Глава 8

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

При изучении темы ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА раздела КИНЕМАТИКА вы научитесь применять аналитические и графические методы для определения скоростей и ускорений точек тел и механизмов. Хотя эти знания имеют самостоятельную ценность, особенно необходимы они будут для решения задач динамики тела и системы.

В § 16.2, с. 361 и § 16.3, с. 364 приведены программы расчета кинематики плоского движения в математической системе Maple V. Анимационные возможности этой системы делают решение наглядным, позволяя глубже понять суть задачи.

Методы решения задачи кинематики плоского движения разнообразны. Выбрать оптимальный путь, который может существенно упростить решение, помогут примеры, приведенные в этой главе.

8.1. Скорости точек многозвенного механизма

Постановка задачи. *Плоский многозвенный механизм с одной степенью свободы находится в движении. Известна угловая скорость какого-либо его звена или скорость одной из точек механизма. Найти скорости точек механизма и угловые скорости его звеньев.*

План решения

Рассмотрим два простых геометрических способа решения задачи, в которых, в отличие от аналитических методов (§ 8.3, 8.5), определяются *модули* скоростей и угловых скоростей. Не оговаривая отдельно, всякий раз под угловой скоростью ω будем подразумевать ее модуль $|\omega|$.

1-й способ. Мгновенные центры скоростей

1. Определяем положение мгновенного центра скоростей (МЦС) каждого звена. МЦС лежит на пересечении перпендикуляров, про-

веденных к скоростям точек, принадлежащих звену (рис. 85). У тех звеньев, у которых МЦС не существует (скорости двух точек параллельны и не перпендикулярны отрезку, их соединяющему), угловая скорость равна нулю, а скорости всех точек равны. Если векторы скоростей перпендикулярны отрезку их соединяющему, то имеют место два частных случая положения МЦС (рис. 86, 87).

Если тело (колесо, диск, цилиндр) катится по поверхности без проскальзывания, то МЦС этого тела находится в точке касания.

2. Для каждого звена определяем расстояния от его точек до МЦС этого звена.

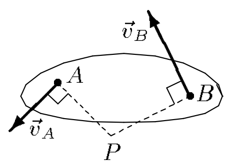


Рис. 85

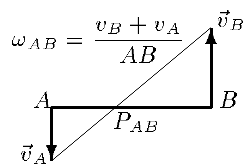


Рис. 86

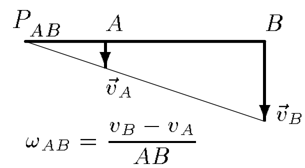


Рис. 87

3. Записываем систему уравнений для скоростей N точек звена i, включая точку с известной скоростью:

$$v_k = \omega_i R_{ik}, \quad k = 1...N.$$

Здесь ω_i — угловая скорость звена i, R_{ik} — расстояние от МЦС звена i до точки k. Решаем систему, определяем угловую скорость звена, а затем скорости всех его точек.

Этот пункт плана выполняем последовательно для всех звеньев механизма. Очередное звено должно иметь общую точку (шарнир) с предыдущим, для которого угловая скорость найдена или известна.

2-й способ. План скоростей

1. Как и в методе МЦС ведем расчет, переходя от одного звена к другому, шарнирно с ним соединенному.

Построение начинаем с вектора, величина и направление которого известны или легко вычисляются. Этот вектор в заданном масштабе откладываем от некоторой произвольной точки O (рис. 91). Его конец определяет первую точку плана скоростей. Точку плана скоростей (конец вектора) отмечаем строчной буквой, соответствующей точке вектора скорости. Пусть первая точка плана скоростей обозначена как b.

2. Рассматриваем очередное звено, на котором имеется точка с уже известной скоростью. Необходимо, чтобы на этом звене была

еще одна точка с известным направлением вектора скорости (например, ползун или точка звена, совершающего вращательное движение). Пусть эта точка обозначена как C (рис. 88).

Справедливо правило, согласно которому неизменяемые отрезки механизма, обозначенные прописными буквами, перпендикулярны отрезкам плана скоростей, обозначенными теми же строчными буквами.

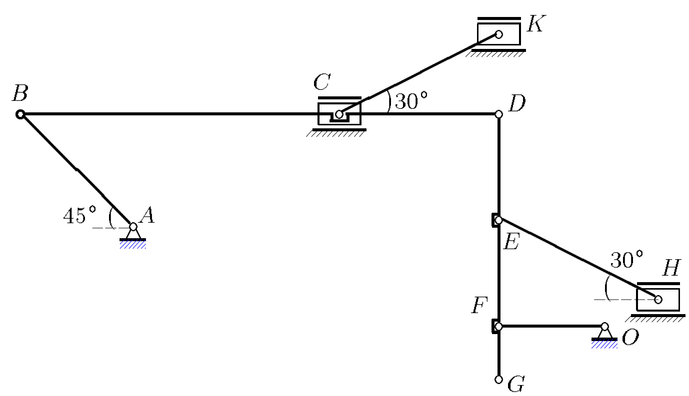
Следующая точка плана скоростей лежит на пересечении двух прямых. Одна прямая определяется направлением скорости точки C, вторая перпендикулярна BC. Длина полученного отрезка Oc является модулем скорости $\vec{v}_c$ (рис. 91).

Скорости остальных точек этого звена (если таковые имеются) найдем по правилу подобия неизменяемых фигур механизма и фигур, *обозначенных теми же строчными буквами* плана скоростей.

Пункт 2 плана выполняем для всех звеньев механизма (рис. 91–95).

3. После построения плана скоростей определяем угловую скорость каждого звена по простой формуле $\omega_{IJ} = ij/IJ$, где IJ расстояние между точками I и J звена, ij — длина отрезка на плане скоростей.

Пример. Плоский многозвенный механизм с одной степенью свободы приводится в движение кривошипом AB, который вращается против часовой стрелки с угловой скоростью $\omega_{AB} = 2$ рад/с (рис. 88).



$AB = 30$ см,
$BC = 60$ см,
$CD = 30$ см,
$DE = 20$ см,
$EF = 20$ см,
$FG = 10$ см,
$EH = 30$ см,
$FO = 20$ см,
$CK = 25$ см.

Рис. 88

Ползуны C, K, H движутся горизонтально, $BD \perp DG$, $DG \perp FO$. Найти скорости точек B, C, D, E, F, G, H, K механизма и угловые скорости его звеньев AB, BD, DG, EH, FO, CK.

Решение

1-й способ. Мгновенные центры скоростей

1. Определяем положение мгновенного центра скоростей каждого звена AB, BD, DG, CK, EH, FO.

МЦС звеньев AB и FO искать не требуется. Они совершают вращательное движение вокруг шарниров A и O соответственно. Можно условно считать, что там находятся их МЦС.

Вектор $\vec{v}_B$ скорости точки B направим перпендикулярно радиусу AB против часовой стрелки (рис. 89). Далее, чтобы узнать положение МЦС следующего звена надо знать направления векторов скоростей двух его точек. Следующим звеном будет стержень BD, имеющий со звеном AB общую точку B. У него есть три характерные точки B, C и D. Направление вектора скорости точки D пока неизвестно.

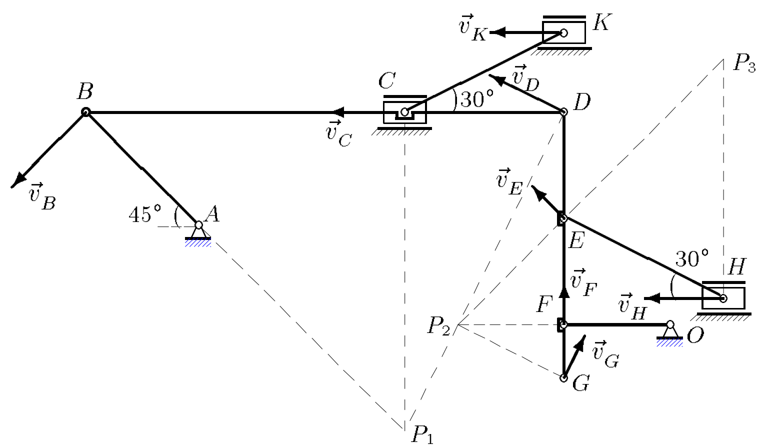


Рис. 89

Остается точка C. Ползун C движется строго горизонтально. Вектор скорости $\vec{v}_C$ направляем по горизонтали налево. Из двух возможных горизонтальных направлений мы выбрали этот вариант, исходя из теоремы о проекции векторов скоростей точек неизменяемого отрезка. Проекции должны быть равны и направлены в одну сторону. Таким образом, известны направления скоростей двух точек тела. Это позволяет определить МЦС звена BCD. Находим точку P_1 пересечения перпендикуляров, проведенных из точек B и C, к векторам $\vec{v}_B$ и $\vec{v}_C$ (рис. 89). Теперь определяем направление вектора $\vec{v}_D$. Он будет перпендикулярен радиусу P_1D и направлен налево, исходя из той же теоремы о проекциях скоростей точек отрезка BD.

Со стержнем BCD имеют общие точки два стержня: CK и DG. Рассмотрим сначала стержень DG. Направление вектора скорости точки D уже известно. Чтобы определить положение МЦС, надо знать направление вектора еще одной точки на этом звене. Такой точкой является F. Вектор ее скорости перпендикулярен радиусу вращения FO и направлен вертикально. Перпендикуляры к векторам $\vec{v}_D$ и $\vec{v}_F$ задают положение точки P_2, вокруг которой звено $DEFG$ совершает мгновенное вращательное движение.

Перпендикулярно радиусам P_2G и P_2E проводим вектора $\vec{v}_G$ и $\vec{v}_E$.

Переходим к звену EH, МЦС которого находим на пересечении перпендикуляров к $\vec{v}_E$ (продолжение радиуса P_2E) и к вектору скорости $\vec{v}_H$ ползуна H, движущегося горизонтально. Получаем точку P_3 — МЦС звена EH.

И, наконец, рассматриваем звено CK. Скорости $\vec{v}_K$ и $\vec{v}_C$ параллельны и не перпендикулярны CK. Звено CK совершает мгновенно-поступательное движение. Условно можно сказать, что МЦС звена CK находится в бесконечности.

2. Определяем расстояния от МЦС звеньев до тех точек этих звеньев, скорости которых надо найти.

Звено BCD.

$$P_1B = BC/\cos 45^\circ = 60/0.707 = 84.85 \text{ см},$$
$$P_1C = BC = 60 \text{ см},$$
$$P_1D = \sqrt{P_1C^2 + CD^2} = 67.08 \text{ см}.$$

Звено $DEFG$. Пользуясь подобием $\triangle P_1CD \sim \triangle P_2DF$, находим

$$P_2D = \frac{FD}{P_1C}P_1D = \frac{40}{60}67.08 = 44.72 \text{ см},$$

$$P_2F = \frac{FD}{P_1C}CD = \frac{40}{60}30 = 20 \text{ см},$$

$$P_2E = \sqrt{P_2F^2 + EF^2} = \sqrt{20^2 + 20^2} = 28.28 \text{ см},$$

$$P_2G = \sqrt{P_2F^2 + FG^2} = \sqrt{20^2 + 10^2} = 25.98 \text{ см}.$$

Звено EH (рис. 90). Находим расстояния до МЦС:

$$P_3E = EL\sqrt{2} = 36.74 \text{ см},$$

$$P_3H = P_3L + LH = P_3L + EH\cos 60^\circ = 25.98 + 15 = 40.98 \text{ см}.$$

3. Записываем систему уравнений для скоростей трех точек звена BCD, включая точку B с известной скоростью:

$$v_B = \omega_{BD} P_1 B,$$
$$v_C = \omega_{BD} P_1 C,$$
$$v_D = \omega_{BD} P_1 D.$$

Решаем эту систему. Находим $\omega_{BD} = v_B/P_1B = 0.707$ рад/с, $v_C = 0.707 \cdot 60 = 42.43$ см/с, $v_D = 0.707 \cdot 67.08 = 47.43$ см/с.

Система уравнений для скоростей точек звена $DEFG$ имеет вид

$$v_D = \omega_{DG} P_2 D,$$
$$v_E = \omega_{DG} P_2 E,$$
$$v_F = \omega_{DG} P_2 F,$$
$$v_G = \omega_{DG} P_2 G.$$

Из первого уравнения вычисляем угловую скорость:

$$\omega_{DG} = v_D/P_2D = 47.43/44.72 = 1.06 \text{ рад/с}.$$

Получаем скорости точек:

$$v_E = 1.06 \cdot 28.28 = 30 \text{ см/с},$$
$$v_F = 1.06 \cdot 20 = 21.21 \text{ см/с},$$
$$v_G = 1.06 \cdot 22.36 = 23.72 \text{ см/с}.$$

Система уравнений для скоростей точек звена EH имеет вид

$$v_E = \omega_{EH} P_3 E,$$
$$v_H = \omega_{EH} P_3 H.$$

Отсюда

$$\omega_{EH} = v_E/P_3E = 30/36.74 = 0.816 \text{ рад/с},$$
$$v_H = \omega_{EH} P_3 H = 0.816 \cdot 40.98 = 33.46 \text{ см/с}.$$

Звено CK совершает мгновенно-поступательное движение. Следовательно, скорости точек C и K равны: $v_K = v_C = 42.43$ см/с. Угловая скорость этого звена равна нулю *) .

*) Можно считать, что МЦС звена, движущегося мгновенно-поступательно, находится в бесконечности. Поэтому, рассуждая формально, получаем $\omega_{CK} = v_C/\infty = 0$.

Частично проверить решение можно графически. Известно, что концы векторов скоростей точек неизменяемого отрезка лежат на одной прямой. Убеждаемся в этом, проводя прямую через концы векторов $\vec{v}_B$, $\vec{v}_C$ и $\vec{v}_D$, отложенных на чертеже в масштабе (рис. 90).

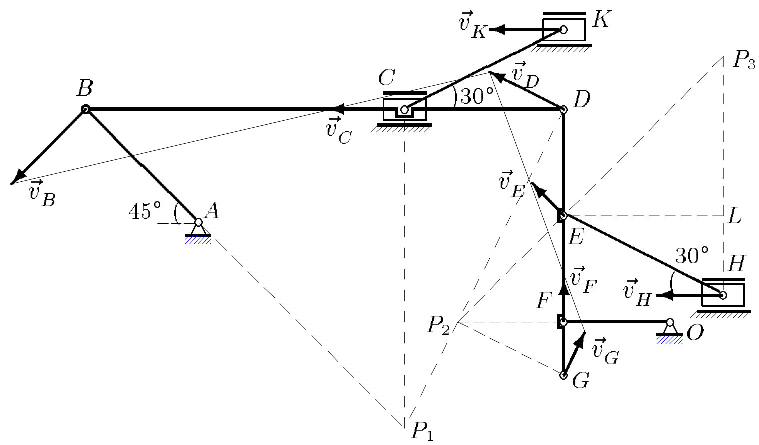


Рис. 90

Аналогично проверяем скорости $\vec{v}_D$, $\vec{v}_E$, $\vec{v}_F$ и $\vec{v}_G$. Через их концы также можно провести прямую. Остались непроверенными скорости точек E и H. Для этого можно воспользоваться методом построения *плана скоростей*, см. ниже 2-й способ.

Результаты расчетов помещаем в таблицы. Скорости даны в см/с, угловые скорости — в рад/с.

Точка	B	C	D	E	F	G	H	K
v	60.00	42.43	47.43	30.00	21.21	23.71	33.46	42.43

Звено	AB	BD	DG	EH	FO	CK
ω	2.000	0.707	1.060	0.816	1.060	0

2-й способ. План скоростей

1. Построение начинаем с вектора, величина и направление которого известны или легко вычисляются. В нашем случае это $\vec{v}_B$. Вектор $\vec{v}_B$ в заданном масштабе откладываем от некоторой произвольной точки O (рис. 91). Все остальные вектора также будем откладывать от этой точки.

Точки плана скоростей (концы векторов) отмечаем соответствующими строчными буквами. Таким образом, положение точки b на плане скоростей известно.

2. Рассматриваем звено BCD (рис. 90), на котором имеется точка B с известной скоростью. Неизменяемые отрезки механизма, обозначенные прописными буквами, перпендикулярны отрезкам плана скоростей, обозначенными теми же строчными буквами, $BC \perp bc$. Звено механизма BC горизонтально.

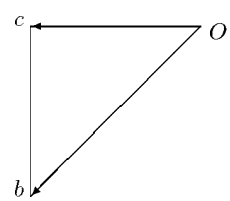


Рис. 91

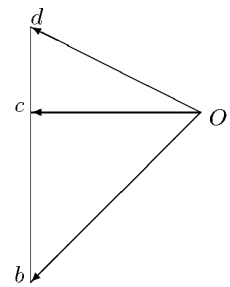


Рис. 92

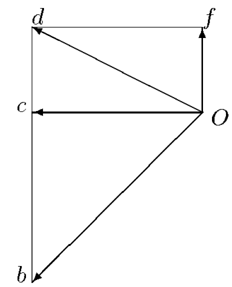


Рис. 93

Следовательно, точка c плана скоростей лежит на одной вертикали с точкой b. Известно направление скорости ползуна C. Точку c находим на пересечении двух прямых. Вектор $\vec{v}_C$ изображен отрезком Oc плана скоростей (рис. 91). Из правила подобия фигур механизма и фигур, обозначенных теми же строчными буквами плана скоростей (в данном случае это отрезки BC и CD), имеем $BC/CD = bc/cd$.

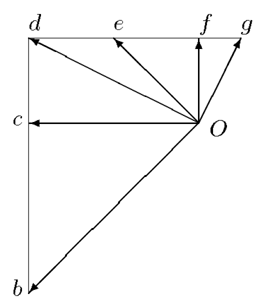


Рис. 94

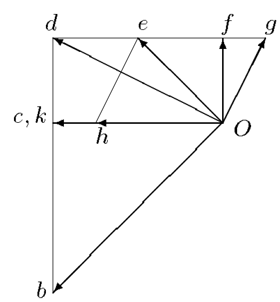


Рис. 95

Так получаем точку d плана скоростей и, следовательно, величину и направление вектора $\vec{v}_D$ (рис. 92).

Определяем скорость $\vec{v}_F$. Направление этого вектора известно — он перпендикулярен радиусу вращения FO. По свойству плана скоростей $DF \perp df$. Точка d на плане уже есть. Проводим через нее горизонтальную прямую (перпендикулярную DF) до пересечения с вертикальным направлением вектора скорости $\vec{v}_F$. Получаем точку f (рис. 93). Соединяя ее с центром O, определяем модуль искомой скорости $\vec{v}_F$.

Из соотношения подобия $DE/DF = de/df$ на отрезке df находим внутри него конец вектора скорости $\vec{v}_E$ и вне отрезка, пользуясь пропорцией $DG/DF = dg/df$, точку g, определяющую вектор скорости $\vec{v}_G$ (рис. 94).

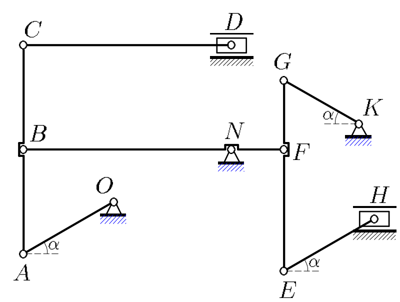
Аналогично определяем скорость $\vec{v}_H$ (рис. 95). Здесь $eh \perp EH$. Точки k и c на плане скоростей совпадают.

3. Угловые скорости звеньев определяем по простым формулам:

$$\omega_{BD} = bd/BD,\ \omega_{DG} = dg/DG,$$
$$\omega_{EH} = eh/EH,\ \omega_{CK} = ck/CK = 0,\ \omega_{FO} = fo/FO.$$

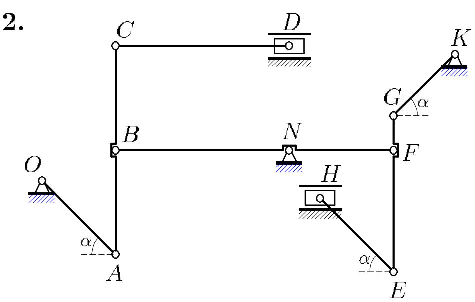
Условия задач. *Плоский многозвенный механизм с одной степенью свободы приводится в движение кривошипом, который вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью. Найти скорости точек механизма (в см/с) и угловые скорости его звеньев (в рад/с). Размеры даны в см.*

1.



$\omega_{OA} = 1$ рад/с,
$\alpha = 30°$,
$AB = 30,\ BC = 30,$
$NB = 60,\ NF = 15,$
$CD = 60,\ EH = 30,$
$FE = 35,\ FG = 20,$
$OA = 30,\ KG = 25.$

2.



$\omega_{BF} = 2$ рад/с,
$\alpha = 45°$,
$AB = 30,\ BC = 30,$
$NB = 50,\ NF = 30,$
$CD = 50,\ EH = 30,$
$FE = 35,\ FG = 10,$
$OA = 30,\ KG = 25.$