cos \vartheta}{1 - \cos^2 \vartheta} \right) + \frac{mgl}{A} \right] \sin \vartheta \quad (15.15)$$

полученными методом Лагранжа.

Систему уравнений (15.14), (15.15) в теоретической механике называют уравнениями Рауса динамики симметричного волчка.

Отметим, что частным случаем волчка Лагранжа при

$$A = ml^2, \quad b = 0$$

является сферический маятник - точка массы m , движущаяся по сфере радиуса l .

Кроме того, при $a=b=0$ уравнение (15.15) превращается в уравнение колебаний математического маятника.

Выпишем некоторые частные решения системы уравнений (15.14), (15.15) с тем, чтобы далее рассмотреть их как невозмущенные решения, поставив вопрос об их устойчивости по Ляпунову.

Во-первых, может быть рассмотрено частное решение

$$\vartheta = 0, \quad \vartheta' = 0, \quad a = a^0, \quad b = b^0 \quad (15.16)$$

При этом, из соотношений (15.11), (15.12) следует, что

$$a^0 = b^0 = \frac{C}{A} (\psi' + \varphi') \quad (15.17)$$

Это просто означает, что при таком движении оси z и ζ слились, а угловая скорость равна сумме $\psi' + \varphi'$.

Во-вторых, можно выделить частное решение

$$\vartheta = \pi, \quad \vartheta' = 0, \quad a = a^0, \quad b = b^0 \quad (15.18)$$

При этом, из соотношений (15.11), (15.12) следует, что

$$a^0 = -b^0 = \frac{C}{A} (\psi' - \varphi') \quad (15.19)$$

Это просто означает, что при таком движении оси z и ζ противоположны, а угловая скорость равна разности $\psi' - \varphi'$.

В-третьих, частные решения можно выделить условиями

$$\left(\frac{a - b \cos \vartheta}{1 - \cos^2 \vartheta} \right)^2 \cos \vartheta - b \left(\frac{a - b \cos \vartheta}{1 - \cos^2 \vartheta} \right) + v^2 = 0, \quad (15.20)$$

$$\sin \vartheta \neq 0, \quad \vartheta' = 0$$

Здесь введено обозначение

$$v^2 = \frac{mgl}{A}$$

Соотношениям (15.20) соответствуют следующие типы решений:

$$\vartheta = \vartheta^0 = \frac{\pi}{2}, \quad a = a^0, \quad b = b^0, \quad ab = v^2 \quad (15.21)$$

$$\vartheta = \vartheta^0 \left(\vartheta^0 \in (0, \pi), \vartheta^0 \neq \frac{\pi}{2} \right), \mathbf{b} = \mathbf{b}^0,$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^0 = \mathbf{b}^0 \cos \vartheta^0 + \frac{\sin^2 \vartheta^0}{2 \cos \vartheta^0} \left(\mathbf{b}^0 \pm \sqrt{(\mathbf{b}^0)^2 - 4v^2 \cos \vartheta^0} \right)$$

$$((\mathbf{b}^0)^2 \geq 4v^2 \cos \vartheta^0) \quad (15.22)$$

Движения системы (15.13), (15.14), (15.15), соответствующие условиям (15.16)-(15.22), называются стационарными движениями волчка Лагранжа. Условия (15.16)-(15.19) определяют стационарные (перманентные) вращения, а условия (15.20)-(15.22) определяют регулярные прецессии волчка.

Дифференциальное уравнение для косинуса угла нутации волчка Лагранжа. Определение регулярных прецессий.

Введем обозначение $z = \cos \vartheta$. Рассматривая регулярные прецессии, мы ограничиваемся случаем $|z| < 1$. Учитывая это, перейдем в уравнении (15.15) к переменной z . Поскольку

$$z' = -\vartheta' \sin \vartheta, z'' = -(\vartheta')^2 \cos \vartheta - \vartheta'' \sin \vartheta \quad (15.23)$$

имеем

$$z'' + \frac{z}{1-z^2} (z')^2 =$$

$$= \left[b \left(\frac{a-bz}{1-z^2} \right) - \left(\frac{a-bz}{1-z^2} \right)^2 z - v^2 \right] (1-z^2) \quad (15.24)$$

Для облегчения рутинных расчетов введем промежуточные обозначения

$$G(z) = \frac{a-bz}{1-z^2}, F(z) = bG(z) - zG^2(z) - v^2, \quad (15.25)$$

$$L(z) = F(z)(1-z^2), M(z) = -\frac{z}{1-z^2}$$

Тогда уравнение (15.24) представится в виде

$$z'' = L(z) + M(z)(z')^2 \quad (15.26)$$

Или, переходя к системе первого порядка,

$$\begin{aligned} z' &= \zeta \\ \zeta' &= L(z) + M(z)\zeta^2 \end{aligned} \tag{15.27}$$

В новых обозначениях условия регулярной прецессии запишутся в форме

$$F(z)=0 \text{ или } L(z)=0 \tag{15.28}$$

Решение (15.28) обозначим через $z = z_*$. Тогда в системе (15.27) решение, соответствующее регулярной прецессии, имеет вид

$$\zeta = \zeta_* = 0, z = z_*, L(z_*) = 0 \tag{15.29}$$

Это решение и назовем невозмущенным по Ляпунову. Как ранее отмечалось, заменой переменных типа (15.1) можно перейти к системе уравнений возмущенного движения типа (15.2). При этом исследование устойчивости по Ляпунову невозмущенного решения задачи (15.27) сведется к исследованию устойчивости по Ляпунову тривиального решения системы уравнений возмущенного движения.

Положим $z = z_* + w$. Тогда

$$\begin{aligned} w' &= \zeta \\ \zeta' &= L(z_* + w) + M(z_* + w)\zeta^2 \end{aligned} \tag{15.30}$$

В системе (15.30) регулярной прецессии отвечает решение

$$\zeta = w = 0 \tag{15.14}$$

Лекция 16.

Система уравнений возмущенного движения для регулярных прецессий волчка Лагранжа.

Обозначая

$$l(w) = L(z_* + w), \quad m(w) = M(z_* + w) \quad (16.1)$$

запишем систему уравнений возмущенного движения вокруг регулярных прецессий волчка Лагранжа в виде

$$\begin{aligned} w' &= \zeta \\ \zeta' &= l(w) + m(w)\zeta^2, \quad l(0) = 0 \end{aligned} \quad (16.2)$$

В этой системе невозмущенное решение, соответствующее регулярной прецессии, имеет вид

$$\zeta = \zeta_* = 0, \quad w = w_* = 0 \quad (16.3)$$

Перманентное вращение волчка вокруг вертикали.

Уравнение, описывающее перманентное вращение волчка вокруг направления вектора силы тяжести, имеет вид

$$\vartheta'' = \left[\left(\frac{a - b \cos \vartheta}{1 - \cos^2 \vartheta} \right)^2 \cos \vartheta - b \left(\frac{a - b \cos \vartheta}{1 - \cos^2 \vartheta} \right) + v^2 \right] \sin \vartheta \quad (16.4)$$

$$a = a^0, \quad b = b^0, \quad a^0 = b^0$$

Или

$$\vartheta'' = \left[v^2 - \frac{(b^0)^2}{(1 + \cos \vartheta)^2} \right] \sin \vartheta \quad (16.5)$$

Обозначая

$$h(\cos \vartheta) = v^2 - \frac{(b^0)^2}{(1 + \cos \vartheta)^2} \quad (16.6)$$

$$n(\vartheta) = h(\cos \vartheta) \sin \vartheta$$

представим уравнение перманентного вращения волчка в виде

$$\vartheta'' = n(\vartheta), \quad n(0) = 0 \quad (16.7)$$

Переходя к системе уравнений первого порядка, имеем

$$\begin{aligned} \vartheta' &= \omega \\ \omega' &= n(\vartheta), \quad n(0) = 0 \end{aligned} \tag{16.8}$$

Невозмущенное решение, соответствующее перманентному вращению при $\vartheta = 0$, описывается соотношениями

$$\vartheta = \vartheta^0 = 0, \quad \omega = \omega^0 = 0 \tag{16.9}$$

Заметим, что система (16.8) формально представляет собой частный случай системы (16.2) при $m(w)=0$. Поэтому, подробнее рассматривая задачу (16.2), (16.3), мы сможем сделать выводы и по задаче (16.8), (16.9).

Исследование устойчивости тривиального решения нелинейной системы дифференциальных уравнений, обобщающей уравнения возмущенного движения волчка около стационарных режимов: регулярных прецессий и перманентного вращения.

Итак, исследуем устойчивость тривиального решения (16.3) системы (16.2).

При достаточно малом $|w|$ функции $l(w)$ и $m(w)$ разлагаются в сходящиеся ряды

$$l(w) = \sum_{k=j}^{\infty} l_k w^k, \quad m(w) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k w^k \tag{16.10}$$

Здесь j - первый отличный от нуля коэффициент разложения функции $l(w)$. Отметим, что заведомо $l_0 = 0$.

А.М.Ляпунов разработал способ решения задачи устойчивости, названный впоследствии прямым или вторым методом Ляпунова. Опишем подход А.М.Ляпунова применительно к рассматриваемой нами задаче.

Существование первого интеграла, соответствующего закону сохранения энергии.

Прежде всего ответим на вопрос, обладает ли система (16.2) первым интегралом?

Возьмем некоторую функцию $g(w, \zeta)$. Как известно, ее производная по времени может быть вычислена следующим образом

$$g'(w, \zeta) = \frac{\partial g}{\partial w} w' + \frac{\partial g}{\partial \zeta} \zeta' \tag{16.11}$$

Производная функции $g(w, \zeta)$ в силу системы (16.2) (производная Ли) по определению равна (16.11), если вместо производных по времени w', ζ' подставить их выражения (16.2)

$$g'_{\text{Ли}}(w, \zeta) = \frac{\partial g}{\partial w} \zeta + \frac{\partial g}{\partial \zeta} (l(w) + m(w)\zeta^2) \quad (16.12)$$

Функция $g(w, \zeta)$ называется первым интегралом системы (16.2), если ее производная в силу системы (16.2) равна нулю

$$g'_{\text{Ли}}(w, \zeta) = \frac{\partial g}{\partial w} \zeta + \frac{\partial g}{\partial \zeta} (l(w) + m(w)\zeta^2) = 0 \quad (16.13)$$

У системы (16.2) безусловно есть первый интеграл, поскольку в рассматриваемой задаче движения волчка Лагранжа в поле сил тяжести сохраняется механическая энергия

$$E = \frac{1}{2} A((\phi')^2 \sin^2 \vartheta + (\vartheta')^2) + \frac{1}{2} C(\psi' \cos \vartheta + \phi')^2 + mg l \cos \vartheta = \text{const} \quad (16.14)$$

Это и приведет к выполнению закона сохранения некоторой функции вдоль решений системы дифференциальных уравнений (16.2). Вместо того, чтобы проводить каскад замен переменных в выражении (16.14) и проводить проверку условия (16.13), обратимся непосредственно к системе (16.2). Разделив второе уравнение системы (16.2) на первое, получим соответствующее уравнение на фазовой плоскости переменных w, ζ

$$\frac{d\zeta}{dw} = \frac{l(w) + m(w)\zeta^2}{\zeta} \quad (16.15)$$

Или

$$\zeta d\zeta = l(w)dw + m(w)\zeta^2 dw \quad (16.16)$$

Следовательно,

$$d\zeta^2 - 2m(w)\zeta^2 dw = 2l(w)dw \quad (16.17)$$

Применяя метод Якоби введения интегрирующего множителя, умножим левую и правую части уравнения (16.17)

на некоторую функцию $J(w)$

$$J(w)d\zeta^2 - 2J(w)m(w)\zeta^2 dw = 2J(w)l(w)dw \quad (16.18)$$

Правая часть уравнения (16.18) является дифференциалом функции $\int_0^w 2J(s)l(s)ds$. Потребуем, чтобы и левая часть уравнения (16.18) была

полным дифференциалом некоторой функции фазовых переменных w, ζ и найдем соответствующий интегрирующий множитель $J(w)$. Пусть

$$\begin{aligned} J(w)d\zeta^2 + \zeta^2(-2J(w)m(w))dw = \\ = J(w)d\zeta^2 + \zeta^2dJ(w) = d(J(w)\zeta^2) \end{aligned} \quad (16.19)$$

Следовательно,

$$dJ(w) = -2J(w)m(w)dw \quad (16.20)$$

Или

$$\frac{dJ(w)}{J(w)} = -2m(w)dw \quad (16.21)$$

Таким образом,

$$J(w) = \exp\left(-\int_0^w 2m(s)ds\right) \quad (16.22)$$

Итак, из соотношений (16.18), (16.19) при выполнении (16.22) вытекает соотношение

$$d\left(J(w)\zeta^2 - 2\int_0^w J(s)l(s)ds\right) = 0 \quad (16.23)$$

на решениях системы (16.2).

Вводя обозначение

$$g(w, \zeta) = J(w)\zeta^2 - 2\int_0^w J(s)l(s)ds, \quad (16.24)$$

имеем $g'_{\text{вв}}(w, \zeta) = 0$, но это и означает, что функция $g(w, \zeta)$ является первым интегралом системы (16.2).

Необходимые и достаточные условия знакоопределенности и знакопеременности первого интеграла в окрестности тривиального решения.

Рассмотрим поведение первого интеграла $g(w, \zeta)$ в окрестности невозмущенного решения (16.3) системы (16.2). Это и есть основа прямого метода А.М.Ляпунова.

В окрестности невозмущенного движения

$$\begin{aligned}
J(w) &= \exp\left(-\int_0^w 2\sum_{k=0}^{\infty} m_k s^k ds\right) = \\
&= \exp\left(-2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{k+1} w^{k+1}\right) = 1 + O(w)
\end{aligned}
\tag{16.25}$$

$$\int_0^w J(s)l(s)ds = \int_0^w (1 + O(s))\sum_{k=j}^{\infty} l_k s^k ds = \frac{l_j}{j+1} w^{j+1} + O(w^{j+2})
\tag{16.26}$$

Следовательно в окрестности тривиального решения (точки покоя) первый интеграл $g(w, \zeta)$ представляется в виде

$$g(w, \zeta) = (1 + O(w))\zeta^2 - 2\frac{l_j}{j+1} w^{j+1} + O(w^{j+2})
\tag{16.27}$$

Конкретный вид функции (16.27) сильно зависит от разложения функции $l(w)$ в окрестности нуля. Например,

если $j=1$, то $g(w, \zeta) = (1 + O(w))\zeta^2 - l_1 w^2 + O(w^3)$ (16.28)

и график функции $g(w, \zeta)$ представляет собой “седло” при $l_1 > 0$

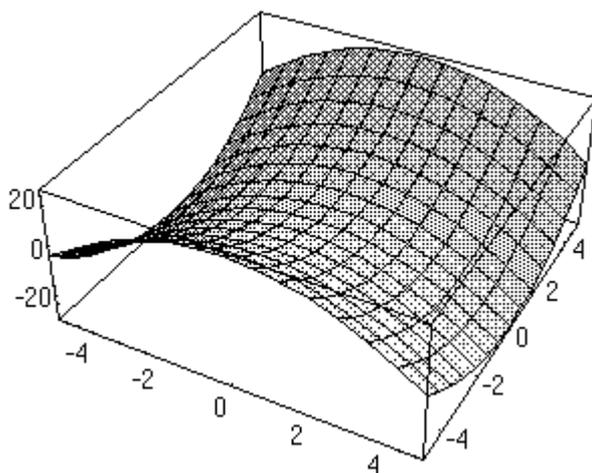


Рис.16.1
или “чашу” при $l_1 < 0$

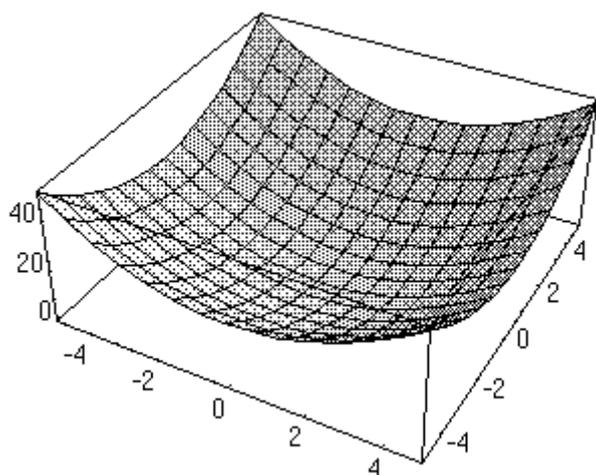


Рис.16.2

Если $j=2$, то

$$g(w, \zeta) = (1 + O(w))\zeta^2 - \frac{2}{3}l_2w^3 + O(w^4) \quad (16.29)$$

и график функции $g(w, \zeta)$ при любом знаке первого ненулевого коэффициента l_2 аналогичен такому

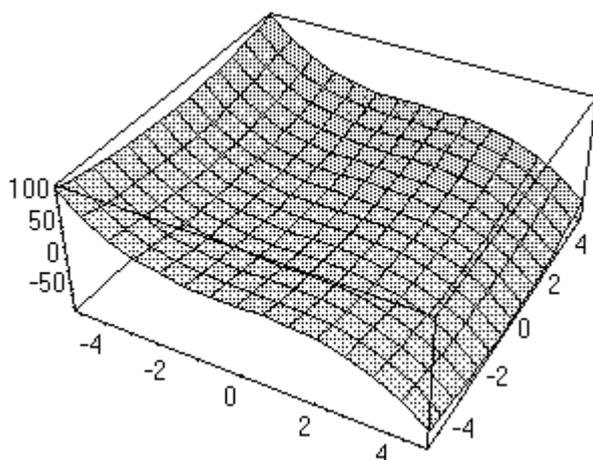


Рис.16.3

и т.д.

С точки зрения проблемы устойчивости по Ляпунову важнейшим является вопрос: будет ли функция $g(w, \zeta)$ знакоопределенной во всей окрестности невозмущенного решения, или она там знакопеременна?

Знакоопределенность функции $g(w, \zeta)$ в полной окрестности тривиального решения эквивалентна наличию ее локального экстремума на самом невозмущенном движении. Знакопеременность функции $g(w, \zeta)$ эквивалентна отсутствию ее локального экстремума на невозмущенном движении.

Можно показать, что функция $g(w, \zeta)$ определено положительна тогда и только тогда, когда первый ненулевой коэффициент l_j в разложении функции $l(w)$ в окрестности нуля отрицателен ($l_j < 0$), и номер этого коэффициента является нечетным числом ($j = 2n - 1, n = 1, 2, \dots$), и знакопеременна тогда и только тогда, когда первый ненулевой коэффициент l_j в разложении функции $l(w)$ в окрестности нуля положителен ($l_j > 0$), или номер этого коэффициента является четным числом ($j = 2n, n = 1, 2, \dots$).

Лекция 17.

Теоремы об устойчивости и неустойчивости по Ляпунову тривиального решения рассматриваемой системы уравнений.

Имеет место следующее утверждение.

Если в окрестности невозмущенного движения (16.3) системы (16.2) первый интеграл $g(w, \zeta)$ системы положительно определен, то этого достаточно для устойчивости невозмущенного движения по Ляпунову.

Действительно. Устойчивость тривиального решения (16.3) системы (16.2) по Ляпунову означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\sqrt{w^2 + \zeta^2}|_{t=0} < \delta$ $\sqrt{w^2 + \zeta^2} < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$.

Пусть первый интеграл $g(w, \zeta)$ положительно определен. В этом случае функция $g(w, \zeta)$ имеет локальный минимум на невозмущенном решении $w = \zeta = 0$. То есть в окрестности тривиального решения функция $g(w, \zeta)$ имеет следующий вид

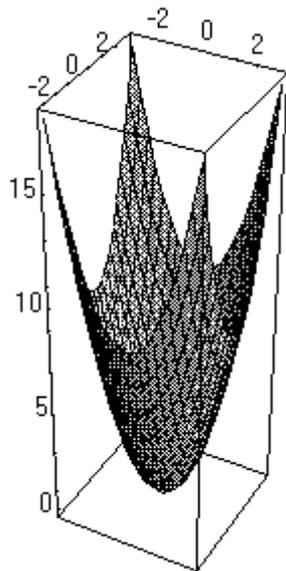


Рис.17.1

На фазовой плоскости w, ζ возьмем круговую окрестность радиуса $\sqrt{w^2 + \zeta^2} = \varepsilon$. В пространстве $w, \zeta, g(w, \zeta)$ это уравнение цилиндра, пересекающего поверхность, изображенную на рис.17.1. На кривой

пересечения поверхности $g(w, \zeta)$ и цилиндра $\sqrt{w^2 + \zeta^2} = \varepsilon$ можно взять самую нижнюю точку. Обозначим

$$\mu = \min g(w, \zeta) \Big|_{\sqrt{w^2 + \zeta^2} = \varepsilon} \quad (17.1)$$

Если расsects поверхность $g(w, \zeta)$ плоскостью, параллельной плоскости (w, ζ) , над ней, но ниже точки μ , и в качестве $\delta > 0$ взять радиус круга, полностью лежащего внутри полученного сечения и, следовательно, внутри цилиндра $\sqrt{w^2 + \zeta^2} = \varepsilon$, то решение, удовлетворяющее условию $\sqrt{w^2 + \zeta^2} \Big|_{t=0} < \delta$ будет удовлетворять неравенству $\sqrt{w^2 + \zeta^2} < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$. А это и означает устойчивость по Ляпунову.

Действительно. На решениях с такими начальными условиями в начальный момент $g(w, \zeta) < \mu$. Следовательно, $g(w, \zeta) < \mu$ при всех $t \geq 0$, поскольку функция $g(w, \zeta)$ как первый интеграл постоянна вдоль решений. Но при этом само решение удовлетворяет неравенству $\sqrt{w^2 + \zeta^2} < \varepsilon$, так как иначе в какой-то момент времени $\sqrt{w^2 + \zeta^2} = \varepsilon$, а при этом $g(w, \zeta) \geq \mu$. То есть получили противоречие.

Итак, условия: первый ненулевой коэффициент l_j в разложении функции $l(w)$ в окрестности нуля отрицателен ($l_j < 0$), номер этого коэффициента является нечетным числом ($j = 2n - 1, n = 1, 2, \dots$) обеспечивают достаточные условия устойчивости невозмущенного решения системы (16.2) по Ляпунову.

Функции Ляпунова. Прямой (второй) метод Ляпунова в теории устойчивости.

В работах А.М.Ляпунова показано, что достаточные условия устойчивости могут быть получены с помощью положительно определенных функций $V \gg 0$, производная которых в силу системы может быть не равна нулю, но, во всяком случае, не положительна. То есть, эти функции не должны быть первыми интегралами системы, но должны не возрастать вдоль решения. Такие функции называются функциями Ляпунова. Они играют очень важную роль при качественном исследовании динамики управляемых систем. Использование функций Ляпунова при нахождении достаточных условий устойчивости называется прямым методом Ляпунова.

Замечательным свойством задачи о движении волчка Лагранжа является то обстоятельство, что указанные выше достаточные условия устойчивости являются также и необходимыми.

Действительно. Пусть достаточные условия устойчивости невозмущенного движения волчка не выполнены, то есть, первый ненулевой коэффициент l_j в разложении функции $l(w)$ в окрестности нуля положителен ($l_j > 0$), или номер этого коэффициента является четным числом ($j = 2n, n = 1, 2, \dots$). Покажем, что при этом невозмущенное решение (16.3) системы (16.2) будет неустойчивым по Ляпунову.

Прежде всего необходимо применить к данной задаче определение неустойчивости по Ляпунову.

Невозмущенное решение (16.3) системы уравнений (16.2) называется неустойчивым по Ляпунову, если существует хотя бы одно такое положительное число $\varepsilon > 0$, что, какое бы положительное число $\delta > 0$ ни взять, существует такой момент времени $t = t_1$, что для решений системы (16.2), удовлетворяющих неравенству $\sqrt{w^2 + \zeta^2}|_{t=t_0} < \delta$, имеет место неравенство $\sqrt{w^2 + \zeta^2}|_{t=t_1} > \varepsilon$.

Разложение (16.27) первого интеграла $g(w, \zeta)$ в окрестности тривиального решения, переставив слагаемые, представим в виде

$$(1 + O(w))\zeta^2 = \zeta_0^2 + 2 \frac{l_j}{j+1} w^{j+1} + O(w^{j+2}) \quad (17.2)$$

Возьмем начальное условие по переменной w равным нулю $w(t_0) = 0$. Выберем начальное условие по переменной ζ так, чтобы слагаемое

$2 \frac{l_j}{j+1} w^{j+1}$, входящее в разложение (17.2), было положительным в течение

некоторого начального интервала времени (хотя бы и весьма небольшого).

Для этого, если $l_j > 0$, то возьмем $\zeta(t_0) = \zeta^0 > 0$. Тогда из первого

уравнения системы (16.2) $w' = \zeta$ следует, что в течение некоторого времени

$w > 0$. Если $l_j < 0$, но j - четно, то возьмем $\zeta(t_0) = \zeta^0 < 0$. Тогда из

уравнения $w' = \zeta$ следует, что в течение некоторого времени $w < 0$.

При выбранных начальных условиях и при достаточно малой величине w имеем

$$(1 + O(w))\zeta^2 \geq \zeta_0^2 \quad (17.3)$$

Таким образом,

$$\zeta^2 \geq \frac{\zeta_0^2}{1 + O(w)} \quad (17.4)$$

Из соотношения (17.4) вытекает существование такой постоянной $A > 0$, что

$$|\zeta| > A \quad (17.5)$$

Следовательно, в течение некоторого промежутка времени

$$|w'| > A \quad (17.6)$$

Выберем t_1 из этого интервала времени. Тогда

$$w > At_1, \text{ либо } w < -At_1 \quad (17.7)$$

Выбрав $t_1 = \varepsilon / A$, получим доказательство неустойчивости тривиального решения системы (16.2) по Ляпунову.

Проверка необходимых и достаточных условий устойчивости регулярных прецессий волчка Лагранжа.

Конкретизируем полученные результаты в задаче определения необходимых и достаточных условий устойчивости регулярных прецессий. Имеем

$$I_1 = \frac{dl(w)}{dw} \Big|_{w=0} = \frac{dL(z)}{dz} \Big|_{z=\cos\vartheta^0} \quad (17.8)$$

Учитывая промежуточные обозначения (32.25), получим

$$L'(z) = F'(z)(1 - z^2) - 2zF(z) \quad (17.9)$$

$$\begin{aligned} F'(z) &= bG(z) - G^2(z) - 2zG(z)G'(z) = \\ &= -G^2(z) - G'(z)(2zG(z) - b) \end{aligned} \quad (17.10)$$

$$G'(z) = \frac{-b(1 - z^2) + 2z(a - bz)}{(1 - z^2)^2} = \frac{-b + 2zG(z)}{1 - z^2} \quad (17.11)$$

Следовательно,

$$F'(z) = -G^2(z) - \frac{(2zG(z) - b)^2}{1 - z^2} \quad (17.12)$$

$$L'(z) = -\left(G^2(z) + \frac{(2zG(z) - b)^2}{1 - z^2}\right)(1 - z^2) - 2zF(z) \quad (17.13)$$

Учитывая, что

$$F(z)|_{z=\cos\vartheta^0} = 0 \quad (17.14)$$

Имеем

$$l_1 = -\left(G^2(z) + \frac{(2zG(z) - b)^2}{1 - z^2}\right)(1 - z^2)|_{z=\cos\vartheta^0} < 0 \quad (17.15)$$

Таким образом, поскольку $l_1 < 0$, 1 - нечетное число, регулярные прецессии волчка Лагранжа всегда устойчивы по Ляпунову.

Проверка необходимых и достаточных условий устойчивости перманентных вращений волчка Лагранжа.

Нахождение необходимых и достаточных условий устойчивости по Ляпунову тривиального решения (16.9) системы (16.8), описывающей возмущенное движение типа стационарного вращения волчка Лагранжа, проводится по той же схеме.

$$n_1 = n'(\vartheta)|_{\vartheta=0} \quad (17.16)$$

Используя промежуточные обозначения (16.6), имеем

$$n'(\vartheta) = -h'(\cos\vartheta) \sin^2\vartheta + h(\cos\vartheta) \cos\vartheta \quad (17.17)$$

$$h'(\cos\vartheta) = \frac{2b^2}{(1 + \cos\vartheta)^3} \quad (17.18)$$

Следовательно,

$$n_1 = h(1) = v^2 - \frac{b^2}{4} \quad (17.19)$$

Таким образом, если $n_1 = v^2 - \frac{b^2}{4} < 0$, так как 1 - нечетное число, вертикальное стационарное вращение волчка устойчиво по Ляпунову (волчок “спит на ходу”). Если $n_1 = v^2 - \frac{b^2}{4} > 0$, то вертикальное стационарное вращение волчка неустойчиво по Ляпунову.

Остается рассмотреть “критический случай” $n_1 = v^2 - \frac{b^2}{4} = 0$.
(17.20)

В этом случае надо определить величину и знак следующих коэффициентов ряда для функции $n(\vartheta)$ в окрестности нуля.

$$n''(\vartheta) = h''(\cos \vartheta) \sin^3 \vartheta - 3h'(\cos \vartheta) \sin \vartheta \cos \vartheta - h(\cos \vartheta) \sin \vartheta \quad (17.21)$$

При $\vartheta = 0$ $n''(\vartheta) = 0$, следовательно $n_2 = 0$.

$$n'''(\vartheta) = -h'''(\cos \vartheta) \sin^4 \vartheta + h''(\cos \vartheta) 3 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta + 3h''(\cos \vartheta) \sin^2 \vartheta \cos \vartheta - 3h'(\cos \vartheta) \cos^2 \vartheta + 3h'(\cos \vartheta) \sin^2 \vartheta + h'(\cos \vartheta) \sin^2 \vartheta - h(\cos \vartheta) \cos \vartheta \quad (17.22)$$

$$\text{При } \vartheta = 0 \quad n'''(\vartheta) = -3h'(1) - h(1) \quad (17.23)$$

В силу (17.18), (17.20)

$$h(1)=0, \quad n'''(\vartheta) = -\frac{3}{4} b^2 \quad (17.24)$$

Следовательно,

$$n_3 < 0 \quad (17.25)$$

Таким образом, установили, что при выполнении соотношения (17.20) вертикальное вращение волчка устойчиво.

Итак, необходимым и достаточным условием устойчивости по Ляпунову стационарного вращения волчка вокруг вертикали является выполнение неравенства

$$v^2 \leq \frac{b^2}{4} \quad (17.26)$$

Или в исходных переменных

$$\Omega^2 \geq \frac{4mglA}{C^2} \quad (17.27)$$

Условие (17.27) называют условием Маиевского.

Лекция 18.

Устойчивость по Ляпунову линейных управляемых систем.

Рассмотрим линейную управляемую систему вида

$$\underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}'} = \underset{(n \times n)}{\mathbf{A}(t)} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}} + \underset{(n \times m)}{\mathbf{B}} \underset{(m \times 1)}{\mathbf{u}(t)} \quad (18.1)$$

Пусть

$$\underset{(n \times 1)}{\mathbf{x}'} = \underset{(n \times n)}{\mathbf{A}(t)} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{x}} \quad (18.2)$$

соответствующая однородная система.

Линейную систему (18.1) называют устойчивой по Ляпунову, если все ее решения устойчивы, и неустойчивой, если все ее решения неустойчивы.

Линейную систему (18.1) называют асимптотически устойчивой по Ляпунову, если все ее решения асимптотически устойчивы.

Корректность этих определений требует обоснования, поскольку ясно, что для нелинейных систем такие определения, вообще говоря, не имеют смысла: некоторые решения нелинейных систем могут быть устойчивыми, а другие - неустойчивыми.

Имеет место следующая теорема.

Линейная система (18.1) устойчива по Ляпунову тогда и только тогда, когда устойчиво по Ляпунову тривиальное решение однородной системы (18.2).

Действительно. Возьмем любое устойчивое по Ляпунову невозмущенное решение $\mathbf{z} = \mathbf{f}(t)$ системы (18.1). Тогда для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется хотя бы одно такое положительное число $\delta > 0$ (δ , вообще говоря, может зависеть от ε и от начального момента времени t^0), что, если в начальный момент $t = t^0$ для решений $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ системы (18.1) справедливо неравенство $|\mathbf{z}(t^0) - \mathbf{f}(t^0)| < \delta$, то $|\mathbf{z}(t) - \mathbf{f}(t)| < \varepsilon$ при $t^0 \leq t < \infty$.

Вектор $\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{f}(t)$ является решением однородной системы уравнений (18.2), причем, если в начальный момент $t = t^0$ для решений $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ системы (18.2) справедливо неравенство $|\mathbf{x}(t^0)| < \delta$, то $|\mathbf{x}(t)| < \varepsilon$ при $t^0 \leq t < \infty$. Но это и означает, что тривиальное решение $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ устойчиво по Ляпунову.

Обратно. Пусть тривиальное решение $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ системы (18.2) устойчиво по Ляпунову. Построим систему возмущенного движения около произвольного частного решения $\mathbf{f}(t)$ системы (18.1). Полагая $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$, имеем

$$\underbrace{(\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t))'}_{(n \times 1)} = \underbrace{\mathbf{A}(t)}_{(n \times n)} \underbrace{(\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t))}_{(n \times 1)} + \underbrace{\mathbf{B}}_{(n \times m)} \underbrace{\mathbf{u}(t)}_{(m \times 1)} \quad (18.3)$$

Следовательно, $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}$, но это система (18.2). Таким образом, задача об устойчивости по Ляпунову произвольного невозмущенного решения $\mathbf{f}(t)$ системы (18.1) сведена к задаче об устойчивости по Ляпунову тривиального решения системы (18.2). Оно устойчиво по предположению, следовательно устойчиво по Ляпунову и любое решение $\mathbf{z} = \mathbf{f}(t)$ системы (18.1).

Итак, чтобы ответить на вопрос об устойчивости по Ляпунову любого решения линейной системы (18.1), надо исследовать на устойчивость по Ляпунову только тривиальное решение соответствующей однородной системы (18.2). Стало быть корректность выше приведенных определений обоснована.

О других определениях устойчивости.

Следует иметь в виду, что сам по себе термин “устойчивость” не имеет четко определенного содержания.

Устойчивость применительно к движению обычно характеризует поведение системы на бесконечном интервале времени. Кроме определения устойчивости по Ляпунову, характеризующей свойство системы мало отклоняться от некоторого (невозмущенного) движения при малых возмущениях начального положения системы в фазовом пространстве, существует и много других определений математической теории устойчивости.

Введенная А.А.Андроным и Л.С.Понтрягиным структурная устойчивость (грубость, робастность) характеризует свойство системы

сохранять основные черты поведения при малых изменениях самого закона движения (самой системы уравнений).

Устойчивость по Лагранжу характеризует свойство системы в процессе движения оставаться в ограниченной области фазового пространства.

Устойчивость по Пуассону характеризует свойство системы рано или поздно возвращаться к своему начальному положению в фазовом пространстве.

Устойчивость применительно к пространственным (геометрическим) объектам, зависящим от параметров, характеризует свойство таких объектов (фигур равновесия вращающейся жидкости, деформируемого твердого тела и др.) сохранять их непрерывную зависимость от различных параметров.

Устойчивость при постоянно действующих возмущениях.

В приведенных выше определениях А.М.Ляпунова рассматривается устойчивость невозмущенного движения по отношению к возмущениям начальных условий. Физически это означает, что рассматривается устойчивость по отношению к мгновенно действующим возмущениям (см. лекцию 9). Однако реальная система обычно все время находится под воздействием небольших возмущающих сил, учесть которые при составлении уравнений движения практически невозможно. Поэтому практический интерес представляет исследование устойчивости рассматриваемого движения по отношению к постоянно действующим возмущениям. Это означает, что надо рассматривать возмущения не только начальных условий, но и самих уравнений движения. Можно ввести следующее определение устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Наряду с системой

$$\underset{(n \times 1)}{\mathbf{x}'} = \underset{(n \times 1)}{\mathbf{F}(t, \mathbf{x})} \quad (18.4)$$

рассмотрим систему

$$\underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}'} = \underset{(n \times 1)}{\mathbf{F}(t, \mathbf{z})} + \underset{(n \times 1)}{\mathbf{r}(t, \mathbf{z})} \quad (18.5)$$

Здесь $\underset{(n \times 1)}{\mathbf{r}(t, \mathbf{z})}$ некоторая неизвестная вектор-функция, характеризующая возмущающие факторы, относительно которых мы можем сказать только то, что они достаточно малы и удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование решения системы (18.5) в окрестности невозмущенного решения $\mathbf{x} = \mathbf{f}(t)$ системы (18.4).

Невозмущенное решение $\mathbf{x} = \mathbf{f}(t)$ системы уравнений (18.4) называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях, если для

любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется два таких положительных числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, что, если в начальный момент $t = t^0$ для решений $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ системы (18.5) справедливо неравенство $|\mathbf{z}(t^0) - \mathbf{f}(t^0)| < \delta_1$, то $|\mathbf{z}(t) - \mathbf{f}(t)| < \varepsilon$ при $t^0 \leq t < \infty$, какова бы ни была вектор-функция $\mathbf{r}(t)$, удовлетворяющая неравенству $|\mathbf{r}(t, \mathbf{z})| < \delta_2$.

Нахождение условий устойчивости невозмущенных движений при малых постоянно действующих возмущениях практически очень важная задача, но, вообще говоря, весьма не простая.

Отметим, например, что проблема устойчивости движений при малых, но постоянно действующих возмущениях тесно связана с вопросом о близости решений двух систем уравнений, правые части которых мало отличаются друг от друга.

Пусть имеются две слабо нелинейных системы дифференциальных уравнений

$$\underset{(n \times 1)}{\mathbf{x}'} = \underset{(n \times n)}{\mathbf{A}} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{x}} + \varepsilon \underset{(n \times 1)}{\mathbf{F}(\mathbf{x})} \quad (18.6)$$

$$\underset{(n \times 1)}{\mathbf{y}'} = \underset{(n \times n)}{\mathbf{A}} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{y}} + \varepsilon \underset{(n \times 1)}{\mathbf{G}(\mathbf{y})} \quad (18.7)$$

Множитель ε указывает на малость нелинейных добавок.

Можно ли перейти от решения системы (18.6) к решению (18.7) с помощью некоторого ограниченного слабо нелинейного преобразования

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{H}(\mathbf{y}) \quad (18.8)$$

С одной стороны

$$\begin{aligned} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{x}'} &= \underset{(n \times n)}{\mathbf{A}} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{x}} + \varepsilon \underset{(n \times 1)}{\mathbf{F}(\mathbf{x})} = \\ &= \underset{(n \times n)}{\mathbf{A}} \underset{(n \times 1)}{(\mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{H}(\mathbf{y}))} + \varepsilon \underset{(n \times 1)}{\mathbf{F}(\mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{H}(\mathbf{y}))} \end{aligned} \quad (18.9)$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{x}'} &= \underset{(n \times 1)}{\mathbf{y}'} + \varepsilon \underset{(n \times 1)}{\mathbf{H}'(\mathbf{y})} = \\ &= \underset{(n \times n)}{\mathbf{A}} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{y}} + \underset{(n \times 1)}{\mathbf{G}(\mathbf{y})} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} (\underset{(n \times n)}{\mathbf{A}} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{y}} + \underset{(n \times 1)}{\mathbf{G}(\mathbf{y})}) \end{aligned} \quad (18.10)$$

Сравнивая соотношения (18.9) и (18.10), с точностью до величин порядка ε^2 имеем

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{A} \mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{H}(\mathbf{y}) = \mathbf{F}(\mathbf{y}) - \mathbf{G}(\mathbf{y}) \quad (18.11)$$

Полученное соотношение (18.11) представляет собой необходимое условие возможности перехода от системы уравнений (18.6) к системе уравнений (18.7) с помощью преобразования (18.8). Оно называется гомологическим уравнением и представляет из себя линейное уравнение в частных производных относительно вектор-функции $\mathbf{H}(\mathbf{y})$.

Как и хорошо знакомые нам линейные системы алгебраических уравнений вида

$$\underset{(n \times n)}{\mathbf{A}} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{x}} = \underset{(n \times 1)}{\mathbf{b}}, \quad (18.12)$$

оно разрешимо не при любой правой части. Напомним, что условия разрешимости системы (18.12) могут быть сформулированы в виде так называемых альтернатив Фредгольма.

Наряду с системой (18.12) выпишем однородную сопряженную систему линейных алгебраических уравнений

$$\underset{(n \times n)}{\mathbf{A}^\circ} \underset{(n \times 1)}{\mathbf{y}} = \mathbf{0} \quad (18.13)$$

Подсчитаем скалярное произведение (\mathbf{b}, \mathbf{y})

$$(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = (\mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^\circ \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{A}^\circ \mathbf{y})^\circ \mathbf{x} = 0 \quad (18.14)$$

Это скалярное произведение должно быть равно нулю всегда, когда выполняются соотношения (3.12), (3.13). Если $\det \mathbf{A} \neq 0$, то система (18.13) имеет только тривиальное решение. При этом система (18.12) разрешима при любой правой части. Если $\det \mathbf{A} = 0$, то система (18.12) разрешима не при любой правой части. Поскольку в этом случае система (18.13) может иметь отличное от нуля решение, необходимо потребовать, чтобы правая часть системы (18.12) удовлетворяла условию (18.14).

Аналогичного типа альтернатива имеет место и при решении вопроса разрешимости уравнения (18.11). При заданной вектор-функции $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ функция $\mathbf{G}(\mathbf{y})$, вообще говоря, должна удовлетворять дополнительным условиям разрешимости. При этом из уравнения (18.11) можно будет найти вектор-функцию $\mathbf{H}(\mathbf{y})$. Таким образом из гомологического уравнения (18.11) находятся как правая часть преобразованной системы (18.7), так и преобразование (18.8).

Устойчивость по части переменных.

В прикладных задачах об устойчивости движения составных систем, то есть систем, содержащих наряду с абсолютно твердыми телами жидкие и упругие элементы, часто интересуются главным образом вопросом об устойчивости по Ляпунову движения твердых тел. Вопрос об устойчивости других элементов системы интересен лишь постольку, поскольку их движение влияет на устойчивость по Ляпунову движения твердых тел. Поэтому ставится задача об устойчивости составной системы по отношению к переменным, определяющим движение твердого тела, и к некоторым величинам - функционалам, интегральным образом характеризующим движение жидких и упругих элементов системы. Такими функционалами могут быть, например, количество движения, момент количества движения, кинетическая энергия, координаты центра масс жидких и упругих элементов. При этом важно, что в случае устойчивости системы по части переменных обеспечивается устойчивость движения по Ляпунову системы твердых тел по отношению к обобщенным координатам и скоростям, определяющих движение системы абсолютно твердых тел.

Лекция 19

Фазовый объем линейной нестационарной системы. Теорема об изменении фазового объема. Роль следа матрицы линейной системы.

Исключительно важной характеристикой, описывающей временную эволюцию линейной нестационарной системы является, так называемый, фазовый объем, равный модулю определителя фундаментальной матрицы ее решений.

Рассмотрим систему уравнений собственного движения линейной нестационарной машины

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}(t) \mathbf{z} \quad (19.1)$$

$(n \times 1)$ $(n \times n)$ $(n \times 1)$

Фундаментальная матрица решений системы (19.1) удовлетворяет матричному уравнению

$$\mathbf{N}' = \mathbf{A}(t) \mathbf{N} \quad (19.2)$$

$(n \times n)$ $(n \times n)$ $(n \times n)$

с начальным условием

$$\mathbf{N}(0) = \mathbf{E} \quad (19.3)$$

$(n \times n)$ $(n \times n)$

Как изменяется во времени числовая функция, равная определителю матрицы $\mathbf{N}(t)$?

Рассмотрим сначала систему с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A} \mathbf{z} \quad (19.4)$$

$(n \times 1)$ $(n \times n)$ $(n \times 1)$

В этом случае

$$\mathbf{N}(t) = \exp t\mathbf{A} \quad (19.5)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \det \mathbf{N}(t) &= \det(\exp t\mathbf{A}) = \det \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbf{E} + \frac{t\mathbf{A}}{n} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \det \left(\mathbf{E} + \frac{t\mathbf{A}}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \det^n \left(\mathbf{E} + \frac{t\mathbf{A}}{n} \right) \end{aligned} \quad (19.6)$$

Для любой невырожденной матрицы \mathbf{S}

$$\det \left(\mathbf{E} + \frac{t\mathbf{A}}{n} \right) = \det \left(\mathbf{S}^{-1} \left(\mathbf{E} + \frac{t\mathbf{A}}{n} \right) \mathbf{S} \right) = \det \left(\mathbf{E} + \frac{t\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}}{n} \right) \quad (19.7)$$

Имеет место следующая теорема Шура, играющая важную роль в вычислительной линейной алгебре

Всякую матрицу \mathbf{A} с помощью обвертывающего преобразования подобия можно привести к треугольному виду

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \Delta \quad (19.8)$$

Треугольная матрица Δ , называемая формой Шура матрицы \mathbf{A} , содержит на диагонали ее собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Форма Шура определена неоднозначно. Прежде всего она может быть выбрана верхней треугольной $a_{ij} = 0$ ($i > j$) или нижней треугольной $a_{ij} = 0$ ($i < j$) матрицей (верхней или нижней формой Шура). Кроме того, для любого заданного порядка расположения собственных значений найдется форма Шура, на диагонали которой числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ расположены в нужной последовательности.

Из теоремы Шура следует, что можно найти матрицу \mathbf{S} такую, что

$$\begin{aligned} \det \left(\mathbf{E} + \frac{t\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}}{n} \right) &= \det \left(\mathbf{E} + \frac{t\Delta}{n} \right) = \\ &= \left(1 + \frac{\lambda_1 t}{n} \right) \dots \left(1 + \frac{\lambda_n t}{n} \right) = 1 + \frac{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t}{n} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) = \\ &= 1 + \frac{\text{Tr} \mathbf{A}}{n} t + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned} \quad (19.9)$$

Здесь $\text{Tr} \mathbf{A}$ обозначает след (сумму диагональных элементов) матрицы \mathbf{A} .

Итак, поскольку

$$\begin{aligned} \det(\exp t\mathbf{A}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \det^n \left(\mathbf{E} + \frac{t\mathbf{A}}{n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\text{Tr}\mathbf{A}}{n} t + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t\text{Tr}\mathbf{A}}{n} \right)^n = \\ &= \exp \text{Tr}\mathbf{A}t \end{aligned} \quad (19.10)$$

получаем формулу для вычисления фазового объема системы (19.10) с постоянными коэффициентами

$$\det \mathbf{N}(t) = \exp \text{Tr}\mathbf{A}t \quad (19.11)$$

Рост, сохранение или убывание фазового объема системы с постоянными коэффициентами зависит от знака следа $\text{Tr} \mathbf{A}$ матрицы \mathbf{A} .

Рассмотрим теперь систему с переменными коэффициентами (19.1).

Для фундаментальной матрицы решений этой системы справедливо соотношение

$$d\mathbf{N}(t) = dt\mathbf{A}(t)\mathbf{N}(t) \quad (19.12)$$

Следовательно, имеет место приближенное равенство

$$\Delta\mathbf{N}(t) = \Delta t\mathbf{A}(t)\mathbf{N}(t) \quad (19.13)$$

Или

$$\mathbf{N}(t + \Delta t) = \mathbf{N}(t) + \Delta t\mathbf{A}(t)\mathbf{N}(t) \quad (19.14)$$

Таким образом

$$\mathbf{N}(t + \Delta t) = (\mathbf{E} + \Delta t\mathbf{A}(t))\mathbf{N}(t) \quad (19.15)$$

Вычисляя определитель матриц, стоящих в левой и в правой частях выражения (19.15), имеем

$$\begin{aligned} \det \mathbf{N}(t + \Delta t) &= \det(\mathbf{E} + \Delta t\mathbf{A}(t)) \det \mathbf{N}(t) = \\ &= (1 + \Delta t\text{Tr}\mathbf{A}(t)) \det \mathbf{N}(t) = \\ &= \det \mathbf{N}(t) + \Delta t\text{Tr}\mathbf{A}(t) \det \mathbf{N}(t) \end{aligned} \quad (19.16)$$

Следовательно,

$$(\det \mathbf{N}(t))' = \text{Tr}\mathbf{A}(t) \det \mathbf{N}(t) \quad (19.17)$$

Таким образом получаем формулу для вычисления фазового объема нестационарной системы (19.1)

$$\det \mathbf{N}(t) = \exp \int_0^t \text{Tr} \mathbf{A}(s) ds \quad (19.18)$$

Системы уравнений с периодическими коэффициентами. Матрица монодромии. отображение Пуанкаре. Характеристические показатели. Мультипликаторы.

Предположим, что матрица системы имеет элементы, периодически изменяющиеся во времени,

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t+T) \quad (19.19)$$

Теория линейных уравнений с периодическими коэффициентами помогает решить задачу управления шагающим аппаратом, задачу стабилизации перевернутого маятника, объясняет эффект раскачивания качелей и так далее.

Используя результаты лекции 25, имеем, что если матрица $\mathbf{Z}(t)$ является фундаментальной матрицей системы (19.1) при условии (19.19), то матрица $\mathbf{Z}(t+T)$ также фундаментальна, поскольку

$$\mathbf{Z}'(t + T) = \mathbf{A}(t + T)\mathbf{Z}(t + T) = \mathbf{A}(t)\mathbf{Z}(t + T) \quad (19.20)$$

И в этом случае

$$\mathbf{Z}(t + T) = \mathbf{Z}(t)\tilde{\mathbf{C}} \quad (19.21)$$

Здесь \mathbf{C} - постоянная матрица с отличным от нуля определителем.

Заметим, что, если $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{E}$, то

$$\mathbf{Z}(T) = \mathbf{C}, \mathbf{Z}(2T) = \mathbf{C}^2, \dots, \mathbf{Z}(nT) = \mathbf{C}^n, \dots \quad (19.22)$$

Наблюдая фундаментальную матрицу системы “с помощью стробоскопа” только в моменты времени $t=0, T, 2T, \dots, nT, \dots$, можно полностью охарактеризовать решение.

Последовательность точек $\mathbf{Z}(T), \mathbf{Z}(2T), \dots, \mathbf{Z}(nT), \dots$ носит название “монодромия”. Матрица \mathbf{C} , характеризующая движение фазовой точки вдоль монодромии, называется матрицей монодромии. Движение фазовой точки вдоль монодромии называют отображением Пуанкаре.

Поскольку в соответствии с соотношением (19.22) $\mathbf{C} = \mathbf{Z}(T)$ матрицу монодромии можно искать с помощью ЭВМ, решая исходную систему уравнений на одном периоде T матрицы системы $\mathbf{A}(t)$.

В соответствии с теоремой Флоке о представлении фундаментальной матрицы системы уравнений с периодическими коэффициентами (лекция

25) фундаментальная матрица решений линейной системы (19.1) с непрерывной периодической матрицей периода T всегда может быть представлена в виде

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{P}(t) \exp(\mathbf{B}t) \quad (19.23)$$

$(n \times n) \quad (n \times n) \quad (n \times n)$

Здесь $\mathbf{P}(t)$ непрерывно дифференцируемая периодическая матрица с периодом T , $\mathbf{P}(0)=\mathbf{E}$, \mathbf{B} - постоянная матрица,

$$\exp(\mathbf{B}(T)) = \tilde{\mathbf{N}} \quad (19.24)$$

В соответствии с теоремами Еругина и Ляпунова (лекция 25) система (19.1) с периодическими коэффициентами приводима к системе с постоянными коэффициентами с матрицей \mathbf{B}

$$\mathbf{y}' = \mathbf{B} \mathbf{y} \quad (19.25)$$

$(n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times 1)$

Корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения системы с постоянными коэффициентами (19.25) называются характеристическими показателями системы (19.1) с периодическими коэффициентами.

Можно также выписать характеристическое уравнение для матрицы монодромии \mathbf{C} . Корни этого уравнения ρ_1, \dots, ρ_n называются мультипликаторами исходной системы.

Нормальные решения системы с периодическими коэффициентами. Связь характеристических показателей и мультипликаторов.

Любому мультипликатору ρ_i отвечает хотя бы одно решение системы (19.1) такое, что

$$\mathbf{z}(t+T) = \rho_i \mathbf{z}(t) \quad (19.26)$$

Это решение (оно называется нормальным) можно построить следующим образом. Возьмем в качестве начального условия для $\mathbf{z}(t)$ собственный вектор \mathbf{u}_i матрицы \mathbf{C} , соответствующий мультипликатору ρ_i

$$\mathbf{C}\mathbf{u}_i = \rho_i \mathbf{u}_i \quad (19.27)$$

Тогда

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{N}(t)\mathbf{z}^0 = \mathbf{N}(t)\mathbf{u} \quad (19.28)$$

Здесь $\mathbf{N}(t)$ - фундаментальная матрица системы.

$$\begin{aligned}\mathbf{z}(t + T) &= \mathbf{N}(t + T)\mathbf{z}^0 = \mathbf{N}(t + T)\mathbf{u}_i = \\ &= \mathbf{N}(t)\mathbf{C}\mathbf{u}_i = \mathbf{N}(t)\rho_i \mathbf{u}_i = \rho_i \mathbf{N}(t)\mathbf{u}_i = \rho_i \mathbf{z}(t)\end{aligned}\quad (19.29)$$

Справедливо и обратное утверждение.

Если $\mathbf{z}(t + T) = q\mathbf{z}(t)$, то q - мультипликатор.

Действительно.

$$\mathbf{z}(t + T) = \mathbf{N}(t + T)\mathbf{z}^0 = \mathbf{N}(t)\mathbf{C}\mathbf{z}^0 = q\mathbf{z}(t) = q\mathbf{N}(t)\mathbf{z}^0 \quad (19.30)$$

Следовательно,

$$\mathbf{C}\mathbf{z}^0 = q\mathbf{z}^0 \quad (19.31)$$

Таким образом \mathbf{z}^0 - собственный вектор матрицы \mathbf{C} , q - соответствующий ему мультипликатор.

Характеристические показатели и мультипликаторы связаны между собой соотношением

$$\rho_i = \exp(\lambda_i T) \quad (19.32)$$

Здесь ρ_i, λ_i , вообще говоря, комплексные числа.

Следовательно,

$$\lambda_i = \frac{\ln|\rho_i| + i \arg \rho_i}{T} \quad (19.33)$$

Лекция 20.

Условия периодичности и антипериодичности решений системы уравнений с периодическими коэффициентами. Системы с неизменяющимся фазовым объемом.

Пусть среди мультипликаторов системы (19.1) с периодическими коэффициентами оказался мультипликатор $\rho = 1$, следовательно, в соответствии с равенством (19.26)

$$\mathbf{z}(t+T) = \mathbf{z}(t), \quad (20.1)$$

то есть у системы есть по крайней мере одно периодическое решение с периодом T . И обратно, если у системы с периодическими коэффициентами есть хотя бы одно периодическое решение, то один из мультипликаторов равен единице.

Пусть теперь среди мультипликаторов системы (19.1) с периодическими коэффициентами оказался мультипликатор $\rho = -1$, следовательно, в соответствии с равенством (19.26)

$$\mathbf{z}(t+T) = -\mathbf{z}(t), \quad (20.2)$$

то есть у системы, как говорят математики, есть по крайней мере одно антипериодическое решение с периодом T . И обратно, если у системы с периодическими коэффициентами есть хотя бы одно антипериодическое решение, то один из мультипликаторов равен минус единице.

Существование антипериодического решения периода T свидетельствует о том, что в системе с периодическими коэффициентами есть периодическое решение с периодом $2T$.

Действительно,

$$\mathbf{z}(t+2T) = -\mathbf{z}(t+T) = \mathbf{z}(t) \quad (20.3)$$

Остановим наше внимание на системах уравнений с периодическими коэффициентами, для которых справедливо следующее условие, налагаемое на матрицу системы,

$$\text{Tr } \mathbf{A}(t) = 0 \quad (20.4)$$

Такого типа соотношение достаточно для того, чтобы фазовый объем системы со временем не менялся.

Поскольку в соответствии с (19.21) для фундаментальной матрицы решений системы справедливо соотношение $\mathbf{Z}(t + T) = \mathbf{Z}(t)\mathbf{N}$, то фазовые объемы системы в моменты времени t и $t+T$ связаны между собой через определитель матрицы монодромии \mathbf{C}

$$\det \mathbf{Z}(t + T) = \det \mathbf{Z}(t) \det \tilde{\mathbf{N}} \quad (20.5)$$

Так как в начальный момент времени $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{E}$, то $\det \mathbf{Z}(0) = 1$, а поскольку фазовый объем системы со временем не меняется, то

$$\det \mathbf{C} = 1 \quad (20.6)$$

Случай систем второго порядка. Поведение мультипликаторов. Критерии устойчивости, неустойчивости, сильной устойчивости. Существование T-периодических и 2T-периодических решений и граница области устойчивости системы с периодическими коэффициентами в пространстве параметров.

Рассмотрим систему второго порядка с периодическими коэффициентами и нулевым следом матрицы $\mathbf{A}(t)$ (фазовый объем такой системы сохраняется)

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}(t) \mathbf{z} \quad (20.7)$$

(2×1) (2×2) (2×1)

Матрица монодромии системы (20.7) имеет вид

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad (20.8)$$

причем $\det \mathbf{C} = 1$, то есть

$$\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22} - \tilde{c}_{12}\tilde{c}_{21} = 1 \quad (20.9)$$

Исследуем в данном случае поведение мультипликаторов. Характеристическое уравнение матрицы \mathbf{C} имеет вид

$$p^2 - \text{Tr}(\mathbf{C})p + 1 = 0 \quad (20.10)$$

Здесь $\text{Tr}(\mathbf{C}) = c_{11} + c_{22}$.

По теореме Виетта

$$p_1 p_2 = 1, \quad p_1 + p_2 = \text{Tr}(\mathbf{C}) \quad (20.11)$$

Решая квадратное уравнение (20.10), имеем

$$p_{1,2} = \frac{\text{Tr}(\mathbf{C}) \pm \sqrt{\text{Tr}^2(\mathbf{C}) - 4}}{2} \quad (20.12)$$

Выделим три случая.

1). $|\text{Tr}(\mathbf{C})| > 2$

В этом случае имеем два различных действительных корня p_1, p_2 . В силу соотношений (20.11) один из них (p_1) меньше единицы, другой (p_2) -

больше, и геометрически они связаны между собой с помощью операции инверсии относительно единичной окружности на комплексной плоскости корней.

$$2). |\text{Tr}(\mathbf{C})| < 2$$

В этом случае имеем два комплексно сопряженных корня $p_1 = r \exp(i\varphi)$, $p_2 = r \exp(-i\varphi)$. В силу соотношений (20.11) они всегда лежат на единичной окружности $r = 1$, то есть

$$p_{1,2} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\text{Tr}(\mathbf{C})}{2} \quad (20.13)$$

$$3). |\text{Tr}(\mathbf{C})| = 2$$

В этом случае имеем два равных действительных корня

$$p_1 = p_2 = 1 \text{ или } p_1 = p_2 = -1 \quad (20.14)$$

Из результатов, изложенных в лекции 19, следует, что мультипликаторы p_1 , p_2 связаны с характеристическими показателями λ_1 , λ_2 - корнями характеристического уравнения постоянной матрицы соответствующей приведенной системы уравнений

$$\lambda_{1,2} = \frac{\ln|p_{1,2}| + i \arg p_{1,2}}{T} \quad (20.15)$$

По корням характеристического уравнения приведенной системы мы можем судить об устойчивости системы (20.7) по Ляпунову.

Если имеет место случай 1, то один из действительных корней (p_2) непременно больше единицы, $\ln p_2 > 0$. Следовательно, корень $\lambda_2 > 0$ и имеет место неустойчивость.

Если имеет место случай 2, то $\ln|p_{1,2}| = 0$. Следовательно, корни λ_1 , λ_2 - чисто мнимые и имеет место устойчивость по Ляпунову.

Этот случай математики называют случаем сильной устойчивости. Дело в том, что если имеет место строгое неравенство $|\text{Tr}(\mathbf{C})| < 2$, то для матриц монодромии \mathbf{C} , элементы которых достаточно мало отличаются от элементов матрицы \mathbf{C} , тип неравенства для следа сохранится: $|\text{Tr}(\mathbf{C})| < 2$, а значит устойчивым по Ляпунову является целый класс матриц с близкими значениями следа матрицы монодромии.

Если имеет место пограничный случай 3, то корни p_1, p_2 оказываются кратными (20.14) и для решения вопроса об устойчивости по Ляпунову требуется дополнительный анализ.

Итак, при анализе траекторий корней приведенной системы на комплексной плоскости мультипликаторов возникает следующая картина смены поведения решений системы (20.7). Пусть сначала параметры системы таковы, что имеет место случай 1. Пусть, кроме того, оба мультипликатора положительны. При убывании модуля следа матрицы монодромии, мультипликаторы, оставаясь действительными и сближаясь, двигаются к точке пересечения действительной оси и единичной окружности. Система при этом остается неустойчивой. Когда модуль следа матрицы монодромии оказывается равным двум (случай 3), оба мультипликатора становятся равными единице. При этом в системе появляются периодические решения периода T . Когда модуль следа матрицы монодромии оказывается меньше двух (случай 2), мультипликаторы начинают, оставаясь на одной вертикали, двигаться вдоль единичной окружности, сначала удаляясь друг от друга (до тех пор пока модуль следа матрицы монодромии не обратится в нуль), а затем, приобретая отрицательные действительные части, при новом нарастании модуля следа матрицы монодромии сближаясь, устремляясь к другой точке пересечения действительной оси и единичной окружности. При этом система является устойчивой по Ляпунову. Таким образом, появление в системе периодического решения периода T явилось событием, сопровождающим переход от неустойчивого к устойчивому по Ляпунову состоянию системы. Когда модуль следа матрицы монодромии вновь становится равным двум (случай 3), оба мультипликатора становятся равными минус единице. При этом в системе появляются периодические решения периода $2T$. Когда модуль следа матрицы монодромии вновь становится больше двух, в системе опять появляется положительный характеристический показатель и она вновь оказывается неустойчивой по Ляпунову. Таким образом, появление в системе периодического решения периода $2T$ явилось событием, сопровождающим переход от устойчивого к неустойчивому по Ляпунову состоянию системы. Можно сказать, что область устойчивости системы по Ляпунову оказалась отгороженной (охваченной) периодическими решениями периодов T и $2T$. Это обстоятельство подсказывает нам одну из заповедей теории устойчивости по Ляпунову для систем с периодическими коэффициентами. Важно уметь находить параметры системы, при которых она имеет периодические и антипериодические решения.

Уравнение Матье. Сведение задачи нахождения условий сильной устойчивости в задаче Матье с малой глубиной модуляции к построению матрицы монодромии в задаче о колебаниях математического маятника.

Рассмотрим возникающее во многих задачах механики и теории управляемых систем уравнение Матье, описывающее колебательную систему с модуляционной накачкой

$$z'' + \omega^2(1 + \varepsilon \cos t)z = 0, \quad (20.16)$$

Здесь в качестве независимой переменной t взято “безразмерное время”, единицей которого является период T модуляционной накачки, $\omega = \rho / \nu$ представляет собой отношение собственной частоты ρ системы при отсутствии модуляции к частоте $\nu = 2\pi / T$ модуляционной накачки, безразмерный параметр ε называют глубиной модуляции.

Представляя это уравнение в виде системы уравнений второго порядка, имеем

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(1 + \varepsilon \cos t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (20.17)$$

В данном случае матрица системы

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(1 + \varepsilon \cos t) & 0 \end{pmatrix} \quad (20.18)$$

имеет нулевой след $\text{Tr } \mathbf{A}(t) = 0$ и периодически меняющиеся элементы $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t + 2\pi)$.

Поставим задачу нахождения условий сильной устойчивости системы уравнений (20.17). В соответствии с изложенной выше теорией для этого следует потребовать, чтобы для матрицы монодромии системы (20.17) было выполнено неравенство $|\text{Tr}(\mathbf{C})| < 2$. Но, как аналитически найти матрицу монодромии $\mathbf{C} = \mathbf{Z}(T)$?!

Для начала будем “искать под фонарем”, то есть не станем решать задачу нахождения условий сильной устойчивости системы (20.17) в полном объеме, а попытаемся так упростить задачу, чтобы можно было добиться решения известными нам способами. Предположим, что параметр ε в уравнении Матье достаточно мал. Этот параметр характеризует отличие уравнения Матье от уравнения колебаний математического маятника и носит название “глубина модуляции”. Итак, предположим, что глубина модуляции мала и отличие уравнения Матье от уравнения колебаний маятника в некотором смысле незначительно.

В этом случае следы матриц монодромии для системы, описывающей колебания маятника,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (20.19)$$

и системы (20.17) будут отличаться мало (на величины порядка $\hat{I}(\varepsilon)$).

Это утверждение базируется на знаменитой теореме А.Пуанкаре о существовании и единственности на конечном интервале времени решения задачи Коши с аналитической правой частью

$$\underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}'} = \underset{(n \times 1)}{\mathbf{F}}(\mathbf{t}, \underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}}, \varepsilon), \quad \underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}}(0, \varepsilon) = \underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}^0}(\varepsilon) \quad (20.20)$$

в виде ряда по степеням достаточно малого параметра ε

$$\underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}}(\mathbf{t}, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}_k}(\mathbf{t}), \quad (20.21)$$

где вектор-функции $\underset{(n \times 1)}{\mathbf{z}_k}(\mathbf{t})$ непрерывно дифференцируемы.

Лекция 21.

Необходимые условия параметрического резонанса в задаче Матье с малой глубиной модуляции.

Обозначим, отражая зависимость решения системы (20.17) от глубины модуляции, матрицу монодромии для задачи Матье через $\mathbf{C}(\varepsilon)$, а матрицу монодромии для системы, описывающей колебания маятника, через $\mathbf{C}(0)$.

Имеют место соотношения

$$\tilde{\mathbf{N}}(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \tilde{\mathbf{N}}(0), \quad \tilde{\mathbf{N}}(\varepsilon) = \tilde{\mathbf{N}}(0) + \hat{\mathbf{I}}(\varepsilon) \quad (21.1)$$

Условием сильной устойчивости системы (20.17) является требование, чтобы

$$|\mathrm{Tr}\mathbf{C}(\varepsilon)| < 2 \quad (21.2)$$

Потребуем, чтобы

$$|\mathrm{Tr}\mathbf{C}(0)| < 2 \quad (21.3)$$

Выписать матрицу $\mathbf{C}(0)$ не сложно, поскольку по определению матрицы монодромии $\mathbf{C}(0) = \mathbf{Z}(T)$, где $\mathbf{Z}(T)$ - значение в момент $T = 2\pi$ фундаментальной матрицы решений системы (20.19) с начальным условием $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{E}$.

Фундаментальная матрица решений для системы (20.19) имеет вид

$$\mathbf{Z}(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{\sin \omega t}{\omega} \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (21.4)$$

Приближение $\mathbf{C}(0)$ к матрице монодромии для системы (20.19) представляется в виде

$$\tilde{\mathbf{N}}(0) = \mathbf{Z}(2\pi) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\omega & \frac{\sin 2\pi\omega}{\omega} \\ -\omega \sin 2\pi\omega & \cos 2\pi\omega \end{pmatrix} \quad (21.5)$$

Условие сильной устойчивости для системы (20.17) с точностью до величин порядка ε имеет вид

$$|\text{Tr}\mathbf{C}(0)| = 2|\cos 2\pi\omega| < 2 \quad (21.6)$$

Следовательно,

$$|\cos 2\pi\omega| < 1 \quad (21.7)$$

Это требование выполнено при всех значениях ω кроме

$$\omega = \frac{k}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (21.8)$$

На этих значениях собственной частоты колебаний при отсутствии модуляции справедливо соотношение $|\cos 2\pi\omega| = 1$ и условия сильной устойчивости для системы (20.17) могут оказаться не выполненными.

Говорят, что при значениях частоты $\omega = k / 2$ в задаче Матье может возникнуть динамическая неустойчивость (параметрический резонанс).

Нахождение границ основной области параметрического резонанса в задаче Матье с малой глубиной модуляции с помощью применения ряда последовательных замен, приводящих к системе с почти постоянной матрицей. Введение "расстройки" по частоте в окрестности основной зоны "динамической неустойчивости".

В окрестности точек $\varepsilon = 0$, $\omega = k / 2$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) на плоскости параметров ε , ω возникновение явления динамической неустойчивости надо проверять отдельно.

Рассмотрим сначала точку $\varepsilon = 0$, $\omega = 1 / 2$. Она характерна тем, что период собственных колебаний при отсутствии модуляции $T = 2\pi / \omega = 4\pi$ в два раза больше периода функции $\cos t$, вызывающей модуляционные колебания.

Рассмотрим систему (20.17) в окрестности этой точки. С этой целью прежде всего сделаем ряд тождественных преобразований, выделяющих из системы (20.17) правую часть системы (20.19) при $\omega = 1 / 2$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(1 + \varepsilon \cos t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \left(\frac{1}{4} - \omega^2\right) - \omega^2 \varepsilon \cos t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{4} - \omega^2\right) - \omega^2 \varepsilon \cos t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (21.9)$$

Безразмерный параметр Δ , вводимый по формуле

$$\Delta = \left(\frac{1}{4} - \omega^2\right) / \omega^2 \quad (21.10)$$

и характеризующий отклонение квадрата частоты собственных колебаний системы при отсутствии модуляции от квадрата половины частоты модуляционных колебаний, будем называть частотной расстройкой. Вводя частотную расстройку в уравнения (21.9), получим систему вида

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \omega^2(\Delta - \varepsilon \cos t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (21.11)$$

Пусть частотная расстройка достаточно мала (имеет порядок малой глубины модуляции ε). Тогда можно считать, что

$$\Delta = \varepsilon r, \quad r = O(1) \quad (21.12)$$

Таким образом, имеем систему с одним малым параметром ε .

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \omega^2 \varepsilon (r - \cos t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (21.13)$$

Система (21.13) относится к классу систем с почти постоянной матрицей, которые рассматривались в лекции 30. Однако, судить об устойчивости системы (21.13) по поведению решений системы

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (21.14)$$

нельзя, поскольку характеристический полином для системы (21.14) имеет чисто мнимые корни.

Использование фундаментальной матрицы решений задачи Матье с нулевой глубиной модуляции (порождающей системы) для получения системы с медленно меняющимися переменными методом вариации произвольных постоянных. Применение близкого к тождественному ляпуновского преобразования для получения системы уравнений с почти постоянной матрицей. Условия параметрического резонанса в задаче Матье при малой глубине модуляции.

Поступим следующим образом. Применим к системе (21.13) метод вариации произвольных постоянных, разработанный Ж.Лагранжем для получения решения неоднородных систем дифференциальных уравнений, рассматривая в качестве возмущения те слагаемые в правой части (21.13), которые содержат малый множитель ε .

Общее решение системы (21.14) имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{2} & 2 \sin \frac{t}{2} \\ -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} & \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (21.15)$$

Здесь \tilde{c}_i ($i = 1, 2$) обозначают произвольные постоянные.

Рассматривая (21.15) как преобразование координат от новых переменных x_1, x_2 к переменным z_1, z_2 задачи (21.13), имеем

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{2} & 2 \sin \frac{t}{2} \\ -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} & \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (21.16)$$

Отметим, что это преобразование с матрицей Ляпунова, то есть определитель матрицы преобразования отличен от нуля, а сама матрица и ее производная по времени ограничены.

Подставляя замену переменных (21.16) в систему (21.13), получим, что

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{t}{2} & 2 \sin \frac{t}{2} \\ -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} & \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \omega^2 \varepsilon (r - \cos t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{2} & 2 \sin \frac{t}{2} \\ -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} & \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (21.17)$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \varepsilon (r - \cos t) \begin{pmatrix} -\sin t & 2(\cos t - 1) \\ \frac{1}{2}(\cos t + 1) & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (21.18)$$

Полученная система (21.18) характерна тем, что в ее правая часть “находится под знаком” малого параметра ε . Иначе говоря, скорость изменения переменных x_1, x_2 мала. Поставим вопрос об устойчивости по Ляпунову системы уравнений (21.18). Ответ на него, конечно, решает и вопрос об устойчивости системы (21.13), так как (21.16) - преобразование Ляпунова.

Выделим в матрице правой части системы (21.18) постоянную составляющую. Тогда получим

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -(2r + 1) \\ \frac{2r - 1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \omega^2 \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{-2r \sin t + \sin 2t}{2} & 2r \cos t - \cos 2t \\ \frac{2r \cos t - \cos 2t}{4} & \frac{2r \sin t - \sin 2t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (21.19)$$

Система (21.19) имеет вид векторного уравнения

$$\mathbf{x}' = \omega^2 \varepsilon (\mathbf{P} + \mathbf{F}(t)) \mathbf{x} \quad (21.20)$$

Здесь \mathbf{P} - постоянная, а $\mathbf{F}(t)$ - переменная матрицы.

Покажем, что с помощью близкого к тождественному преобразования Ляпунова

$$\mathbf{x} = (\mathbf{E} + \omega^2 \varepsilon \mathbf{S}(t)) \mathbf{u} \quad (21.21)$$

система (21.19) может быть приведена к системе с почти постоянной матрицей

$$\mathbf{u}' = \omega^2 \varepsilon (\mathbf{P} + \varepsilon \mathbf{H}(t)) \mathbf{u} \quad (21.22)$$

Подставляя преобразование (21.21) в (21.22), учитывая соотношение (21.22) и сокращая на ε , получим “гомологическое уравнение” для определения $\mathbf{S}(t)$ и $\mathbf{H}(t)$

$$(\mathbf{S}' - \mathbf{F})\mathbf{u} + \varepsilon [(\mathbf{E} + \omega^2 \varepsilon \mathbf{S})\mathbf{H} - \omega^2 (\mathbf{PS} - \mathbf{SP}) + \mathbf{FS}]\mathbf{u} = 0 \quad (21.23)$$

Потребуем, чтобы

$$\mathbf{S}' = \mathbf{F}(t) \quad (21.24)$$

Учитывая вид матрицы $\mathbf{F}(t)$, устанавливаем, что $\mathbf{S}(t)$ - матрица Ляпунова.

Полагая далее, что

$$\mathbf{H} = (\mathbf{E} + \omega^2 \varepsilon \mathbf{S})^{-1} [\omega^2 (\mathbf{PS} - \mathbf{SP}) - \mathbf{FS}] \quad (21.25)$$

мы удовлетворим уравнение (21.23). При этом уравнение (21.25) для малых ε всегда разрешимо, а матрица \mathbf{H} - ограничена, так как матрица $\mathbf{E} + \omega^2 \varepsilon \mathbf{S}$ близка к единичной, а $\mathbf{S}(t)$ - матрица Ляпунова.

Рассматривая вопрос об устойчивости системы (21.22), можно показать, что условия неустойчивости системы с постоянной матрицей \mathbf{P} обеспечивают неустойчивость системы (21.22), а следовательно, и неустойчивость по Ляпунову решений систем (21.18) и (21.13).

Характеристический полином матрицы \mathbf{P} имеет вид

$$\lambda^2 + \frac{4r^2 - 1}{4} = 0 \quad (21.26)$$

Следовательно, при $|r| < 0,5$ эти системы неустойчивы. То есть, учитывая соотношения (21.10), (21.12), при выполнении неравенств

$$1 - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{4\omega^2} < 1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad (21.27)$$

в задаче Матье имеет место параметрический резонанс.

Лекция 22.

Установление границ основной области параметрической неустойчивости в задаче Матъе.

Границы области параметрической неустойчивости в окрестности точки $\varepsilon = 0$, $\omega = 1/2$ на плоскости параметров задачи Матъе, как показано в лекции 21, определяются соотношениями

$$\frac{1}{4\omega^2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad (22.1)$$

$$\frac{1}{4\omega^2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad (22.2)$$

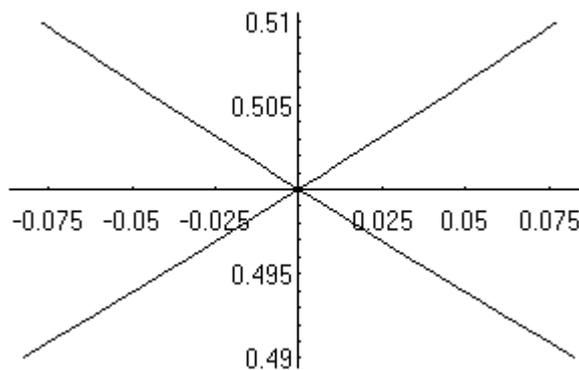


Рис.22.1

Как следует из графика, представленного на рис.22.1 каждому значению глубины модуляции ε соответствует целый интервал, заполненный значениями собственной частоты колебаний системы при отсутствии модуляции, при которых система оказывается неустойчивой по Ляпунову. В окрестности точки $\varepsilon = 0$, $\omega = 1/2$ этот интервал с ростом модуля ε монотонно растет. Если глубина модуляции очень мала, то собственная частота должна быть в точности равна половине частоты модуляции, если же глубина модуляции нарастает, то это равенство становится нестрогим. Можно сказать и по другому, чем больше глубина модуляции, тем более широкий класс систем удастся “раскачать” с помощью одной и той же модуляционной накачки. Ведь собственная частота колебаний системы при отсутствии модуляции определяется внутренними параметрами системы. Следовательно, чем больше глубина модуляции, тем

больший разброс параметров допускается для систем, остающихся в зоне параметрического резонанса.

Могут быть рассмотрены и другие точки множества $\{ \varepsilon = 0, \omega = k / 2 (k = 0, 1, 2, \dots) \}$ на плоскости параметров ε, ω , из которых могут расти зоны параметрического резонанса (или, иначе, динамической неустойчивости).

В математической теории параметрического резонанса устанавливается, что, действительно, каждая точка отмеченного множества порождает зону неустойчивости. С увеличением номера k ширина таких зон при малых ε существенно убывает. Поэтому с увеличением k убывает и число систем, параметры которых удовлетворяют условиям параметрического резонанса.

Диаграммы Айнса -Стретта. Способ построения диаграмм, использующий представление периодических решений в виде рядов Фурье с неизвестными коэффициентами. Бесконечные определители Хилла.

Наиболее сильным методом построения на плоскости ε, ω границ зон динамической неустойчивости уравнения Матье является использование полученного нами в лекции 37 вывода, что область устойчивости по Ляпунову решений задачи Матье охвачена периодическими решениями периодов T и $2T$. Представляя эти периодические функции в виде соответствующих рядов Фурье с неопределенными коэффициентами и приравнявая в них множители при одинаковых гармониках, получаем бесконечные системы однородных алгебраических уравнений для коэффициентов рядов Фурье. Условием разрешимости этих систем является обращение в нуль их определителей. Эти бесконечные определители носят название “определители Хилла”. (Знаменитый астроном Г.Хилл построил теорию движения Луны, выведя соответствующие приближенные уравнения с периодическими коэффициентами и найдя в них частное периодическое решение). Раскрывая определители Хилла, оборвав их на некотором конечном порядке, получают приближенные условия существования периодических решений периода T и $2T$, а следовательно, и уравнения границ зон динамической устойчивости решений уравнения Матье. Изображение границ зон параметрического резонанса на плоскости параметров ε, ω носит название “диаграммы Айнса-Стретта”.

Вводя (как это часто делают) параметры вида

$$b = \omega^2 \varepsilon, \quad c = \omega^2 \tag{22.3}$$

представим уравнение Матье (37.16) в виде

$$z'' + (c + b \cos t)z = 0 \tag{22.4}$$

Отыскивая решение уравнения (22.4) с периодом 2π в виде

$$z = \frac{B_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \exp(ikt) \quad (22.5)$$

после подстановки его в (22.4) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k (ik)^2 \exp(ikt) + \left(c + b \frac{\exp(it) + \exp(-it)}{2} \right) \left(\frac{B_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \exp(ikt) \right) = 0 \quad (22.6)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{b}{2} \frac{B_0}{2} \exp(-it) + \left(c \frac{B_0}{2} + \frac{b}{2} B_1 \right) + \\ & + \left(\frac{b}{2} \frac{B_0}{2} + (c-1)B_1 + \frac{b}{2} B_2 \right) \exp(it) + \\ & + \left(\frac{b}{2} B_1 + (c-4)B_2 + \frac{b}{2} B_3 \right) \exp(2it) + \dots \end{aligned} \quad (22.7)$$

Выделяя в (22.7) вещественные и мнимые части, получим

$$\begin{aligned} & \left(c \frac{B_0}{2} + \frac{b}{2} B_1 \right) + \left(\frac{b}{2} \frac{B_0}{2} + (c-1)B_1 + \frac{b}{2} B_2 \right) \cos t + \\ & + \left(\frac{b}{2} B_1 + (c-4)B_2 + \frac{b}{2} B_3 \right) \cos(2t) + \dots = 0 \end{aligned} \quad (22.8)$$

$$\begin{aligned} & \left((c-1)B_1 + \frac{b}{2} B_2 \right) \sin t + \\ & + \left(\frac{b}{2} B_1 + (c-4)B_2 + \frac{b}{2} B_3 \right) \sin(2t) + \dots = 0 \end{aligned} \quad (22.9)$$

Приравнявая к нулю коэффициенты при гармониках в тригонометрических рядах (22.8), (22.9), получаем две бесконечные однородные системы уравнений

$$\begin{pmatrix} c & b/2 & 0 & \dots \\ b & c-1 & b/2 & \dots \\ 0 & b/2 & c-4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0/2 \\ B_1 \\ B_2 \\ \dots \end{pmatrix} = 0 \quad (22.10)$$

$$\begin{pmatrix} c-1 & b/2 & 0 & \dots \\ b/2 & c-4 & b/2 & \dots \\ 0 & b/2 & c-9 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \dots \end{pmatrix} = 0 \quad (22.11)$$

Системы уравнений имеют нетривиальное решение, если равны нулю их определители. Это и есть определители Хилла периодического решения уравнения Матье с периодом 2π . Отыскивая решение уравнения (22.4) с периодом 4π в виде ряда

$$z = \frac{\tilde{N}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{N}_k \exp\left(i \frac{2k-1}{2} t\right), \quad (22.12)$$

после аналогичных операций получим определители Хилла

периодического решения уравнения Матье с периодом 4π . Приравнивая их к нулю, получаем условия разрешимости соответствующих систем уравнений

$$\begin{vmatrix} c-1/4 + b/2 & b/2 & 0 & \dots \\ b/2 & c-9/4 & b/2 & \dots \\ 0 & b/2 & c-25/4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (22.13)$$

$$\begin{vmatrix} c-1/4 - b/2 & b/2 & 0 & \dots \\ b/2 & c-9/4 & b/2 & \dots \\ 0 & b/2 & c-25/4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (22.14)$$

Границы между областями устойчивости и неустойчивости уравнения Матье на плоскости параметров b, c (или ε, ω) это решения уравнений (22.13), (22.14) и уравнений, получающихся приравниванием нулю определителей Хилла для систем (22.10), (22.11) относительно переменных b, c . Конечно, при раскрытии определителей приходится ограничиваться некоторым конечным порядком, что вносит в определение границ погрешность. Ограничиваясь вторым порядком определителей Хилла, найдем при малых b уравнения кривых, ограничивающих две области параметрического резонанса

$$c \cong \frac{1}{4} - \frac{b}{2}, \quad c \cong \frac{1}{4} + \frac{b}{2}, \quad c \cong 1 + \frac{b^2}{2}, \quad c \cong 1 - \frac{b^2}{12} \quad (22.15)$$

и построим диаграмму Айнса - Стретта.

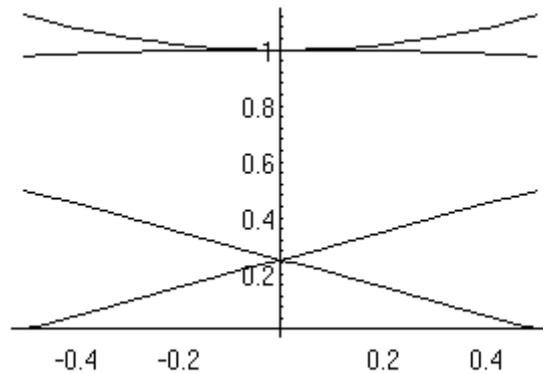


Рис.22.2

Глобальная диаграмма Айнса - Стретта, рассчитанная для любых значений параметров b и c , имеет характерный вид серпообразных областей устойчивости, перемежающихся языками зон параметрического резонанса, которые вырастая из точек $\varepsilon = 0$, $\omega = k / 2$ ($k = 0,1,2, \dots$) на плоскости ε, ω или точек $b = 0$, $c = k^2 / 4$ на плоскости b, c .

Задача акад.П.Л.Капицы о динамической устойчивости перевернутого маятника. Описание проведенного им эксперимента.

Любопытный эффект проявляется, если разрешить параметру c принимать отрицательные значения. Это соответствует движению маятника около его верхнего положения равновесия. Ясно, что при отсутствии модуляции равновесие перевернутого маятника неустойчиво. Но при наличии модуляции возникает зона устойчивости и при отрицательных значениях параметра c . При достаточно большой величине параметра b и достаточно малой величине параметра c оказывается возможной стабилизация перевернутого положения маятника. Достаточно большую величину параметра b можно обеспечить определенным уровнем глубины модуляции - амплитуды вибрации основания маятника, а достаточно малую величину параметра c - высокой частотой вибрации основания.

Ограничиваясь вторым порядком определителей Хилла, найдем при малых b уравнения кривых, ограничивающих соответствующую область устойчивости и построим диаграмму Айнса - Стретта

$$c \cong -\frac{b^2}{2}, \quad c \cong \frac{1}{4} - \frac{b}{2}, \quad c \cong \frac{1}{4} + \frac{b}{2} \quad (22.16)$$

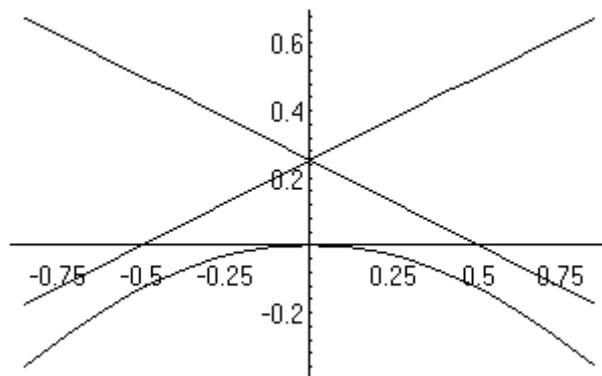


Рис.22.3

Приведем известное описание эффекта стабилизации перевернутого положения маятника с помощью вертикальной вибрации основания, данное академиком П.Л.Капицей. “Когда прибор приведен в действие, то стержень маятника ведет себя так, как будто бы для него существует особая сила, направленная по оси колебаний подвеса. Поскольку частота колебаний подвеса велика, то изображение стержня маятника воспринимается глазом несколько размытым, и колебательное движение незаметно. Поэтому явление устойчивости производит неожиданное впечатление. Если маятнику сообщить толчок в сторону, то он начинает качаться как обычный маятник.”

Лекция 23.

Определение условий устойчивости верхнего положения маятника, точка подвеса которого колеблется в вертикальном направлении с постоянным в течение каждого полупериода колебаний ускорением.

Построение матрицы монодромии. Вычисление ее следа. Асимптотический анализ условий устойчивости перевернутого маятника при малой амплитуде и высокой частоте колебаний точки подвеса. Числовые оценки.

Рассмотрим пример расчета условий устойчивости верхнего положения маятника, точка подвеса которого колеблется в вертикальном направлении с постоянным в течение каждого полупериода колебаний ускорением. Эта задача интересна тем, что в ней матрица монодромии, несмотря на достаточно сложный характер движения, может быть найдена точно.

Итак, пусть ускорение вертикально колеблющейся точки подвеса по модулю постоянно, превышает ускорение силы тяжести g и равно a . Пусть период колебаний точки подвеса равен $T = 2\tau$. Пусть размах колебаний точки подвеса равен h . Движение точки подвеса вверх (против направления силы тяжести), обозначая координату точки подвеса через s_1 , можно описать следующим образом

$$\begin{aligned} \text{При } t = 0 \quad s_1(0) = s_1'(0) = 0 \\ s_1''(t) = a, \quad s_1'(t) = at, \quad s_1(t) = \frac{at^2}{2} \end{aligned} \quad (23.1)$$

Движение точки подвеса вниз (по направлению силы тяжести), обозначая координату точки подвеса через s_2 , можно описать следующим образом

$$\begin{aligned} \text{При } t = \tau \quad s_2(\tau) = h, \quad s_2'(\tau) = 0 \\ s_2''(t) = -a, \quad s_2'(t) = -at + a\tau, \\ s_2(t) = -\frac{at^2}{2} + (a\tau)t + \left(h - \frac{a\tau^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (23.2)$$

$$\text{При } t = \frac{\tau}{2} \quad s_1\left(\frac{\tau}{2}\right) = s_2\left(\frac{\tau}{2}\right), \quad s_1'\left(\frac{\tau}{2}\right) = s_2'\left(\frac{\tau}{2}\right)$$

Следовательно, заданные параметры колебаний точки подвеса связаны зависимостью

$$a = \frac{4h}{\tau^2} \quad (23.3)$$

Уравнение движения маятника с подвижной точкой подвеса имеет вид (угол φ отсчитывается от направления силы тяжести, l - длина маятника)

$$\varphi'' + \frac{(g + s'')}{l} \sin \varphi = 0 \quad (23.4)$$

Поскольку мы интересуемся поведением маятника около верхнего положения равновесия, положим $\varphi = \pi + \alpha$. Тогда для малых углов α имеем уравнение

$$\alpha'' - \frac{(g + s'')}{l} \alpha = 0 \quad (23.5)$$

На полупериоде, когда направления ускорений \mathbf{g} и \mathbf{s}'' совпадают,

$$\alpha'' - \frac{(g + a)}{l} \alpha = 0 \quad (23.6)$$

На полупериоде, когда направления ускорений \mathbf{g} и \mathbf{s}'' противоположны,

$$\alpha'' - \frac{(a - g)}{l} \alpha = 0 \quad (23.7)$$

Обозначим

$$\Omega^2 = \frac{a + g}{l}, \quad \omega^2 = \frac{a - g}{l} \quad (23.8)$$

Тогда движение маятника на последовательных полупериодах описывается уравнениями

$$\alpha'' - \Omega^2 \alpha = 0 \quad (23.9)$$

$$\alpha'' + \omega^2 \alpha = 0 \quad (23.10)$$

или соответствующими системами уравнений первого порядка.

Матрица монодромии, равная значению фундаментальной матрицы решений системы двух уравнений первого порядка, описывающей движение маятника, при $t=T$ (на периоде), может быть построена как произведение двух фундаментальных матриц решений систем уравнений с постоянными коэффициентами (23.9), (23.10) на последовательных полупериодах движения.

Фундаментальная матрица решений системы (23.9) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\Omega t & \frac{\operatorname{sh}\Omega t}{\Omega} \\ \Omega \operatorname{sh}\Omega t & \operatorname{ch}\Omega t \end{pmatrix} \quad (23.11)$$

Фундаментальная матрица решений системы (23.10) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{\sin \omega t}{\omega} \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (23.12)$$

Матрицу монодромии получим как произведение матриц (23.11), (23.12)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\Omega \tau & \frac{\operatorname{sh}\Omega \tau}{\Omega} \\ \Omega \operatorname{sh}\Omega \tau & \operatorname{ch}\Omega \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega \tau & \frac{\sin \omega \tau}{\omega} \\ -\omega \sin \omega \tau & \cos \omega \tau \end{pmatrix} \quad (23.13)$$

Условие устойчивости системы с периодическими коэффициентами, как показано в лекции 37, имеет вид

$$|\operatorname{Tr} \mathbf{C}| < 2 \quad (23.14)$$

Находя след матрицы \mathbf{C} , получаем условие устойчивости верхнего положения маятника, точка подвеса которого колеблется в вертикальном направлении с постоянным в течение каждого полупериода колебаний ускорением.

$$\left| 2 \cos \omega \tau \operatorname{ch}\Omega \tau + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega \Omega} \sin \omega \tau \operatorname{sh}\Omega \tau \right| < 2 \quad (23.15)$$

Проанализируем полученный результат.

Выражая коэффициенты соотношения (23.15) через исходные параметры задачи, имеем

$$\frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega \Omega} = 2 \frac{g}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{g}{a}\right)^2}} \quad (23.16)$$

$$\omega^2 \tau^2 = 4 \frac{h}{l} \left(1 - \frac{g}{a}\right), \quad \Omega^2 \tau^2 = 4 \frac{h}{l} \left(1 + \frac{g}{a}\right) \quad (23.17)$$

Обозначая

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{h}{l}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{g}{a}}, \quad (23.18)$$

получим

$$\left| \cos\left(2\varepsilon\sqrt{1-\delta^2}\right)\text{ch}\left(2\varepsilon\sqrt{1+\delta^2}\right) + \frac{\delta^2}{\sqrt{1-\delta^4}} \sin\left(2\varepsilon\sqrt{1-\delta^2}\right)\text{sh}\left(2\varepsilon\sqrt{1+\delta^2}\right) \right| < 1 \quad (23.19)$$

При естественных предположениях о малости параметров ε, δ , разлагая тригонометрические и гиперболические функции в ряды, имеем с точностью до величин порядка $\varepsilon^4 + \delta^4$

$$3\delta^2 < \varepsilon^2 \quad (23.20)$$

В исходных параметрах

$$3\frac{g}{a} < \frac{h}{l} \quad (23.21)$$

Учитывая зависимость (23.3), имеем

$$T < \frac{4\sqrt{3}}{3} \frac{h}{l} \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (23.22)$$

Пусть, например, $l = 20$ см, $h = 2$ см, тогда период $T < 0,03(3)$ с или частота $f > 30$ Гц.

Если задаться частотой вращения бытового электромотора $f = 160$ Гц, то для тех же параметров маятника

$$h > \frac{\sqrt{3gl}}{4f} \cong 0,4 \text{ (см)}$$

Колебания параметрически возмущаемой машины с учетом демпфирования. Приближенный метод определения границ областей динамической неустойчивости на примере системы, описываемой обобщенным уравнением Матье.

Рассмотрим уравнение Матье, обобщенное включением слагаемого, отражающего присутствие в системе вязкого трения

$$z'' + \delta z' + \omega^2(1 + \varepsilon \cos t)z = 0 \quad (23.23)$$

Ограничимся обсуждением случая малой глубины модуляции и слабой диссипации ($\varepsilon \ll 1, \delta \ll 1$).

Возникает вопрос, как повлияет на границы области динамической неустойчивости присутствие слабого линейного демпфирования, присущего многим механическим и электромеханическим системам?

Для ответа на него воспользуемся неформальным приближенным методом, предложенным академиком А.Ю.Ишлинским.

При исследовании сложных механических и электромеханических систем А.Ю.Ишлинский рекомендует воспользоваться тем обстоятельством, что при потере устойчивости в них возникают расходящиеся колебания близкие к гармоническим. Поэтому можно сопоставить данную систему, находящуюся на пороге устойчивости, с некоторой воображаемой системой с одной степенью свободы, которая описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Они подбираются так, чтобы движение воображаемой системы по своему характеру было близким к движению исходной системы.

Предположим, что на границе устойчивости закон изменения решения $z(t)$ уравнения (23.23) близок к гармоническому

$$x = \sin\left(\frac{t}{2} + \alpha\right) \quad (23.24)$$

периода 4π (удвоенного периода модуляционных колебаний) с неизвестной фазой α .

Представляя уравнение (23.23) в виде

$$z'' + \delta z' + \omega^2 z = -\varepsilon \omega^2 z \cos t \cong -\varepsilon \omega^2 x \cos t, \quad (23.25)$$

имеем

$$\begin{aligned} z'' + \delta z' + \omega^2 z &= -\varepsilon \omega^2 \cos t \sin\left(\frac{t}{2} + \alpha\right) = \\ &= -\frac{\varepsilon \omega^2}{2} \left(\sin\left(\frac{3t}{2} + \alpha\right) - x \cos 2\alpha + 2x' \sin 2\alpha \right) \end{aligned} \quad (23.26)$$

Делая обратную замену x на z , получаем

$$\begin{aligned} z'' + \delta z' + \omega^2 z &= \\ &= -\frac{\varepsilon \omega^2}{2} \left(\sin\left(\frac{3t}{2} + \alpha\right) - z \cos 2\alpha + 2z' \sin 2\alpha \right) \end{aligned} \quad (23.27)$$

Таким образом, имеем дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} z'' + (\delta + \varepsilon \omega^2 \sin 2\alpha) z' + \left(\omega^2 - \frac{\varepsilon \omega^2}{2} \cos 2\alpha\right) z &= \\ &= -\frac{\varepsilon \omega^2}{2} \sin\left(\frac{3t}{2} + \alpha\right) \end{aligned} \quad (23.28)$$

Условием возбуждения расходящихся колебаний, которые описываются уравнением (23.28), является неравенство

$$\delta + \varepsilon\omega^2 \sin 2\alpha < 0 \quad (23.29)$$

На границе устойчивости имеем

$$\delta + \varepsilon\omega^2 \sin 2\alpha = 0 \quad (23.30)$$

Вместе с тем период этих колебаний, как и период движения (23.24), должен равняться удвоенному периоду модуляционных колебаний. Следовательно,

$$\omega^2 - \frac{\varepsilon\omega^2}{2} \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \quad (23.31)$$

Исключая из равенств (23.30), (23.31) фазу α , получим уравнение границы области динамической неустойчивости в виде

$$\delta^2 + \left(2\omega^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \varepsilon^2\omega^4 \quad (23.32)$$

Лекция 24.

Пространственное и временное среднее. Теорема об усреднении.

Итак, в случае рационально связанных частот, несмотря на нахождение изображающей точки на поверхности двумерного тора, ее траектория представляет собой одномерный тор, а в случае иррационально связанных частот именно двумерный тор и описывает то геометрическое место, где находится изображающая точка.

Пусть $f(\vartheta, \varphi)$ некоторая интегрируемая функция, заданная на двумерном торе.

Пространственным средним от функции $f(\vartheta, \varphi)$ на двумерном торе называется число Mf , которое вычисляется по следующему правилу

$$Mf = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi \quad (24.1)$$

Рассмотрим теперь значения функции $f(\vartheta, \varphi)$ на решениях системы (23.13) $\varphi = \omega t + \varphi^0$, $\vartheta = t + t^0$. Это - функция времени $f(t + t^0, \omega t + \varphi^0)$.

Временным средним функции $f(\vartheta, \varphi)$ на двумерном торе (если оно существует) называется функция $Ef(\omega, t^0, \varphi^0)$, которая находится по следующему правилу

$$Ef(\omega, t^0, \varphi^0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t^0}^T f(t + t^0, \omega t + \varphi^0) dt \quad (24.2)$$

Имеет место следующая теорема. Временное среднее существует и совпадает с пространственным, если функция f интегрируема, а частоты φ' и ϑ' рационально не связаны (ω является иррациональным числом).

$$Ef(\omega, t^0, \varphi^0) = Mf \quad (24.3)$$

Эта теорема называется теоремой об усреднении или эргодической теоремой Г.Вейля.

Если частоты φ' и ϑ' рационально связаны (ω является рациональным числом), то кривая решения замкнута на двумерном торе и не заметает весь

тор, поэтому интеграл вдоль решения и интеграл по всей поверхности тора могут не совпадать. При этом временное среднее, рассматриваемое как функция ω , может иметь точки разрыва.

Медленные и быстрые переменные. Уменьшение размерности торов в зонах параметрического резонанса с помощью замены переменных - введения резонансной расстройки. Одночастотные колебания в расширенном фазовом пространстве. Критерий устойчивости как условие неразрушаемости порождающих торов и близости \square (неразбегания) фаз.

Рациональная связь между частотами приводит к изменению числа медленных переменных в рассматриваемой системе. Действительно. Пусть выполнено условие (23.4). Сделаем замену угловых переменных в системе (23.13) по формуле

$$\alpha = \varphi - \frac{k}{n} \vartheta \quad (24.4)$$

Тогда

$$\alpha' = \varphi' - \frac{k}{n} \vartheta' = \omega - \frac{k}{n} = 0 \quad (24.5)$$

Таким образом, новая переменная α , называемая фазовой расстройкой в системе (23.13), просто не меняется, и сама система принимает вид

$$\rho' = 0, \quad \alpha' = 0, \quad \varphi' = \omega \quad (24.6)$$

Введение фазовой расстройки α обеспечивает переход двухчастотной системы (23.13) с одной “медленной переменной” ρ и двумя “быстрыми” ϑ, φ на двумерном торе в одночастотную систему (24.6) с двумя “медленными переменными” ρ, α и одной “быстрой” φ на одномерном торе.

Рассмотрим систему уравнений Матье (23.12). При малых ε она является “возмущением” порождающей системы (23.13). Ее устойчивость при малой глубине модуляции можно неформально интерпретировать как сохранение близости решений (23.12) к решениям системы (23.13). Во всяком случае, при малых ε , тор, на котором находятся решения, должен деформироваться слабо. Это означает, что содержащие малый множитель ε слагаемые в правых частях системы (23.12) не должны иметь постоянной составляющей.

Если частота ω иррациональна, то по теореме об усреднении временное среднее вдоль решения порождающей системы от содержащих малый множитель ε слагаемых в правых частях системы (23.12) равно пространственному среднему, которое равно нулю.

$$\begin{aligned} M(\cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi d\vartheta d\varphi = 0 \end{aligned} \quad (24.7)$$

$$\begin{aligned} M(\cos \vartheta \cos^2 \varphi) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \cos^2 \varphi d\vartheta d\varphi = 0 \end{aligned} \quad (24.8)$$

Если же частота ω рациональна и выполнено соотношение (23.4), то прежде всего сделаем замену переменных, введя фазовую расстройку (24.4).

В этом случае получим систему вида

$$\begin{aligned} \rho' &= \varepsilon \frac{k}{n} \rho \cos \frac{n}{k} (\varphi - \alpha) \sin \varphi \cos \varphi \\ \alpha' &= \varepsilon \frac{k}{n} \cos \frac{n}{k} (\varphi - \alpha) \cos^2 \varphi \\ \varphi' &= \frac{k}{n} + \varepsilon \frac{k}{n} \cos \frac{n}{k} (\varphi - \alpha) \cos^2 \varphi \end{aligned} \quad (24.7)$$

с двумя медленными переменными ρ , α и одной быстрой φ на одномерном торе и с порождающей системой (24.6).

Взяв, считая α постоянным, одномерное пространственное среднее по φ от содержащих малый параметр ε слагаемых правых частей уравнений (24.7), получим

$$\begin{aligned} M\left(\cos \frac{n}{k} (\varphi - \alpha) \sin \varphi \cos \varphi\right) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \frac{n}{k} (\varphi - \alpha) \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 0 \end{aligned} \quad (24.8)$$

$$M \left(\cos \frac{n}{k} (\varphi - \alpha) \cos^2 \varphi \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \frac{n}{k} (\varphi - \alpha) \cos^2 \varphi d\varphi = \begin{cases} 0 & \left(\frac{n}{k} \neq 2 \right) \\ 0,25 \cos 2\alpha & \left(\frac{n}{k} = 2 \right) \end{cases} \quad (24.9)$$

Следовательно, при $n/k = 2$ постоянная составляющая скорости ρ' равна нулю, а угловых скоростей α' и $(\varphi' - k/n)$ равна $0,125 \varepsilon \cos 2\alpha$ и не равна нулю. Решение системы (24.7) будет систематически уходить от решения порождающей системы (24.6). Но это и есть динамическая неустойчивость. Таким образом, выявляется одно из значений безразмерной собственной частоты системы Матъе, при которых возникает параметрический резонанс: $\omega = 1/2$.

Примеры возникновения явлений параметрического резонанса в динамике машин. Анализ уравнений динамики машины с кривошипно-шатунным приводом, учитывающий конечную жесткость элементов конструкции.

Очень часто необходимость исследования параметрического резонанса возникает в механизмах с развитыми кинематическими цепями, являющихся, в частности, технической базой промышленной робототехники. Дело в том, что в этих механизмах обычно много звеньев и не очень много степеней свободы. Уравнения циклического движения таких механизмов, представленные в форме уравнений Лагранжа второго рода, это, так называемые, уравнения систем с “приведенной массой” или “приведенным моментом инерции”, зависящих от обобщенных координат.

Вспомним, например, досконально исследованную академиком Н.Е.Кочиным задачу о крутильных колебаниях коленчатого вала силового двигателя с учетом инерции шатунов и поршня.

Ограничиваясь рассмотрением случая одноцилиндрового двигателя с маховиком, будем считать, что масса маховика достаточно велика, так что вращение вала можно считать практически равномерным. (Вспомним графики типового расчета по курсу “Основы механики”.) Пусть ω - угловая скорость маховика. Обозначим через φ угол вращения кривошипа. Тогда кинетическая энергия кривошипа вместе со связанными с ним шатуном и поршнем может быть представлена в виде

$$T = \frac{1}{2} J(\varphi) (\varphi')^2 \quad (24.10)$$

Функцию $J(\varphi)$ можно вычислить, если известны размеры и распределение масс кривошипа, шатуна и поршня. Это будет периодическая функция угла φ периода 2π .

Составляя дифференциальное уравнение Лагранжа, получим

$$J(\varphi)\varphi'' + \frac{1}{2} \frac{dJ(\varphi)}{d\varphi} (\varphi')^2 = Q_\varphi \quad (24.11)$$

Здесь Q_φ - обобщенная сила, которая образуется из следующих слагаемых: внешнего крутящего момента $M(\varphi)$ - периодической функции угла φ с периодом 2π или 4π в зависимости от числа тактов двигателя и упругого момента $-c(\varphi - \omega t)$, действующего на кривошип из-за упругого закручивания кривошипа относительно маховика (второе слагаемое в типовом расчете по механике обычно не учитывается).

Итак,

$$Q_\varphi = M(\varphi) - c(\varphi - \omega t) \quad (24.12)$$

Разделим уравнение (24.11) на $\sqrt{J(\varphi)}$. Тогда получим

$$\sqrt{J(\varphi)}\varphi'' + \frac{1}{2\sqrt{J(\varphi)}} \frac{dJ(\varphi)}{d\varphi} (\varphi')^2 = \frac{Q_\varphi}{\sqrt{J(\varphi)}} \quad (24.13)$$

Для целей нашего исследования удобно ввести вместо обобщенной координаты φ обобщенную координату q при помощи соотношения

$$q = \int_{\omega t}^{\varphi} \sqrt{J(s)} ds \quad (24.14)$$

Новая обобщенная скорость выразится через φ , φ' следующим образом

$$q' = \sqrt{J(\varphi)}\varphi' - \sqrt{J(\omega t)}\omega \quad (24.15)$$

Новое обобщенное ускорение имеет вид

$$q'' = \sqrt{J(\varphi)}\varphi'' + \frac{1}{2\sqrt{J(\varphi)}} \frac{dJ(\varphi)}{d\varphi} (\varphi')^2 - \frac{\omega^2}{2\sqrt{J(\omega t)}} \frac{dJ(\omega t)}{d(\omega t)} \quad (24.16)$$

Учтем, что разность $\varphi - \omega t$ очень мала и прибегнем к приближенному представлению соотношения (24.14). В соответствии с формулой Лагранжа

$$q \cong (\varphi - \omega t)\sqrt{J(\omega t)} \quad (24.17)$$

Кроме того,

$$\frac{M(\varphi)}{\sqrt{J(\varphi)}} \cong \frac{M(\omega t)}{\sqrt{J(\omega t)}}, \quad \frac{c(\varphi - \omega t)}{\sqrt{J(\varphi)}} \cong \frac{c(\varphi - \omega t)}{\sqrt{J(\omega t)}} \quad (24.18)$$

Таким образом, учитывая соотношения (24.15)-(24.18), уравнение (24.13) преобразуется к виду

$$q'' + \frac{c}{J(\omega t)} q = \frac{M(\omega t)}{\sqrt{J(\omega t)}} - \frac{\omega^2}{2\sqrt{J(\omega t)}} \frac{dJ(\omega t)}{d(\omega t)} \quad (24.19)$$

Колебания машины описываются неоднородным линейным уравнением с периодическими коэффициентами, содержащим параметр ω - угловую скорость вращения вала. Как и в задаче Матье, при определенных значениях ω в системе может возникнуть параметрический резонанс. Задача исследователя заключается в определении критических значений угловой скорости и выборе нерезонансных параметров системы.

Лекция 25.

Получены условия существования автовращений ветровой турбины с вертикальной осью (VAWT), дана естественная классификация ветроустановок по отношению скорости вращения к скорости воздействующего ветрового потока. Определены точки смены характера поведения ветроустановки при увеличении ее момента инерции от “бесконечно малых” значений до значений конечного порядка.

Прекрасным примером применения методов теории сложного движения является актуальная для создания возобновляемых источников энергии задача динамики ветроустановки с вертикальной осью вращения (вертушки Дарье). В данной работе уравнения, в зависимости от величины момента инерции подвижной части установки, записываются в переменных: “курсовой угол” и “угловая скорость”, “курсовой угол” и “угол атаки” и т.д.

В качестве модели рабочего элемента ветряной установки с вертикальной осью вращения рассмотрим прямоугольную пластинку, жестко закрепленную на державке (рис. 1).

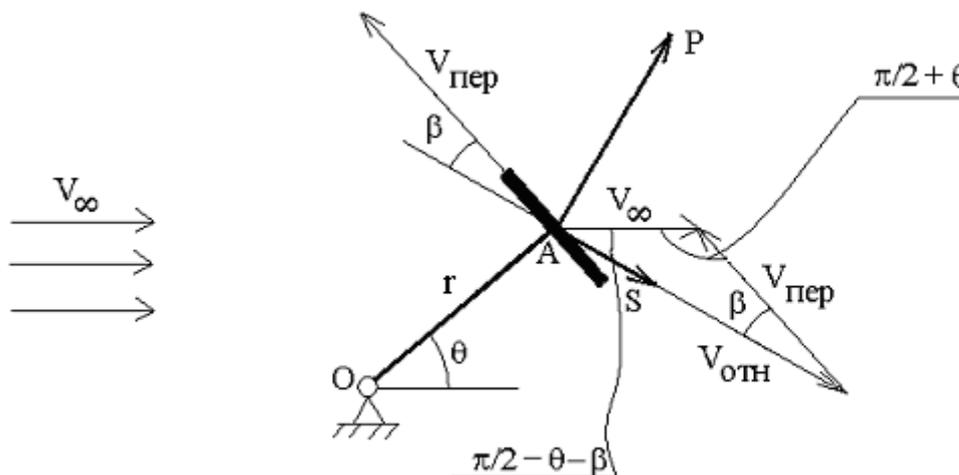


Рис. 1. Элемент ветроустановки.

Пластинка движется в воздушной среде со скоростью V . Примем, что пластинка закреплена ортогонально державке на расстоянии r от неподвижного цилиндрического шарнира O , а ее точка закрепления совпадает с геометрическим центром пластинки. Державка с пластинкой могут совершать круговое движение вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O . Полагаем, что аэродинамическое воздействие испытывает

только пластина. Характеристикой этого воздействия является угол атаки β . Назовем центром давления точку A пересечения равнодействующей плоской системы аэродинамических сил с плоскостью пластинки. Будем считать, что точка A совпадает с точкой закрепления пластинки. Введем в рассмотрение вектор относительной скорости V_f ветра относительно пластинки, измеренную в точке A - “флюгерную” скорость ветра. В качестве угла атаки β будем рассматривать угол между плоскостью пластинки и вектором V_f .

Абсолютная скорость ветра V_w может быть представлена как векторная сумма абсолютной скорости V_A точки A (переносной скорости ветра) и флюгерной скорости ветра.

Кинематическая связь между углом атаки β , курсовым углом ϑ и угловой скоростью державки $\dot{\vartheta}$ определяется соотношением

$$\dot{\vartheta} = \frac{V_w \cos(\vartheta + \beta)}{r \sin \beta} \quad (25.1)$$

Отметим, что при постоянной величине абсолютной скорости ветра, производная угла атаки по времени $\dot{\beta}$ кинематически связана с углом атаки β , с курсовым углом ϑ , с угловой скоростью державки $\dot{\vartheta}$ и угловым ускорением державки $\ddot{\vartheta}$ соотношением

$$\dot{\beta} = -\frac{V_w \sin 2(\vartheta + \beta)}{2r \cos \vartheta} - \frac{r \sin^2 \beta}{V_w \cos \vartheta} \ddot{\vartheta} \quad (25.2)$$

Обозначая момент относительно оси шарнира O аэродинамических сил, действующих на пластинку, через $M(\beta, \vartheta)$, выпишем уравнение, описывающее динамику рассматриваемого аэродинамического маятника в виде

$$J \ddot{\vartheta} = M(\beta, \vartheta) \quad (25.3)$$

Используя введенное обозначение, имеем

$$\dot{\beta} = -\frac{V_w \sin 2(\vartheta + \beta)}{2r \cos \vartheta} - \frac{r \sin^2 \beta}{V_w J \cos \vartheta} M(\beta, \vartheta) \quad (25.4)$$

Выписывая уравнение движения вертушки Дарье в пространстве β, ϑ , получим

$$\frac{d\beta}{d\vartheta} = -\frac{\sin(\vartheta + \beta) \sin \beta}{\cos \vartheta} - \frac{1}{J} \left(\frac{r}{V_w} \right)^2 \frac{\sin^3 \beta}{\cos \vartheta \cos(\vartheta + \beta)} M(\beta, \vartheta) \quad (25.5)$$

Вводя характерные масштабы изменения переменных задачи по формулам

$$T_* = \frac{r}{V_w}, t = T_* \tau, M = \frac{J}{T_*^2} m_* \quad (25.6)$$

получим безразмерные уравнения:

$$\vartheta' = \frac{\cos(\vartheta + \beta)}{\sin \beta} \quad (25.7)$$

$$\vartheta'' = m_*(\beta, \vartheta) \quad (25.8)$$

$$\beta' = -\frac{\sin 2(\vartheta + \beta)}{2 \cos \vartheta} - \frac{\sin^2 \beta}{\cos \vartheta} m_*(\beta, \vartheta) \quad (25.9)$$

$$\frac{d\beta}{d\vartheta} = -\frac{\sin(\vartheta + \beta)\sin\beta}{\cos\vartheta} - \frac{\sin^3\beta}{\cos\vartheta\cos(\vartheta + \beta)} m_*(\beta, \vartheta) \quad (25.10)$$

Рассмотрим теперь систему трех уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \vartheta' &= \omega \\ \beta' &= -\frac{\sin 2(\vartheta + \beta)}{2\cos\vartheta} - \frac{\sin^2\beta}{\cos\vartheta} m_*(\beta, \vartheta) \\ \omega' &= m_*(\beta, \vartheta) \end{aligned} \quad (25.11)$$

Необходимо отметить, что система (25.11) обладает особым “первым интегралом” задачи

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{-\sin\beta \pm \sqrt{1 - \omega^2 \sin^2\beta}}{\omega \sin\beta + \cos\beta} \quad (25.12)$$

Поведение решений уравнений движения ветряка существенно зависит от величины модуля безразмерной функции $m_*(\beta, \vartheta)$. Рассмотрим предельные случаи больших и малых значений этой функции. С этой целью в первом случае положим

$$m_*(\beta, \vartheta) = \frac{1}{\varepsilon} m(\beta, \vartheta), \quad (25.13)$$

а во втором случае положим

$$m_*(\beta, \vartheta) = \varepsilon m(\beta, \vartheta) \quad (25.14)$$

Здесь $\varepsilon \rightarrow 0, m(\beta, \vartheta) \approx 1$.

Таким образом, в упомянутых случаях системы уравнений движения ветрушки Дарье оказываются принадлежащими классу систем дифференциальных уравнений с малым параметром.

При выполнении условия (25.13)

$$\begin{aligned} \vartheta' &= \omega \\ \varepsilon\beta' &= -\varepsilon \frac{\sin 2(\vartheta + \beta)}{2\cos\vartheta} - \frac{\sin^2\beta}{\cos\vartheta} m(\beta, \vartheta) \\ \varepsilon\omega' &= m(\beta, \vartheta) \end{aligned} \quad (25.15)$$

При выполнении условия (14)

$$\begin{aligned} \vartheta' &= \omega \\ \beta' &= -\frac{\sin 2(\vartheta + \beta)}{2\cos\vartheta} - \varepsilon \frac{\sin^2\beta}{\cos\vartheta} m(\beta, \vartheta) \\ \omega' &= \varepsilon m(\beta, \vartheta) \end{aligned} \quad (25.16)$$

Асимптотическое исследование системы уравнений (25.15) начнем с исключения (с помощью условия (25.12)) уравнения

$$\varepsilon\omega' = m(\beta, \vartheta).$$

Получим систему второго порядка с малым параметром при производных вида

$$\vartheta' = \frac{\cos(\vartheta + \beta)}{\sin\beta} \quad (25.17)$$

$$\varepsilon\beta' = -\varepsilon \frac{\sin 2(\vartheta + \beta)}{2\cos\vartheta} - \frac{\sin^2\beta}{\cos\vartheta} m(\beta, \vartheta)$$

Переходя к “быстрому времени” $\xi = \tau/\varepsilon$ получаем систему уравнений

$$\frac{d\vartheta}{d\xi} = \varepsilon \frac{\cos(\vartheta + \beta)}{\sin\beta} \quad (25.18)$$

$$\frac{d\beta}{d\xi} = -\varepsilon \frac{\sin 2(\vartheta + \beta)}{2 \cos \vartheta} - \frac{\sin^2 \beta}{\cos \vartheta} m(\beta, \vartheta)$$

Полагая в этой системе $\varepsilon = 0$, получим присоединенную по А.Н.Тихонову систему “быстрых движений”

$$\frac{d\vartheta}{d\xi} = 0 \quad (25.19)$$

$$\frac{d\beta}{d\xi} = -\frac{\sin^2 \beta}{\cos \vartheta} m(\beta, \vartheta)$$

Здесь $\vartheta = \vartheta^*$ представляет собой произвольное фиксированное значение курсового угла.

Известно, что асимптотическая устойчивость особых точек присоединенной системы дифференциальных уравнений обеспечивает на конечном интервале времени τ близость решений исходной задачи к решениям вырожденной задачи

$$g' = \frac{\cos(\vartheta + \beta)}{\sin\beta} \quad (25.20)$$

$$\frac{\sin^2 \beta}{\cos \vartheta} m(\beta, \vartheta) = 0$$

При некоторых дополнительных условиях, характерных для задач аэродинамического обтекания, можно считать, что решения алгебраического уравнения из системы (20) не зависят от курсового угла, а определяются только углом атаки. В этом случае вырожденная система уравнений сводится к одному уравнению для курсового угла, зависящему от параметра β^*

$$g' = \frac{\cos(\vartheta + \beta^*)}{\sin\beta^*} = \text{ctg}\beta^* \cos \vartheta - \sin \vartheta \quad (25.21)$$

Угол атаки β^* представляет собой сумму “углов потерь”: δ_1 , тангенс которого определяется отношением силы лобового сопротивления пластины к подъемной силе, и δ_2 , тангенс которого определяется отношением силы трения в шарнире державки к усилию в ее стержне.

Переходя к переменной $\sin(\vartheta + \beta^*)$, представим решения уравнения (25.21) в виде

$$\sin(\vartheta + \beta^*) = \frac{1 + \sin(\vartheta + \beta^*) - (1 - \sin(\vartheta + \beta^*)) \exp(-2\tau / \sin\beta^*)}{1 + \sin(\vartheta + \beta^*) + (1 - \sin(\vartheta + \beta^*)) \exp(-2\tau / \sin\beta^*)} \quad (25.22)$$

Таким образом, при $\tau \rightarrow \infty$ курсовой угол ϑ стремится к стационарной точке, определяемой соотношением $\sin(\vartheta + \beta^*) = 1$, и, следовательно, ротационного движения вертушки Дарье в этом случае не возникает.

Отметим, что полярная диаграмма зависимости угловой скорости вращения державки от курсового угла при постоянном значении β^* (годограф угловой скорости) представляет собой окружность, проходящую

через начало координат, уравнение которой в полярных координатах имеет вид

$$\rho = 2\rho_0 \cos(\vartheta - \varphi_0) \quad (25.23)$$

Здесь

$$\rho = \vartheta', \rho_0 = \frac{1}{2 \sin \beta^*}, \varphi_0 = -\beta^*$$

Пусть $\vartheta = \vartheta^*, \beta = \beta^*$ - какое-либо решение уравнения $m(\beta, \vartheta) = 0$. В этом случае условие асимптотической устойчивости особой точки присоединенной системы дифференциальных уравнений по первому приближению имеет вид неравенства

$$\frac{1}{\cos \vartheta^*} \frac{dm(\beta^*, \vartheta^*)}{d\beta} > 0 \quad (25.24)$$

Противоположный знак в неравенстве свидетельствовал бы об отсутствии близости решений исходной задачи к решениям вырожденной задачи.

Асимптотическое исследование системы уравнений (16) начнем с исключения (с помощью условия (25.12)) уравнения

$$\omega' = \varepsilon m(\beta, \vartheta) .$$

Получим систему второго порядка с малым параметром

$$\vartheta' = \frac{\cos(\vartheta + \beta)}{\sin \beta} \quad (25.25)$$

$$\beta' = -\frac{\sin 2(\vartheta + \beta)}{2 \cos \vartheta} - \varepsilon \frac{\sin^2 \beta}{\cos \vartheta} m(\beta, \vartheta)$$

Система уравнений (25.25) представляет собой два уравнения для быстрых переменных β, ϑ .

Для построения асимптотического решения системы уравнений (25.25) прежде всего исследуем порождающую систему уравнений

$$\vartheta' = \frac{\cos(\vartheta + \beta)}{\sin \beta} \quad (25.26)$$

$$\beta' = -\frac{\sin 2(\vartheta + \beta)}{2 \cos \vartheta}$$

В плоскости (ϑ, β) траектории порождающей системы удовлетворяют уравнению

$$\frac{d\beta}{d\vartheta} = -\frac{\sin(\vartheta + \beta) \sin \beta}{\cos \vartheta} \quad (25.27)$$

Частными решениями уравнения (25.27) являются функции

$$\beta = k\pi, \beta = -\frac{1}{2}\vartheta + \frac{\pi}{4} + m\pi, \beta = -\vartheta + \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (25.28)$$

Эти соотношения характеризуют “резонансные” связи быстрых переменных, уменьшающие размерность вектора медленных переменных.

Решения, близкие к частному решению $\beta = 0$ характеризуются высокими угловыми скоростями вращения державки. Линейная скорость точки А

пластины существенно превышает скорость ветра V_w . В этом случае при полном обороте аэродинамического маятника (курсовой угол пробегает значения от 0 до 2π) угол атаки β изменяется в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$.

Флюгерная скорость ветра направлена практически вдоль пластины. Реализующие данный режим ротации ветряные машины могут быть названы машинами высокоскоростного класса.

Решения, близкие к частному решению $\beta = -\vartheta/2 + \pi/4$, характеризуются тем, что линейная скорость точки А пластины близка к скорости ветра V_w . В этом случае при полном обороте аэродинамического маятника (когда курсовой угол пробегает значения от 0 до 2π) угол атаки β также пробегает полный оборот. Реализующие данный режим ротации ветряные машины могут быть названы машинами среднескоростного класса.

Решения, близкие к частному решению $\beta = -\vartheta + \frac{\pi}{2}$ характеризуются тем, что линейная скорость точки А пластины мала и может быть существенно меньше скорости ветра V_w . Реализующие данный режим ветряные машины могут быть названы машинами низкоскоростного класса.

Для машин высокоскоростного класса в качестве порождающего решения системы (25.25) по переменной β можно взять решение

$$\beta = \delta \cos \vartheta, \delta \ll 1 \quad (25.29)$$

В этом случае для переменных δ, ϑ с точностью до членов порядка ε имеют место следующие уравнения

$$\vartheta' = \frac{1}{\delta} - \sin \vartheta \quad (25.30)$$

$$\delta' = -\delta \cos \vartheta$$

Для машин среднескоростного класса в качестве порождающего решения системы (25) можно взять решение

$$\vartheta = t, \beta = -\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}, \beta = -\frac{1}{2}\vartheta + \frac{\pi}{4} \quad (25.31)$$

Вводя малую “расстройку”

$$u = 2\beta + \vartheta - \frac{\pi}{2}, \quad (25.32)$$

получим справедливую в окрестности решения (25) линеаризованную по u систему уравнений движения с одной быстрой и одной медленной переменной

$$\begin{aligned} \vartheta' &= 1 - \frac{1 + \operatorname{tg}(\vartheta/2)}{1 - \operatorname{tg}(\vartheta/2)} u \\ u' &= -\frac{1 + \operatorname{tg}^2(\vartheta/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(\vartheta/2)} u - 2\varepsilon \frac{\sin^2 \beta}{\cos \vartheta} m(\beta, \vartheta) \end{aligned} \quad (25.33)$$

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(u + \vartheta)$$

Для машин низкоскоростного класса в качестве порождающего решения системы (26) можно взять решение

$$\vartheta = \vartheta_0, \beta = -\vartheta_0 + \frac{\pi}{2}, \beta = -\vartheta + \frac{\pi}{2} \quad (25.34)$$

В окрестности решения (25.34) обе переменных β, ϑ системы уравнений движения оказываются медленными

$$\vartheta' = \frac{\cos(\vartheta + \beta)}{\sin \beta} \quad (25.35)$$

$$\beta' = -\frac{\sin 2(\vartheta + \beta)}{2 \cos \vartheta} - \varepsilon \frac{\sin^2 \beta}{\cos \vartheta} m(\beta, \vartheta)$$

Рассмотрим теперь систему (16) в нерезонансном случае

Переменные β, ϑ являются быстрыми, переменная ω является медленной.

Порождающей системой для задачи (25) с двумя быстрыми переменными и одной медленной переменной при отсутствии “резонансных соотношений” между быстрыми переменными, приводящими к изменению размерности вектора медленных переменных, является система

$$\vartheta' = \Omega$$

$$\beta' = -\Omega \sin \beta \frac{\sin(\vartheta + \beta)}{\cos \vartheta} \quad (25.36)$$

$$\omega = \Omega$$

Решение системы (36) имеет вид

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\cos \vartheta}{\Omega + \sin \vartheta}, \vartheta = \Omega \tau + \vartheta^0 \quad (25.37)$$

Системе (16) в нерезонансной ситуации ставится в соответствие усредненное уравнение

$$\Omega' = \varepsilon g(\Omega) \quad (25.38)$$

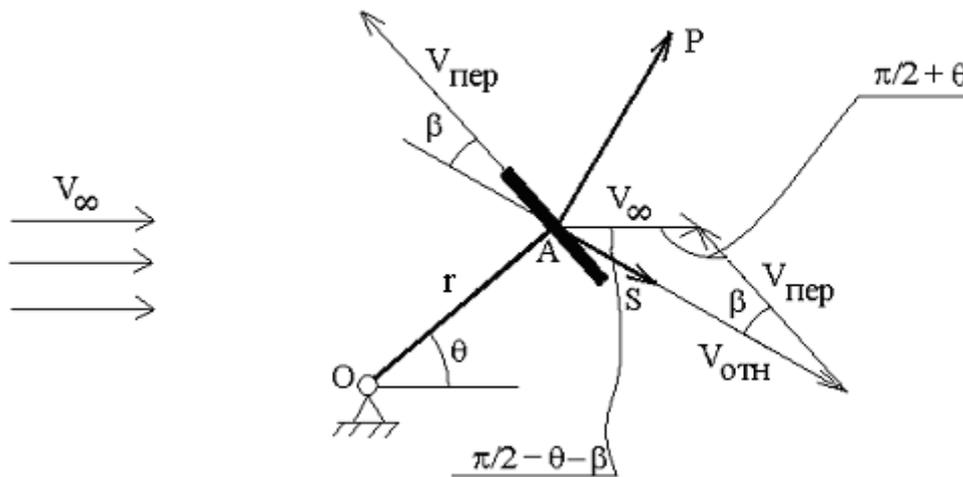
Здесь

$$g(\Omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T m\left(\operatorname{arctg} \frac{\cos(\Omega \tau + \vartheta^0)}{\Omega + \sin(\Omega \tau + \vartheta^0)}, \Omega \tau + \vartheta^0\right) d\tau$$

Ветер. Пластина. Державка. Скорость ветра. Длина державки. Углы.

Рассмотрим актуальную для создания возобновляемых источников энергии задачу динамики ветроустановки с вертикальной осью вращения («вертушки Дарье»). В данной работе уравнения, в зависимости от величины момента инерции подвижной части установки, записываются в переменных: “курсовой угол” и “угловая скорость”, “курсовой угол” и “угол атаки” и т.д.

В качестве модели рабочего элемента ветряной установки с вертикальной осью вращения рассмотрим прямоугольную пластинку, жестко закрепленную на державке (рис. 1).



Пластинка движется в воздушной среде со скоростью V . Примем, что пластинка закреплена ортогонально державке на расстоянии r от неподвижного цилиндрического шарнира O , а ее точка закрепления совпадает с геометрическим центром пластинки. Державка с пластинкой могут совершать круговое движение вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O . Полагаем, что аэродинамическое воздействие испытывает только пластина. Характеристикой этого воздействия является угол атаки β . Назовем центром давления точку A пересечения равнодействующей плоской системы аэродинамических сил с плоскостью пластинки. Будем считать, что точка A совпадает с точкой закрепления пластинки.

Теория сложного движения. Треугольник скоростей. Абсолютная скорость «частицы» ветра. Переносная скорость «частицы ветра». Относительная скорость «частицы ветра». Теорема о скорости точки в «сложном движении».

Введем в рассмотрение вектор относительной скорости V_r ветра относительно пластинки, измеренную в точке A - «флюгерную» скорость ветра. В качестве угла атаки β будем рассматривать угол между плоскостью пластинки и вектором V_r . Абсолютная скорость ветра V_w может быть представлена как векторная сумма абсолютной скорости V_A точки A (переносной скорости ветра) и флюгерной скорости ветра.

Яхта. Лодочка в потоке воздуха. Относительная скорость ветра = Флюгерная скорость.

Курсовой угол. Угол атаки. Значения углов в треугольнике скоростей. Теорема синусов.

Кинематические соотношения для лодки. Абсолютная скорость и флюгерная скорость.

Запишем кинематические соотношения для нашей модели:

$$\frac{V_{\phi}}{\sin \beta} = \frac{V_{\psi}}{\cos \vartheta} = \frac{V}{\cos(\vartheta + \beta)}$$

Преобразовав соотношение (1.2.1) получим:

$$\frac{V}{V_{\phi}} = \frac{\cos(\vartheta + \beta)}{\sin \beta}$$

$$\frac{V_{\psi}}{V_{\phi}} = \frac{\cos \vartheta}{\sin \beta}$$

где: $V = r\dot{\vartheta}$

Таким образом получим соотношения :

$$\frac{r\dot{\vartheta}}{V_{\phi}} = \frac{\cos(\vartheta + \beta)}{\sin \beta}$$

$$\frac{V_{\psi}}{V_{\phi}} = \frac{\cos \vartheta}{\sin \beta}$$

Кинематическая связь между углом атаки β , курсовым углом ϑ и угловой скоростью державки $\dot{\vartheta}$ определяется соотношением

$$\dot{\vartheta} = \frac{V_w \cos(\vartheta + \beta)}{r \sin \beta}$$

Отметим, что при постоянной величине абсолютной скорости ветра, производная угла атаки по времени $\dot{\beta}$ кинематически связана с углом атаки β , с курсовым углом ϑ , с угловой скоростью державки $\dot{\vartheta}$ и угловым ускорением державки $\ddot{\vartheta}$ соотношением

$$\dot{\beta} = -\frac{V_w \sin 2(\vartheta + \beta)}{2r \cos \vartheta} - \frac{r \sin^2 \beta}{V_w \cos \vartheta} \ddot{\vartheta}$$

Аэродинамика. Сила лобового сопротивления. Боковая или подъемная сила.

Динамика жидкости. Сила трения воды. Сила, ортогональная килю.

Когда система сил приводится к равнодействующей.

Случай уравновешенной системы сил – движения с постоянной скоростью.

Чем меньше угол атаки тем больше скорость лодки.

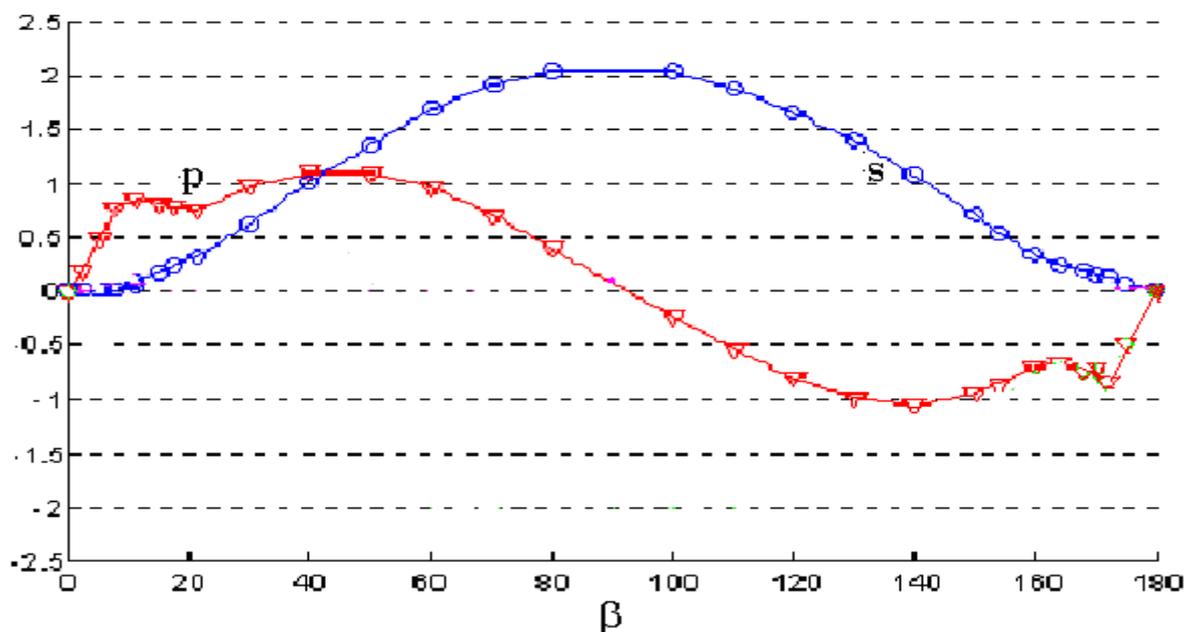
Ограничения на угол атаки. В случае уравновешенной системы сил угол атаки равен

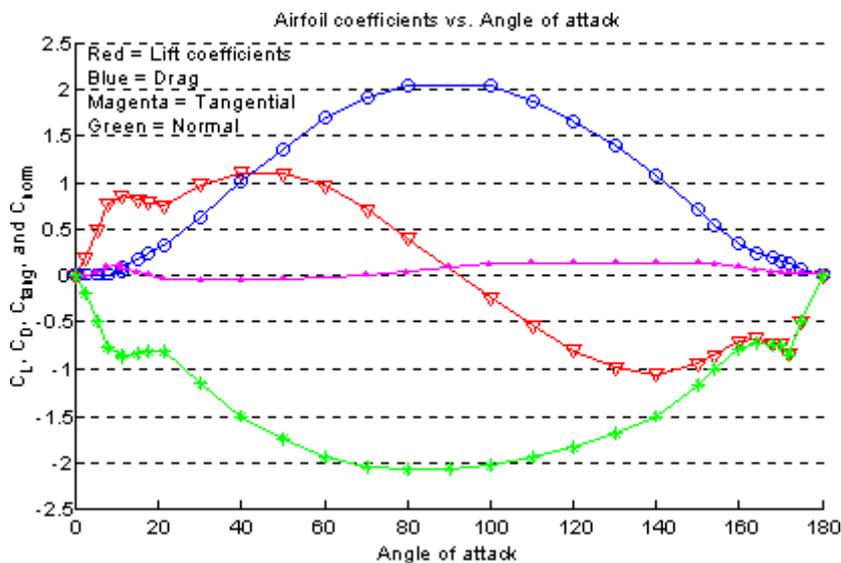
сумме углов аэродинамического и жидкостного сопротивления. Это называется уравнением яхты. Сопротивление определяет класс яхты.

Экспериментальные результаты измерения сил.

Выражения для подъемной силы и силы лобового сопротивления. Картинка для подъемной силы, силы сопротивления для профиля NASA 0012.

«Квазистатическая модель».





Уравнения динамики пластинки с державкой.

Связь угловой скорости и углового ускорения.

Обозначая момент относительно оси шарнира O аэродинамических сил, действующих на пластинку, через $M(\beta, \vartheta)$, выпишем уравнение, описывающее динамику рассматриваемого аэродинамического маятника в виде

$$J\ddot{\vartheta} = M(\beta, \vartheta)$$

Используя введенное обозначение, имеем

$$\dot{\beta} = -\frac{V_w \sin 2(\vartheta + \beta)}{2r \cos \vartheta} - \frac{r \sin^2 \beta}{V_w J \cos \vartheta} M(\beta, \vartheta)$$

Выписывая уравнение движения вертушки Дарье в пространстве β, ϑ , получим

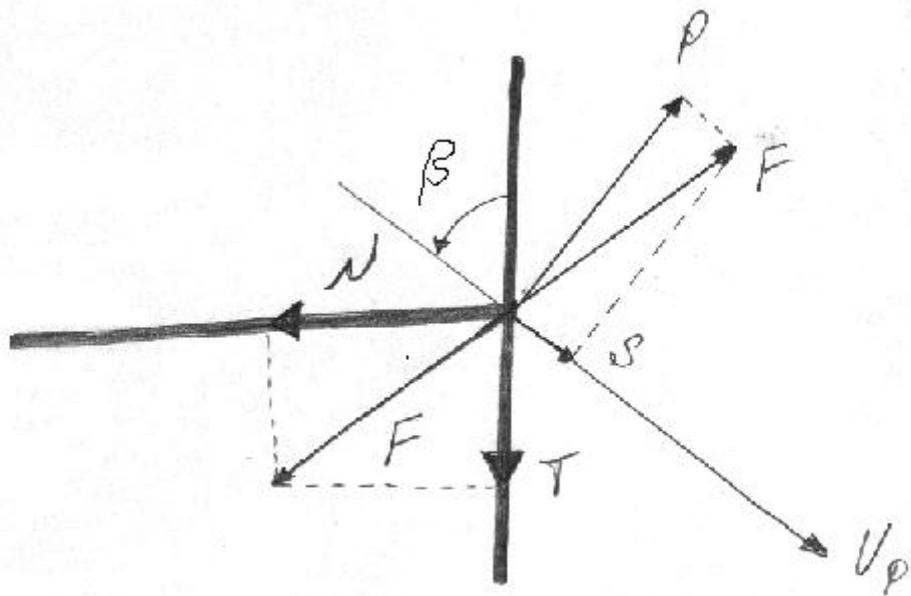
$$\frac{d\beta}{d\vartheta} = -\frac{\sin(\vartheta + \beta) \sin \beta}{\cos \vartheta} - \frac{1}{J} \left(\frac{r}{V_w} \right)^2 \frac{\sin^3 \beta}{\cos \vartheta \cos(\vartheta + \beta)} M(\beta, \vartheta)$$

Знак ускорения для разгона пластинки должен быть положительным.

Момент аэродинамических сил.

Рассмотрим силы, которые действуют на профиль во время его движения

Здесь сила F – это результирующая сила, которая должна всегда уравновешиваться. Сила T – сила, которая включает в себя силу трения в шарнире. N – это сила реакции возникающая в державке. Сила P – это подъемная (или боковая) сила, а S – это сила лобового сопротивления профиля.



M – это суммарный аэродинамический момент силы сопротивления воздушной среды S и подъемной силы P относительно оси шарнира O .

Таким образом получим:

$$M = rq(P(\beta) \sin \beta - S(\beta) \cos \beta)$$

Далее введем в рассмотрение следующие аэродинамические характеристики:

$$p(\beta) = \frac{P}{V_{\phi}^2}$$

$$s(\beta) = \frac{S}{V_{\phi}^2}$$

Таким образом аэродинамический момент M переписется следующим образом:

$$M = rV_{\phi}^2 q (p(\beta) \sin \beta - s(\beta) \cos \beta)$$

Переписав (1.3.9) с учетом (1.2.2) получим:

$$M = rq \frac{V_e^2 \cos^2 \vartheta}{\sin^2 \beta} (p(\beta) \sin \beta - s(\beta) \cos \beta)$$

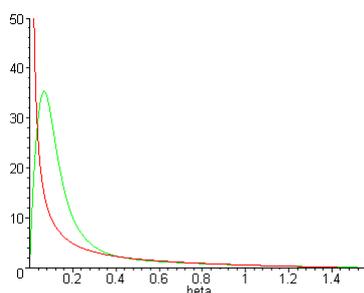
9. Коэффициент аэродинамического качества.

Соотношение между коэффициентом аэродинамического качества и котангенсом угла атаки.

Коэф. Аэродинамического качества = $\frac{P(\beta)}{S(\beta)}$

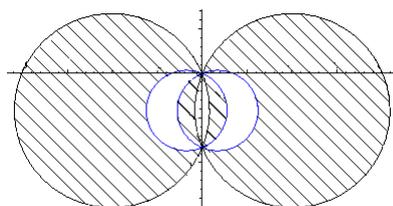
$$M = (P \sin \beta - S \cos \beta) r$$

$$k = \frac{P(\beta)}{S(\beta)} = \operatorname{ctg} \beta$$



Области постоянного знака момента аэродинамических сил

$$\dot{\theta} = \frac{V_{\infty} \cos(\theta + \beta)}{r \sin \beta}$$

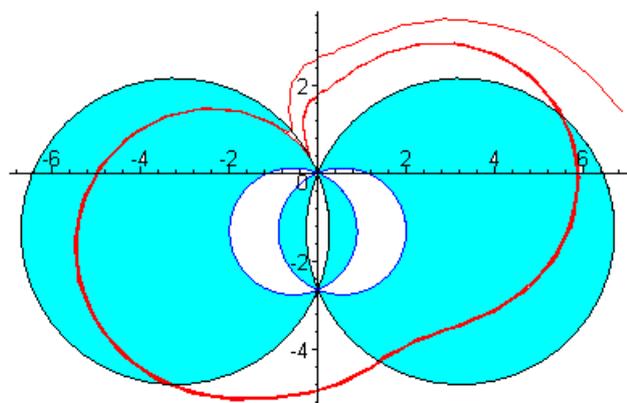
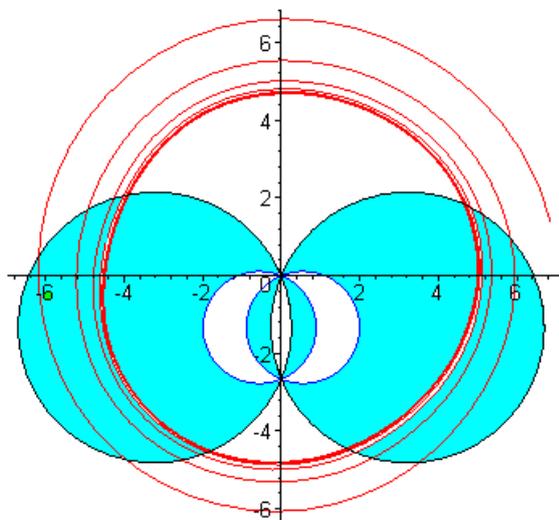


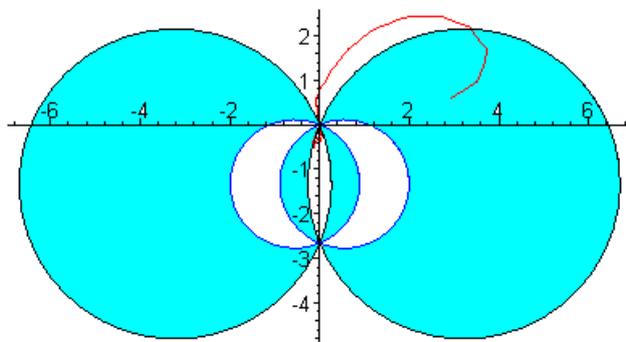
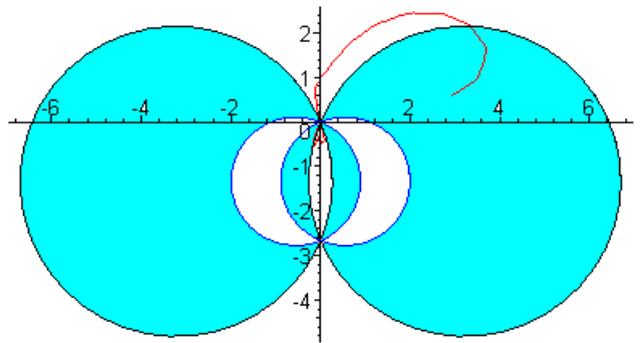
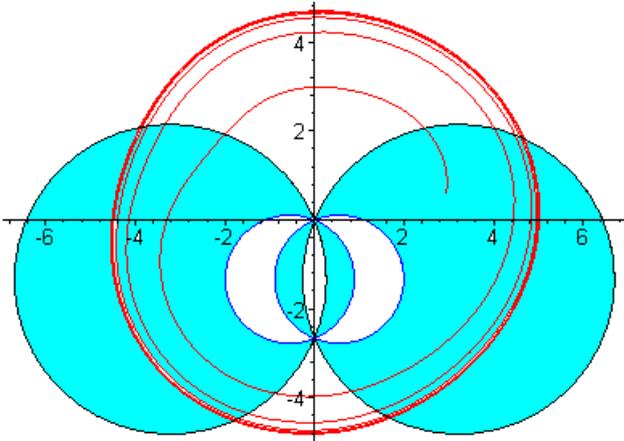
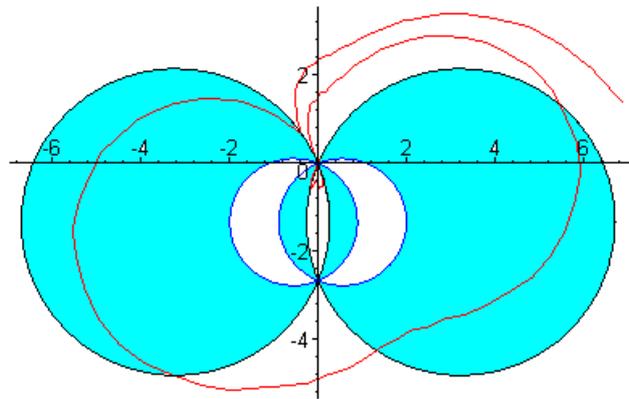
10. Равенство коэффициента аэродинамического качества и котангенса угла атаки может возникнуть при определенных значениях угла атаки.

Для каждого постоянного значения угла атаки из кинематических соотношений возникает соотношение между величиной угловой скорости пластинки и углом вращения державки.

В полярной системе координат, в которой величина угловой скорости представляется как длина радиуса-вектора изображающей точки, а полярный угол – это угол вращения державки, упомянутое соотношение представляет специальную окружность, проходящую через начало координат. Смысл этих окружностей – на них расположены нули углового ускорения (нули момента аэродинамических сил); на них меняется знак аэродинамического момента.

Портреты ротационных движений пластинки.





Лекция 26.

Задача позиционирования однозвенного манипулятора конечной жесткости, управляемого через редуктор двигателем постоянного тока и снабженного датчиком угла поворота, тахометром и тензометром.

Рассмотрим одну задачу, возникающую при создании лабораторной установки, моделирующей работу звена робота-манипулятора (рис.26.1).

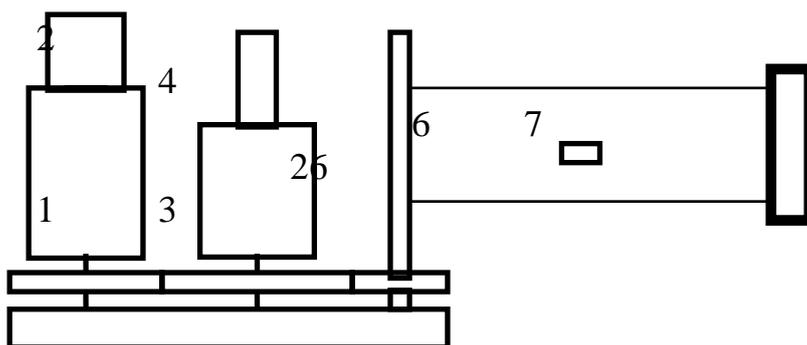


Рис.26.1

Электромотор через редуктор вращает в горизонтальной плоскости гибкую пластину, на конце которой прикреплен груз. Система управления обеспечивает точное позиционирование груза.

Двигатель 1 (микродвигатель постоянного тока ДПР-62-N2-02: полый ротор, механическая постоянная времени - 20 мкс, электрическая постоянная времени - 0,26 мкс) снабжен датчиком угловой скорости (тахометром) 2. Редуктор 3 с передаточным отношением 100 снабжен потенциометрическим датчиком угла 4. В середине гибкой пластины 26 массы 100 г, имеющей поперечное сечение 1 × 61 мм и длину 2260 мм, установлен тензометрический датчик 6. Груз 7 на конце пластины имеет форму цилиндра радиуса 20 мм и массы 6126 г.

В данной лекции будем предполагать, что пластина безынерционна, а груз на конце пластины можно рассматривать как материальную точку. Кроме того, пренебрежем электрической постоянной времени двигателя.

Обозначим угол поворота звена манипулятора как твердого тела через φ , угол, характеризующий относительное отклонение груза за счет конечной жесткости пластины через α . Пусть J обозначает момент инерции груза относительно оси вращения звена, а I - приведенный по методу Лагранжа к оси вращения звена манипулятора момент инерции двигателя, редуктора и других абсолютно твердых элементов приводного тракта. Диссипацией в гибкой пластине пренебрегаем. Угловую жесткость пластины считаем сосредоточенной и обозначим через C .

Указанные упрощения, конечно, носят принципиальный характер и требуют аккуратной оценки. Это будет сделано в дальнейших разделах курса.

Составление линеаризованных уравнений движения. Нормализация.

Уравнение, моделирующее упругие колебания звена манипулятора, имеет следующий вид

$$J \frac{d^2(\varphi + \alpha)}{dt^2} + C\alpha = 0 \quad (26.1)$$

Уравнение динамики манипулятора под действием момента, приложенного со стороны двигателя, представляется в виде

$$(I + J) \frac{d^2\varphi}{dt^2} + J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = M \quad (26.2)$$

Выражение для момента, действующего со стороны двигателя записывается следующим образом

$$M = M_{\text{от д.}} - K \frac{d\varphi}{dt} \quad (26.3)$$

Здесь $M_{\text{от д.}}$ - управляющий момент, K - коэффициент противоЭДС.

Управляющий момент формируется с помощью показаний потенциометрического датчика угла, тахометра и тензодатчика так, чтобы, преодолевая колебания звена манипулятора, возникающие за счет его конечной жесткости, и парируя недостатки редуктора (трение и конечную жесткость), обеспечить скорейшее попадание груза в положение $\varphi = \alpha = 0$ и удержание его в этой точке.

С этой целью система управления формирует требуемую угловую скорость двигателя Ω по закону

$$\Omega = A(\varphi_0 - \varphi) + B(\alpha_0 - \alpha), \quad \varphi_0 = \alpha_0 = 0, \quad (26.4)$$

а управляющий момент по закону

$$M_{\text{от д.}} = N \left(\Omega - \frac{d\varphi}{dt} \right) \quad (26.26)$$

Здесь A, B, N - коэффициенты обратной связи, которые следует выбрать наилучшим образом.

Частота ω собственных колебаний груза на упругой пластине определяется по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{J}} \quad (26.6)$$

Взяв в качестве независимой переменной “безразмерное время” $t = \omega t$, т.е. используя в качестве единицы измерения времени период собственных колебаний груза на упругой пластине, представим уравнения движения машины в виде.

$$\frac{d^2(\varphi + \alpha)}{d\tau^2} + \alpha = 0$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{J}{I + J} \frac{d^2\alpha}{d\tau^2} = \frac{M}{(I + J)\omega^2}$$

$$M = M_{\text{отр}} - K\omega \frac{d\varphi}{d\tau} \quad (26.7)$$

$$\Omega = A(\varphi_0 - \varphi) + B(\alpha_0 - \alpha), \quad \varphi_0 = \alpha_0 = 0$$

$$M_{\text{отр}} = N \left(\Omega - \omega \frac{d\varphi}{d\tau} \right)$$

Вводя специальные обозначения для безразмерных комплексов параметров,

$$h = \frac{I}{I + J}, \quad n = \frac{N}{(I + J)\omega}, \quad \dot{a} = \frac{\dot{A}}{\omega}, \quad b = \frac{B}{\omega}, \quad k = \frac{K}{(I + J)\omega}, \quad (26.8)$$

получим безразмерные уравнения рассматриваемой задачи

$$\frac{d^2(\varphi + \alpha)}{d\tau^2} + \alpha = 0$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + (1 - h) \frac{d^2\alpha}{d\tau^2} = n \left(-a\varphi - b\alpha - \frac{d\varphi}{d\tau} \right) - k \frac{d\varphi}{d\tau} \quad (26.9)$$

Выбор параметров, обеспечивающих максимальную степень устойчивости, при возможности варьирования коэффициентом усиления в цепи управления угловой скоростью двигателя.

Поставим цель найти безразмерные параметры a, b, h, k , обеспечивающие такое расположение корней характеристического уравнения, которое доставляет максимум степени устойчивости.

Выпишем характеристическое уравнение системы (26.9)

$$p^4 + \frac{n+k}{h}p^3 + \frac{1+(a-b)n}{h}p^2 + \frac{n+k}{h}p + \frac{an}{h} = 0 \quad (26.10)$$

Потребуем, чтобы коэффициенты характеристического уравнения принадлежали соответствующей строке треугольника Паскаля, то есть

$$\frac{n+k}{h} = 4, \quad \frac{1+(a-b)n}{h} = 6, \quad \frac{an}{h} = 1 \quad (26.11)$$

В этом случае характеристическое уравнение задачи примет вид

$$(p+1)^4 = 0 \quad (26.12)$$

и степень устойчивости системы будет наибольшей.

Параметры h - соотношение моментов инерции и k - безразмерный коэффициент противоЭДС не варьируются. Остальные три параметра в силу уравнений (26.11) однозначно через них выражаются:

$$n = 4h - k, \quad a = \frac{h}{4h - k}, \quad b = \frac{1 - 5h}{4h - k} \quad (26.13)$$

Отметим, что из положительности параметров a и n вытекает требование

$$n < 4h, \text{ то есть } N < 4I\omega. \quad (26.14)$$

Выбор параметров, обеспечивающих максимальную степень устойчивости, при отсутствии возможности варьирования коэффициентом усиления в цепи управления угловой скоростью двигателя.

К сожалению, не всегда этому требованию удастся практически удовлетворить. В частности, фактическая существенная нелинейность редуктора (люфт и сухое трение) заставляют разработчиков брать очень большой коэффициент n в цепи управления угловой скоростью, переводя его в разряд неварьируемых параметров. При этом условие (26.14) оказывается заведомо не выполнимым.

Учитывая это обстоятельство, разделим все члены уравнения (26.10) на n и устремим n к бесконечности. Получившееся уравнение

$$p^3 + (a - b)p^2 + p + a = 0 \quad (26.15)$$

имеет третий порядок и зависит только от параметров a и b .

Сравнивая его с уравнением (4.14) четвертой лекции, устанавливаем, что максимальная степень устойчивости будет получена в том случае, если (26.126) примет вид соотношения (4.19), то есть

$$p^3 + \sqrt{3}p^2 + p + \frac{\sqrt{3}}{9} = \left[p + \frac{\sqrt{3}}{3} \right]^3 = 0 \quad (26.16)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p , находим соответствующие значения параметров:

$$a = \frac{\sqrt{3}}{9} \approx 0,19, \quad b = -\frac{8\sqrt{3}}{9} \approx -1,54 \quad (26.17)$$

При этом величина максимальной степени устойчивости $x = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,57$.

Лекция 27.

Дельта-функционал как предел последовательности импульсных воздействий.

Рассмотрим функцию, заданную следующим образом

$$h_p(t) = \begin{cases} p, & |t| \leq 1/2p \\ 0, & |t| > 1/2p \end{cases} \quad (27.1)$$

Здесь p - целые положительные числа ($p=1,2,\dots$)

Справедливо следующее утверждение.

Для множества финитных, бесконечно дифференцируемых функций φ

(t)

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_p(u) \varphi(u) du = \varphi(0) \quad (27.2)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h_p(u) \varphi(u) du &= \int_{-1/2p}^{1/2p} p \varphi(u) du = \\ &= \int_{-1/2p}^{1/2p} p \left[\varphi(0) + u \varphi'(0) + \frac{u^2}{2} \varphi''(u^*) \right] du = \varphi(0) + C \frac{1}{p^2} \end{aligned} \quad (27.3)$$

Таким образом, $\delta(t)$ -функционал соответствует пределу системы импульсных воздействий, а обобщенная $\delta(t)$ -функция Дирака по результатам ее применения соответствует функции $h_p(t)$.

В лекции 8 в качестве примера была приведена задача

$$\frac{d}{dt} x_+ + ax_+ = x(t)\delta(t), \quad x(0+)=1 \quad (27.4)$$

для функции $x_+ = x\mathbf{1}(t)$.

Находя решение этой задачи в классе обобщенных функций, уравнение (27.3) надо рассматривать как интегральное соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{du} x_+ + ax_+ \right) \varphi(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \delta(u) \varphi(u) du = x(0) \varphi(0) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(0) \delta(u) \varphi(u) du \quad (27.5)$$

То есть в правой части уравнения (27.3) выражение $x(t)\delta(t)$ можно заменить на $x(0)\delta(t) = \delta(t)$

$$\frac{d}{dt} x_+ + ax_+ = \delta(t) \quad (27.6)$$

Воспользуемся методом Хевисайда для получения решения (27.5)

$$x_+ = e^{-at} \frac{1}{D} e^{at} \delta(t) = e^{-at} z_+, \quad \frac{d}{dt} z_+ = e^{at} \delta(t) \quad (27.7)$$

Следовательно, в классе обобщенных функций

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{du} z_+(u) \varphi(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{au} \delta(u) \varphi(u) du = \varphi(0) =$$

$$(27.8)$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{du} \varphi(u) du = - \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(u) \frac{d}{du} \varphi(u) du$$

С другой стороны

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{du} z_+(u) \varphi(u) du = - \int_{-\infty}^{\infty} z_+(u) \frac{d}{du} \varphi(u) du \quad (27.9)$$

Таким образом

$$z_+ = \mathbf{1}(t), \quad x_+ = e^{-at} \mathbf{1}(t) \quad (27.10)$$

Получение весовой функции системы с помощью силового воздействия типа дельта-функции Дирака. Введение начальных условий в дифференциальное уравнение с помощью импульсивных воздействий.

При $t > 0$ уравнение (27.5) соответствует задаче (8.15) для аperiodического звена

$$\frac{dx}{dt} + ax = 0, \quad x(0+) = 1, \quad (27.11)$$

Но, решение (27.10) $x = e^{-at}$, как показал Коши позволяет сформировать весовую функцию $N(t-u)$ системы. Этот факт приводит к важнейшей инженерной идее. Весовую функцию машины

$N_+(t - u) = N(t - u)\mathbf{1}(t - u)$ можно получить, подействовав (говорят, подав на вход) покоящейся системы δ -функцию Дирака .

Отклик системы на произвольное воздействие в классе обобщенных функций.

Пусть при $t > 0$ дано уравнение

$$a_0x + a_1x^{(1)} + a_2x^{(2)} + \dots + a_{n-1}x^{(n-1)} + x^{(n)} = f(t) \quad (27.12)$$

с разрывной правой частью.

Кроме того, начальные условия удовлетворяют соотношению

$$x(0+) = x^{(1)}(0+) = \dots = x^{(n-1)}(0+) = 0 \quad (27.13)$$

Будем считать, что $t \in (-\infty, \infty)$ и сделаем замену

$$x_+ = x\mathbf{1}(t), \quad x_+^{(1)} = x^{(1)}\mathbf{1}(t), \quad \dots, \quad x_+^{(n)} = x^{(n)}\mathbf{1}(t), \\ f_+(t) = f(t)\mathbf{1}(t) \quad (27.14)$$

В соответствии с методикой О.Коши построим вспомогательную задачу

$$a_0y_+ + a_1y_+^{(1)} + a_2y_+^{(2)} + \dots + a_{n-1}y_+^{(n-1)} + y_+^{(n)} = \delta(t) \quad (27.15)$$

Пусть решение задачи (27.15) известно $y_+ = N_+(t) = N(t)\mathbf{1}(t)$. Тогда решение задачи нахождения частного решения x_+ , отвечающего правой части, можно представить в виде

$$x_+ = \int_{-\infty}^{\infty} N_+(t - u)f_+(u)du \quad (27.16)$$

Доказательство этого утверждения проводится с помощью прямой проверки.

Поскольку $f_+(t) = f(t)\mathbf{1}(t)$, $N_+(t) = N(t)\mathbf{1}(t)$, представление функции x_+ при $t > 0$ может быть записано еще в трех различных формах, используемых в литературе,

$$x = \int_0^{\infty} N_+(t - u)f(u)du \quad (27.17)$$

$$x = \int_{-\infty}^t N(t - u)f_+(u)du \quad (27.18)$$

$$x = \int_0^t N(t - u)f(u)du \quad (27.19)$$

Пусть, например, в качестве правой части (возмущения, управления или входа) выступает единичная функция Хевисайда. Говорят, что на

машину действует “единичный скачок” $f_+(t) = \mathbf{1}(t)$. В этом случае, используя формулу (27.127), получим

$$x = \int_0^t N(t-u)du = A(t) \quad (27.20)$$

$A(t)$ называется переходной функцией системы. Это реакция машины на единичный скачок. Отметим, что $A(0)=0$.

Если в качестве правой части выступает δ -функция Дирака, то, как уже было отмечено, выходной сигнал - это функция веса

$$x_+ = N_+(t) \quad (27.21)$$

Если в качестве правой части выступает обобщенная функция, равная $d\delta(t)/dt$, то, интегрируя по частям, имеем

$$x_+ = \frac{d}{dt} N_+(t) \quad (27.22)$$

Примеры решения уравнений движения в классе обобщенных функций. Связь обобщенного (слабого) решения с решением, определенным при всех значениях времени.

Рассмотрим ряд примеров, решаемых в классе обобщенных функций.

Пусть апериодическое звено в момент времени $t=1+$ подвергается действию единичного скачка и пусть при $t=0+$ выходная координата устройства $x=2$.

При $t>0$

$$\frac{dx}{dt} + x = \mathbf{1}(t - 1), x(0+)=2 \quad (27.23)$$

При $-\infty < t < \infty$, вводя новую переменную $x_+ = x\mathbf{1}(t)$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_+ &= \mathbf{1}(t) \frac{d}{dt} x + x(t)\delta(t) = \\ &= \mathbf{1}(t) \frac{d}{dt} x + x(0)\delta(t) = \mathbf{1}(t) \frac{d}{dt} x + 2\delta(t) \end{aligned} \quad (27.24)$$

Умножая (27.23) на $\mathbf{1}(t)$, получим

$$\mathbf{1}(t) \frac{d}{dt} x + \mathbf{1}(t)x = \mathbf{1}(t)\mathbf{1}(t - 1) = \mathbf{1}(t - 1) \quad (27.25)$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} x_+ + x_+ = \mathbf{1}(t - 1) + 2\delta(t) \quad (27.26)$$

В соотношении (27.26) произошла подмена начальных условий импульсивным воздействием определенной интенсивности.

Используя линейность задачи, представим

$$x_+ = p_+ + q_+ \quad (27.27)$$

$$\frac{d}{dt} p_+ + p_+ = 2\delta(t) \quad (27.28)$$

$$\frac{d}{dt} q_+ + q_+ = \mathbf{1}(t - 1) \quad (27.29)$$

Решение задачи (27.28) можно выписать сразу, используя решение (27.8) задачи (27.5)

$$p_+ = 2e^{-t}\mathbf{1}(t) \quad (27.30)$$

Воспользуемся методом Хевисайда для получения решения (27.29)

$$q_+ = e^{-t} \frac{1}{D} e^t \mathbf{1}(t - 1) = e^{-t} z_+, \quad \frac{d}{dt} z_+ = e^t \mathbf{1}(t - 1) \quad (27.31)$$

Следовательно, в классе обобщенных функций

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{du} z_+(u) \varphi(u) du &= \int_{-\infty}^{\infty} e^u \mathbf{1}(u - 1) \varphi(u) du = \int_1^{\infty} e^u \varphi(u) du = \\ &= \varphi(t) e^t \Big|_1^{\infty} - \int_1^{\infty} e^u \frac{d}{du} \varphi(u) du = -\varphi(1) e - \int_1^{\infty} e^u \frac{d}{du} \varphi(u) du = \\ &= \int_1^{\infty} e \frac{d}{du} \varphi(u) du - \int_1^{\infty} e^u \frac{d}{du} \varphi(u) du = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (e - e^u) \mathbf{1}(t - 1) \frac{d}{du} \varphi(u) du \end{aligned} \quad (27.32)$$

С другой стороны

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{du} z_+(u) \varphi(u) du = - \int_{-\infty}^{\infty} z_+(u) \frac{d}{du} \varphi(u) du \quad (27.33)$$

Таким образом

$$z_+ = (e^t - e)\mathbf{1}(t - 1), \quad q_+ = (1 - e^{1-t})\mathbf{1}(t - 1) \quad (27.34)$$

Решение задачи (27.26) имеет вид

$$x_+ = 2e^{-t}\mathbf{1}(t) + (1 - e^{1-t})\mathbf{1}(t - 1) \quad (27.35)$$

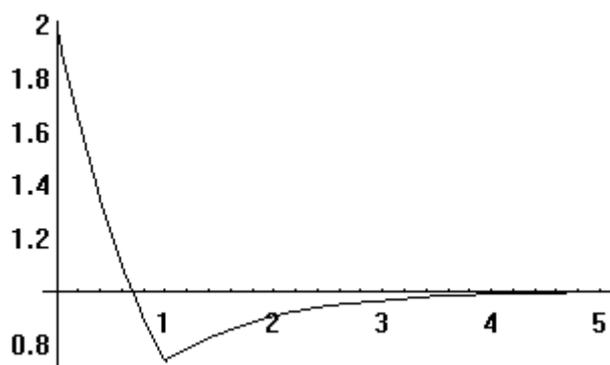


Рис.27.1

Лекция 28.

Антропоморфные роботы. Импульсное управление маятником. Решение методом Хевисайда в классе обобщенных функций с помощью перехода к односторонним функциям времени.

Среди множества возможных управлений передвижениями антропоморфных механизмов выделяется класс импульсных управлений. Дело в том, что при движениях человека активность мышц чередуется с их расслаблением. При этом значительная активность мышц приходится на относительно короткие, по сравнению с двигательным циклом, промежутки времени. Движение переносимой ноги происходит почти по инерции, то есть близко к движению свободно подвешенного маятника. “Склеиваются” куски таких движений с помощью управляющих сил, действующих в суставах механизма на коротких промежутках времени. Такая организация движения обеспечивает человеку экономию мышечной энергии.

Все это наводит на мысль о моделировании динамики шагающих антропоморфных роботов с использованием системы свободно подвешенных маятников, управляемых импульсными воздействиями, описываемыми дельта-функциями.

Рассмотрим уравнение движения плоского физического маятника

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mgl \sin \theta = M \quad (28.1)$$

Здесь θ - угол между вертикалью и линией, соединяющей точку подвеса с центром масс, J - момент инерции маятника относительно точки подвеса, m - масса маятника, l - расстояние от точки подвеса до центра масс, M - управляющий момент.

Поскольку заменой

$$\tau = \sqrt{\frac{mgl}{J}} t, \quad u = \frac{M}{mgl} \quad (28.2)$$

уравнение (28.1) приводится к виду

$$\theta'' + \sin \theta = u, \quad (28.3)$$

то без ограничения общности можно считать, что $mgl/J=1$.

При $M=0$ ($u=0$) маятник имеет следующие положения равновесия

$$\theta = \pi k, \quad \theta' = 0, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (28.4)$$

Четные значения индекса k соответствуют нижнему положению равновесия, нечетные - верхнему.

Пусть задан некоторый временной интервал T . Рассмотрим задачу о приведении маятника при помощи управляющего момента в нижнее положение равновесия за заданное время T . Предполагается, что в начальный момент времени $t=0$ угол отклонения θ_0 и угловая скорость θ'_0 маятника известны.

Задачу будем решать в линейной постановке. После линеаризации уравнения (28.3) около нижнего положения равновесия получим

$$\theta'' + \theta = u \quad (28.5)$$

Для линейного уравнения (28.5) поставим задачу приведения маятника в состояние $\theta = \theta' = 0$ за время T при помощи двухимпульсного управления

$$u = A\delta(t - a) + B\delta(t - b) \quad (28.6)$$

Здесь постоянные a, b, A, B необходимо определить в процессе решения.

Дифференциальное уравнение второго порядка (28.5) при $t > 0$ представим в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \theta' &= \omega \\ \omega' &= -\theta + u \end{aligned} \quad (28.7)$$

с начальными условиями $\theta = \theta_0, \quad \omega = \omega_0$ при $t=0+$.

Будем решать систему (28.7) в классе обобщенных функций. Рассматриваем задачу при $-\infty < t < \infty$. Проведем замену переменных $\theta_+ = \theta(t), \omega_+ = \omega(t)$. Тогда получим систему

$$\begin{aligned} \theta'_+ - \omega_+ &= \theta_0 \delta(t) \\ \omega'_+ + \theta_+ &= \omega_0 \delta(t) + u \end{aligned} \quad (28.8)$$

Решаем операторным методом Хевисайда. В матричном виде

$$\begin{pmatrix} D & -1 \\ 1 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_+ \\ \omega_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0 \delta(t) \\ \omega_0 \delta(t) + u \end{pmatrix} \quad (28.9)$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} \theta_+ \\ \omega_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -1 \\ 1 & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \theta_0 \delta(t) \\ \omega_0 \delta(t) + u \end{pmatrix} \quad (28.10)$$

Но, обратная матрица вычисляется по формуле

$$\begin{pmatrix} D & -1 \\ 1 & D \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{D^2 + 1} \begin{pmatrix} D & 1 \\ -1 & D \end{pmatrix} \quad (28.11)$$

Следовательно,

$$(D^2 + 1) \begin{pmatrix} \theta_+ \\ \omega_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 1 \\ -1 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \delta(t) \\ \omega_0 \delta(t) + u \end{pmatrix} \quad (28.12)$$

То есть получаем два скалярных уравнения

$$\begin{aligned} (D^2 + 1)\theta_+ &= \vartheta_0 \delta'(t) + \omega_0 \delta(t) + \\ &+ A\delta(t - a) + B\delta(t - b) \end{aligned} \quad (28.13)$$

$$\begin{aligned} (D^2 + 1)\omega_+ &= -\theta_0(t)\delta(t) + \omega_0 \delta'(t) + \\ &+ A\delta'(t - a) + B\delta'(t - b) \end{aligned}$$

Из соотношений (28.13) видно, что фактически достаточно решить две типовые задачи

$$(D^2 + 1)x = \delta(t) \quad (28.14)$$

$$(D^2 + 1)x = \delta'(t) \quad (28.15)$$

и далее провести умножение на постоянные коэффициенты и сдвиг по времени.

Непосредственной проверкой получим, что решение (28.14) имеет вид $x = \mathbf{1}(t) \sin t$, а решение (28.15) - $x = \mathbf{1}(t) \cos t$.

Применяя эти результаты к (28.13) получим

$$\begin{aligned} \theta_+ &= \mathbf{1}(t)(\theta_0 \cos t + \omega_0 \sin t) + \\ &+ A \sin(t - a)\mathbf{1}(t - a) + B \sin(t - b)\mathbf{1}(t - b) \\ \omega_+ &= \mathbf{1}(t)(-\theta_0 \sin t + \omega_0 \cos t) + \\ &+ A \cos(t - a)\mathbf{1}(t - a) + B \cos(t - b)\mathbf{1}(t - b) \end{aligned} \quad (28.16)$$

Попробуемся распорядиться двумя импульсами следующим образом. Один импульс приложим непосредственно после начала отсчета времени T , а другой - непосредственно перед его окончанием, то есть возьмем $a=0+$, $b=T-$. Тогда в момент T , имеем

$$\begin{aligned}\theta_+(T) &= \theta_0 \cos T + \omega_0 \sin T + A \sin T \\ \omega_+(T) &= -\theta_0 \sin T + \omega_0 \cos T + A \cos T + B \cos 0\end{aligned}\quad (28.17)$$

Соотношения (28.17) позволяют найти постоянные А и В.
Поскольку $\theta_+(T) = 0$, $\omega_+(T) = 0$, имеем

$$A = -\omega_0 - \frac{\theta_0 \cos T}{\sin T}, \quad B = \frac{\theta_0}{\sin T} \quad (28.18)$$

Предположим теперь, что точка подвеса маятника совпадает с центром масс, либо отсутствует поле сил тяжести. В этом случае уравнение движения имеет вид

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = M \quad (28.19)$$

С помощью преобразований типа (28.2) уравнение (28.19) приводится к виду

$$\theta'' = u \quad (28.20)$$

Для уравнения (28.20) поставим задачу приведения маятника в состояние $\theta = \theta' = 0$ или $\theta = 2\pi$, $\theta' = 0$ за время Т при помощи управления

$$u = A\delta(t - a) + B\delta(t - b) \quad (28.21)$$

Дифференциальное уравнение второго порядка (28.20) при $t > 0$ представим в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}\theta' &= \omega \\ \omega' &= u\end{aligned}\quad (28.22)$$

с начальными условиями $\theta = \theta_0$, $\omega = \omega_0$ при $t=0+$.

Будем решать систему (28.22) в классе обобщенных функций. Рассматриваем задачу при $-\infty < t < \infty$. Проведем замену переменных $\theta_+ = \theta \mathbf{1}(t)$, $\omega_+ = \omega \mathbf{1}(t)$. Тогда получим систему

$$\begin{aligned}\theta'_+ - \omega_+ &= \theta_0 \delta(t) \\ \omega'_+ &= \omega_0 \delta(t) + u\end{aligned}\quad (28.23)$$

Второе уравнение системы (28.23) можно непосредственно проинтегрировать

$$\omega_+ = A \mathbf{1}(t - a) + B \mathbf{1}(t - b) + \omega_0 \mathbf{1}(t) \quad (28.24)$$

Следовательно

$$\theta'_+ = \theta_0 \delta(t) + A\mathbf{1}(t - a) + B\mathbf{1}(t - b) + \omega_0 \mathbf{1}(t) \quad (28.25)$$

Функцию $\mathbf{1}(t)$ удобно записать с помощью введенной ниже функции $\alpha(t)$

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t, & t > 0 \end{cases} \quad (28.26)$$

Производная обобщенной функции $\alpha(t)$ по времени равна единичной функции Хевисайда. Действительно, для любых бесконечно дифференцируемых финитных функций $\varphi(t)$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha(u)}{du} \varphi(u) du &= \alpha(u) \varphi(u) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(u) \frac{d\varphi(u)}{du} du = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(u) \frac{d\varphi(u)}{du} du \end{aligned} \quad (28.27)$$

С другой стороны,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(u) \varphi(u) du = \int_0^{\infty} \varphi(u) du = u \varphi(u) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u \frac{d\varphi(u)}{du} du \quad (28.28)$$

Сравнивая (28.27) и (28.28), получим соотношение (28.26).
Интегрируем первое уравнение (28.23)

$$\theta_+ = \omega_0 \alpha(t) + A\alpha(t - a) + B\alpha(t - b) + \theta_0 \mathbf{1}(t) \quad (28.29)$$

Рассмотрим случай одноимпульсного управления: $B=0$.

С помощью одного удара тело можно развернуть как по часовой, так и против часовой стрелки. Пусть в назначенный момент $t=T$

$$\theta(T) = 2\pi, \quad \omega(T) = 0. \text{ Поскольку}$$

$$\begin{aligned} \theta(T) &= \omega_0 T + A\alpha(T - a) + \theta_0 \\ \omega(T) &= A + \omega_0 \end{aligned}, \quad (28.30)$$

то

$$A = -\omega_0, \quad \alpha(T - a) = T + \frac{\theta_0 - 2\pi}{\omega_0},$$

$$0 < a = \frac{2\pi - \theta_0}{\omega_0} < T \quad (28.31)$$

То есть

$$\omega_0 > 0, \quad \theta_0 + T\omega_0 > 2\pi \quad (28.32)$$

Пусть теперь в назначенный момент $t=T$ $\theta(T) = 0$, $\omega(T) = 0$. В этом случае

$$A = -\omega_0, \quad \alpha(T - a) = T + \frac{\theta_0}{\omega_0},$$

$$0 < a = -\frac{\theta_0}{\omega_0} < T \quad (28.33)$$

То есть

$$\omega_0 < 0, \quad \theta_0 + T\omega_0 < 0 \quad (28.34)$$

Соотношения (28.32) и (28.34) показывают, что одноимпульсное управление не всегда дает возможность остановить вращающееся тело в заданный момент времени.

Рассмотрим случай двухимпульсного управления.

Один импульс приложим непосредственно после начала отсчета времени T , а другой - непосредственно перед его окончанием, то есть возьмем $a=0+$, $b=T-$. Тогда в момент T , имеем

а). Если в назначенный момент $t=T$ $\theta(T) = 2\pi$, $\omega(T) = 0$, то

$$2\pi = \omega_0 T + AT + \theta_0 \quad (28.35)$$

$$0 = A + B + \omega_0$$

Следовательно,

$$A = -\omega_0 + \frac{2\pi - \theta_0}{T}, \quad B = -\frac{2\pi - \theta_0}{T} \quad (28.36)$$

б). Если в назначенный момент $t=T$ $\theta(T) = 0$, $\omega(T) = 0$, то

$$0 = \omega_0 T + AT + \theta_0 \quad (28.37)$$

$$0 = A + B + \omega_0$$

Следовательно,

$$A = -\omega_0 - \frac{\theta_0}{T}, \quad B = \frac{\theta_0}{T} \quad (28.38)$$

Таким образом, двухимпульсное управление всегда дает возможность остановить вращающееся тело в заданный момент времени. Более того, существуют два способа решения этой задачи.

Лекция 29.

Применение диссипативного потенциала при изучении теории удара.

При изложении раздела, посвященного теории удара, во многих задачах возникает проблема «статической неопределимости»: число уравнений не совпадает с числом неизвестных. В частности, такая проблема возникает в задачах с неударивающими связями, когда в результате удара система может эту связь покинуть. Скалярных уравнений удара в системах с неударивающими связями меньше, чем неизвестных, и, следовательно, решения этих уравнений неоднозначны. Однако, одним из фундаментальных принципов механики наряду с требованием непротиворечивости является требование единственности решения динамической задачи. Этот принцип не связан с термодинамическими постулатами и должен независимо проверяться при построении моделей механических систем и постановке конкретных задач. При исследовании получаемых уравнений приходится прибегать к уточнению модели рассматриваемой системы, предлагая различные аксиоматические пути ее «доопределения».

В качестве примера описанной выше ситуации рассмотрим ударное взаимодействие с опорной поверхностью, вертикально расположенного «циркуля» со скрепленными звеньями.

Такая задача возникает при изучении качения тела с угловыми точками типа шестеренки, при организации ходьбы двуногих шагающих механизмов, когда важным оказывается изучение двухопорной фазы движения. В момент постановки второй ноги на поверхность, вообще говоря, сопровождаемой ударом, первая опорная нога может либо остаться на поверхности, либо покинуть ее. Исходя из экспериментального материала, при анализе получаемых уравнений он сделал дополнительное предположение о безударном сходе опорной ноги с неударивающей связью.

Такого типа предположения, по-видимому, могут быть отнесены к гипотезам типа *ad hoc*, и нам представляется полезной замена их на предположения, носящие более универсальный характер. Отправным физическим понятием здесь может послужить скорость диссипации энергии

или диссипативный потенциал. Принципиальное значение диссипативного функционала в построении механики твердых тел в пластически деформированном состоянии отмечается Р.Мизесом. На важное значение функции диссипации в теории жесткопластических сред, частным случаем которых являются абсолютно твердые, недеформируемые тела, указал Д.Д.Ивлев. Основная идея настоящей работы заключается в предложении использовать для снятия статической неопределенности в задачах теории удара «феноменологический принцип Р.Мизеса» - принцип максимума скорости диссипации энергии на действительном движении механической системы.

Пусть точки А и В, соответственно, точки контакта «задней» и «передней» ножек циркуля с поверхностью. Пусть «в начале» ударного взаимодействия конечной точки передней ножки циркуля с опорной поверхностью в момент времени $t=0$ скорость конца задней опорной ножки $V_A=0$, а «в конце» ударного взаимодействия при $t+0$ скорость конца передней ножки $V_B=0$. Пусть угловая скорость при $t=0$ равна $\Omega = \Omega_0 < 0$, а при $t+0$ $\Omega = \Omega_1 = \Omega_0 + \Delta\Omega$, ($\Delta\Omega > 0$). При этом удар считается абсолютно неупругим. Будем считать, что центр масс циркуля находится в угловой точке С.

Непосредственно использовать понятие силы в теории удара не представляется возможным и вместо силы приходится вводить понятие вектора импульса силы как интеграла от вектора силы по времени.

$$\mathbf{S} = \int_0^{\Delta t} \mathbf{F} dt \quad (29.1)$$

Воспользуемся интегральной формой общих теорем, причем в качестве интервала интегрирования выберем время удара.

Уравнение движения точки С - центра масс циркуля при ударе

$$m\Delta V_C = \mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B \quad (29.2)$$

Теорема об изменении момента количества движения относительно центра масс при ударе

$$\Delta \mathbf{K}_C = [\mathbf{CA}, \mathbf{S}_A] + [\mathbf{CB}, \mathbf{S}_B] \quad (29.3)$$

В скалярном виде уравнения движения двузвенника при ударе представляются в виде

$$\begin{aligned} -m\Delta\Omega l \cos\alpha &= S_{Ax} + S_{Bx} \\ -m(\Delta\Omega + 2\Omega_0)l \sin\alpha &= S_{Ay} + S_{By} \end{aligned} \quad (29.4)$$

$$I_C \Delta\Omega = (S_{Ax} + S_{Bx})l \cos\alpha + (S_{By} - S_{Ay})l \sin\alpha$$

Здесь l -длина «ножек циркуля», 2α -угол раствора при вершине циркуля.

При этом из условия физической реализуемости неудерживающей связи следует, что проекция реакции в опорной ноге S_{Ay} на вертикальную ось не может быть отрицательной.

Раздельное определение горизонтальных проекций реакций в точках А и В при данной постановке задачи невозможно. Обозначим $S_{Ax} + S_{Bx} = S_x$, тогда получим систему трех уравнений для четырех неизвестных $\Delta\Omega, S_x, S_{Ay}, S_{By}$

$$\begin{aligned} -m\Delta\Omega l \cos\alpha &= S_x \\ -m(\Delta\Omega + 2\Omega_0)l \sin\alpha &= S_{Ay} + S_{By} \\ I_C\Delta\Omega &= S_x l \cos\alpha + (S_{By} - S_{Ay})l \sin\alpha \end{aligned} \quad (29.5)$$

Выражая неизвестные $\Delta\Omega, S_x, S_{By}$ через реакцию S_{Ay} в задней опорной ножке, имеем

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= -\frac{2l \sin\alpha}{I_c + ml^2} (S_{Ay} + ml\Omega_0 \sin\alpha) \\ S_{By} &= \frac{(I_c + ml^2 \cos 2\alpha)\Delta\Omega - 2ml^2 \sin^2 \alpha \Omega_0}{2l \sin\alpha} \\ S_x &= -m\Delta\Omega l \cos\alpha \end{aligned} \quad (29.6)$$

Введем в рассмотрение приращение ΔT кинетической энергии системы во время удара, непосредственно связанное в данной задаче с диссипативной функцией Релея.

Кинетическая энергия циркуля до удара

$$T_0 = \frac{1}{2} (I_c + ml^2) \Omega_0^2 \quad (29.7)$$

Кинетическая энергия циркуля после удара

$$T_1 = \frac{1}{2} (I_c + ml^2) \Omega_0^2 \left(1 + \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \right)^2 \quad (29.8)$$

Приращение кинетической энергии

$$\begin{aligned} \Delta T &= (I_c + ml^2) \Delta\Omega \left(\Omega_0 + \frac{\Delta\Omega}{2} \right) = \\ &= 2 \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{I_c + ml^2} (S_{Ay} + ml\Omega_0 \sin\alpha) \left(S_{Ay} - \frac{(I_c + ml^2 \cos^2 \alpha) \Omega_0}{l \sin\alpha} \right) \end{aligned} \quad (29.9)$$

Будем называть функцию ΔT «диссипативным потенциалом» или взятой с обратным знаком «скоростью диссипации энергии» в рассматриваемой задаче.

Корень $S_{Ay} = -ml\Omega_0 \sin \alpha$ квадратного трехчлена $\Delta T(S_{Ay})$ всегда положителен, а корень $S_{Ay} = \Omega_0(I_c + ml^2 \cos^2 \alpha) / l \sin \alpha$ всегда отрицателен.

Следовательно, экстремум функции ΔT либо достигается в точке

$$S_{Ay} = \Omega_0 \frac{(I_c + ml^2 \cos 2\alpha)}{2l \sin \alpha} > 0. \quad (29.10)$$

При этом $I_c + ml^2 \cos 2\alpha < 0$ и, следовательно,

$$\cos 2\alpha < -\frac{I_c}{ml^2} \quad (29.11)$$

Либо, при

$$\cos 2\alpha \geq -\frac{I_c}{ml^2}, \quad (29.12)$$

экстремум функции ΔT достигается на границе допустимого полуинтервала $S_{Ay} \geq 0$, то есть при $S_{Ay} = 0$.

Таким образом, в соответствии с принципом Р.Мизеса при

$$\sin^2 \alpha < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{I_c}{ml^2} \right) \quad (29.13)$$

$$S_{Ay} = \frac{(I_c + ml^2 \cos 2\alpha)\Omega_0}{2l \sin \alpha}$$

$$S_{By} = -\frac{(I_c + ml^2)\Omega_0}{2l \sin \alpha} \quad (29.14)$$

$$S_x = m\Omega_0 l \cos \alpha$$

$$\Delta \Omega = -\Omega_0$$

Отметим, что если $\Delta \Omega = -\Omega_0$, то после удара обе ножки циркуля остается на поверхности.

Если же

$$\sin^2 \alpha \geq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{I_c}{ml^2} \right), \quad (29.15)$$

то

$$\begin{aligned}
S_{Ay} &= 0 \\
S_{By} &= 2ml\Omega_0 \sin\alpha \frac{I_c + ml^2 \cos^2 \alpha}{I_c + ml^2} \\
S_x &= 2 \frac{m^2 l^3 \Omega_0}{(I_c + ml^2)} \sin^2 \alpha \cos\alpha \\
\Delta\Omega &= -2 \sin^2 \alpha \frac{ml^2 \Omega_0}{(I_c + ml^2)}
\end{aligned}
\tag{29.16}$$

В этом случае после удара передняя опорная ножка циркуля остается на поверхности, задняя - отрывается, и циркуль начинает «переваливаться с ноги на ногу». При этом процесс переваливания с ноги на ногу затухает в течение конечного времени, хотя количество смен опоры бесконечно.

Лекция 30.

Мини-ветроэлектростанция – ветроэнергетическая установка малой мощности, предназначенная для обслуживания небольшого числа потребителей электроэнергии

Мини-ветроэлектростанция – ветроэнергетическая установка малой мощности, предназначенная для обслуживания небольшого числа потребителей электроэнергии (например, в рамках одного фермерского хозяйства, дачного участка и т.п.). В этих условиях подключение даже одного дополнительного потребителя может оказаться существенным, тем более что оно носит, как правило, спонтанный, нерегулярный характер. Отметим, что подключение очередного электроприбора может привести к внезапной остановке станции. Возвращение в диапазон рабочих режимов в некоторых ситуациях сопровождается явлением гистерезиса, что было обнаружено экспериментально. В настоящей работе предлагается относительно простая механико-математическая модель этого явления.

Эксперимент

Сотрудники Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова совместно со специалистами Университета Ching-Yun (Тайвань) провели серию экспериментов [1] по определению характеристик серийной ветроэнергетической установки с горизонтальной осью (HAWT) в аэродинамической трубе Университета Ching-Yun. При испытаниях для различных скоростей набегающего потока измерялась выходная мощность в зависимости от величины активного внешнего сопротивления R нагрузки. При этом сопротивление изменялось как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения в определенном диапазоне. Результаты измерений приведены в таблице и на рисунке 1.

Таблица.

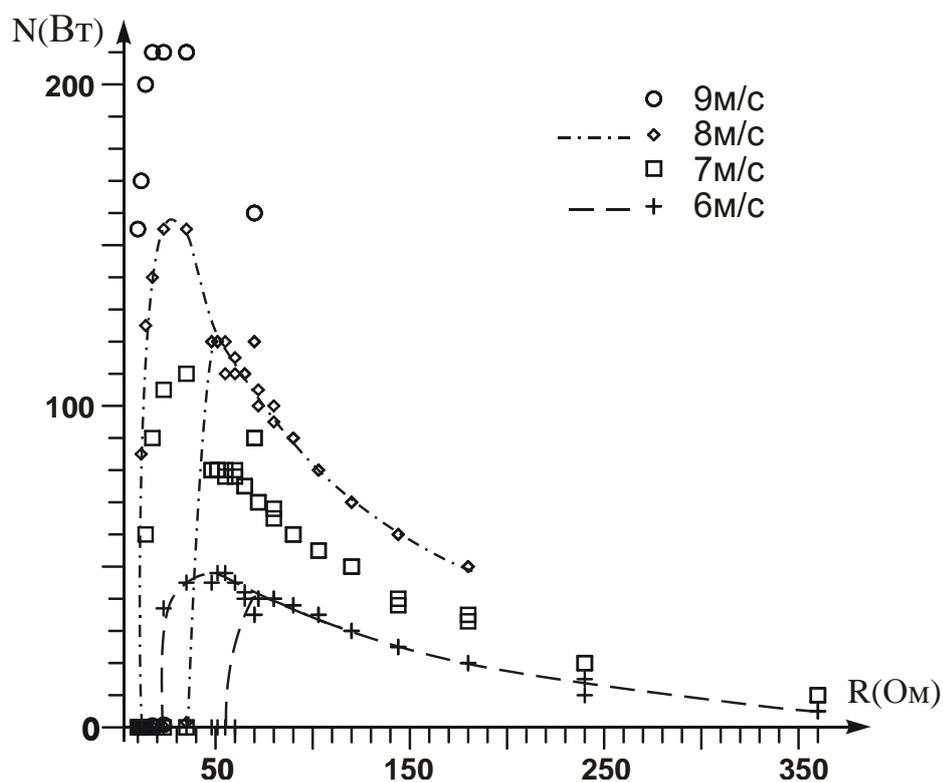


Рис. 1 Выходная мощность в зависимости от величины активного внешнего сопротивления нагрузки для различных скоростей набегающего потока

Видно, что при уменьшении R до величин порядка 10 Ом происходит скачкообразное падение мощности почти до нуля, и ветротурбина практически останавливается. Изменение нагрузки в противоположном направлении (увеличение R) не приводит к немедленному восстановлению мощности. Это происходит лишь при $R = 20\sim 60$ Ом. Таким образом, имеет место гистерезис.

Механико-математическая модель

Ветроэнергетическая установка в простейшем случае состоит из двух компонентов: ветротурбины и электрогенератора. Будем считать, что ветротурбина и якорь генератора составляют единое твердое тело T . Лопasti ветротурбины взаимодействуют с потоком воздуха, а ротор находится в поле электромагнитных сил, создаваемом статором. Это тело имеет единственную степень свободы, отвечающую вращению вокруг неподвижной оси Oz (рис. 2). Угол поворота, как правило, является циклической координатой. Поэтому для описания движения тела достаточно знать угловую скорость ω вращения. Будем считать, что скорость V набегающего потока (ветра) постоянна по величине и параллельна оси Oz . Уравнение движения ветротурбины имеет вид:

$$I\dot{\omega} = M_a + M_e \quad (30.1)$$

где I – момент инерции тела T относительно оси Oz , M_a и M_e – моменты, соответственно, аэродинамических и электромагнитных сил относительно оси вращения.

Уравнение изменения силы J тока в цепи электрогенератора примем в следующей простейшей форме:

$$L\dot{J} = c\omega - (R + r)J \quad (30.2)$$

Здесь L – приведенная индуктивность генератора, r – приведенное внутреннее сопротивление генератора, c – коэффициент преобразования механической энергии вращения в энергию электромагнитного поля (он пропорционален магнитному потоку).

Момент электромагнитных сил в (1) линейно зависит от вырабатываемого тока ($M_e = -cJ$).

Тогда система дифференциальных уравнений, описывающих динамику ветроэнергетической установки в целом имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} I\dot{\omega} &= M_a(\omega) - cJ \\ L\dot{J} &= c\omega - (R + r)J \end{aligned} \quad (30.3)$$

Момент аэродинамических сил

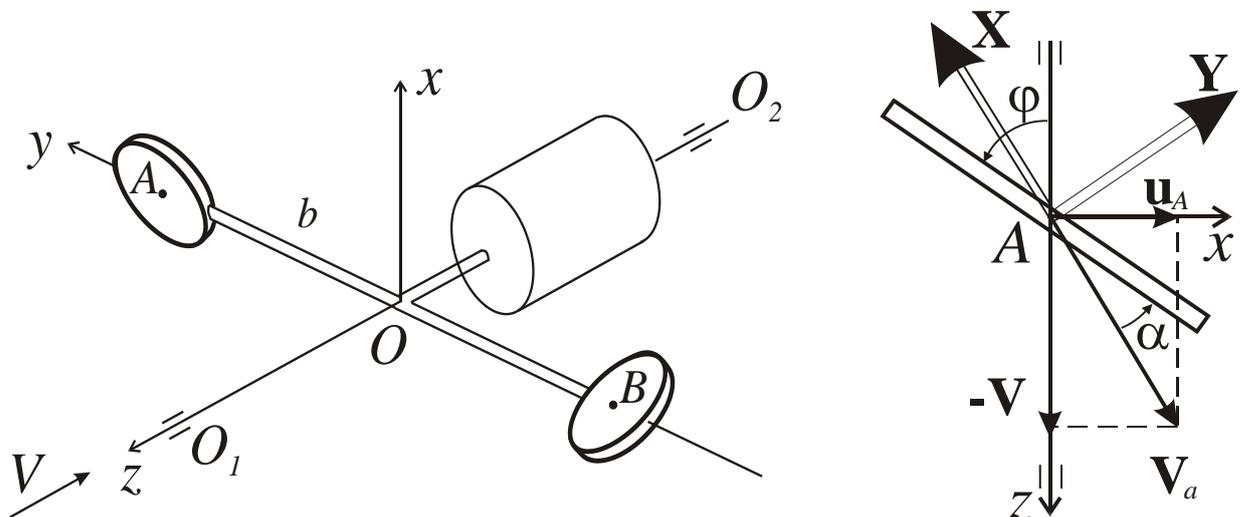


Рис. 2 Аэродинамическое воздействие на лопасти ветроэнергетической установки.

При описании аэродинамического воздействия на лопасти воспользуемся схемой [2]. Будем считать, что действие потока на отдельную лопасть приводится к силе F_a , линия действия которой проходит через фиксированную точку A лопасти (центр давления), находящуюся на расстоянии b от оси вращения (рис. 2). Величина абсолютной скорости u_A

точки A равна ωb и ортогональна вектору \mathbf{V} . Назовем воздушной скоростью \mathbf{V}_a точки A скорость этой точки в системе отсчета, движущейся со скоростью \mathbf{V} . Представим силу в виде суммы силы лобового сопротивления \mathbf{X} , направленной против скорости \mathbf{V}_a , и боковой (подъемной) силы \mathbf{Y} , направленной перпендикулярно \mathbf{V}_a .

Для уточнения направления последней силы поступим следующим образом. Предположим, что с лопастью можно связать некоторую плоскость Π , которая содержит точку A вместе с перпендикуляром, опущенным из этой точки на ось вращения, причем точка P совпадает с точкой O при $\mathbf{V}_a \in \Pi$.

Установим лопасть таким образом, что эта плоскость составляет с плоскостью Oz угол φ («установочный угол»). Назовем углом атаки α угол между скоростью \mathbf{V}_a и ее проекцией на плоскость Π . Примем, что подъемная сила лежит в плоскости этого угла.

Для величин X и Y используем квазистатическое представление:

$$X = \frac{1}{2} \rho S C_x(\alpha) V_a^2, \quad Y = \frac{1}{2} \rho S C_y(\alpha) V_a^2,$$

где функции угла атаки $C_x(\alpha)$ и $C_y(\alpha)$ – коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы соответственно, ρ – плотность воздуха, S – площадь лопасти.

Нетрудно показать, что

$$\alpha = \varphi - \arctg \frac{\omega b}{V}, \quad V_a^2 = V^2 + \omega^2 b^2 \quad (34.4)$$

Будем считать, что вертушка имеет 2 одинаковые лопасти, причем для i -й лопасти $\varphi_i = \varphi$.

При сделанных предположениях имеем:

$$M_a(\omega, \varphi) = \rho S b V_a^2 (C_x(\alpha) \cos(\varphi - \alpha) - C_y(\alpha) \sin(\varphi - \alpha)) \quad (34.5)$$

Таким образом, аэродинамический момент нелинейно зависит от фазовой координаты ω и от установочного параметра φ .

Существенно, что система (3) линейна по переменной J , и, в то же время, она нелинейна по переменной ω .

Режим холостого хода

Рассмотрим работу установки «вхолостую». Такой режим реализуется, в частности, если цепь якоря разомкнута ($R = \infty$). Тогда, очевидно, $J \equiv 0$ и $M_e \equiv 0$.

В этом случае уравнение (1) имеет стационарные решения вида $\omega(t) \equiv \omega^s = \text{const}$ (при этом, очевидно, $\alpha(t) \equiv \alpha^s = \text{const}$), где ω^s и α^s определяются из условия $M_a(\omega, \varphi) = 0$ и первого из соотношений (4):

$$k(\alpha^s) = \operatorname{tg}(\varphi - \alpha^s)$$

$$\frac{\omega^s b}{V} = k(\alpha^s)$$

Здесь $k(\alpha) = C_y(\alpha)/C_x(\alpha)$ – коэффициент аэродинамического качества.

Известно, что $k(\alpha)$ – ограниченная 2π -периодическая функция.

Максимальное достижимое значение ω_{\max}^s угловой скорости ω^s стационарного вращения определяется максимумом функции $k(\alpha)$ (очевидно, существует такой установочный угол φ_m , для которого этот максимум достигается). Для лопастей с относительно низким качеством $\max k(\alpha) \sim 5$, а для лопастей с высоким качеством $\max k(\alpha) \sim 20$ (см., например, [3]).

Рабочий режим

Теперь рассмотрим работу установки в случае, когда электрогенератор находится под нагрузкой ($R < \infty$).

Запишем уравнения стационарных движений при некотором значении параметра φ :

$$M_a(\omega, \varphi) = cJ$$

$$c\omega = (R + r)J$$

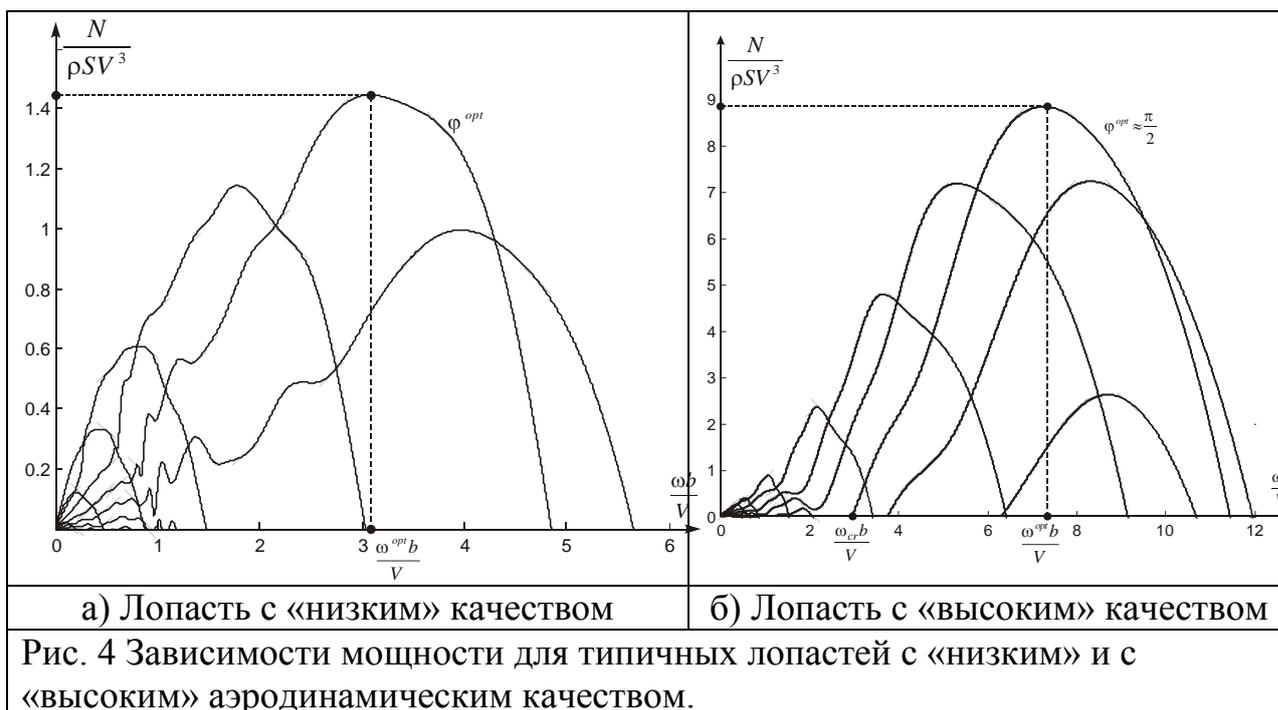
Исключая J , получим одно уравнение с одним неизвестным:

$$M_a(\omega, \varphi) = \frac{q^2 \omega}{R + r} \quad (34.6)$$

Существенным конструктивным параметром, влияющим на работу установки, как было отмечено выше, является установочный угол φ . Для того, чтобы исследовать поведение корней уравнения (6) при разных значениях этого угла, рассмотрим семейства зависимостей $M_a(\omega, \varphi)$ для типичных лопастей с «низким» (квадратная пластина [3]; рис. 3а) и с «высоким» (прямоугольное крыло удлинения 5 [3]; рис. 3б) аэродинамическим качеством. Видно, что максимальные значения моментов для лопастей обоих типов имеют одинаковый порядок. Но в первом случае максимум момента достигается при нулевой скорости вращения (момент трогания), а во втором – при скорости ω_m вращения ($\omega_m \neq 0$), примерно равной половине максимальной угловой скорости стационарного движения.



Основной характеристикой ветротурбины является вырабатываемая мощность. Поэтому приведем также графики семейств зависимости мощности $N = \omega M_a(\omega, \varphi)$ (рис. 4 а,б).



В обоих случаях максимальное значение мощности N_{\max} достигается при $\omega^{opt} \sim 0.5\omega_{\max}^s$, $\omega^{opt} > \omega_m$. Однако, величина N_{\max} для турбины, оснащенной лопастями с «низким» качеством, существенно меньше, чем для турбины, оснащенной лопастями с «высоким» качеством. Кроме того, различаются и установочные углы φ^{opt} .

Для лопастей с низким качеством значение установочного угла $\varphi^{opt} \approx 80^\circ$. Для лопастей же с высоким качеством $\varphi^{opt} \approx 90^\circ$. Это обстоятельство сильно влияет на работу турбины.

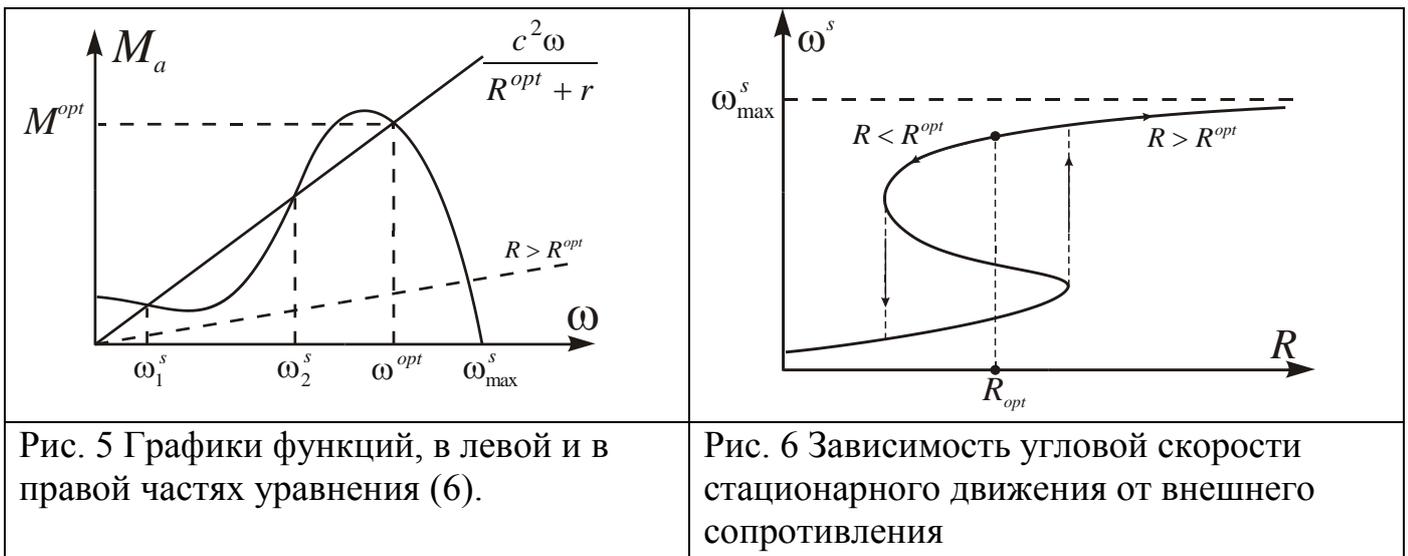
Выйти на режим с оптимальной мощностью из состояния покоя турбине с высоким аэродинамическим качеством нельзя без предварительной принудительной раскрутки, поскольку при соответствующих установочных углах в некотором диапазоне значений ω ($\omega < \omega_{cr}$) момент отрицателен, т.е. препятствует раскрутке.

Тем не менее, можно выбрать несколько меньшее значение установочного угла $\varphi_* < \varphi^{opt}$, такое, что $M(\omega, \varphi_*) > 0$ при $\omega \in [0, \omega_{max}^s]$.

Гистерезис

В реально существующих ветротурбинах обычно используются лопасти с «высоким» аэродинамическим качеством. Рассмотрим влияние нагрузки (параметра R) на работу такой установки.

Проведем графический анализ уравнения (6) для $\varphi = \varphi_*$.



На рис. 5 представлены функции, стоящие в левой и в правой частях этого уравнения. Очевидно, что при любом значении R уравнение (6) имеет, по крайней мере, одно решение. Более того, в некотором диапазоне значений R существует несколько решений. То есть при таких значениях внешней нагрузки возможно существование нескольких стационарных режимов. Отметим, что режим «оптимальной нагрузки» ($R = R^{opt}$), при которой реализуется максимальная для данного установочного угла вырабатываемая мощность, как раз попадает в область существования нескольких стационарных режимов.

Зависимость угловой скорости стационарного движения от внешнего сопротивления качественно изображена на рис. 6. Видно, что при уменьшении R (что соответствует подключению новых потребителей) ω вначале сравнительно медленно убывает вдоль верхней ветви кривой, а затем при некотором $R = R_{\min}$ резко падает. Это падение, естественно, сопровождается скачкообразным уменьшением вырабатываемой мощности. Для того, чтобы вернуться к прежним значениям вырабатываемой мощности, необходимо увеличивать сопротивление (отключая потребителей или последовательно включая дополнительное активное сопротивление). При этом угловая скорость будет возрастать вдоль нижней ветви кривой, а затем скачком перейдет на верхнюю, «закрывая» гистерезисную петлю. Отметим также, что вырабатываемая мощность после этого будет, как правило, меньше оптимальной для данного установочного угла. Таким образом, предложенная замкнутая механико-математическая модель ветроэлектростанции позволяет дать качественное объяснение отмеченному в эксперименте явлению гистерезиса.