УДК 593.376

ПОЛЗУЧЕСТЬ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ В УПРУГОЙ ОБОЙМЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Кирсанов М.Н.

Производится расчет цилиндрической толстостенной трубы под действием внутреннего давления в условиях осевой симметрии с учетом неограниченной ползучести материала. Изучается влияние тонкой упругой оболочки на характерные значения времени, возникающие в задаче. Разыскиваются некоторые оптимальные параметры конструкции.

Применение реологических материалов (полимеров, металлов при высоких температурах) для изготовления труб, находящихся под высоким давлением, вызывает ряд проблем. Теоретически неограниченное раздутие, несмотря даже на небольшую скорость этого процесса, может привести к выходу всей конструкции из строя. Тонкая упругая внешняя оболочка позволяет исправить ситуацию. Если материал трубы, контактирующий, например, с агрессивной средой, ползет при некоторой рабочей температуре, то сталь, из которой изготовлена внешняя обойма, остается упругой. Расчет толстостенной трубы из линейно наследственного материала с упругой оболочкой (ракета на твердом топливе) известен [1]. Ползучесть однородной толстостенной трубы из неупрочняющегося материла описана в [2], [3]. Настоящая работа посвящена решению задачи с учетом упрочнения материала среды. Использована теория старения. Найдены некоторые характерные для данной задачи значения времени.

Рассмотрим внутренний слой трубы. Предположим, что имеет место плоская деформация $\varepsilon_z = 0$ и осевая симметрия, т.е. угловое перемещение отсутствует, а радиальное u зависит только от радиуса r и времени t. Справедливы следующие выражения для деформаций

$$\varepsilon_\varphi = u/r, \qquad \varepsilon_r = du/dr. \tag{1}$$

Уравнение равновесия и уравнение совместности имеют вид

$$d\sigma_r/dr = (\sigma_\varphi - \sigma_r)/r, \tag{2}$$

$$d\varepsilon_\varphi/dr = (\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi)/r. \tag{3}$$

Пренебрегая упругими деформациями, определяющее соотношение выберем в виде

$$\dot\varepsilon = \Psi(t)S^n, \tag{4}$$

$$\varepsilon_r = 3\varepsilon/(2S)S_r, \quad \varepsilon_\varphi = 3\varepsilon/(2S)S_\varphi, \tag{5}$$

где $\dot\varepsilon$ - скорость интенсивности деформации, $S = \sqrt{\frac{3}{2}(S_r^2 + S_\varphi^2 + S_z^2)}$ - интенсивность девиатора напряжений. Для поставленной задачи

$$S_r = (1/2)(\sigma_r - \sigma_\varphi), \quad S_\varphi = (1/2)(\sigma_\varphi - \sigma_r), \qquad S = (\sqrt{3}/2)(\sigma_\varphi - \sigma_r). \tag{6}$$

Предполагается несжимаемость материала $\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = 0$, или $\varepsilon_r = -\varepsilon_\varphi$. При этом из уравнения совместности (3) следует

$$\dot\varepsilon_\varphi = g(t)/r^2, \tag{7}$$

где $g(t)$ - некоторая функция. Из (5), (6) имеем

$$\dot\varepsilon_\varphi = (\sqrt{3}/2)\dot\varepsilon. \tag{8}$$

Из (7) и последнего равенства найдем $\dot\varepsilon = 2g(t)/(\sqrt{3}r^2) = \Psi(t)S^n$. Выразим отсюда S как функцию r в виде

$$S = (\sqrt{3}/2)C_1 r^{-2/n}, \tag{9}$$

где

$$C_1 = (2/\sqrt{3})^{1/n+1}(g/\Psi)^{1/n}. \tag{10}$$

Уравнение равновесия (2) с учетом (6) и (9) перепишем в виде

$$d\sigma_r/dr = (2S/(r\sqrt{3}) = C_1 r^{-2/n-1}. \tag{11}$$

Интегрируя (11), получим $\sigma_r = -nC_1/(2r^{2/n}) + C_2$. На внутренней поверхности цилиндра $r = a$ приложено постоянное давление $\sigma_r = -p$. На внешней $r = b$ - переменное давление со стороны упругой оболочки $\sigma_r = -q(t)$. Поставленные таким образом граничные условия дают

$$C_1 = \frac{2(p-q)b^{2/n}}{n[(b/a)^{2/n}-1]}. \tag{12}$$

Выпишем решение для напряжений

$$\sigma_r = \frac{p[1-(b/r)^{2/n}] + q(b/a)^{2/n}[(a/r)^{2/n}-1]}{(b/a)^{2/n}-1}. \tag{13}$$

Окружное напряжение найдем из (6), (9)

$$\sigma_\varphi = 2S/\sqrt{3} + \sigma_r = C_1/r^{2/n} + \sigma_r.$$

С учетом (10), (13) получим

$$\sigma_\varphi = \frac{p[1-(1-2/n)(b/r)^{2/n}] + q(b/a)^{2/n}[(a/r)^{2/n}(1-(2/n))-1]}{(b/a)^{2/n}-1}. \tag{14}$$

Напряжения не зависят от функции упрочнения $\Psi(t)$. При $n = 2$ окружное напряжение не зависит и от радиуса: $\sigma_\varphi = (pa - qb)/(b-a)$.

Вычислим скорость перемешения $\dot{u}$. Согласно (1), имеем $\dot{u} = r\dot{\varepsilon}_\varphi$. Далее, с учетом (8) и (4) $\dot{u} = (\sqrt{3}/2)r\dot{\varepsilon} = (\sqrt{3}/2)r\Psi S^n$. Используя зависимости (9) и (12), получим

$$\dot{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \frac{\Psi}{r} \left(\frac{2}{n}\right)^n \frac{(p-q)^n b^2}{[(b/a)^{2/n}-1]^n}. \tag{15}$$

Рассмотрим теперь внешнюю упругую оболочку толщиной h и радиуса b. Под действием давления q в ней возникает окружное напряжение $\sigma = qb/h$. Деформация $\varepsilon = u/b$ связана с напряжением законом Гука $\sigma = E\varepsilon$. Найдем отсюда скорость радиального перемещения внешней оболочки

$$\dot{u} = \dot{q}b^2/(hE). \tag{16}$$

Приравнивая перемещения (15) при $r = b$ и (16), получим дифференциальное уравнение для $q(t)$

$$\dot{q} = C_3\Psi(t)(p-q)^n, \tag{17}$$

где

$$C_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \left(\frac{2}{n}\right)^n \frac{hE}{b[(b/a)^{2/n}-1]^n}. \tag{18}$$

Интегрируя (17) с начальным условием $t = 0, \quad q = 0$, при $n \neq 1$ получим

$$\frac{1}{(p-q)^{n-1}} - \frac{1}{p^{n-1}} = (n-1)C_3 \int_0^t \Psi dt. \tag{19}$$

Для степенного упрочнения $\Psi = At^m, \quad (m < 0,\ n(1+m) > 1)$ из (19) следует

$$q = p - \frac{p}{(1 + C_3\frac{n-1}{m+1}p^{n-1}At^{m+1})^{1/(n-1)}}. \tag{20}$$

Таким образом, напряжение в оболочке растет от 0 до p. Из (9), (12) следует, что интенсивность деформации в теле цилиндра падает при этом до нуля. Начальное значение S максимально на внутренней поверхности цилиндра: $S = S_{max} = \sqrt{3}(p/n)(b/a)^{2/n}[(b/a)^{2/n} - 1]$. С увеличением n (т.е. при повышенных температурах) S_{max} уменьшается.

Решение (20) позволяет найти некоторые характерные значения времени.

1) При $t \to \infty, \quad q \to p, \ \sigma_r = \sigma_\varphi = -p$. В начальный момент $t = 0, \quad q = 0$. Из (14) имеем $\sigma_\varphi > 0$. Следовательно, в процессе ползучести окружное напряжение меняет знак, переходя от растягивающих при $t = 0$ к сжимающим. Для материалов прочность которых чувствительна к знаку напряжения σ_φ, имеет значение время t_1, при котором $\sigma_\varphi = 0$. Пусть $n = 2$. Из (20) следует

$$t_1 = \left(\frac{(m+1)b(b-a)}{AEpah} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^3 \right)^{1/(m+1)}.$$

Период $0 < t < t_1$ опасный, например, для образования трещин, уменьшается с увеличением давления p, толщины упругого покрытия h и с уменьшением толщины наполнителя $b - a$. Быстро ползущие материалы (A велико) также соответствует меньшему t_1.

2) Пусть при $\sigma = \sigma_*$ во внешней оболочке возникает недопустимые пластические деформации или происходит хрупкое разрушение. Соответствующее давление на границе трубы и оболочки $q_* = \sigma_* h/b$. Предположим, что $p > q_*$. Вычислим время t_2, за которое напряжение q в оболочке возрастает от 0 до q_*. Из (20) имеем

$$t_2 = \left(\frac{(m+1)(1-(1-q/p)^{n-1})}{AC_3(n-1)(p-q)^{n-1}} \right)^{1/(m+1)}. \qquad (21)$$

Пример. Материал внутреннего слоя - сплав Д16АТ . Константу A представим в виде [4]: $A = \varepsilon_n/(\sigma_n)^n$. При температуре 300° С имеем $\sigma_n = 120$МПа, $\varepsilon_n = 1 \times 10^{-4} c^{-1}$, $n = 12$, $m = 0$. Внешняя оболочка выполнена из жаропрочной стали ЭИ696. Модуль упругости $E = 2 \times 10^5$ МПа, предел пропорциональности $\sigma_* \approx 600$ МПа. Пусть $a = 90$, $b = 100$, $h =$ 0,5, $p = 7$ МПа. По формуле (21) вычислим $t_2 = 2.6 \times 10^7 \approx 300$сут. Заметим, что этот результат существенно зависит от температуры. Повышение температуры всего на 50°, ($n = 8$, $\sigma_n = 70$МПа) приводит к резкому уменьшению критического времени: $t_2 = 3034\,c \approx 50$ мин.

Решение (21) можно использовать для оптимального подбора материала и толщины внешнего покрытия, если $p > \sigma_* h/b$. Что лучше для снижения t_2 - увеличение толщины покрытия или улучшение качества материала (под которым будем понимать, например, σ_*) при фиксированной стоимости конструкции R_Σ ? Ответ получается практическим перебором имеющихся вариантов. Существование же оптимального решения докажем теоретически. Для этого введем условную зависимость $R_\Sigma = hR_h$, где R_h - цена единицы покрытия. В свою очередь, R_h зависит от качества материала. Пусть $R_h = \sigma_*^k \beta$, где $k, \ \beta$ - некоторые известные коэффициенты, обычно $k > 1$. Подставим эти выражения в (21) и минимизируем t_2 по σ_*. Экстремум достигается при $\sigma_*^{k-1} = kR_\Sigma/(bp\beta), \quad (n = 2)$. Легко проверить, что полученное решение лежит в области допустимых значений $p > \sigma_* h/b$, т.к. $\sigma_* h/b = p/k$. При $k = 1$ поставленная таким образом задача оптимизация решения не имеет.

Список литературы

1.*Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.

2.*Бойл Д., Спенс Д.* Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. М.:Мир. 1986. 360 с.

3.*Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.

4.*Работнов Ю.Н.,Милейко С.Т.* Кратковременная ползучесть. - М.: Наука, 1970. 224 с.