НИУ МЭИ

Кафедра РМДиПМ

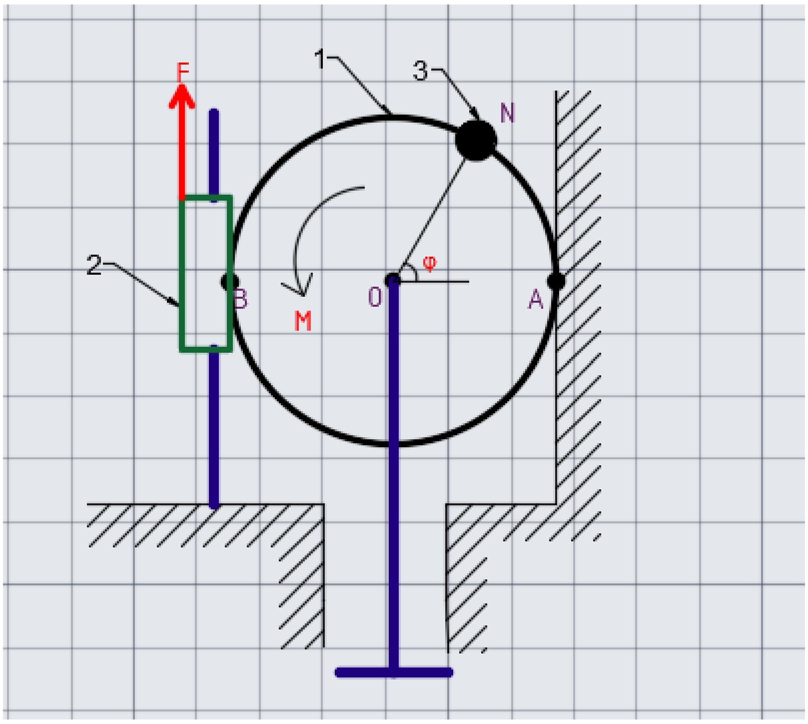
Задание №9. «Уравнение Лагранжа. Вычисление ускорения»

Студент: Рахматулина А.Р.

Преподаватель: Кирсанов М.Н.

Москва, 2016.

Задача: диск радиусом *R*=1, шарнирно закреплённый на конце штока, катится по неподвижной поверхности муфты, скользящей по направляющей, параллельной поверхности и штоку. На ободе диска находится точка массой 10 кг. К диску приложен момент *M*=42 Нм, к муфте – сила *F*=2Н. Масса муфты 1 кг. Механизм расположен в горизонтальной плоскости. Найти угловое ускорение диска при sinφ=0.6, ω=1 с$^{-1}$.



Решение:

1) Для решения задачи составим уравнение Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q$$

За обобщенную координату примем угол поворота диска:

$$q=\varphi$$
$$\dot{q}=\dot{\varphi}=\omega$$

2) Кинетическая энергия плоского движения диска (тело 1) будет равна нулю, т.к. диск невесомый.

Кинетическая энергия поступательного движения муфты (тела 2) равна: $T_2^{постун}=\frac{m_2 v_B^{\ 2}}{2}$

Кинетическая энергия точки, движущейся по некоторой траектории равна (тело 3): $\frac{m_3 v_N^{\ 2}}{2}$.

Кинетическая энергия всей системы равна: $T = T_2^{поступ} + T_3^{траект.} = \frac{m_2 v_B^{\ 2}}{2} + \frac{m_3 v_N^{\ 2}}{2}$

3) Для нахождения скоростей в точках N и B составим графы:

$$A \xrightarrow{R;\Pi} O \xrightarrow{R;\varphi} N$$
$$v_{NX} = v_{AX} - R\omega \sin \Pi - R\omega \sin \varphi = -R\omega \sin \varphi$$
$$v_{NY} = v_{AY} + R\omega \cos \Pi + R\omega \cos \varphi = R\omega(\cos \varphi - 1)$$
$$v_N^{\ 2} = R^2 \omega^2 (\sin \varphi^2 + \cos \varphi^2 - 2\cos \varphi + 1) = 2R^2 \omega^2 (1 - \cos \varphi)$$

$$A \xrightarrow{2R;\Pi} B$$
$$v_{BX} = v_{AX} - 2R\omega \sin \Pi = 0$$
$$v_{BY} = v_{AY} + 2R\omega \cos \Pi = -2R\omega$$
$$v_B^{\ 2} = 4R^2 \omega^2$$

4) Подставим получившиеся значения в выражение T всей системы:

$$T = T_2^{поступ} + T_3^{траект.} = \frac{m_2 v_B^{\ 2}}{2} + \frac{m_3 v_N^{\ 2}}{2} = \frac{4m_2 R^2 \omega^2}{2} + \frac{2m_3 R^2 \omega^2 (1 - \cos \varphi)}{2} = \frac{\omega^2}{2}\left(4m_2 R^2 + 2m_3 R^2 - 2m_3 R^2 \cos \varphi\right)$$

Введём обозначения для постоянных величин:

$$A = 4m_2 R^2 + 2m_3 R^2 = 24,$$
$$B = -2m_3 R^2 = -20.$$

Подставим величины в исходное уравнение: $T = \frac{\omega^2}{2}(A - B\cos \varphi)$

5) Определим обобщенную силу системы:

$$Q = \frac{F v_{BY} + M\omega}{\omega} = -2F \cdot R + M = -2 \cdot 2 \cdot 1 + 42 = 38$$

Запишем дифференциальное уравнение Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q$$

Дифференцируем уравнение кинетической энергии по обобщенной координате

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\varphi\left(\frac{\omega^2}{2}\left(A - B\cos \varphi\right)\right)}{\partial \varphi} = \frac{\omega^2}{2} B \sin \varphi$$

Дифференцируем уравнение кинетической энергии по обобщенной угловой скорости

$$\frac{\partial T}{\partial \omega}=\frac{\partial\left(\frac{\omega^2}{2}\left(A-B\cos\varphi\right)\right)}{\partial \omega}=\omega\left(A-B\cos\varphi\right)$$

Дифференцируем полученное выражение по времени

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega}\right)=\frac{d\omega}{dt}(\mathrm{A}-\mathrm{B}\cos\varphi)+\frac{\omega d(\mathrm{A}-\mathrm{B}\cos\varphi)}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}=\varepsilon(\mathrm{A}-B\cos\varphi)+\omega^2 B\sin\varphi$$

Получаем окончательное выражение: $\varepsilon(\mathrm{A}-B\cos\varphi)+\omega^2 B\sin\varphi-\frac{\omega^2}{2}B\sin\varphi=Q$.

Находим угловое ускорение диска: $\varepsilon=\dfrac{Q-\frac{\omega^2}{2}B\sin\varphi}{(\mathrm{A}-B\cos\varphi)}=\dfrac{38-\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 0{,}6}{24-20\cdot 0{,}8}=4$ с$^{-1}$