

Вычисление моментов инерции плоской фигуры

Фигура 1: четв. круга

$A = \pi R^2/4$, $I_y = I_x = 0.055R^4$, $I_{xy} = \pm 0.0166R^4$, $z_o = 4R/(3\pi) = 0.85$ м, радиус $R = 2$ м, площадь $A_1 = 3.14$ м²,

Моменты инерции $I_{x1} = 0.88$ м⁴, $I_{y1} = 0.88$ м⁴, $I_{xy1} = 0.27$ м⁴.
координаты центра тяжести $x_1 = 1.15$ м, $y_1 = 6.85$ м.

Фигура 2: прямоугольник, площадь $A_2 = b \cdot h = 7 \cdot 6 = 42$ м², $I_{xc2} = bh^3/12 = 7 \cdot 6^3/12 = 126$ м⁴, $I_{yc2} = hb^3/12 = 6 \cdot 7^3/12 = 171.5$ м⁴, $I_{xy2} = 0$, ($h = 6$ м, $b = 7$ м.), координаты центра тяжести $x_2 = 5.5$ м, $y_2 = 5$ м.

Фигура 3: прямоугольник, площадь $A_3 = b \cdot h = 2 \cdot 1 = 2$ м², $I_{xc3} = bh^3/12 = 2 \cdot 1^3/12 = 0.17$ м⁴, $I_{yc3} = hb^3/12 = 1 \cdot 2^3/12 = 0.67$ м⁴, $I_{xy3} = 0$, ($h = 1$ м, $b = 2$ м.), координаты центра тяжести $x_3 = 8$ м, $y_3 = 8.5$ м.

Фигура 4: треугольник $A = b \cdot h/2$, $I_x = hb^3/36$, $I_y = bh^3/36$, $I_{xy} = \pm b^2h^2/72$. ($h = 4$ м, $b = 2$ м.), площадь $A_4 = -4$ м²,

Моменты инерции $I_{x4} = -3.56$ м⁴, $I_{y4} = -0.89$ м⁴, $I_{xy4} = 0.89$ м⁴.
координаты центра тяжести $x_4 = 8.33$ м, $y_4 = 4.67$ м.

Фигура 5: треугольник $A = b \cdot h/2$, $I_x = bh^3/36$, $I_y = hb^3/36$, $I_{xy} = \pm b^2h^2/72$. ($h = 2$ м, $b = 5$ м.), площадь $A_5 = 5$ м²,

Моменты инерции $I_{x5} = 1.11$ м⁴, $I_{y5} = 6.94$ м⁴, $I_{xy5} = 1.39$ м⁴.
координаты центра тяжести $x_5 = 5.67$ м, $y_5 = 1.33$ м.

1. Площадь всей фигуры.

$$A = \sum_i A_i = 3.14 + 42 + 2 - 4 + 5 = 48.142 \text{ м}^2.$$

2. Координаты центра тяжести:

$$y_c = \frac{\sum_i A_i y_i}{A} = \frac{3.14 \cdot 6.85 + 42 \cdot 5 + 2 \cdot 8.5 - 4 \cdot 4.67 + 5 \cdot 1.33}{48.14} = 4.91 \text{ м},$$

$$x_c = \frac{\sum_i A_i x_i}{A} = \frac{3.14 \cdot 1.15 + 42 \cdot 5.5 + 2 \cdot 8 - 4 \cdot 8.33 + 5 \cdot 5.67}{48.14} = 5.1 \text{ м}.$$

Проверка

$$\sum (y_i - y_c) A_i = -1.936 \cdot 3.142 - 8.7 \cdot 10^{-2} \cdot 42 - 3.587 \cdot 2 - 0.246 \cdot 4 + 3.580 \cdot 5 = 0.$$

$$\sum (x_i - x_c) A_i = +3.951 \cdot 3.142 - 0.4 \cdot 42 - 2.9 \cdot 2 + 3.231 \cdot 4 - 0.565 \cdot 5 = 0.$$

3. Моменты инерции относительно центральных осей

$$I_{yc} = \sum_i (I_{yc_i} + (x_c - x_i)^2 A_i) = 0.88 + 3.14(1.15 - 5.1)^2 + 171.5 + 42(5.5 - 5.1)^2 + 0.67 + 2(8 - 5.1)^2 - 0.89 - 4(8.33 - 5.1)^2 + 6.94 + 5(5.67 - 5.1)^2 = 211.42 \text{ м}^4.$$

$$I_{xc} = \sum_i (I_{xc_i} + (y_c - y_i)^2 A_i) = 0.88 + 3.14(6.85 - 4.91)^2 + 126 + 42(5 - 4.91)^2 + 0.17 + 2(8.5 - 4.91)^2 - 3.56 - 4(4.67 - 4.91)^2 + 1.11 + 5(1.33 - 4.91)^2 = 226.25 \text{ м}^4.$$

$$I_{xyc} = \sum_i (I_{xy_i} + (x_c - x_i)(y_c - y_i) A_i) = 0.27 + 3.14(4.91 - 6.85)(5.1 - 1.15) + 42(4.91 - 5)(5.1 - 5.5) + 2(4.91 - 8.5)(5.1 - 8) + 0.89 - 4(4.91 - 4.67)(5.1 - 8.33) + 1.39 + 5(4.91 - 1.33)(5.1 - 5.67) = -6.16 \text{ м}^4.$$

4. Главные моменты инерции:

$$I_{max,min} = \frac{I_{yc} + I_{xc}}{2} \pm \sqrt{\frac{(I_{yc} - I_{xc})^2}{4} + I_{xyc}^2}.$$

$$I_{max} = \frac{211.42 + 226.25}{2} + \sqrt{\frac{(211.42 - 226.25)^2}{4} + (-6.16)^2} = 218.84 + 9.64 = 228.48 \text{ м}^4.$$

$$I_{min} = 218.84 - 9.64 = 209.2 \text{ м}^4.$$

5. Направление главных осей

$$\operatorname{tg} \alpha_{max} = \frac{I_{xy}}{I_{yc} - I_{max}} = \frac{-6.16}{211.42 - 228.48} = 0.36.$$

$$\alpha_{max} = 19.85^\circ.$$

6. Радиусы инерции

$$i_{max} = \sqrt{I_{max}/A} = \sqrt{228.478/48.142} = 2.179 \text{ м},$$

$$i_{min} = \sqrt{I_{min}/A} = \sqrt{209.2/48.142} = 2.085 \text{ м}.$$

7. Проверки:

$$I_{xc} \cos^2 \alpha + I_{yc} \sin^2 \alpha - I_{xyc} \sin 2\alpha = I_{max}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha = 0.94, \quad \sin \alpha = 0.34, \quad \sin 2\alpha = 0.64, \\ +226.253 \cdot 0.885 + 211.417 \cdot 0.115 + 6.16 \cdot 0.64 = 228.48. \end{aligned}$$

$$I_{xc} \sin^2 \alpha + I_{yc} \cos^2 \alpha + I_{xyc} \sin 2\alpha = I_{min}$$

$$+226.253 \cdot 0.115 + 211.417 \cdot 0.885 - 6.160 \cdot 0.639 = 209.2.$$

$$I_{xc} + I_{yc} = I_{min} + I_{max}$$

$$211.417 + 226.25 = 209.2 + 228.48 = 437.67.$$

Моменты инерции относительно заданных осей

$$I_y = \sum_i (I_{yc_i} + x_i^2 A_i) = 0.88 + 3.142 \cdot 1.151^2 + 171.5 + 42 \cdot 5.5^2 + 0.67 + 2 \cdot 8^2 - 0.89 - 4 \cdot 8.333^2 + 6.94 + 5 \cdot 5.667^2 = 1464.54 \text{ м}^4.$$

$$I_x = \sum_i (I_{xc_i} + y_i^2 A_i) = 0.88 + 3.142 \cdot 6.849^2 + 126 + 42 \cdot 5^2 + 0.17 + 2 \cdot 8.5^2 - 3.56 - 4 \cdot 4.667^2 + 1.11 + 5 \cdot 1.333^2 = 1388.24 \text{ м}^4.$$

$$I_{xy} = \sum_i (I_{xyc_i} + x_i y_i A_i) = +0.27 + 3.14 \cdot 6.849 \cdot 1.1510 + 42 \cdot 5 \cdot 5.50 + 2 \cdot 8.5 \cdot 8 + 0.89 - 4 \cdot 4.667 \cdot 8.333 + 1.39 + 5 \cdot 1.333 \cdot 5.667 = 1200.54 \text{ м}^4.$$

Моменты инерции относительно центральных осей

$$I_{yc} = I_y - x_c^2 A = 1464.543 - 5.1^2 48.142 = 211.417;$$

$$I_{xc} = I_x - y_c^2 A = 1388.241 - 4.91^2 48.142 = 226.253;$$

$$I_{xyc} = I_{xy} - y_c x_c A_i = 1200.536 - 4.91 \cdot 5.1 \cdot 48.142 = 1200.536 - 1206.7 = -6.160.$$

