

# Глава 5

## ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

### 5.1. Центр тяжести плоской фигуры

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** *Найти площадь и координаты центра тяжести плоской фигуры.*

#### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Разбиваем фигуру на простые отдельные части, положение центров тяжести которых известны.
2. Выбираем систему координат. Вычисляем площади и координаты  $x_i, y_i$  центров тяжести отдельных частей. Площади вырезанных частей берем со знаком минус.
3. Находим общую площадь фигуры по формуле  $A = \sum A_i$ .
4. Определяем координаты центра тяжести фигуры:

$$x_c = \frac{\sum A_i x_i}{A}, \quad y_c = \frac{\sum A_i y_i}{A}.$$

ПРИМЕР. Найти площадь и координаты центра тяжести плоской фигуры. Криволинейный участок контура является половиной окружности с центром на оси  $Ox$  (рис. 74). Размеры на рисунке даны в метрах.

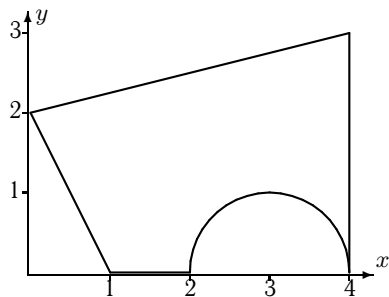


Рис. 74

## РЕШЕНИЕ

1. Разбиваем фигуру на простые отдельные части, положение центров тяжести которых известны.

Центр тяжести прямоугольника находится в его геометрическом центре, положение центра тяжести других фигур, встречающихся в задачах, изображено на рис. 75.

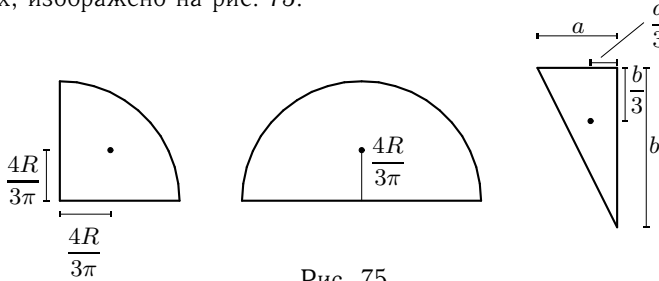


Рис. 75

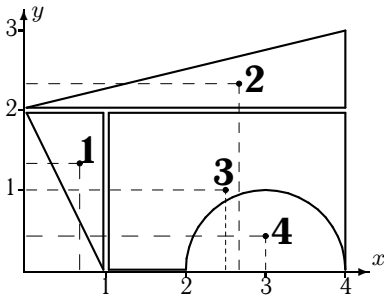


Рис. 76

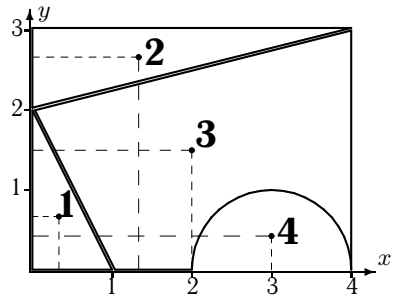


Рис. 77

Представляем фигуру в виде двух треугольников **1,2**, прямоугольника **3** и выреза **4** в виде полуокруга (рис. 76).

2. Вычисляем площадь (в м<sup>2</sup>) и координаты центра тяжести (в м) каждого элемента:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1, \quad x_1 = \frac{2}{3} \cdot 1 = 0.667, \quad y_1 = \frac{2}{3} \cdot 2 = 1.333,$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2, \quad x_2 = \frac{2}{3} \cdot 4 = 2.667, \quad y_2 = 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 2.333,$$

$$A_3 = 3 \cdot 2 = 6, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 2.5, \quad y_3 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$$

$$A_4 = -\frac{3.142 \cdot 1^2}{2} = -1.571, \quad x_4 = 3, \quad y_4 = \frac{4 \cdot 1}{3 \cdot \pi} = 0.424.$$

Площадь выреза берем со знаком минус.

3. Площадь фигуры  $A = \sum A_i = 1 + 2 + 6 - 1.571 = 7.429 \text{ м}^2$ .

4. Находим координаты центра тяжести всей фигуры:

$$x_c = \frac{\sum A_i x_i}{A} = \frac{0.667 \cdot 1 + 2.667 \cdot 2 + 2.5 \cdot 6 - 3 \cdot 1.571}{7.429} = 2.192 \text{ м},$$

$$y_c = \frac{\sum A_i y_i}{A} = \frac{1.333 \cdot 1 + 2.333 \cdot 2 + 1 \cdot 6 - 0.424 \cdot 1.571}{7.429} = 1.526 \text{ м}.$$

Вычисления удобно свести в таблицу:

$i$	$A_i$	$x_i$	$y_i$	$A_i x_i$	$A_i y_i$
1	1	0.667	1.333	0.667	1.333
2	2	2.667	2.333	5.333	4.667
3	6	2.5	1	15	6
4	-1.571	3	0.424	-4.712	-0.666
$\Sigma$	7.429			16.288	11.333

Сначала заполняем столбцы  $A_i, x_i, y_i$ , затем вычисляем статические моменты  $A_i x_i, A_i y_i$ . Внизу записываем суммы столбцов, необходимые для вычисления координат центра тяжести. Таким образом,

$$x_c = \frac{16.288}{7.429} = 2.192 \text{ м}, \quad y_c = \frac{11.333}{7.429} = 1.526 \text{ м}.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Большинство задач на определение центра тяжести допускает несколько способов разбиения фигуры. Это можно использовать для проверки решения. Второй вариант разбиения фигуры в данном примере состоит из прямоугольника **3** с размерами 4м×3м и вырезанных из него полукруга **4** и двух треугольников **1** и **2** (рис. 77).

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Решение задачи в системе Maple V методом контурного интегрирования приведено в § 15.2., с. 351.

**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.** Найти площадь и координаты центра тяжести плоской фигуры. Отметки на осях даны в метрах. Криволинейный участок контура является дугой половины или четверти окружности.