

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОТЧЕТ

По магистерской диссертации: «Параметрический анализ движений  
диска-гиростата, несущего маховик, на шероховатой плоскости»

Студент-дипломник

Борисов Д.Б.

Научный руководитель  
к.т.н, доцент

Капустина О.М.

Москва 2013

## Постановка задачи

В данной работе рассматривается катящийся без проскальзывания по абсолютно шероховатой неподвижной горизонтальной плоскости гиригостат в виде тяжёлого диска, несущего маховик, вращающийся вокруг своей оси динамической симметрии, проходящей через центр масс диска. Под диском понимается динамически симметричное твёрдое тело, имеющее острый край в форме окружности с центром, совпадающим с центром масс диска. Оси динамической симметрии маховика и диска совпадают и перпендикулярны плоскости острого края.

**Цель работы:** провести анализ движения гиригостата с учётом трёх параметров задачи: кинетического момента, отношения масс диска и маховика, отношения моментов инерций диска и маховика.

### Методы проведения исследования:

- записать систему уравнений динамики гиригостата;
- представить её в виде гипергеометрического уравнения Гаусса и найти его решение, после чего привести систему к одностепенной;
- построить поверхности стационарных движений в пространстве первых интегралов задачи при различных значениях интеграла кинетического момента маховика;
- построить карты сечений этих поверхностей;
- построить бифуркационные кривые, характеризующие множество стационарных движений и их устойчивость;
- построить фазовые портреты на плоскости угла нутации и угловой скорости нутации;
- проиллюстрировать результаты исследования анимациями соответствующих движений.

### Промежуточные результаты:

Введены углы Эйлера и записаны уравнения динамики гиригостата:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [a_1 \dot{\psi} \sin^2 \theta + a_3 \cos \theta (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) + H \cos \theta] = -m\rho^2 \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta \\ a_2 \ddot{\theta} - a_1 \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + a_3 \dot{\psi} \sin \theta (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) + H \dot{\psi} \sin \theta = -mg\rho \cos \theta \\ \frac{d}{dt} [a_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) + H] = m\rho^2 \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta \end{cases}$$

Построены гипергеометрическое уравнение Гаусса

$$x(1-x) \frac{d^2 r}{dx^2} + (1-2x) \frac{dr}{dx} - \frac{m\rho^2 I_z}{a_1 a_3} r = \frac{m\rho^2 H}{a_1 a_3}$$

и его решение

$$r = C_1 F(\alpha, \beta, 1, x) + C_2 F(\alpha, \beta, 1, 1-x) - \frac{H}{I_3}$$

Приведена явная форма эффективного потенциала гиригостата:

$$W(\theta, C_1, C_2, H) = \frac{1}{2} a_3 \left[ C_1 F_s(\theta) + C_2 F_c(\theta) - \frac{H}{I_z} \right]^2 + \frac{I_3^2}{8a_1} \sin^2 \theta [C_1 F_{ds}(\theta) - C_2 F_{dc}(\theta)]^2 + mg\rho \sin \theta + \frac{H^2}{2I_z}$$

Исходная система приведена к одностепенной:

$$\ddot{\theta} = - \frac{\partial W(\theta, C_1, C_2, H)}{\partial \theta}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$a_1 = I_x + J_x,$$

$$a_2 = a_1 + m\rho^2,$$

$$a_3 = I_z + m\rho^2,$$

$I_x, I_z$  - моменты инерции диска;

$J_x$  - момент инерции маховика;

$m$  - масса гиростата;

$\rho$  - радиус диска;

$\psi, \theta, \varphi$  - углы Эйлера;

$H$  - интеграл кинетического момента маховика;

$g$  - ускорение свободного падения;

$x = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$  - замена переменной;

$r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}$  - замена переменной;

$C_1, C_2$  - произвольные постоянные;

$F(\alpha, \beta, 1, x)$  - гипергеометрический ряд Гаусса;

$\alpha, \beta$  - корни характеристического уравнения гипергеометрического уравнения Гаусса;

$$Fs(\theta) = F(\alpha, \beta, 1, \sin^2 \theta);$$

$$Fds(\theta) = F\left(\alpha + 1, \beta + 1, 2, \sin^2 \frac{\theta}{2}\right);$$

$$Fc(\theta) = F(\alpha, \beta, 1, \cos^2 \theta);$$

$$Fdc(\theta) = F\left(\alpha + 1, \beta + 1, 2, \cos^2 \frac{\theta}{2}\right).$$

#### Текущие задачи:

- оценить отношение масс диска и маховика на примерах существующих гиростатов.
- ввести два параметра, характеризующие отношение масс диска и маховика и отношение моментов инерции диска и маховика.
- привести эффективный потенциал гиростата к безразмерному виду.
- построить поверхность Пуанкаре-Четаева в пространстве переменных  $C_1, C_2, H$ .

## Библиографический обзор

- 1 **Андронов, А. А., Витт, А. А., Хайкин, С. Э.** Теория колебаний – М.:Наука, 1959. – 916 с.
- 2 **Дувакин, А. П.** Об устойчивости движений диска – М. :Инженерный журнал, том V, вып. 1, 1965.
- 3 **Капустина, О. М., Мартыненко, Ю. Г.** Анализ движения диска, несущего маховик, по неподвижной горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости
- 4 **Колесников, С. Н.** О качении диска по горизонтальной плоскости – М. :Вестник Московского Университета, сер. 1, №2, 1985.
- 5 **Маркеев, А. П.** Динамика тела, соприкасающегося с твёрдой поверхностью – М.:Наука, 1992. – 336 с.
- 6 **Маркеев, А. П., Мощук Н. К.** Качественный анализ движения тяжёлого твёрдого тела на гладкой горизонтальной плоскости – М. : Прикладная математика и механика, том 47, вып. 1, 1983.
- 7 **Мартыненко, Ю. Г.** Устойчивость неуправляемых движений одноколёсного мобильного робота с маховичной системой стабилизации – Улан-Удэ. : Проблемы механики современных машин. Материалы международной конференции. Т. 1, 2000.
- 8 **Мощук Н. К.** Качественный анализ движения тяжёлого тела вращения на абсолютно шероховатой плоскости – М. : Прикладная математика и механика, том 52, вып. 2, 1988.
- 9 **Рубановский, В. Н., Самсонов, В. А.** Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах – М. : Наука, 1988. – 304 с.
- 10 **Самсонов, В. А.** Ветвление и некоторые свойства нелинейных механических систем – М. : Нелинейная механика, 2001.
- 11 **Фёдоров, Ю. Н.** О качении диска по абсолютно шероховатой плоскости – М. : Механика твёрдого тела, №4, 1987.
- 12 **Eric S. Lew, Bayram Orazov, Oliver M. O'Reilly.** The dynamics of Charles Taylor's remarkable one-wheeled vehicle – Regular and chaotic dynamics, 2007.
- 13 **Oliver M. O'Reilly.** The dynamics of rolling disks and sliding disks – Nonlinear dynamics, 10, 1996.

## **Сравнение состояния современной науки с предполагаемыми целями магистерской диссертации.**

Интерес к классической задаче о качении тела, несущего маховик, связан с ведущейся в мире активной разработкой колёсных роботов. В, частности, устойчивые стационарные неуправляемые движения таких систем могут быть приняты за программные при построении алгоритмов управления. В различных работах исследовались вопросы интегрируемости задачи, существования и устойчивости стационарных движений. Качественный анализ движения тела с маховиком затруднён в общем случае неизвестным или сложным видом интегралов, большим числом параметров задачи. Здесь рассматривается катящийся без проскальзывания по абсолютно шероховатой неподвижной горизонтальной плоскости гиростат в виде тяжёлого диска, несущего маховик, вращающийся вокруг своей оси динамической симметрии, проходящей через центр масс диска. Постановка задачи предполагает анализ движения гиростата с учётом трёх параметров. Это новая, никем до этого не исследованная, задача.