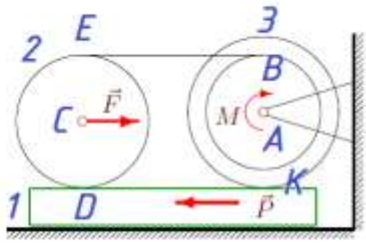
**Задача D-13.12.** *Апсуваева Фатимат*




Цилиндр катится без проскальзывания по бруску, скользящему по гладкой горизонтальной поверхности. Цилиндр и блок с неподвижной осью с внешним радиусом 4 см и внутренним 2 см связаны нитью. Радиус инерции блока 3 см. Масса блока равна 1 кг, бруска — 1 кг. К цилиндру приложен момент $M = 9$ Нсм, к оси блока — сила $F = 9$ Н, к бруску — сила $P = 150$ Н. Найти ускорение бруска.

**Решение:**

$q = x$ - обобщенная координата 1-го тела (бруска)

Выражение для кинетической энергии имеет вид:

$T = T_1^{пост} + T_3^{вр}$, где (1)

$T_1^{пост} = \frac{m_1}{2} \cdot V_D^2$ - поступательное движение бруска **1** (2)

$T_3^{вр} = \frac{J_3}{2} \cdot \omega_{2z}^2 = \frac{m_3 \cdot \rho_3^2}{2} \cdot \omega_{3z}^2$ вращательное движение цилиндра **3** (3)

Таким образом $T = \frac{m_1}{2} \cdot V_D^2 + \frac{m_3 \cdot \rho_3^2}{2} \cdot \omega_{3z}^2$ (4)

**Граф** $A \xrightarrow[3\pi/2]{R_3} K$

$$V_{Kx} = V_{Ax} - \omega_{3z} \cdot R_3 \cdot \sin\frac{3\pi}{2} \quad (5)$$

$$V_{Ky} = V_{Ay} + \omega_{3z} \cdot R_3 \cdot \cos\frac{3\pi}{2} \quad (6)$$

После преобразований уравнения (5) и (6) принимают вид

$$\dot{x} = \omega_{3z} \cdot R_3 \Rightarrow \omega_{3z} = \frac{\dot{x}}{R_3} \quad (7)$$

$$V_{Ky} = 0 \quad (8)$$

**Граф** $D \xrightarrow[\pi/2]{R_3+r_3} E \xrightarrow[0]{Нить} B \xrightarrow[3\pi/2]{R_3+r_3} K$

$$V_{Kx} = V_{Dx} - \omega_{2z} \cdot \left(R_3 + r_3\right) \cdot \sin\frac{\pi}{2} - \omega_{Нитьz} \cdot L \cdot \sin 0 - \omega_{3z} \cdot \left(R_3 + r_3\right) \cdot \sin\frac{3\pi}{2} \qquad (9)$$

$$V_{Ky} = V_{Dy} + \omega_{2z} \cdot \left(R_3 + r_3\right) \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \omega_{Нитьz} \cdot L \cdot \cos 0 + \omega_{3z} \cdot \left(R_3 + r_3\right) \cdot \cos\frac{3\pi}{2} \qquad (10)$$

После преобразований уравнения (9) и (10) принимают вид

$$\dot{x} = \dot{x} - \omega_{2z} \cdot \left(R_3 + r_3\right) + \omega_{3z} \cdot \left(R_3 + r_3\right) \qquad (11)$$

Следовательно: $\omega_{2z} = \omega_{3z} = \dfrac{\dot{x}}{R_3}$

**Граф** $D \xrightarrow[\pi/2]{R_2} C$

$$V_{Cx} = V_{Dx} - \omega_{2z} \cdot R_2 \cdot \sin\frac{\pi}{2} \qquad (12)$$

$$V_{Cy} = V_{Dy} + \omega_{2z} \cdot R_2 \cdot \cos\frac{\pi}{2} \qquad (13)$$

После преобразований уравнения (5) и (6) принимают вид

$$V_{Cx} = \dot{x} - \omega_{2z} \cdot R_2 = \dot{x} - \frac{\dot{x}_1}{R_3} \cdot R_2 = \dot{x} - \frac{\dot{x}}{R_3} \cdot \frac{R_3 + r_3}{2} = \dot{x} \cdot \frac{R_3 - r_3}{2 \cdot R_3} \qquad (14)$$

$$V_{Cy} = 0 \qquad (15)$$

Подставляем выражения в выражение для кинетической энергии (4)

$$T = \frac{m_1}{2} \cdot V_D^2 + \frac{m_3 \cdot \rho_3^2}{2} \cdot \omega_{3z}^2 \qquad (16)$$

Приводим подобные слагаемые $T = \dfrac{1}{2}\left( m_3 \cdot \left(\dfrac{\rho_3}{R_3}\right)^2 + m_1 \right) \cdot \dot{x}^2$

С целью упрощения вычислений, введем обозначения:

$$A = m_3 \cdot \left(\frac{\rho_3}{R_3}\right)^2 + m_1 = 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \frac{25}{16} \cdot кг \cdot м^2$$

Тогда $T=\frac{1}{2}\cdot A\cdot\dot{x}^2$ (17)

Запищем выражение для мощности:

$$N=Q\cdot\dot{x}^{\mathbf{B}} \qquad N=\left(\vec{F},\vec{V}_C\right)+\left(\vec{M},\vec{\omega}_{3z}\right)+\left(\vec{P},\dot{x}^{\mathbf{B}}\right). \quad (18)$$

$$\vec{F}=\begin{pmatrix}F & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \vec{P}=\begin{pmatrix}-P & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \vec{M}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -M\end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_C=\begin{pmatrix}V_{Cx} & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \vec{V}_D=\begin{pmatrix}\dot{x}^{\mathbf{B}} & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \vec{\omega}_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & \omega_{3z}\end{pmatrix}$$

Следовательно: $N=-M\cdot\omega_{3z}+F\cdot V_{Cx}-P\cdot\dot{x}^{\mathbf{B}}$ (19)

С учетом полученных ранее выражений, получаем

$$Q=\frac{N}{\dot{x}^{\mathbf{B}}}=\frac{1}{\dot{x}^{\mathbf{B}}}\left(-M\cdot\frac{\dot{x}^{\mathbf{B}}}{R_3}+F\cdot\dot{x}^{\mathbf{B}}\cdot\frac{R_3-r_3}{2\cdot R_3}-P\cdot\dot{x}^{\mathbf{B}}\right) \quad (20)$$

Поэтому обобщенная сила равна

$$Q=-\frac{M}{R_3}+F\cdot\frac{R_3-r_3}{2\cdot R_3}-P \quad (21)$$

Подставляе в (21) исходные данные.

$$Q=-\frac{9}{4}+9\cdot\frac{4-2}{2\cdot 4}-150=150H \quad (22)$$

Запишем дифференциальное уравнение Лагранжа II-го рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q \quad (23)$$

Дифференцируем выражение (17) по обобщенной координате

$$\frac{\partial T}{\partial q}=0$$

Дифференцируем выражение (17) по обобщенной скорости

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}=A\cdot\dot{x}$$

Дифференцируем полученное выражение по времени

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = A \cdot \ddot{x}$$

Учитывая выражение (23), окончательно получаем

$$A \cdot \ddot{x} = -\frac{M}{R_3} + F \cdot \frac{R_3 - r_3}{2 \cdot R_3} - P \tag{24}$$

Находим угловое ускорение

$$\ddot{x} = \frac{1}{A} \cdot \left(-\frac{M}{R_3} + F \cdot \frac{R_3 - r_3}{2 \cdot R_3} - P\right) \tag{25}$$

Подставляем численные значение в (25)

$$\ddot{x} = -\frac{25}{32} \cdot 150 = -96\,\frac{м}{c^2}$$

**Ответ:** Ускорение бруска равно $-96\,\frac{м}{c^2}$