Московский Энергетический Институт
(Технический Университет)
Кафедра Математического Моделирования

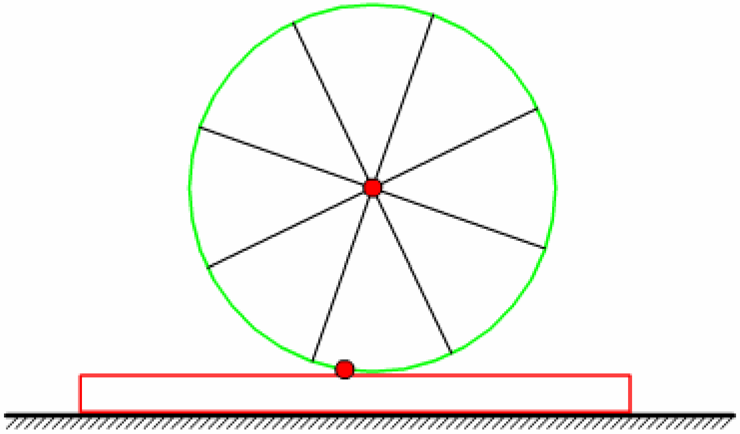
Выпускная работа специалиста на тему: Анализ динамики вырождающейся механической системы с двумя степенями свободы.

студентка: Фёдорова М .И.

научный руководитель: Кирсанов М.Н.

В работе рассмотрена задача

о качении цилиндра радиуса *r* по бруску. Брусок скользит по гладкой горизонтальной поверхности. Качение происходит без проскальзывания. Масса бруска равна m1, масса точки, расположенной на ободе цилиндра, равна m2, цилиндра — m3. К цилиндру приложен момент *M*.



Решена задача кинематики. За обобщенные координаты принимаем смещение бруска **x** и угол поворота цилиндра φ

Находим кинетическую энергию системы:

$$T = (m_1\dot{x}^2 + m_2(v^2{}_{\mathrm{Cx}} + \mathrm{v}^2{}_{\mathrm{Cy}}) + m_3 v^2{}_{\mathrm{Bx}} + J\dot{\varphi}^2)/2$$

где $J = m_3 r^2/2$ - момент инерции однородного цилиндра.

Потенциальная энергия равна $\Pi = M\varphi + m_2 \mathrm{gr}\sin\varphi$

Находим функцию Лагранжа:

$$L = T - \Pi = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\left\{\dot{x}^2 - 2\dot{x}^2 r\varphi(1+\sin\varphi) + 2r^2\dot{\varphi}^2(1+\sin\varphi)\right\} +$$

$$\frac{m_3}{2}\left\{\dot{x}^2 - 2\dot{x}^2 r\varphi + \frac{3}{2}r^2\dot{\varphi}^2\right\} - M\varphi - m_2 gr\sin\varphi$$

Находим функцию Рауса:

$$R=p_x\dot{x}-L=(-r^2(3m_1m_3+3m_2m_3+m_3{}^2+2\cos^2\varphi m_2{}^2+$$
$$4m_1m_2(\sin\varphi+1))\dot{\varphi}^2/4+rp_x(m_2(\sin\varphi+1)+m_3)\dot{\varphi}+p_x{}^2/2)/(m_1+m_2+m_3)+$$
$$M\varphi+m_2gr\sin\varphi.$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial R}{\partial\varphi}=0,$$

или

$$r^2m_2\cos\varphi\dot{\varphi}^2(m_2\sin\varphi-m_1)-r^2\ddot{\varphi}(m_2{}^2\cos^2\varphi+3/2m_1m_3+$$
$$+2m_1m_2(1+\sin\varphi)+m_3{}^2/2+3/2m_2m_3)-m_1m_2gr\cos\varphi+$$
$$+m_2{}^2gr\cos\varphi+m_2m_3gr\cos\varphi+M(m_1+m_2+m_3)=0.$$

При этом циклическая координата

$$x(t)=\int\frac{\partial R}{\partial p_x}dt=\frac{-m_2\cos\varphi+\varphi m_2+\varphi m_3}{m_1+m_2+m_3}+\frac{p_xt}{m_1+m_2+m_3}+C.$$

Заметим, что уравнения Лагранжа 2-го рода дают связанную систему уравнений:

$$m_2\{-\ddot{x}r(1+\sin\varphi)+2r^2\ddot{\varphi}(1+\sin\varphi)+r^2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\}+m_3(1.5r^2\ddot{\varphi}-\ddot{x}r)+M+m_2gr\cos\varphi=0,$$

$$m_1\ddot{x}+m_2(\ddot{x}-r\ddot{\varphi}-r\dot{\varphi}^2\cos\varphi-r\ddot{\varphi}\sin\varphi)+m_3(\ddot{x}-r\ddot{\varphi})=0.$$

В работе были предложены два способа нахождения решения:

- Аналитический (в рядах, с использованием системы Maple)
- Сведение в линейному уравнению при малых колебаниях системы

Решение аналитическим способом дает следующее решение при начальном угле $\varphi = -\pi / 2$:

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} - \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_3(3m_1 + 3m_2 + m_3)} t^2 + O(t^3)$$

$$x(t) = \int \frac{\partial R}{\partial p_x} dt = \frac{-m_2 \cos\varphi + \varphi m_2 + \varphi m_3}{m_1 + m_2 + m_3} + C,$$

Аналитическое решение дает объяснение интересной особенности поведения системы. С уменьшением массы , решение ведет себя трудно предсказуемым образом. Наблюдается необъяснимый на первый взгляд скачкообразный рост угла. Это вызвано тем, что масса m3 содержится в знаменателе.

При изучении малых колебаний цилиндра:

- Для системы Лагранжа и функции Рауса производим замену переменной $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$
- Упрощаем и линиаризуем уравнения
- Получаем линейное уравнение второго порядка $\psi^2 + k^2\psi = 0, где \quad k^2 = \frac{2gm_2(m_1 + m_2 + m_3)}{rm_3(3m_1 + 3m_2 + m_3)}$
- Здесь к-частота собственных колебаний системы.
- Нижняя оценка частоты собственных колебаний системы $k = \sqrt{\frac{2gm_2(m_2 + m_3)}{rm_3(3m_2 + m_3)}}$
- Верхняя оценка: $k = \sqrt{\frac{2gm_2}{3rm_3}}$
- Период колебания $T = \frac{2\pi}{k}$

Приведем график зависимости частоты колебания системы от массы бруска при различных значениях массы точки на ободе цилиндра.

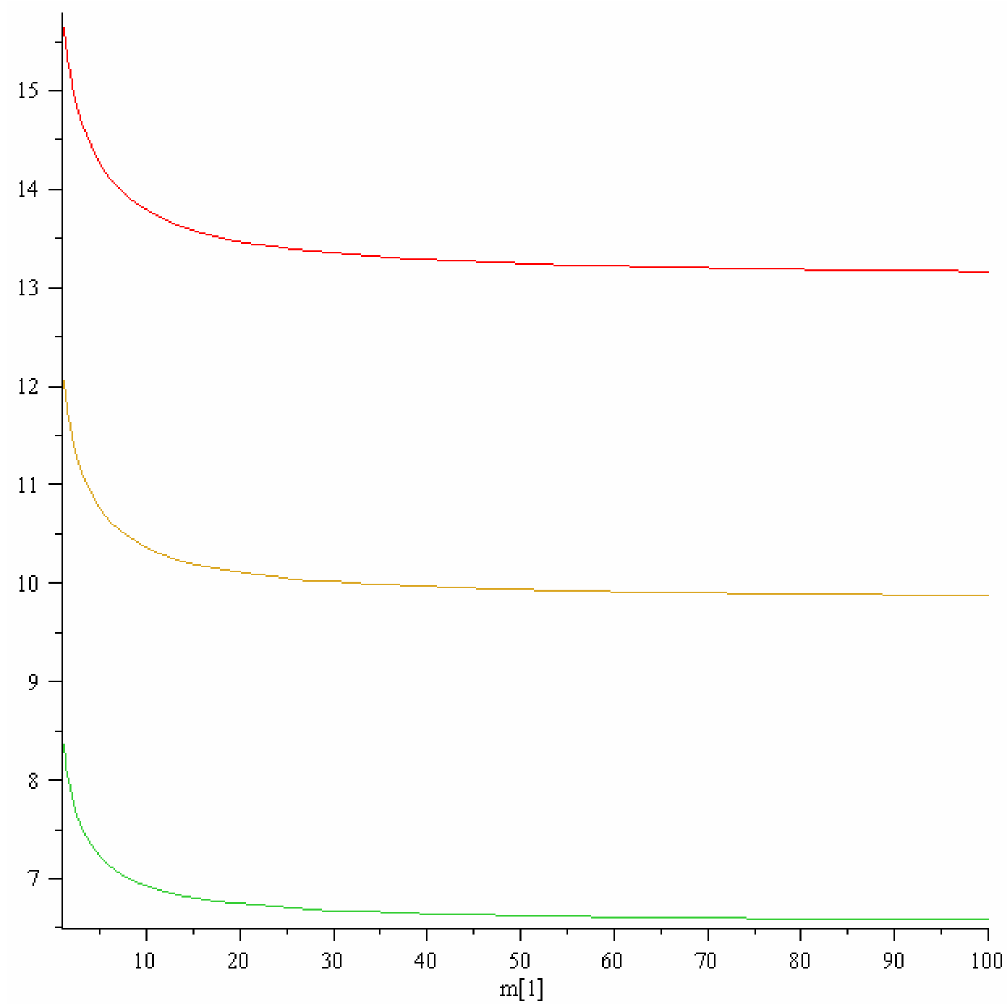


График показывает как зависит частота собственных колебаний системы от массы цилиндра при различной массе бруска.

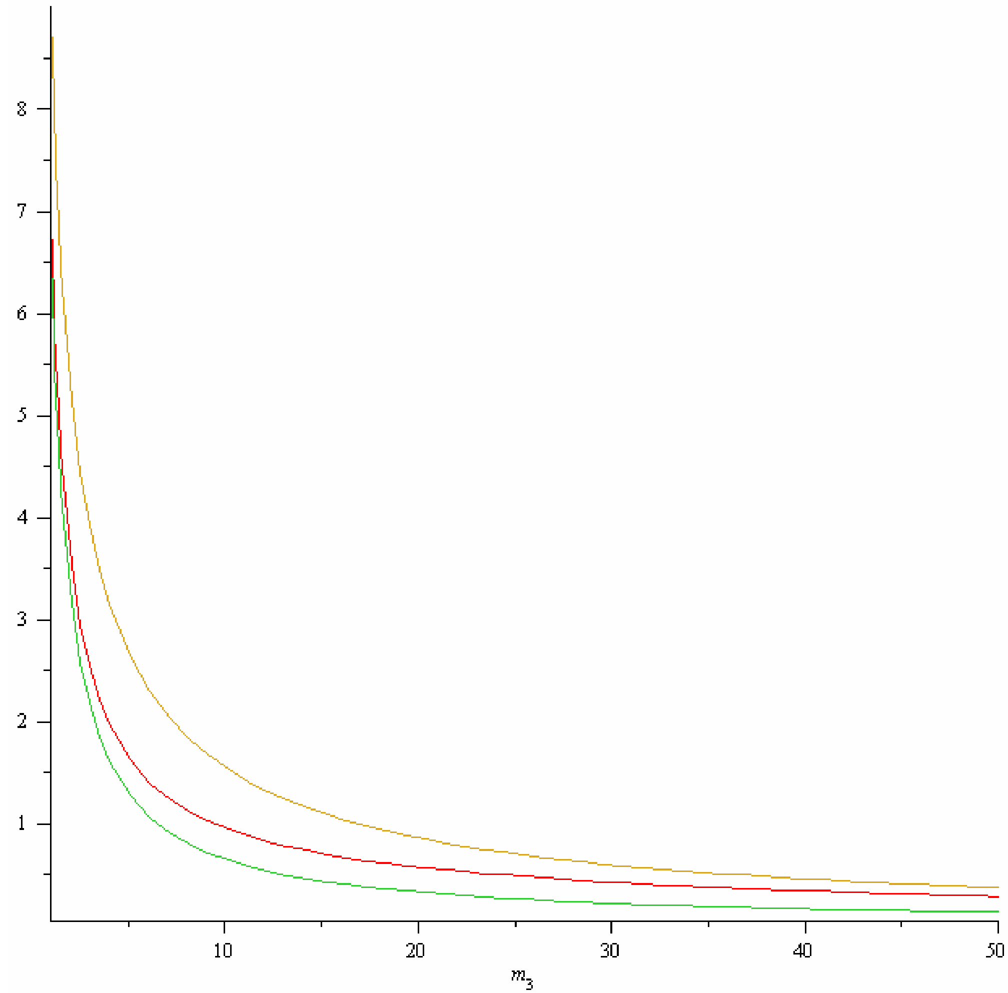
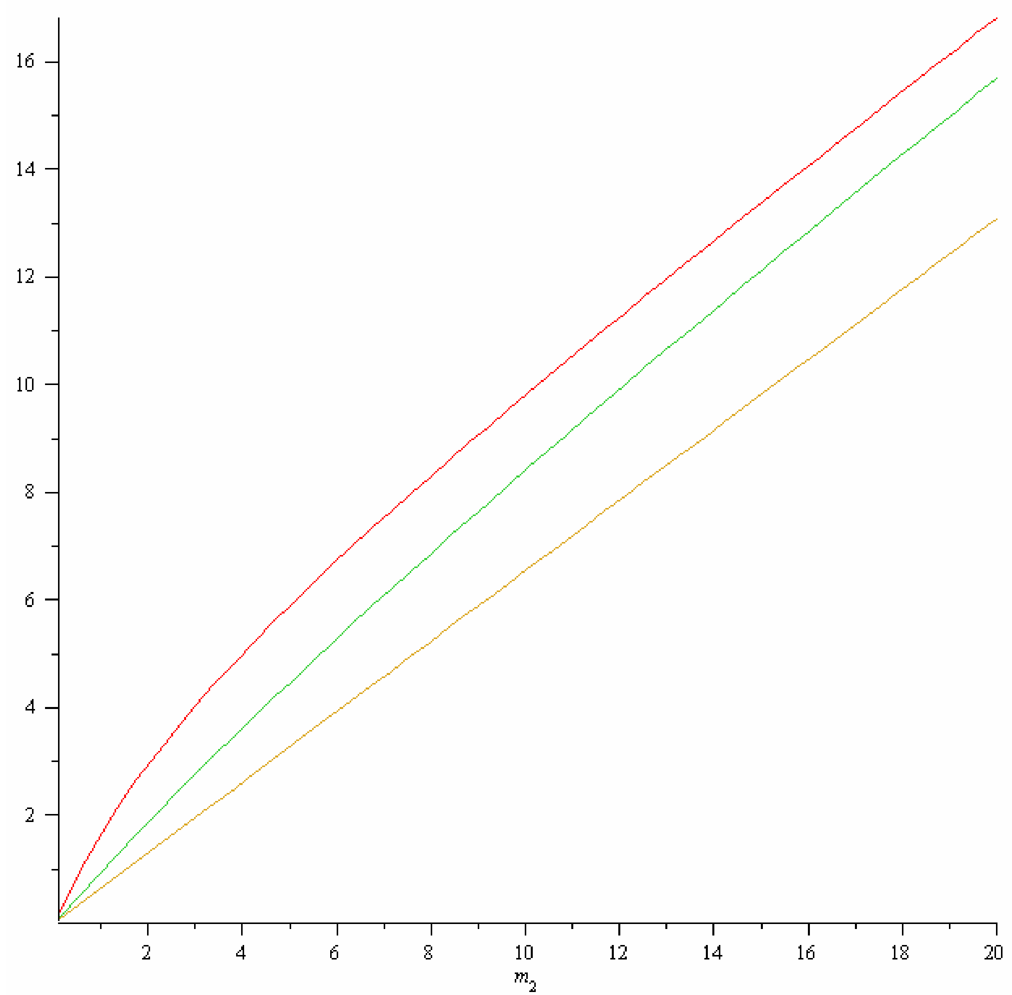


График зависимости частоты колебания системы от массы точки на ободе при разных значениях массы бруска.



Достигнуты следующие результаты:

- Выведены уравнения для механической системы с двумя степенями свободы;
- Получены уравнения Рауса и Лагранжа;
- Найдено аналитическое решение уравнений;
- Изучены малые собственные колебания системы около положения $\varphi = \frac{\pi}{2}$;
- Найдены нижняя и верхняя оценки частоты собственных колебаний системы;
- Построена математическая модель визуализации на языке Action srcipt.