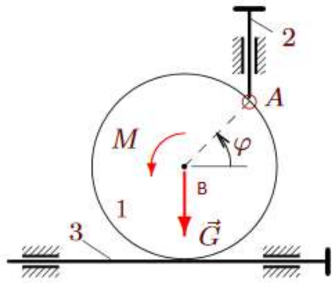
Задача D-13.4. *Смирнова Анастасия*

Однородный диск 1 массой 4 кг радиуса $R = 0.6$ м шарнирно соединен в точке A с движущимся штоком 2 массой 4 кг. Диск катится по невесомому подвижному штоку 3. Направляющие штоков взаимно перпендикулярны. К оси диска приложена сила $G = 4$ Н и момент M =43.2 Нм. Механизм расположен в горизонтальной плоскости. Найти угловое ускорение диска при $\sin\varphi = 0.8$.



Решение:

Для решения задачи составим уравнение Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q$$

За обобщенную координату примем угол поворота диска

$$q = \varphi$$
$$\dot{q} = \dot{\varphi} = \omega$$

Кинетическая энергия плоского движения диска

$$T_1^{плоск.} = \frac{m_1 v_B^{\ 2}}{2} + \frac{m_1 R^2 \dot{\varphi}^2}{4}$$

Кинетическая энергия поступательного движения штока

$$T_2^{\text{пост.}} = \frac{m_2 v_A^{\ 2}}{2}$$

Кинетическая энергия всей системы равна

$$T = T_1^{плоск.} + T_2^{\text{пост.}} = \frac{m_1 v_B^{\ 2}}{2} + \frac{m_1 R^2 \dot{\varphi}^2}{4} + \frac{m_2 v_A^{\ 2}}{2}$$

Рассмотрим граф $B \xrightarrow{R,\varphi} A$

$$v_{Ax} = v_{Bx} - \dot{\varphi} R \sin\varphi$$
$$v_{Ay} = v_{By} + \dot{\varphi} R \cos\varphi$$

После преобразований получаем

$$v_{Bx} = \dot{\varphi} R \sin\varphi$$
$$v_{Ay} = \dot{\varphi} R \cos\varphi$$

Подставляем получившиеся выражения в выражение кинетической энергии

$$T = \frac{m_1 \dot{\varphi}^2 R^2 \sin^2\varphi}{2} + \frac{m_1 \dot{\varphi}^2 R^2}{4} + \frac{m_2 \dot{\varphi}^2 R^2 \cos^2\varphi}{2}$$

Выносим за скобки обобщенную скорость

$$T = \frac{\dot{\varphi}}{2}\left(m_1 R^2 \sin^2\varphi + \frac{m_1 R^2}{2} + m_2 R^2 \cos^2\varphi \right)$$

Введем обозначения для постоянных величин

$$A = m_1 R^2 \sin^2\varphi + \frac{m_1 R^2}{2} + m_2 R^2 \cos^2\varphi = 4 \cdot 0,6^2 \cdot 0,8^2 + \frac{4 \cdot 0,6^2}{2} + 4 \cdot 0,6^2 \cdot 0,6^2 = 2,16$$

Отсюда получаем упрощенное выражение для кинетической энергии

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} A$$

Определим обобщенную силу системы

$$Q = \frac{M\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = M = 43,2$$

Запишем дифференциальное уравнение Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q$$

Дифференцируем уравнение кинетической энергии по обобщенной координате

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} A \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} = 0$$

Дифференцируем уравнение кинетической энергии по обобщенной угловой скорости

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = A\dot{\varphi}$$

Дифференцируем полученное выражение по времени

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = A\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = A\varepsilon$$

Получаем окончательное выражение

$$A\varepsilon = Q$$

Находим угловое ускорение диска

$$\varepsilon = \frac{Q}{A} = \frac{43,2}{2,16} = 20c^{-1}$$