Окладников Г.А. Теоретическая механика. Пробный экзамен 06.05.2020.

Билет №18. Теоретические вопросы.

НИУ "МЭИ"

Кафедра РМДПМ **Билет** 18 6.5.20 10.00

**Вопрос 1.** Колебания механических систем с двумя степенями свободы. Коэффициент формы.

**Вопрос 2.** Уравнение трех угловых скоростей.

Вопрос 1.

Ответ: Малые колебания.

Для малых колебаний

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2)$$

$$\Pi = \Pi_0 + \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2)$$

$a_{ij}$, $c_{ij}$ — инерционные и квазиупругие коэффициенты.

Используем уравнения Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}.$$

Получим

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0,$$

$$a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = 0.$$

Решение ищем в виде

$$q_1 = A\sin(kt+\alpha),\ \ q_2 = B\sin(kt+\alpha),$$

получим

$$(c_{11} - a_{11}k^2)A + (c_{12} - a_{12}k^2)B = 0,$$

$$(c_{12} - a_{12}k^2)A + (c_{22} - a_{22}k^2)B = 0.$$

Нетривиальное решение для $A$ и $B$ однородной системы возможно, если коэффициенты системы пропорциональны (определитель равен 0):

$$-\frac{c_{11} - a_{11}k^2}{c_{12} - a_{12}k^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k^2}{c_{22} - a_{22}k^2} = \frac{B}{A}$$

Обозначим $B/A = n$ – коэффициент формы.

Отсюда получаем уравнение частот

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) = (c_{12} - a_{12}k^2)^2$$

В результате получим две совокупности решений

$$q_1^{(1)} = A_1\sin(k_1t+\alpha_1),\ \ q_2^{(1)} = n_1A_1\sin(k_1t+\alpha_1),$$

$$q_1^{(2)} = A_2\sin(k_2t+\alpha_2),\ \ q_2^{(2)} = n_2A_2\sin(k_2t+\alpha_2).$$

Общее решение

$$q_1 = A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2),$$
$$q_2 = n_1 A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + n_2 A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2).$$

Вопрос 2.

Ответ: Уравнение трёх угловых скоростей.

**3. Уравнение трех угловых скоростей.** Одним из самых распространенных элементов стержневых механизмов является четырехзвенник, состоящий из трех шарнирно соединенных стержней на двух неподвижных опорах. Четвертым элементом механизма является основание, на котором он закреплен (рис. 66). Механизм приводится в движение вращеньем одного из звеньев. Найдем связь угловых скоростей звеньев. Составляем кинематический граф $A_1 \xrightarrow[\varphi_1]{1} A_2 \xrightarrow[\varphi_2]{2} A_3 \xrightarrow[\varphi_3]{3} A_4$.

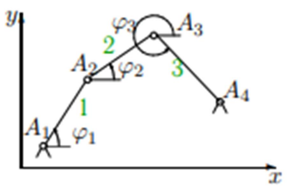


Рис. 66

Записываем уравнения графа:

$$v_{A_4x} = v_{A_1x} - l_1 \omega_{1z} \sin\varphi_1 - l_2 \omega_{2z} \sin\varphi_2 - l_3 \omega_{3z} \sin\varphi_3,$$
$$v_{A_4y} = v_{A_1y} + l_1 \omega_{1z} \cos\varphi_1 + l_2 \omega_{2z} \cos\varphi_2 + l_3 \omega_{3z} \cos\varphi_3.$$

Координатная форма записи этих уравнений дает уравнения трех угловых скоростей

$$\sum_{i=1}^{3} \omega_{m_{iz}} (x_{n_i} - x_{n_{i+1}}) = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{3} \omega_{m_{iz}} (y_{n_i} - y_{n_{i+1}}) = 0,$$

где $\omega_{m_{iz}}$ — угловая скорость $m_i$-го звена, $x_{n_i}, y_{n_i}$, $x_{n_{i+1}}, y_{n_{i+1}}$ — координаты его концов.

Номера шарниров $n_i$, $i = 1, ..., 4$, как и номера звеньев $m_i$, $i = 1, ..., 3$, не обязательно должны быть последовательными числами. Если угловая скорость одного из звеньев задана, то угловые скорости двух других легко найти из полученной системы уравнений. В некоторых задачах [5] заданы все три угловые скорости, а определяется конфигурация механизма — положение звеньев, соответствующее этим угловым скоростям. В таких задачах метод МЦС не применим, метод графов в тригонометрической форме неэффективен, а уравнения трех угловых скоростей позволяют просто решить задачу.

Интересен один простой и наглядный частный случай.

Пусть $y_1 = y_4$, $y_2 = y_3$. Это означает, что четырехзвенник принимает форму трапеции (рис. 67). Из второго уравнения (64) имеем теорему трапеции, утверждающую, что *угловые скорости боковых звеньев четырехзвенника, имеющего в данный момент форму трапеции, равны:* $\omega_{1z} = \omega_{3z}$.

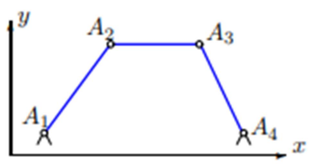


Рис. 67

Уравнения трех угловых ускорений четырехзвенника следуют непосредственно из формулы Ривальса и имеют вид

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{m_{iz}}(x_{n_i} - x_{n_{i+1}}) - \sum_{i=1}^{3} \omega_{m_{iz}}^2 (y_{n_i} - y_{n_{i+1}}) = 0,\\
&\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{m_{iz}}(y_{n_i} - y_{n_{i+1}}) + \sum_{i=1}^{3} \omega_{m_{iz}}^2 (x_{n_i} - x_{n_{i+1}}) = 0,
\end{aligned} \qquad (65)$$

где $\varepsilon_{m_{iz}}$ — угловое ускорение $m_i$-го звена. Если угловые скорости известны, то система уравнений (65) позволяет найти угловые ускорения двух звеньев по ускорению третьего, которое часто просто равно нулю, если ведущее звено вращается равномерно. При решении имеет смысл воспользоваться совпадением определителей систем (64) и (65).

Очевидно простое обобщение уравнений трех угловых скоростей и уравнений трех угловых ускорений на большее число звеньев. Для этого достаточно изменить предел суммирования с 3 на число звеньев.

Сравнивая методы, заметим, что аналитический метод, как универсальный, имеющий простую формализацию в виде графов и дающий результат в проекциях, безусловно наиболее предпочтителен при решении задач теоретической механики.

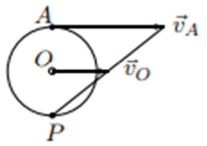
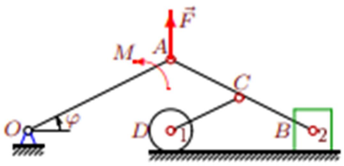


Рис. 68

Однако в некоторых очевидных случаях метод кинематических графов применять нецелесообразно. Например, при определении скорости точки $A$ цилиндра, катящегося по неподвижной поверхности, по заданной скорости центра $O$ (рис. 68) проще использовать понятие мгновенного центра скоростей (МЦС). Цилиндр катится без проскальзывания, поэтому точка $P$ касания плоскости неподвижна. Следовательно, учитывая линейное распределение скоростей, получаем $v_{Ox} = v_{Ax}/2$.

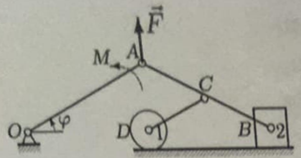
Задача D-30.18. Условие:

**Задача D-30.18.** *Окладников Григорий*




К стержню $OA$ шарнирного механизма приложен момент $M$, к шарниру $A$ – вертикальная сила $F$. Масса цилиндра $m_1$, бруска — $m_2$; $AO = AB = 2a$, $AC = CD = a$. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять $\varphi$.

го механизма приложен момент $M$, к шарниру $A$ – вертикальная сила $F$. Масса цилиндра $m_1$, бруска — $m_2$; $AO = AB = 2a$, $AC = CD = a$. За обобщенную координату принять $\varphi$.




Решение

Треугольники $\triangle ABO$ и $\triangle CDB$ равнобедренные, следовательно $\angle CDB = \angle CBD = \angle AOB$

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Составим граф: $O \xrightarrow[2a]{\varphi} A \xrightarrow[2a]{-\varphi} B$

$y: \quad 0 = \dot\varphi \cos(\varphi)2a + \Omega_{AB}\cos(\varphi)2a$

$\Omega_{AB} = -\dot\varphi$

$x: \quad V_{Bx} = -\sin(\varphi)\dot\varphi 2a - \sin(\varphi)\dot\varphi 2a = -4a\sin(\varphi)\dot\varphi$

Составим граф: $D \xrightarrow[a]{\varphi} C \xrightarrow[a]{-\varphi} B$

$y: \quad 0 = \Omega_{DC}\cos(\varphi)a - \dot\varphi\cos(\varphi)a$

$\Omega_{DC} = \dot\varphi$

$x: \quad V_{Bx} = V_{Dx} - \dot\varphi\sin(\varphi)a - \dot\varphi\sin(\varphi)a$

$V_{Dx} = -2a\sin(\varphi)\dot\varphi$

Составим граф: $O \xrightarrow[2a]{\varphi} A$

$V_{Ay} = \dot\varphi 2a\cos(\varphi)$

Кинетическая энергия:

$T = 3/4 m_1 V_{Dx}^2 + 1/2 m_2 V_{Bx}^2$

$T = 3a^2\sin(\varphi)^2\dot\varphi^2 m_1 + 8a^2\dot\varphi^2 m_2\sin^2\varphi$

$T = (\dot\varphi^2/2)A\sin^2\varphi$

Обобщенная сила:

$Q = (M\Omega_{OA} + FV_{Ay})/\dot\varphi$

$Q = M + F\cos(\varphi)2a$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = Q \quad (*)$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = \dot\varphi\left(\cancel{8}A\cdot\sin^2\varphi\right); \quad \frac{\partial T}{\partial\varphi} = \frac{\dot\varphi^2}{2}\cdot\Big[A\cdot\overbrace{2\sin\varphi\cdot\cos\varphi}^{\sin 2\varphi}\Big]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}\right) = \ddot\varphi(\ldots) + \dot\varphi^2\cdot[\ldots]$$

Подставляем в $(*)$: $\ddot\varphi(\ldots) + \frac{\dot\varphi^2}{2}[\ldots] = Q$